



HAL
open science

Structures de bifurcation dans des systèmes non linéaires à temps discret

Danièle Fournier-Prunaret

► **To cite this version:**

Danièle Fournier-Prunaret. Structures de bifurcation dans des systèmes non linéaires à temps discret. Techniques de l'ingénieur Automatique et ingénierie système, 2024, 10.51257/a-v1-s7186 . hal-04850527

HAL Id: hal-04850527

<https://hal.science/hal-04850527v1>

Submitted on 20 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Structures de bifurcations dans des systèmes non linéaires à temps discret

Bifurcation structures in discrete time nonlinear systems

par **Danièle FOURNIER-PRUNARET**

Professeure Emérite

INSA de Toulouse, Toulouse, France

Résumé

Nombre de systèmes en Ingénierie (Automatique, Electronique, Télécommunications, ...) sont intrinsèquement non linéaires. Une première approche consiste à les linéariser et cela permet d'obtenir des propriétés locales de ces systèmes. Néanmoins une approche globale est nécessaire afin de bien comprendre leur comportement et de pouvoir définir les meilleures plages de fonctionnement pour les paramètres intervenant dans ces systèmes en fonction de l'usage souhaité. Des variations de certains paramètres peuvent en effet conduire à des bifurcations qui sont susceptibles de modifier drastiquement l'évolution et la stabilité d'un système et de conduire à des phénomènes complexes comme, entre autres, le chaos, qu'il est impossible d'observer dans un système linéaire. Certains systèmes, en particulier à temps discret, présentent des structures de bifurcation caractéristiques en fonction du type de non linéarité qui intervient. Dans un but d'utilisation pratique, il est important de connaître et comprendre ces différentes structures.

L'objectif de cet article est d'introduire, à travers des exemples choisis, les structures de type « boîtes emboîtées » et « boîtes en file ». La structure « boîtes en file » est également connue sous l'appellation « addition de périodes et « incrémentation de périodes ». Les exemples proposés sont des systèmes assez simples modélisés par des récurrences de dimension un comprenant des non linéarités caractéristiques qui permettent d'illustrer ces différents types de structures de bifurcation.

Abstract

Many systems in Engineering (such as Automatic, Electronics, Telecommunications,...) are inherently non linear. A first approach consists of linearizing them, which allows obtaining local properties of these systems. However, a global approach is necessary to understand their behavior and to define the best operating range for the parameters involved in these systems based on their intended use. Variations in some parameters can lead to bifurcations that can drastically alter the evolution and stability of a system, leading to complex phenomena, such as chaos, among others, which is impossible in linear systems. Some systems, especially discrete-time ones, exhibit characteristic bifurcation structures depending on the type of nonlinearity involved. For practical applications, it is important to know and understand these different structures.

The aim of this article is to introduce, through selected examples, structures like embedded boxes (or box-within-a-box), boxes in file or period adding and period incrementing. The examples provided are fairly simple modelled with one-dimensional maps and include characteristic nonlinearities to illustrate these different types of bifurcation structures.

Mots-clés : système non linéaire, bifurcation, route vers le chaos, boîtes emboîtées, boîtes en files, addition de périodes, incrémentation de périodes

Keywords : nonlinear system, bifurcation, route to chaos, box-within-a-box or embedded boxes, boxes in file, period incrementing, period adding

Table des matières

1	Structures de bifurcation	3
1.1	Non linéarité quadratique et cubique : structure « boîtes emboîtées »	5
1.2	Structure « boîtes en files »	11
1.2.1	Généralités	11
1.2.2	Structure boîtes en file addition de périodes	11
1.2.3	Structure boîtes en file incrémentation de périodes	15
2	Exemples de systèmes à temps discret	16
2.1	Modulateur à Modulation par Impulsion et Codage DIFFérentiel	16
2.2	Un oscillateur modélisé par la transformation standard d'Arnold	19
2.3	Circuit électrique de type hybride	20
3	Conclusion	23

Introduction

Les systèmes utilisés ou conçus dans les domaines de l'Ingénierie sont pour la plupart intrinsèquement non linéaires. Certains modèles peuvent être approximés et simplifiés, ce qui conduit à une modélisation linéaire, néanmoins, dans de nombreux cas, les approximations qui conduisent à un système linéaire entraînent une perte d'information par rapport au système de départ. Il est donc important de conserver autant que possible les non-linéarités d'un système. Les systèmes linéaires peuvent être étudiés en utilisant les outils de l'algèbre linéaire, mais il n'existe pas d'outils génériques aussi puissants permettant d'analyser l'ensemble des systèmes non linéaires, tout au plus peut-on classifier ces systèmes, par exemple à partir du type de non linéarité dominante, et proposer une analyse du comportement du système. L'introduction des outils numériques au milieu du XXème siècle a permis une avancée dans ce type d'analyse. En général une combinaison entre des études théoriques et l'utilisation des outils numériques va permettre de mieux appréhender l'impact des non linéarités dans un système. Les études numériques ont permis de mettre en évidence des comportements complexes qu'il est impossible d'observer dans un système linéaire à variables réelles, comme par exemple les comportements qualifiés de chaotiques.

Les modèles de systèmes électroniques, mécaniques, automatiques ou utilisés dans les transmissions en télécommunications font souvent intervenir des paramètres que l'utilisateur peut modifier pour que le système agisse de façon adéquate. Par exemple, il peut être utile qu'un système reste sur un état stationnaire fixe ; dans d'autres cas, il peut suffire que le système reste borné (cas de la stabilité BIBO : bounded input bounded output, c'est-à-dire entrée bornée, sortie bornée) ; des comportements de type périodique peuvent également présenter un intérêt. Dans certains cas, l'utilisateur peut ne pas avoir la maîtrise complète des paramètres, ceux-ci peuvent varier dans des plages où les comportements sont drastiquement modifiés. Pour tous les systèmes, la connaissance des comportements possibles lorsque les paramètres évoluent est du plus grand intérêt. Une notion fondamentale est celle de bifurcation qui correspond à une modification qualitative du comportement d'un système lorsqu'un ou plusieurs paramètres sont modifiés. Le système peut passer d'un état stationnaire stable à un comportement périodique, avec une période qui peut changer très rapidement par variation d'un paramètre, voire à une instabilité complète. Des comportements appelés chaotiques qui semblent désordonnés peuvent également se produire.

Cet article s'intéresse plus particulièrement aux bifurcations qui interviennent dans des systèmes à temps discret modélisés par une transformation ponctuelle ou récurrence. Il est possible de mettre en évidence, non seulement des bifurcations spécifiques, mais aussi des structures globales de bifurcations qui sont associées à certains types de non linéarités. Ces structures globales permettent une compréhension d'ensemble d'un système et peuvent tout particulièrement expliquer quels mécanismes conduisent au chaos. On obtient alors ce qu'on appelle une « route vers le chaos ».

Dans la première partie, trois types de non linéarités seront étudiées à partir de modèles génériques : une non linéarité de type quadratique ou cubique, une non linéarité de type modulo ou des discontinuités de la fonction (ou de sa dérivée) qui intervient dans la modélisation. Pour chaque non linéarité sera mise en évidence une structure de bifurcation spécifique : structure « boîtes emboîtées » pour la première non linéarité, structure « boîtes en files » type « addition de périodes » ou « incrémentation de périodes » pour la seconde.

La seconde partie permettra de présenter des exemples de systèmes simples issus de plusieurs domaines de l'ingénierie qui présentent ces différents types de structures.

Ainsi, seront proposées l'étude d'un modulateur dans un système de transmission, celle d'un oscillateur et celle d'un circuit électrique hybride. Dans chacun de ces exemples, il est intéressant d'analyser les comportements du système afin, soit de choisir les paramètres qui vont correspondre à un comportement stable ou au contraire ceux qui vont conduire à un comportement chaotique et borné. En effet, le chaos correspond à un comportement qui semble aléatoire et il est possible d'utiliser des signaux chaotiques pour générer par exemple des nombres pseudo-aléatoires.

La conclusion donnera quelques perspectives pour des études plus complexes.

1 Structures de bifurcation

L'objectif de cette première partie est de présenter des outils théoriques permettant l'étude de systèmes non linéaires à temps discret et état continu.

Nous nous intéresserons à des systèmes dont la modélisation se met sous la forme :

$$(1) x_{n+1} = F(x_n, \lambda)$$

où x_n et λ sont réels, n entier naturel représente le temps discrétisé, x_n est l'état du système au temps discrétisé n et λ un paramètre du système qui varie dans \mathbb{R} ou un intervalle de \mathbb{R} . La fonction F , à valeurs réelles, est suffisamment régulière, au moins de classe C^p par morceaux, $p \geq 1$, sur \mathbb{R} ou un intervalle de \mathbb{R} . Dans ce type de modèle, on cherche à déterminer la limite de x_n lorsque le temps n tend vers l'infini pour une condition initiale x_0 choisie et on s'intéresse également à l'ensemble des conditions initiales qui vont converger vers le même ensemble limite. Déterminer l'ensemble des limites possibles de (1) permet de connaître le comportement du système.

Le modèle (1) peut correspondre à une modélisation directe ou bien à une discrétisation en temps d'un système à temps continu. Dans les deux cas, ces modélisations apparemment très simples permettent de mettre en évidence des phénomènes complexes typiques des systèmes non linéaires.

Nous allons dans un premier temps introduire des définitions et diverses notions qui seront utiles avant d'aborder l'étude des deux structures de bifurcation différentes obtenues à partir d'exemples génériques.

L'étude des bifurcations est liée aux notions d'orbite périodique, d'attracteur (ensemble limite) et de chaos. Voici les définitions correspondantes :

Définition 1 : On considère une valeur du paramètre λ fixée. Un ensemble de k points

$(X_j^*)_{j=1,\dots,k}$ est une **orbite périodique (ou cycle) d'ordre k** de F si et seulement si :

- $X_j^* = F^k(X_j^*), \forall j = 1 \dots k$ et $X_j^* \neq F^h(X_j^*), \forall h = 1 \dots k-1, \forall j = 1 \dots k$
- $X_{j+1}^* = F(X_j^*), \forall j = 1 \dots k-1$ et $X_1^* = F(X_k^*)$

Remarque : Lorsque $k = 1$, l'orbite périodique est un point fixe.

Définition 2 : Un sous-ensemble A de \mathbb{R} est invariant par F si $F(A)=A$.

Définition 3 : Un ensemble fermé invariant A est **attractif** s'il existe un voisinage U de A tel que $F(U) \subset U$ et $F^n(x) \rightarrow A$, quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $x \in U$, c'est-à-dire qu'on peut trouver un ensemble de conditions initiales dont la limite par F est l'ensemble des points de A .

Définition 4 : Le **bassin** d'attraction $B(A)$ d'un ensemble attractif est l'ensemble ouvert constitué de tous les points x tels que $F^n(x) \rightarrow A$, quand $n \rightarrow \infty$. $B(A)$ correspond à l'ensemble des conditions initiales dont les suites itérées par F vont converger vers A .

Propriété 1 : Une orbite périodique d'ordre k est un ensemble **attractif** si et seulement si le produit des dérivées de F en chacun des points de l'orbite périodique est strictement inférieur à 1 en module.

Remarques : Lorsque le produit des dérivées de F en chacun des points de l'orbite périodique est strictement supérieur à 1 en module, l'orbite est dite **répulsive**. Lorsque ce produit est égal à 1, une bifurcation se produit et l'étude de la stabilité nécessite de considérer les dérivées d'ordre supérieur, si elles existent.

Le produit des dérivées de F en chacun des points de l'orbite périodique sera par la suite appelé **multiplicateur**.

Il est évidemment possible de définir des ensembles attractifs autres que les orbites périodiques qui sont formés d'un ensemble fini de points. Dans les modèles que nous considérons, un ensemble attractif peut être formé d'une infinité de points, il peut aussi être un intervalle entier. Nous allons maintenant évoquer la notion de chaos. Devaney [1] a proposé la définition suivante :

Définition 4 : F est chaotique sur un intervalle I de \mathbb{R} si et seulement si :

- F vérifie la propriété de sensibilité aux conditions initiales
- F est topologiquement transitive sur I , c'est-à-dire qu'on peut faire passer un point d'une suite itérée par F près de n'importe quel point de I
- Les orbites périodiques de F sont denses dans I

La propriété de sensibilité aux conditions initiales correspond au fait que lorsqu'on calcule deux suites itérées par F issues de deux conditions initiales très proches l'une de l'autre, les itérés successifs de chaque suite vont drastiquement s'éloigner l'un de l'autre, en général de façon exponentielle. Au bout d'un temps d'itération suffisamment grand, on ne saura plus que les conditions initiales étaient très proches l'une de l'autre. Dire que F est chaotique sur I revient à dire qu'il existe un ensemble chaotique dans I . Cet ensemble n'est pas forcément attractif. Si c'est le cas, on parle **d'attracteur chaotique** ; sinon, l'ensemble chaotique peut aussi jouer le rôle d'un **transitoire chaotique** ou d'un **répulseur chaotique** et intervenir dans la définition de la frontière des bassins entre deux ensembles attractifs ou de la frontière entre le bassin d'un attracteur à distance finie et le bassin de l'ensemble attractif à l'infini (l'existence d'un ensemble attractif à l'infini correspond à la **divergence** et génère une instabilité du système).

Une notion qui sera utile est celle de point critique de F :

Définition 5 : Un **point critique** de F est un point conséquent d'un extremum par F . Un tel point sera noté C . Un point correspondant à un extremum sera noté C_{-1} . Les points conséquents de C par F sont les points C_r , points critiques de rang r , $r=1,2,\dots$ ($C_r = F^r(C)$).

Nous avons le résultat suivant :

Propriété 2 [2]: Si F est une fonction polynômiale de degré $k+1$ possédant k extrema, alors, pour chaque valeur de λ , F possède au plus k orbites périodiques attractives à distance finie.

Remarque : si F présente une non linéarité quadratique (avec au plus un extremum), il y aura au plus une orbite périodique attractive à distance finie pour une valeur fixée de λ ; si F présente une non linéarité cubique (avec au plus deux extrema), il y aura au plus deux orbites périodiques attractives à distance finie.

1.1 Non linéarité quadratique et cubique : structure « boîtes emboîtées »

L'objectif de ce paragraphe est d'introduire et d'analyser la structure de bifurcation « boîtes emboîtées » qui peut être observée dans certains modèles de type (1), sous l'effet de la variation du paramètre λ , lorsque les non linéarités sont de type polynômial ou lorsque la fonction est lisse et présente un ou deux extrema. Ce type de structure sera notée BE par la suite. Les résultats sont principalement issus des références [3][4][5][6][7]. Certains de ces résultats étaient rappelés dans [AF1405].

Avant d'expliquer en détail la structure BE, nous rappelons les différents types de bifurcations qui peuvent se produire :

- Pour une valeur du paramètre notée $\lambda_{(k)_0}$, deux cycles d'ordre k apparaissent avec leur multiplicateur égal à 1, un devient attractif pour $\lambda > \lambda_{(k)_0}$ et l'autre devient répulsif. Cette bifurcation sera notée B1.
- Pour une valeur du paramètre notée $\lambda_{k,2^i}$, un cycle d'ordre k change de stabilité, son multiplicateur étant égal à -1, en donnant naissance à un cycle d'ordre $2k$, qui prend la stabilité du cycle d'ordre k . Cette bifurcation est appelée doublement de période et sera notée B2.
- Pour une valeur du paramètre notée $\tilde{\lambda}_{(k)_0}$, un cycle d'ordre k change de stabilité avec son multiplicateur égal à 1 et donne naissance à deux cycles d'ordre k qui prennent la même stabilité que le premier cycle d'ordre k . Cette bifurcation sera notée B3. Cf. [13] pour une étude plus détaillée.

La fonction générique considérée ici est définie par :

$$(2) \quad x_{n+1} = f(x_n, \lambda) = x_n^2 - \lambda$$

x_n est la variable d'état réelle du système au temps discrétisé et λ un paramètre réel. Cette transformation est appelée transformation de Myrberg [5], on connaît également une variante de ce modèle définie par la fonction logistique [8] :

$$(3) \quad x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

Il est possible de passer de (2) à (3) par un changement de variables biunivoque. La fonction logistique est définie de $[0,1]$ dans $[0,1]$ et le paramètre μ varie également dans l'intervalle $[0,1]$. (3) a été utilisée comme modèle en épidémiologie et dans l'étude de croissance de populations. Le temps n représente alors une forme de saisonnalité dans l'évolution de la variable d'état.

Les deux modèles définis par un polynôme de degré deux présentent la même structure de bifurcations « boîtes emboîtées de type quadratique » notée BEQ mais pour des valeurs différentes du paramètre. Cette dénomination de « boîtes emboîtées

a été introduite par Mira en 1975 [3][6]. L'ensemble de toutes les bifurcations possibles pour (2) se produit lorsque λ appartient à l'intervalle $[-1/4, 2]$. Les bifurcations conduisant à l'apparition d'un cycle périodique sont toutes du type B1 ou B2. Cet intervalle est noté Ω_1 et correspond à la première « boîte » de la structure BEQ, celle qui contient toutes les autres boîtes.

- $\lambda_{(1)_0} = -\frac{1}{4}$ correspond à l'apparition de deux points fixes, l'un répulsif q_1 , l'autre attractif q_2 par une bifurcation B1 (cf. Figure 1)
- $\lambda < \lambda_{(1)_0}$, aucun cycle de quelque ordre que ce soit n'existe, aucun attracteur n'existe à distance finie et aucune bifurcation ne se produit ; chaque condition initiale choisie sur l'axe réel va donner lieu à une suite itérée qui va converger vers le point à l'infini (divergence) (Figure 2).
- $\lambda \in \Omega_1$, pour chaque valeur de λ , un ensemble attractif (cycle d'ordre k ou segment chaotique invariant, qui peut être éventuellement cyclique) existe sur l'intervalle CC_1 ; certaines valeurs de λ correspondent à des bifurcations de type B1 ou B2.
- $\lambda_1^* = 2$ correspond à la confusion du point fixe q_1 avec le point critique de rang un C_1 (Figure 3). Le segment CC_1 est un **segment chaotique invariant**, un attracteur chaotique existe. Tous les cycles de tous les ordres existent et sont répulsifs ; l'ensemble des points de ces cycles est situé sur le segment CC_1 et est dense dans CC_1 .
- $\lambda > \lambda_1^*$, plus aucune bifurcation n'a lieu. Une infinité de cycles répulsifs de tous ordres existe. Chaque condition initiale choisie sur l'axe réel va donner lieu à une suite itérée qui va converger vers le point à l'infini (divergence) (Figure 4). Suivant le choix de la condition initiale, on peut observer ou non un transitoire chaotique dans la succession des itérés ; ce phénomène correspond à l'existence d'un « répulseur chaotique », c'est-à-dire l'ensemble infini de toutes les orbites périodiques de tous ordre qui vont repousser les itérés successifs avant la divergence vers l'infini.

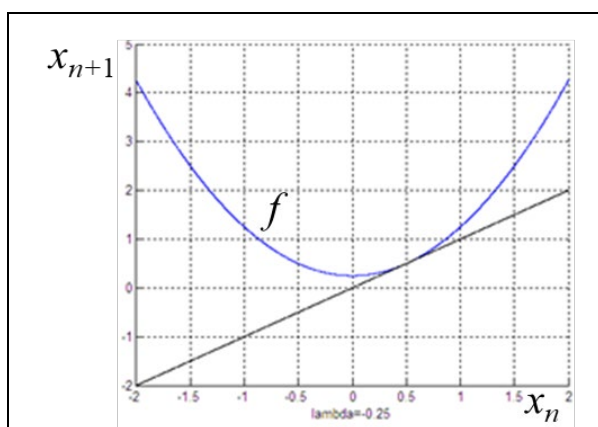


Figure 1: Deux points fixes q_1 et q_2 apparaissent par une bifurcation (B1).

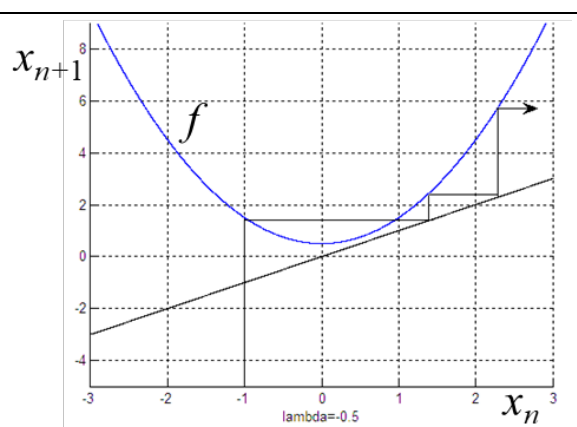


Figure 2 : Aucun attracteur à distance finie, les suites itérées par f divergent

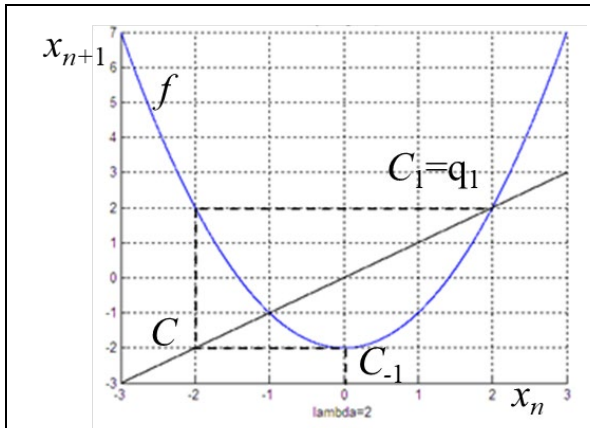


Figure 3 : $\lambda = \lambda_1^*$, le point critique C_1 est confondu avec le point fixe répulsif q_1 ; le segment CC_1 est un segment chaotique invariant.

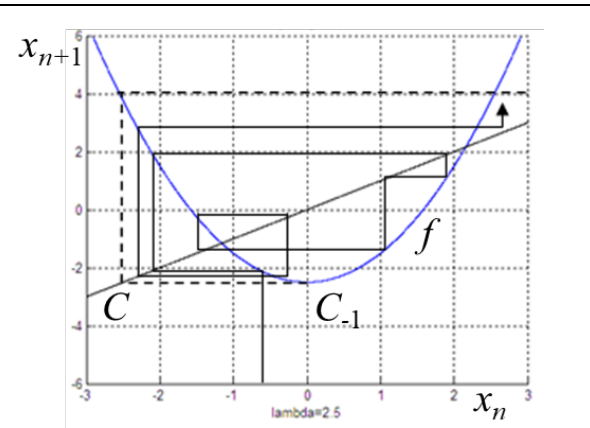


Figure 4 : $\lambda > \lambda_1^*$, on observe des suites itérées divergentes après un éventuel transitoire chaotique.

Une simulation numérique permet d'obtenir le diagramme suivant (Figure 5) : Ce diagramme, tracé dans le plan (λ, x) , permet de visualiser l'attracteur obtenu pour chaque valeur de λ entre $\lambda = 0.25 > \lambda_{(1)0} = -0.25$ et $\lambda_1^* = 2$. En abscisse, on trouve la valeur du paramètre λ et en ordonnée, les valeurs de l'ensemble limite obtenu pour chaque valeur de λ . Nous pouvons ainsi observer l'existence des orbites périodiques de différents ordres, les phénomènes de doublement de période et les comportements qui semblent désordonnés et correspondent à du chaos sur un ou plusieurs intervalles de la variable x pour une valeur de λ fixée. On peut noter que cette structure est de type fractal, car on retrouve la même structure en zoomant de façon adéquate sur certaines parties de la figure initiale.

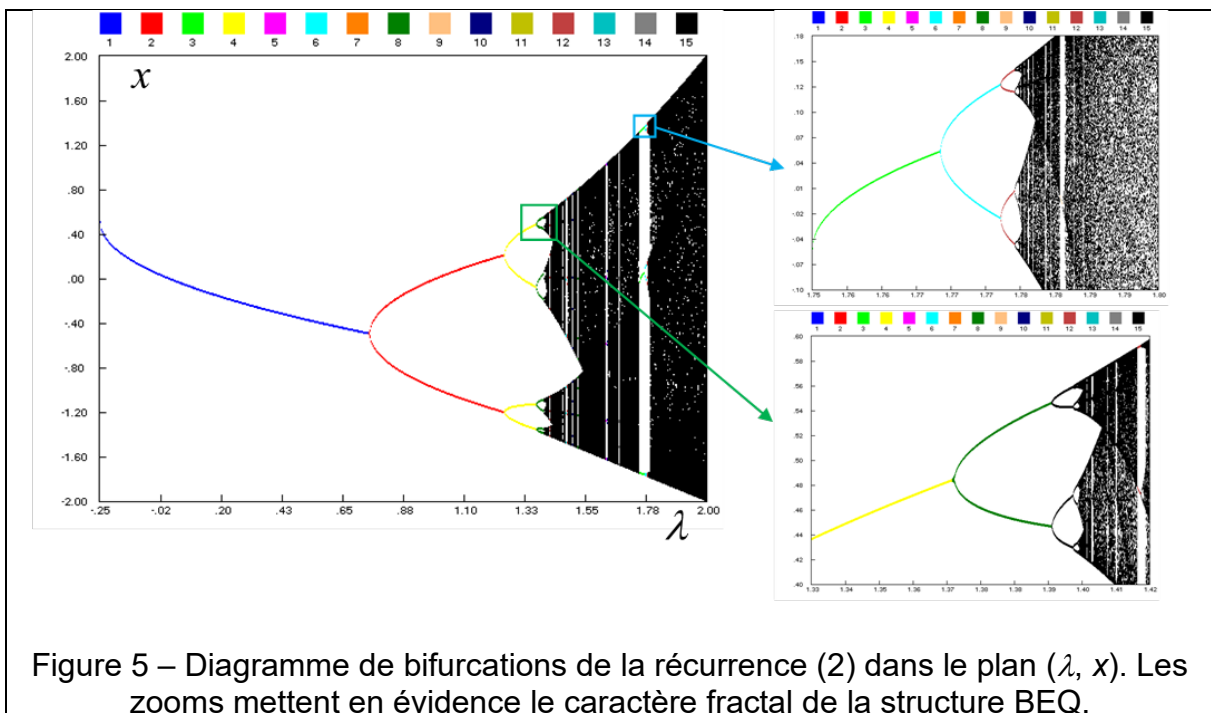


Figure 5 – Diagramme de bifurcations de la récurrence (2) dans le plan (λ, x) . Les zooms mettent en évidence le caractère fractal de la structure BEQ.

Nous allons maintenant détailler plus précisément les bifurcations qui se produisent

lorsque $\lambda \in \Omega_1$.

- **Cascade de doublements de période** : nous observons une succession de bifurcations de type B2 à partir du point fixe q_2 pour des valeurs de λ notées λ_{2^i} , $i=1, 2, \dots$ (la Figure 6 illustre la bifurcation (B2) du point fixe q_2). Cette succession de bifurcations est appelée cascade de doublements de période et correspond à l'apparition des cycles d'ordre 2^i , $i = 1, 2, \dots$. Pour $\lambda \in]\lambda_{2^i}, \lambda_{2^{i+1}}[$, le cycle d'ordre 2^i est le seul ensemble attractif à distance finie ; pour $\lambda > \lambda_{2^i}$, le cycle d'ordre 2^i existe et est répulsif.
- **Valeur d'accumulation** : La suite des (λ_{2^i}) possède une valeur d'accumulation notée $\lambda_{(1)_s} = 1.401155\dots$. Cette valeur appartient à la boîte Ω_1 et est la valeur limite de λ pour laquelle le chaos existe. A partir de cette valeur, il existe en effet une infinité de cycles d'ordre 2^i qui sont tous positionnés dans l'intervalle CC_1 . Pour $\lambda = \lambda_{(1)_s}$, un attracteur chaotique de type Cantor existe dans l'intervalle CC_1 . C'est à partir de cette valeur que la transformation de Myrberg devient chaotique au sens de Devaney.
- **Constante de Feigenbaum** : Feigenbaum [9] a introduit la constante universelle suivante : $\delta = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_{2^i} - \lambda_{2^{i-1}}}{\lambda_{2^{i+1}} - \lambda_{2^i}}$ qui est égale à 4.669201609... dans le cas d'une transformation présentant un seul extremum et dont la dérivée schwarzienne existe et est négative. Rappelons que la dérivée schwarzienne est définie comme suit :

Définition 6 : Si f est $C^3(I)$, on appelle **dérivée schwarzienne** de f la fonction DS définie sur I par :

$$(4) \quad DS(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''}{f'} \right]^2$$

Remarque : Les fonctions considérées dans ce paragraphe possèdent une dérivée schwarzienne négative sur I . Cette propriété traduit une certaine régularité de la fonction.

- **Intervalles ω_1 et Δ_1** : L'intervalle $]\lambda_{(1)_0}, \lambda_{(1)_s}[$ est noté ω_1 et $]\lambda_{(1)_s}, \lambda_1^*[$ est noté Δ_1 ; ω_1 ne contient aucun cycle d'ordre impair, uniquement des cycles d'ordre une puissance de 2 ; les cycles d'ordre impair vont apparaître dans l'intervalle Δ_1 , au-delà de la valeur $\lambda_{2^i}^*$, définie ci-dessous.
- **Segment chaotique cyclique** : Pour $\lambda = \lambda_{2^i}^*$, valeur qui correspond à la confusion du point critique C_{2^i} avec un point du cycle d'ordre 2^{i-1} qui se déstabilise par une bifurcation B2 pour $\lambda = \lambda_{2^i}$, on observe un segment chaotique cyclique invariant d'ordre 2^{i-1} (cf. Figure 7 pour $\lambda < \lambda_{2^i}^*$). Les bifurcations de ce type se produisent dans l'ordre inverse des bifurcations doublements de période ($\lambda_{2^{i+1}}^* < \lambda_{2^i}^*$) et $\lambda_{(1)_s}$ est également un point d'accumulation des $\lambda_{2^i}^*$, lorsque $i \rightarrow +\infty$.
- **Etude de la boîte $\Omega_3 =]\lambda_{(3)_0}, \lambda_3^*[$** : L'étude de f^3 nous permet de mettre en évidence les mêmes phénomènes pour f^3 que ceux observés pour f . Il est ainsi possible de définir un intervalle (boîte) $\Omega_3 =]\lambda_{(3)_0}, \lambda_3^*[$ contenu dans l'intervalle

Ω_1 et qui possède la même structure et les mêmes propriétés que Ω_1 , mais pour la transformation f^3 au lieu de f . $\lambda_{(3)_0}$ correspond à la naissance de deux cycles d'ordre 3, un attractif, l'autre répulsif par une bifurcation B1. λ_3^* correspond à la confusion des points critiques C_1, C_3 et C_2 avec les trois points du cycle d'ordre 3 né répulsif pour $\lambda = \lambda_{(3)_0}$. Ω_3 se décompose de la même façon que Ω_1 en deux intervalles ω_3 et Δ_3 ; ω_3 contient toutes les valeurs de bifurcation doublement de période obtenues pour f^3 , c'est-à-dire correspondant à l'apparition des cycles d'ordre $3 \cdot 2^i$, $i=1,2,\dots$; Δ_3 contient les valeurs de bifurcations qui vont faire apparaître des cycles d'ordre $3 \cdot m$, $m=3,4,5,\dots$. La valeur $\lambda_{(3)_s}$, valeur d'accumulation des doublements de période pour f^3 , sépare les deux intervalles ω_3 et Δ_3 . Les valeurs $\lambda_{(3)_s}$ et λ_3^* présentent les mêmes propriétés pour f^3 que $\lambda_{(1)_s}$ et λ_1^* pour f ; en particulier, pour λ_3^* , un ensemble chaotique invariant cyclique d'ordre 3 existe à l'intérieur de l'intervalle CC_1 .

- **Boîtes** $\Omega_k^j = [\lambda_{(k)_0}^j, \lambda_k^{*j}]$: Une étude analogue des transformations f^k permet de mettre en évidence l'existence de boîtes $\Omega_k^j = [\lambda_{(k)_0}^j, \lambda_k^{*j}]$ ayant toutes la même structure que Ω_1 et Ω_3 , cascades de doublement de période, valeur d'accumulation $\lambda_{(k)_s}^j$, intervalles ω_k^j et Δ_k^j , etc... Ceci justifie le caractère fractal de la structure de bifurcations BEQ ainsi que l'appellation « boîtes emboîtées ». L'apparition d'une boîte Ω_k^j est liée à l'existence de k extrema de f^k qui vont traverser la bissectrice $x_{n+1} = x_n$ dans le plan (x_n, x_{n+1}) (bifurcation B1). Plus la valeur de k augmente, plus le nombre d'extrema de f^k augmente, il sera donc possible d'obtenir plusieurs bifurcations de type B1 pour f^k , ce qui entraîne l'existence de plusieurs boîtes associées à f^k , l'indice j correspond à une numérotation de ces boîtes afin de les distinguer. Par exemple, il existe 3 boîtes Ω_5^j , $j=1,2,3$. Les trois boîtes se distinguent par la façon dont vont s'échanger entre eux les cinq points de l'orbite périodique [6]. Il est possible de déterminer numériquement les valeurs des frontières de chaque boîte, pour un ordre k fixé, en utilisant une méthode de type Newton-Raphson appliquée à l'équation analytique traduisant la bifurcation concernée.
- **« Period 3 implies chaos »** : « La période 3 implique le chaos ». Il faut noter que la boîte Ω_3 est la dernière des boîtes $\Omega_k^j = [\lambda_{(k)_0}^j, \lambda_k^{*j}]$ à apparaître dans l'intervalle Ω_1 , ce résultat est cohérent avec l'énoncé de Li et Yorke [10] spécifiant que l'existence d'une orbite périodique d'ordre 3 entraîne l'existence de chaos. Rappelons qu'il n'existe qu'une seule boîte correspondant à l'existence d'un attracteur d'ordre 3 dans le cas de la transformation (2) de Myrberg.
- **Propriété 3** [11] : Soit f une fonction continue sur I , alors, l'ordre d'apparition des orbites périodiques de f vérifie l'ordre de Sharkovskii, qui est le suivant dans \mathbb{N} : 3, 5, 7, 9, ..., 2.3, 2.5, 2.7, ..., $2^2 \cdot 3$, $2^2 \cdot 5$, ..., 2^4 , 2^3 , 2^2 , 2, 1. On peut noter que les boîtes emboîtées apparaissent en respectant l'ordre inverse de Sharkovskii, c'est-à-dire en commençant par le doublement de période et en se terminant par la valeur 3.
- **Chaos** : Comme nous l'avons déjà signalé, le chaos existe à partir de la valeur $\lambda_{(1)_s}$, première valeur du paramètre pour laquelle une infinité de cycles existe. Par contre, cet ensemble chaotique n'est un attracteur chaotique que pour les

valeurs $\lambda_{(k)s}^j$ et λ_k^* , $k = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$, qui forment un ensemble de mesure nulle dans l'intervalle Ω_1 .

- La Figure 8 présente un schéma qualitatif de la structure BEQ.

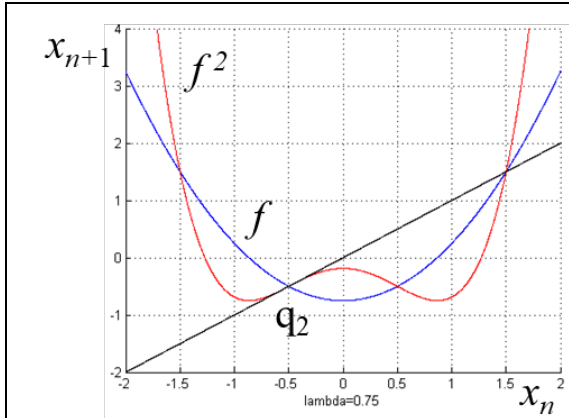


Figure 6 : Le point fixe q_2 attractif devient répulsif en donnant naissance à un cycle d'ordre 2 attractif par une bifurcation (B2).

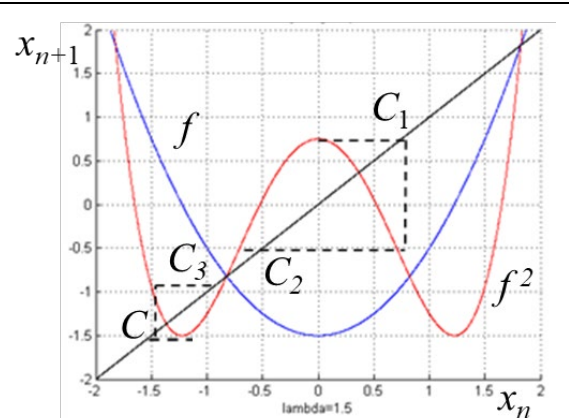


Figure 7 : $\lambda < \lambda_{2,1}^*$, les deux segments CC_3 et C_2C_1 forment un segment absorbant cyclique d'ordre 2. Ce segment contient soit un segment chaotique cyclique d'ordre 2^i , soit une orbite périodique d'ordre 2^i .

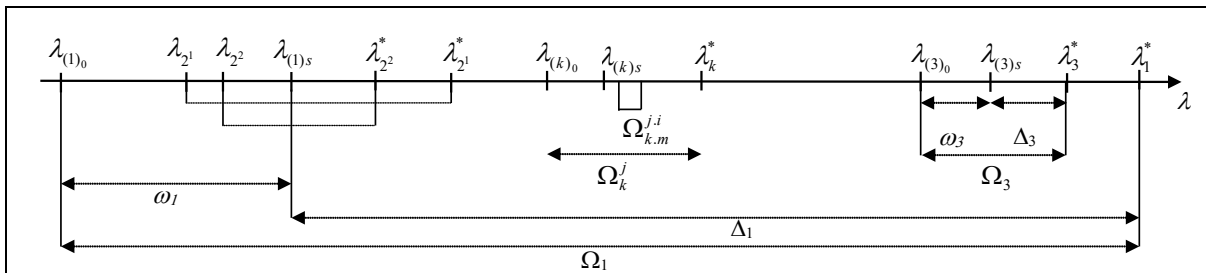


Figure 8 : Schéma qualitatif de la structure BEQ.

De la même manière, on peut définir la structure boîtes emboîtées de type cubique en considérant un modèle défini par un polynôme de degré trois [4][7]. La structure de bifurcations cubique, notée BEC, est analogue à la structure BEQ, mais avec 2 différences notables :

- Puisqu'il existe deux extrema distincts, il existe deux points critiques, que nous noterons C' et C ; en raison de la propriété 3, il est donc possible d'obtenir au plus deux orbites périodiques attractives qui coexistent.
- Lorsque le modèle est de type cubique, il est possible d'observer la bifurcation B3, le paramètre correspondant à cette bifurcation sera noté $\tilde{\lambda}_{(2k)_0}$; cette propriété conduit à l'existence de boîtes supplémentaires notées $\tilde{\Omega}_k$.

En résumé, chaque extremum de f peut donner naissance à un attracteur à distance finie, deux boîtes de type Ω_1 sont obtenues (une par extremum) sur l'axe du paramètre réel λ ; la bifurcation B3 est lié à un mélange qui s'effectue entre les suites itérées à partir des deux extrema, on obtient alors une boîte notée $\tilde{\Omega}_1$, qui caractérise la structure BEC.

Notons que d'autres travaux ont permis d'introduire la théorie de la renormalisation

[12] qui correspond à la partie de la cascade de doublement de périodes de la structure BE.

1.2 Structure « boîtes en files »

Nous allons maintenant nous intéresser à une autre structure de bifurcations, la structure « boîtes en files » (notée BF) [4][15][16] qui se trouve également dans la littérature sous la dénomination « addition de périodes » ou « incrémentation de périodes » [14]. Cette structure apparaît dans les transformations (1) linéaires par morceaux ou suffisamment régulières par morceaux et présentant éventuellement un nombre fini de points de discontinuité pour la fonction ou pour sa dérivée.

L'intérêt pour l'étude de tels systèmes s'est particulièrement accru ces dernières années, on trouve en effet des modèles sous cette forme aussi bien en électronique de puissance qu'en mécanique ou en automatique avec l'étude des modes glissants [17][18][19][20].

La principale différence entre la structure BE et la structure BF est que cette dernière correspond à l'existence d'une juxtaposition d'intervalles où vont exister un (ou deux) cycles attractifs périodiques d'ordre k . Dans la structure BF, il n'y a pas d'emboitements successifs. Il s'agit néanmoins aussi d'une structure fractale.

Avant d'explicitier la structure « boîtes en files », nous allons rappeler ce qu'est la bifurcation appelée « collision de frontière » :

- k branches de F^k entrent en contact avec une valeur de discontinuité de la fonction ou de sa dérivée et une ou deux orbites périodiques d'ordre k disparaissent ou apparaissent après ce contact lorsqu'un paramètre varie. Cette bifurcation sera notée B4.

1.2.1 Généralités

On s'intéresse aux modèles définis par la forme suivante :

$$(5) \quad x_{n+1} = F(x_n, \Lambda_1, \Lambda_2) = \begin{cases} T_1(x_n, \Lambda_1) = \mu_1 + f_1(x_n, \lambda_1) & \text{si } x < 0 \\ T_2(x_n, \Lambda_2) = \mu_2 + f_2(x_n, \lambda_2) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

où x_n est la variable d'état au temps discrétisé n , $\Lambda_i = (\mu_i, \lambda_i)$, $i=1,2$ un vecteur paramètre à valeurs réelles, f_1 et f_2 sont des fonctions suffisamment régulières vérifiant :

- $f_1(0, \lambda_1) = f_2(0, \lambda_2) = 0$
- $0 < f_1'(x, \lambda_1) < 1$, $x < 0$
- $0 < |f_2'(x, \lambda_2)| < 1$, $x > 0$

Notons que $x=0$ constitue un point de discontinuité pour F si $\mu_1 \neq \mu_2$ et pour la dérivée de F sinon. On observera donc une bifurcation B4 dès qu'une branche de F ou F^k rentrera en contact avec $x_{n+1} = x_n = 0$.

Les conditions (ii) et (iii) impliquent qu'existent seulement des orbites périodiques attractives dans le système, puisque la stabilité est donnée par le produit des dérivées en chaque point de l'orbite. Si (ii) et (iii) ne sont pas vérifiées, on pourra obtenir des orbites répulsives (voire attractives dans certains cas) et donc un système qui peut être totalement instable. On ne s'intéresse pas à ce cas dans cet article.

Nous allons maintenant décrire la structure de bifurcations de type boîtes en file en supposant qu'on considère la variation d'un seul paramètre judicieusement choisi et en distinguant deux cas dans les paragraphes suivants.

1.2.2 Structure boîtes en file addition de périodes

Considérons le cas où la condition suivante est vérifiée :

$$(6) \quad 0 < f_2'(x, \lambda_2) < 1, \quad x > 0$$

Avec cette hypothèse, la structure de bifurcations est donnée par les éléments suivants :

- Il existe des intervalles (boîtes) du paramètre où existe une unique orbite attractive d'ordre k , il n'existe pas d'orbite périodique répulsive
- Les boîtes sont juxtaposées et ne se recouvrent pas
- Les frontières des boîtes sont définies par une bifurcation B4 que subit l'orbite périodique attractive d'ordre k (apparition d'un côté, disparition de l'autre).
- Chaque orbite d'ordre k est définie par la façon dont s'échangent ses k points par T_1 et T_2 . Il est possible de définir des degrés de complexité de plus en plus élevés en fonction du nombre de fois où on passe d'un côté à l'autre de l'origine. Chaque boîte sera ainsi associée à un degré de complexité fixé défini comme suit.

Définition 7 :

On définit les degrés de complexité des boîtes en files associées à (5) de la façon suivante :

- Les orbites d'ordre k de degré de complexité un sont les points fixes de $T_1^{k-1}T_2$ ou de $T_2^{k-1}T_1$
- Les orbites d'ordre k de degré de complexité deux sont les points fixes de $(T_2^{p+1}T_1)^m(T_2^pT_1)$ ou de $(T_2^pT_1)^m(T_2^{p+1}T_1)$ ou de $(T_1^pT_2)^m(T_1^{p+1}T_2)$ ou de $(T_1^{p+1}T_2)^m(T_1^pT_2)$ avec $k=(p+2)m+p+1$
- Les orbites d'ordre k de degré de complexité trois sont les points fixes de $[(T_2^{p+1}T_1)^{m+1}(T_2^pT_1)]^n[(T_2^{p+1}T_1)^m(T_2^pT_1)]$, etc...

Dans le cas où f_1 et f_2 sont linéaires, Leonov [21] a mis en évidence que les frontières des boîtes de complexité de degré un sont des valeurs d'accumulation pour des suites de boîtes de degré de complexité deux et ainsi de suite pour les degrés supérieurs. De nombreux travaux (voir par exemple [14]) ont contribué à l'étude de la structure BF par le biais de la dynamique symbolique en utilisant les notations suivantes : les points d'une orbite périodique sont représentés par le symbole \mathcal{L} (pour left, à gauche de l'origine) si son abscisse est négative et par le symbole \mathcal{R} (pour right, à droite de l'origine). Une orbite périodique dans une boîte de degré de complexité de degré un sera ainsi représentée par $\mathcal{L}^{k-1}\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}^{k-1}\mathcal{L}$. Lorsque le point est situé à gauche, on lui applique T_1 pour obtenir le point suivant et lorsque le point est situé à droite, on lui applique T_2 .

D'autre part, il est possible d'associer la structure BF aux suites de Farey [14].

Rappelons la définition d'une suite de Farey :

Définition 8 :

Une suite de Farey d'ordre n , n entier naturel strictement positif, F_n est une suite croissante de nombres rationnels p/q appartenant à l'intervalle $[0,1]$, commençant par $0/1$, finissant par $1/1$, telle que p et q soient premiers entre eux et $q \leq n$.

Par exemple, la suite de Farey d'ordre 5 est la suivante :

$$F_5 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right)$$

Les suites de Farey vérifient les propriétés suivantes :

- p/q et r/s sont consécutifs dans F_n , avec $n=\max(q,s)$ si et seulement si $rq-ps=1$

- on a la relation suivante :

$$(7) \frac{p}{q} < \frac{p+q}{r+s} < \frac{r}{s}$$

p/q et r/s ne sont ainsi plus consécutifs à l'ordre $r+s$, mais p/q et $(p+q)/(r+s)$ le sont ainsi que $(p+q)/(r+s)$ et r/s .

Chaque élément d'une suite de Farey p/q peut être associé à une boîte contenant une orbite périodique d'ordre q et p indique le nombre de fois où le symbole \mathcal{R} apparaît dans la séquence symbolique qui lui est associée ; p indique également le nombre de fois où T_2 apparaît dans le degré de complexité.

- Dans l'espace des paramètres, lorsqu'on retire l'ensemble des boîtes correspondant à tous les degrés de complexité, il reste un ensemble E , non vide, non dense, qui a la structure d'un ensemble de Cantor. Pour ces valeurs de paramètres, un segment absorbant peut exister et éventuellement un comportement chaotique.

A titre d'exemple, considérons la transformation suivante :

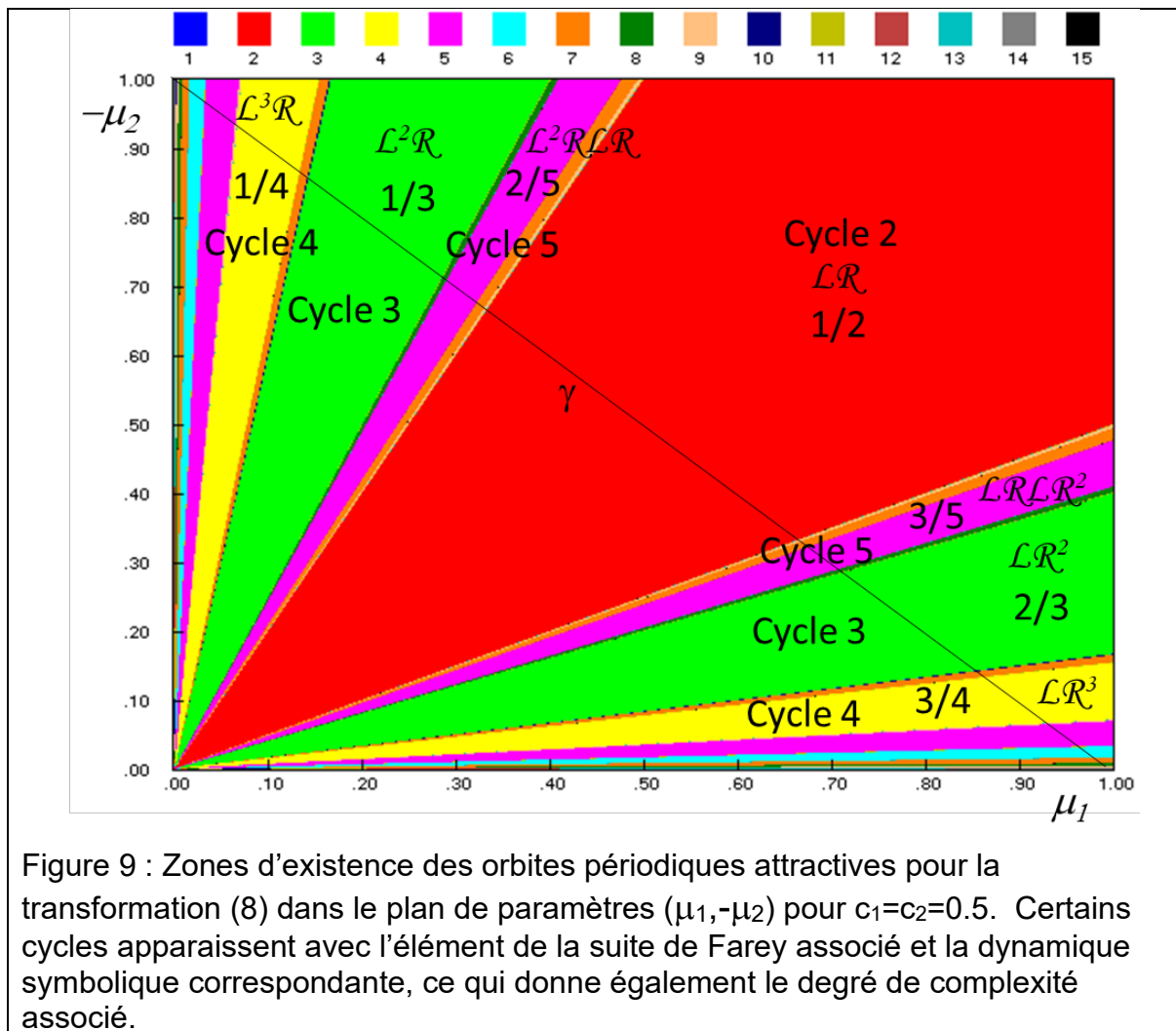
$$(8) x_{n+1} = \begin{cases} T_1(x_n, \Lambda_1) = \mu_1 + c_1 x_n & \text{si } x_n < 0 \\ T_2(x_n, \Lambda_2) = \mu_2 + c_2 x_n & \text{si } x_n > 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'une transformation linéaire par morceaux, présentant un point de discontinuité à l'origine si μ_1 est différent de μ_2 .

La Figure 9 donne une représentation du plan de paramètres $(\mu_1, -\mu_2)$ obtenue par des simulations numériques sur le pavé $[0,1] \times [0,1]$ avec $c_1=c_2=0.5$. Pour chaque pixel représentant un couple de valeurs $(\mu_1, -\mu_2)$, on effectue un nombre N d'itérations par F à partir d'une condition initiale x_0 fixée et on cherche si la suite converge vers une orbite périodique. Si c'est le cas, le pixel correspondant est colorié dans une couleur qui correspond à la valeur de la période (rouge pour un cycle 2, vert pour un cycle 3, jaune pour un cycle 4, etc...). Il est ensuite possible de déterminer le degré de complexité et l'élément de la suite de Farey associé. Les droites qui limitent les régions correspondent à la bifurcation B4 pour les cycles concernés.

On obtient la structure BF et les boîtes qui se juxtaposent en suivant par exemple le chemin (γ) ($\mu_1 - \mu_2 = 1$).

On remarque que la boîte $2/5 = (1+1)/(3+2)$ est située entre les boîtes $1/3$ et $1/2$, ce qui respecte la relation (7) des suites de Farey, il en est de même pour $2/3 = (3+3)/(5+4)$, située entre $3/5$ et $3/4$ (la fraction finale doit être irréductible).



Que ce soit en utilisant la notion de degré de complexité ou la dynamique symbolique, la façon dont s'échangent les points d'une orbite peut être reliée au concept de nombre de rotation. On va par exemple retrouver une structure de bifurcation de type BF dans les transformations du cercle dans lui-même qui sont sous la forme :

$$(9) x_{n+1} = f(x_n, \Lambda) \quad [mod 1]$$

où f est une fonction au moins de classe C^1 , Λ est un vecteur paramètre à composantes réelles et x est la variable d'état évoluant sur $[0,1[$, f est supposée croissante sur $[0,1[$. L'intervalle $[0,1[$ représente le cercle sur lequel on évolue. On pourra consulter [14][16] pour plus de détails.

Rappelons tout d'abord la définition du nombre de rotation de f :

Définition 9 :

Le nombre de rotation de f est donné par : $\rho(f, \Lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x) - x}{n}$

Cette limite existe et est indépendante de x dans les cas considérés ici.

De plus $\rho(f, \Lambda)$ est rationnel de la forme p/q si et seulement si il existe une orbite périodique d'ordre q ; p va représenter le nombre de fois où, en itérant les q points de l'orbite périodique, on effectue un tour complet du cercle en passant d'un point de l'orbite au suivant; un lien peut alors être établi entre le nombre de rotation, le degré de complexité ou la représentation en dynamique symbolique et l'élément p/q de la suite de Farey F_q .

Lorsque $\rho(f, \Lambda)$ est irrationnel, il est possible dans certains cas de montrer que les

suites itérées convergent vers un ensemble de Cantor, qui est absorbant.

1.2.3 Structure boîtes en file incrémentation de périodes

Soit la transformation (5) avec la condition :

$$(10) \quad -1 < f_2'(x, \lambda_2) < 0, \quad x > 0$$

Plus précisément, nous allons nous intéresser à l'exemple (8) avec la condition (10) vérifiée ($c_2 < 0$).

La Figure 10, similaire à la Figure 9, présente la structure BF obtenue (par exemple en suivant le chemin (γ)), qui est plus simple que celle obtenue dans la Figure 9, car on n'observe que des boîtes de premier degré de complexité, associées à la dynamique symbolique $\mathcal{L}^{k-1}\mathcal{R}$ et à l'élément de Farey de la forme $1/k$. Cette structure qui va se retrouver dans un certain nombre d'applications est appelée « incrémentation de périodes » [14], on passe en effet d'une boîte à chacune des suivantes en incrémentant la période d'un pas constant. Dans le cas de la Figure 10, le pas est de 1. La longueur de l'intervalle d'existence de l'orbite attractive diminue avec l'augmentation de la valeur de la période.

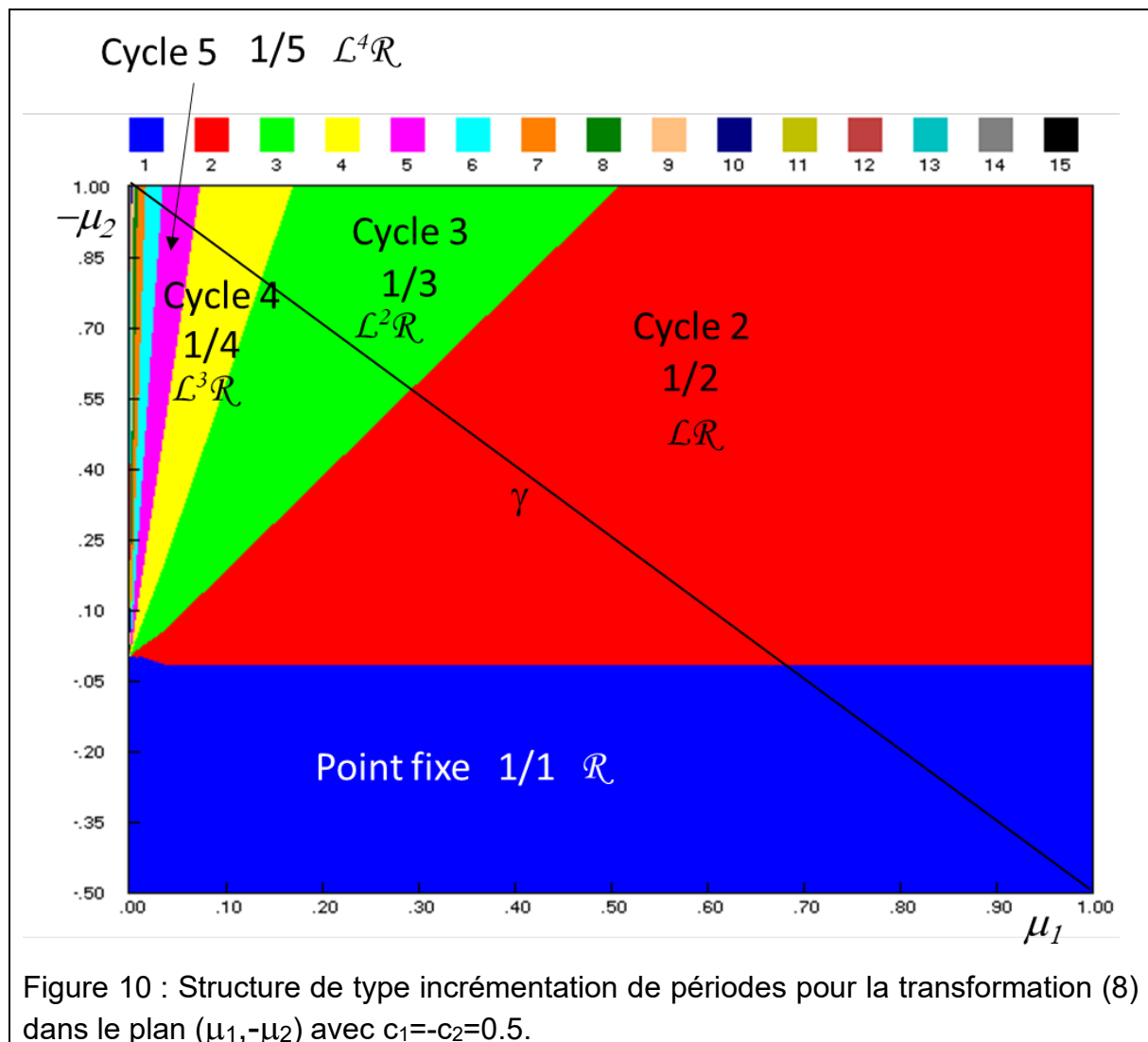


Figure 10 : Structure de type incrémentation de périodes pour la transformation (8) dans le plan $(\mu_1, -\mu_2)$ avec $c_1=-c_2=0.5$.

À retenir

- Structure fractale de bifurcations boites emboîtées pour une transformation F au moins de classe C^2 ou C^3 présentant un ou deux extrema
 - o Un intervalle du paramètre contient l'ensemble des bifurcations possibles dont une cascade de doublements de périodes ; un comportement chaotique existe dès la fin cette cascade.
 - o Au plus un (cas d'un extremum) ou deux attracteurs (cas de deux extrema) possibles pour une même valeur de paramètre
- Structure fractale de bifurcations boites en file (addition ou incrémentation de périodes) pour une transformation F de classe C^1 par morceaux
 - o Juxtaposition d'intervalles où existent une ou deux orbites périodiques attractives. Un comportement chaotique peut apparaître pour un ensemble de Cantor d'un paramètre.
 - o La façon dont s'échangent les points d'une orbite est liée à la notion de degré de complexité et de suite de Farey et peut être représentée par la dynamique symbolique.

2 Exemples de systèmes à temps discret

Nous allons maintenant proposer l'étude de trois modèles de systèmes réels présentant les structures de bifurcation évoquées dans le paragraphe précédent et voir ce que cela implique pour le fonctionnement et l'utilisation de ces systèmes. Le premier est le modèle du codeur d'un système de transmission. L'intérêt de l'étude est de connaître les valeurs des paramètres pour lesquels le système fonctionne correctement. Le second modélise un oscillateur forcé qu'on retrouve dans diverses applications. Le troisième est un circuit de type hybride utilisable pour produire des signaux chaotiques.

2.1 Modulateur à Modulation par Impulsion et Codage DIFFérentiel

L'objectif de ce paragraphe est l'analyse du modulateur à Modulation par Impulsion et Codage DIFFérentiel (MICDIF), dont le schéma est donné Figure 11. Ce modulateur est utilisé pour le codage numérique d'un signal, par exemple téléphonique [22][23]. On peut le trouver également dans d'autres applications comme le traitement d'images (imagerie médicale) [24] ou la vidéo [25].

Le système MICDIF comprend un codeur et un décodeur et utilise une technique de compression basée sur la corrélation qui existe entre les échantillons successifs du signal. Au codeur, la valeur prédite du signal d'entrée est calculée à partir des échantillons précédents et c'est l'erreur de prédiction ou innovation, c'est-à-dire la différence entre le signal prédit et le signal d'entrée qui est quantifiée et transmise. S'il n'y a pas d'erreur de transmission, le signal est ensuite reconstitué au décodeur à partir des valeurs transmises. L'opération de quantification rend le système MICDIF non linéaire. La dimension du modèle est donnée par l'ordre du prédicteur qui peut être grand dans les systèmes réels. Afin de mettre en évidence les phénomènes spécifiquement non linéaires, nous choisissons le cas très simple de l'ordre un. La caractéristique du quantificateur a été choisie définie par une fonction tangente hyperbolique. On obtient le modèle suivant sous forme d'une récurrence d'ordre un :

$$(11) \quad x_{n+1} = ax_n + a \tanh p(s - x_n)$$

où x_n est le signal prédit au temps n , a réel est le coefficient du prédicteur transverse,

$p > 1$ est le gain de compression (pente à l'origine de la caractéristique du quantificateur) et s réel est le signal d'entrée choisi constant pour simplifier le modèle. Pour plus de détail sur la modélisation, on pourra consulter [26].

En raison du choix de la caractéristique de quantification, fonction non linéaire où les termes dominants sont de type cubique, on peut mettre en évidence une structure de type BEC pour (11) lorsqu'on fait varier un paramètre en fixant les deux autres. Différents modèles du MICDIF ont été analysés en ne gardant que les termes cubiques de la tangente hyperbolique et on retrouve des résultats tout à fait similaires. D'autres études ont été faites pour un prédicteur d'ordre 2 avec la tangente hyperbolique et également en choisissant une caractéristique de quantification linéaire par morceaux [27][28].

Lors des premières études, le système MICDIF a été linéarisé et des conditions de stabilité et de bon fonctionnement ont été établies dans le cadre de cette linéarisation [29]. La non linéarité du système et la mise en évidence de la structure de bifurcation BEC permettent de montrer que des phénomènes chaotiques peuvent se produire dans le modulateur, ce qui est un problème pour le bon fonctionnement du système. En effet, en raison de la propriété de sensibilité aux conditions initiales, une petite variation entre les conditions initiales au codeur et au décodeur, due par exemple à un bruit de transmission, peut induire un signal très différent du signal initial en sortie du décodeur et des dysfonctionnements dans la transmission.

Quelques études numériques rendent compte de la structure de bifurcations et donc de l'existence du chaos.

Tout d'abord, les Figures 12 et 13 mettent en évidence la structure de bifurcations BEC. La Figure 12 donne une représentation du plan de paramètres (p, a) et permet de visualiser les zones d'existence des orbites périodiques, on observe en particulier la cascade de doublement de périodes (zone rouge pour le cycle d'ordre 2, puis jaune pour le cycle d'ordre 4, les autres régions d'existence des orbites d'ordre 2^i , $i > 2$, devenant ensuite très rapidement de plus en plus étroites) et l'accumulation de ces régions. Dans la structure BEC, le chaos apparaît dès lors que l'accumulation des doublements de périodes s'est produite, cela correspond aux régions en noir sur la Figure 12 (suites itérées bornées, qui peuvent correspondre à des orbites périodiques de période très grandes, mais aussi à un transitoire chaotique). La région en blanc correspond à une instabilité totale du système (divergence des suites itérées vers l'infini). En suivant le chemin (γ) de la Figure 12, on obtient le diagramme de bifurcation de la Figure 13 et on peut observer l'accumulation du doublement de périodes et l'apparition du chaos. On notera également la bifurcation B3 pour le cycle d'ordre 2, caractéristique de la structure BEC. On ne voit qu'un seul cycle d'ordre 2 après cette bifurcation, car la simulation numérique est effectuée avec une seule condition initiale. En réalité, deux cycles d'ordre deux attractifs sont apparus. La Figure 14 montre le plan de paramètres (a, s) lorsque $p = 1.2$. On voit également l'apparition du chaos (zones en noir) après l'accumulation du doublement de périodes.

Il est d'usage d'utiliser le MICDIF avec les valeurs des paramètres correspondant à la stabilité du système linéarisé, c'est-à-dire lorsque $|a| < 1$. Dans les Figures 12 à 14, on constate que l'apparition du chaos ne pose pas de problème pour un gain de compression pas trop élevé, car se situant bien après la valeur de a supérieure à un. Par contre lorsque p devient plus grand, du chaos peut apparaître même lorsque le système linéaire est stable et rendre le modulateur non opérationnel. On observe cela dans la Figure 15 qui représente le plan (a, s) pour $p = 5$. Les régions d'existence du chaos (régions noires) apparaissent lorsque $a < 1$.

Notons que des techniques numériques permettent de déterminer les courbes de bifurcation dans les différents plans de paramètres en résolvant les équations avec

des méthodes de type Newton-Raphson [26]. Ces courbes de bifurcation délimitent les régions de différentes couleurs des Figures 12, 14 et 15 ce qui confirme la validité des résultats présentés dans ce paragraphe.

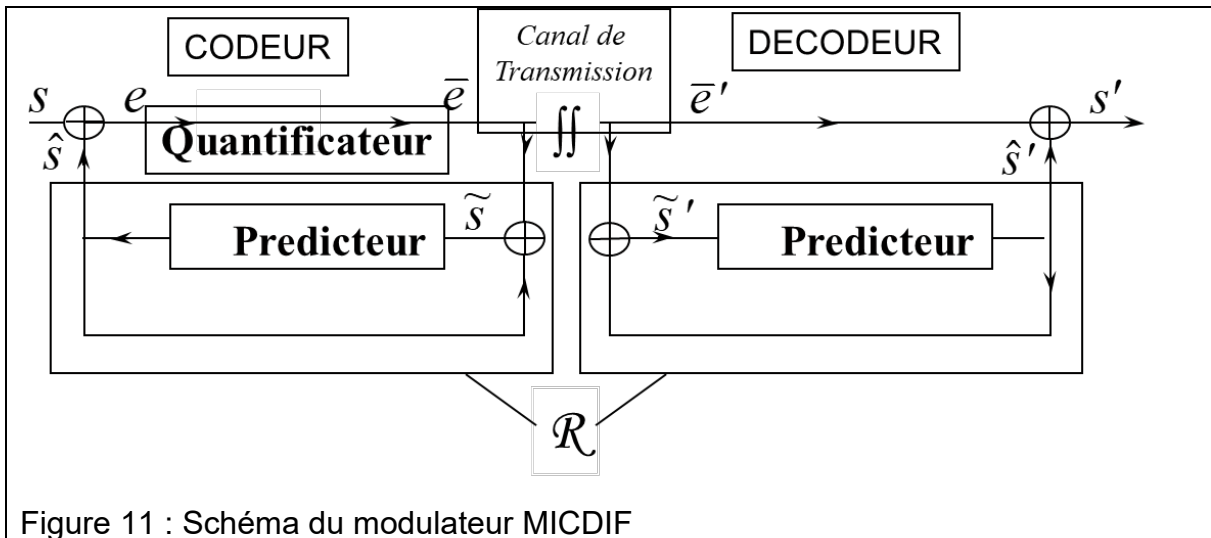


Figure 11 : Schéma du modulateur MICDIF

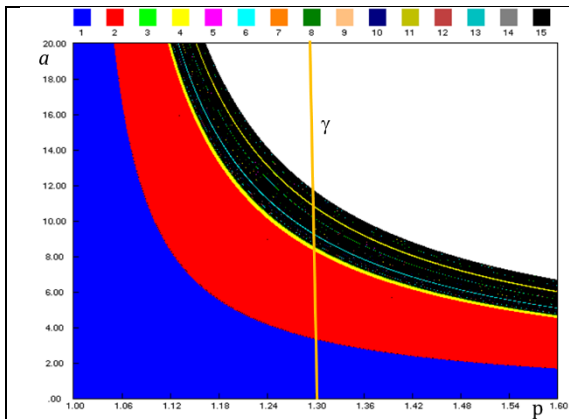


Figure 12 : $s=0$, zones d'existence des orbites périodiques dans le plan de paramètres (p, a) ; on obtient la cascade des doublements de périodes et l'existence de chaos dans les régions en noir.

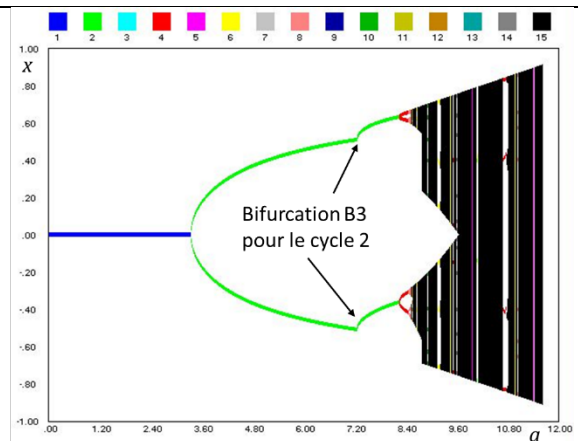


Figure 13 : Diagramme de bifurcations dans le plan (a, x) pour $s=0$ et $p=1.3$ (chemin (γ) de la Figure 12).

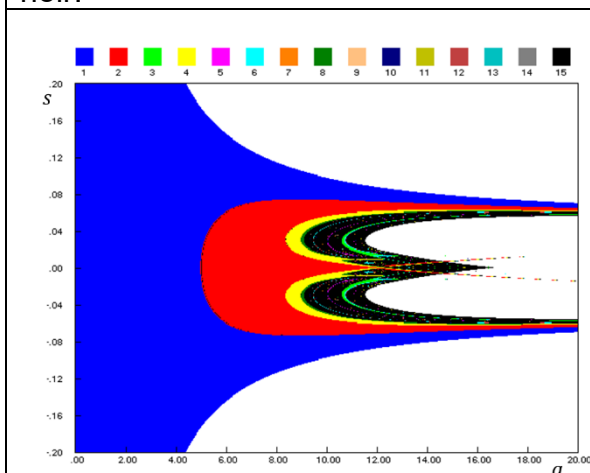


Figure 14 : $p=1.2$, zones d'existence des

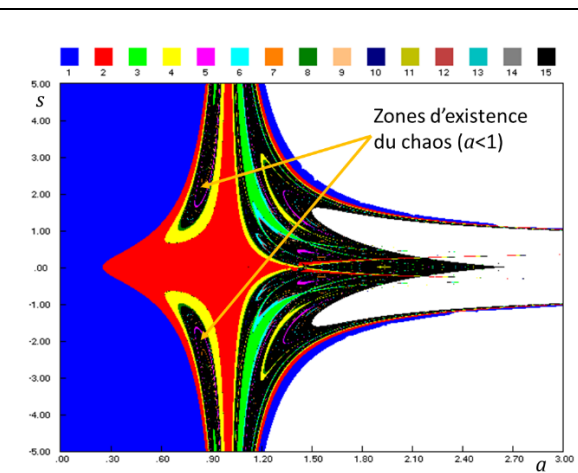


Figure 15 : $p=5$, zones d'existence des

orbites périodiques dans le plan de paramètres (a,s) .

orbites périodiques dans le plan de paramètres (a,s) . On observe du chaos pour $a < 1$.

2.2 Un oscillateur modélisé par la transformation standard d'Arnold

Les transformations du cercle contribuent à la modélisation d'un oscillateur forcé périodiquement. La dynamique du système oscillant dépend de deux paramètres indépendants que sont la fréquence et l'amplitude de la stimulation périodique. Si l'oscillation autonome est décrite par un cycle limite attractif qui est rapidement rétabli après une stimulation, les effets induits par une stimulation périodique peuvent être modélisés par une transformation du cercle en lui-même. Nous allons nous intéresser à la transformation standard de Arnold qui permet de modéliser en particulier les arythmies cardiaques [30][31][32] et qui est donnée par :

$$(12) \quad x_{n+1} = x_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x_n) \quad [mod 1]$$

où x_n varie dans l'intervalle $[0,1[$, K et Ω sont deux paramètres, $0 \leq \Omega < 1$. Ici, x_n représente la phase normalisée sur $[0,1[$ de l'oscillateur forcé à l'instant n d'envoi d'une stimulation. Si la suite des itérés est périodique, alors il y a un accrochage de fréquence entre les deux rythmes, c'est-à-dire que les fréquences des deux sont reliées entre elles rationnellement. Si ce n'est pas le cas, il y a deux possibilités :

- a) les suites itérées issues de deux conditions initiales voisines restent proches l'une de l'autre, la dynamique est quasi-périodique ;
- b) les suites itérées sont soumises à la propriété de sensibilité aux conditions initiales, la dynamique est chaotique.

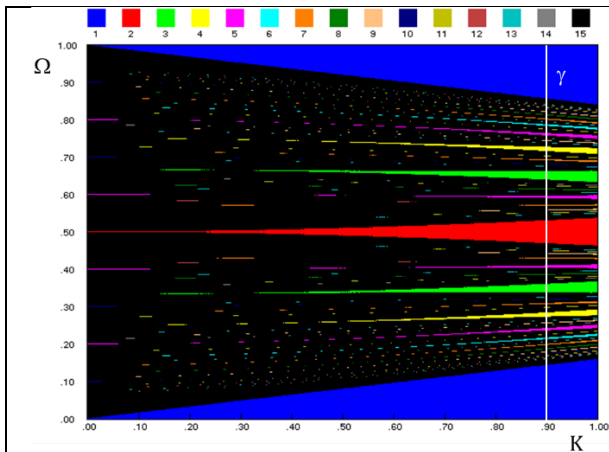


Figure 16 : Zones d'existence des orbites périodiques pour (12) dans le plan (K, Ω) . Ces structures du plan sont appelées langues d'Arnold.

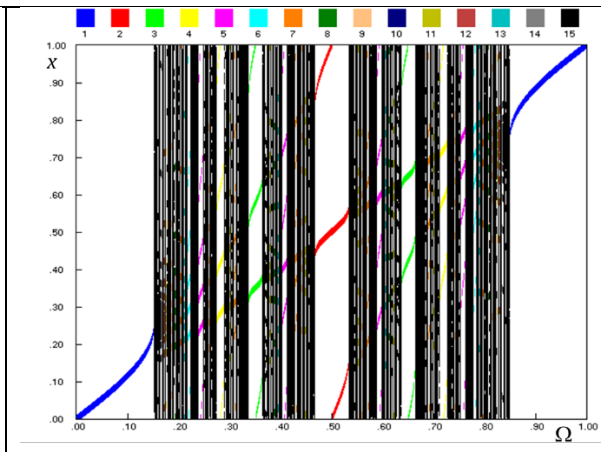


Figure 17 : Diagramme de bifurcations dans le plan (Ω, x) pour $K=0.9$ (chemin (γ) de la Figure 16).

Pour les valeurs de K choisies ($0 \leq K < 1$), (12) est un difféomorphisme du cercle, c'est-à-dire une transformation inversible. Sur l'axe $K=0$, (12) est une simple rotation. Les études effectuées dans le plan (K, Ω) [33] montrent qu'on obtient une structure de bifurcations BF de type addition de périodes. La Figure 15 met en évidence les zones d'existence des orbites périodiques dans le plan de paramètres (K, Ω) , ces zones sont associées à un nombre de rotation et à un élément de la suite de Farey, ainsi qu'à un

degré de complexité et un élément de dynamique symbolique. Les régions colorées du plan des paramètres sont appelées « langues d'Arnold ». Par exemple, les deux langues vertes sont associées respectivement aux nombres de rotation $1/3$ (zone située dans la partie $\Omega < 0.5$) et $2/3$ (zone située dans la partie $\Omega > 0.5$). Les zones en noir ne correspondent pas à l'existence de chaos, mais à l'existence d'orbites périodiques d'ordre supérieur à 14. La Figure 17 donne le diagramme de bifurcations en suivant le chemin (γ) pour $K = 0.9$. On n'observe pas de chaos dans le cas d'un difféomorphisme du cercle, la structure BF ne s'accompagne en effet pas forcément de l'existence de chaos, contrairement à la structure BE.

Dans le cas du modèle (12), les courbes de bifurcations qui délimitent les langues d'Arnold peuvent être également déterminées numériquement à partir des équations implicites par une méthode de Newton-Raphson [30][33].

En conclusion, l'existence de la structure BF pour ce modèle conduit bien à justifier l'existence d'une dynamique quasi-périodique et des accrochages de fréquence dont les valeurs évoluent en fonction des paramètres. Des études ont été effectuées également pour $K > 1$, valeurs pour lesquelles la transformation n'est plus un difféomorphisme. Dans ce cas, on observe un mélange entre les structures BF et BEQ qui conduit à l'existence de dynamiques chaotiques [33].

2.3 Circuit électrique de type hybride

Depuis plusieurs décennies, de nombreux circuits électriques non linéaires ont fait l'objet d'études, comme par exemple le circuit de Chua [34]. Les raisons initiales étaient d'analyser le comportement du circuit en fonction des paramètres, de manière à assurer un bon fonctionnement du système, c'est-à-dire consistant plutôt à éviter les comportements chaotiques, qui semblent aléatoires et peuvent être problématiques. C'est la raison pour laquelle des études théoriques ou plus appliquées ont été menées concernant les structures de bifurcations. De telles études ont permis de mieux comprendre les « routes vers le chaos » afin de les éviter. Par la suite, au vu du développement des télécommunications et des besoins liés à des transmissions sécurisées, l'idée d'utiliser ces signaux chaotiques pour certaines applications est apparue. En effet, les signaux chaotiques ressemblent à des signaux aléatoires mais peuvent être reproduits facilement. Néanmoins, tous les signaux chaotiques ne sont pas identiques et certains se prêtent mieux à certaines utilisations que d'autres. En particulier, il est souvent nécessaire de générer des signaux chaotiques robustes, c'est-à-dire qui ne vont pas se transformer en signaux périodiques par une légère variation des paramètres. Par exemple, les structures de type BE ne sont pas adaptées à ce type d'utilisation, car, d'une part, les attracteurs chaotiques n'existent que pour certaines valeurs ponctuelles des paramètres et pas sur des intervalles suffisamment grands, d'autre part, on peut montrer que des composantes fréquentielles spécifiques apparaissent dans les signaux, les rendant plus faciles à détecter. Différentes études ont montré que les circuits de type hybride sont de bons candidats pour produire de tels signaux [35].

Nous allons nous intéresser à la modélisation et à l'analyse des bifurcations d'un circuit avec commutation. Il s'agit d'un circuit très simple de type hybride pour lequel on obtient une structure BF de type incrémentation de périodes dans le plan des paramètres ainsi que des comportements chaotiques qui répondent mieux à cette exigence de robustesse. Les résultats présentés ici proviennent de [36][37].

Le schéma du circuit de type RC proposé est donné dans les Figures 18a-b. Une modélisation en temps continu est effectuée, en considérant la variable d'état $v(t)$ qui est la tension aux bornes de la capacité C . Les commutations sont assurées par une partie logique incluant une horloge, une bascule R-S et des fonctions logiques XOR et

AND. Une commutation se produit tous les temps T ou lorsque $v(t)$ atteint les valeurs V_D (la capacité se charge) ou V_U (la capacité se décharge). En introduisant les notations suivantes :

soit V la tension aux bornes du circuit, V_A la borne correspondant à $v(t)=V_U$, V_B la borne correspondant à $v(t)=V_D$, $\tau=RC$, V_n la tension aux bornes de C à chaque temps $t=nT$ lorsqu'on réinitialise, on obtient les équations suivantes :

$$V_A = V - (V - V_U)e^{-\frac{T}{\tau}}, \quad V_B = V - \frac{V_D}{V_U}(V - V_U)e^{-\frac{T}{\tau}}$$

$$(13) \quad \begin{cases} V_{n+1} = V - (V - V_n)e^{-\frac{T}{\tau}}, & 0 < V_n \leq V_A \\ V_{n+1} = \frac{V_U}{V - V_U}(V - V_n)e^{-\frac{T}{\tau}}, & V_A < V_n \leq V_B \\ V_{n+1} = V - (V - V_n)\frac{V_U(V - V_D)}{V_D(V - V_U)}e^{-\frac{T}{\tau}}, & V_B < V_n \leq 1 \end{cases}$$

En procédant au changement de variables suivant afin de normaliser les variables et les paramètres :

$$x_n = \frac{V_n}{V} \in [0,1], x_a = \frac{V_A}{V} \in [0,1], x_b = \frac{V_B}{V} \in [0,1],$$

$$\beta = \frac{V_U}{V} \in]0,1[, m = \frac{V_D}{V_U} \in]0,1[, \delta = e^{-\frac{T}{\tau}} \in]0,1[$$

on obtient la modélisation du circuit sous forme d'une transformation à temps discret linéaire par morceaux :

$$(14) \quad x_{n+1} = F(x_n, \beta, \delta, m) =$$

$$\begin{cases} T_1(x_n, \beta, \delta, m) = 1 - (1 - x_n)\delta & \text{si } 0 \leq x < 1 - \frac{1-\beta}{\delta} \\ T_2(x_n, \beta, \delta, m) = (1 - x_n)\frac{\beta\delta}{1-\beta} & \text{si } 1 - \frac{1-\beta}{\delta} \leq x < 1 - m\frac{(1-\beta)}{\delta} \\ T_3(x_n, \beta, \delta, m) = 1 - (1 - x_n)\frac{(1-\beta m)\delta}{m(1-\beta)} & \text{si } 1 - m\frac{1-\beta}{\delta} \leq x < 1 \end{cases}$$

La transformation (14) est linéaire par morceaux et dépend de trois paramètres m , β et δ . Elle présente une structure de bifurcations de type BF avec incrémentation de périodes, analogue à celle obtenue pour la transformation (5) avec la condition (10). La Figure 19 met en évidence cette structure dans le plan (m,β) pour $\delta = 0.35$. On y voit les boites correspondant à l'existence d'un point fixe et des cycles d'ordre 2, 3, 4 et 5. Etant donné que la transformation (14) est linéaire par morceaux avec trois branches, la structure BE est plus complexe que celles évoquées dans le paragraphe 1.2. En effet, la dynamique symbolique nécessite l'utilisation de trois symboles. Des études ont été conduites en introduisant les symboles \mathcal{L} (left pour gauche), \mathcal{M} (middle pour milieu), \mathcal{R} (right pour droite) [36]. La dynamique symbolique des boites de la structure en incrémentation de périodes apparait sur la Figure 19. On retrouve une structure simple comme dans le cas où il y a deux branches pour la fonction. On peut cependant obtenir une complexité plus grande en considérant d'autres valeurs de paramètres et en se plaçant dans d'autres plans de paramètres. On peut citer par exemple le plan (δ,β) pour m fixé qui fait intervenir les trois symboles \mathcal{L} , \mathcal{M} , \mathcal{R} et une structure plus complexe [36]. La Figure 20 présente un diagramme de bifurcations pour

$\delta=0.35$ et $m=0.2$, β variant de 0.5 à 1. On remarque que les orbites périodiques apparaissent par collision de frontière (bifurcation B4). On peut également noter les plages d'existence de chaos. En effet, la transformation (14) n'est pas inversible. Il n'est pas étonnant de voir des attracteurs chaotiques.

Notons que dans le cas de (14), il est relativement simple d'écrire les équations analytiques des courbes de bifurcation et de les tracer. On obtient bien ces courbes comme les frontières des régions colorées de la Figure 19 (cf [36] pour le détail des calculs). Ces courbes sont obtenues en explicitant les conditions de collision des orbites périodiques avec les valeurs correspondant aux frontières qui définissent chaque branche de la fonction (14).

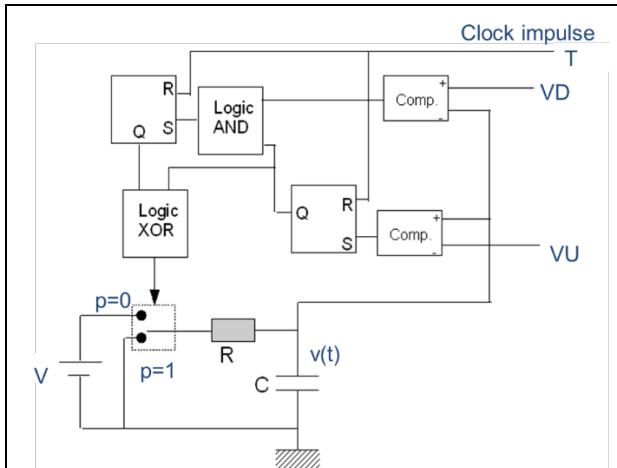


Figure 18a : Schéma du circuit hybride de type RC.

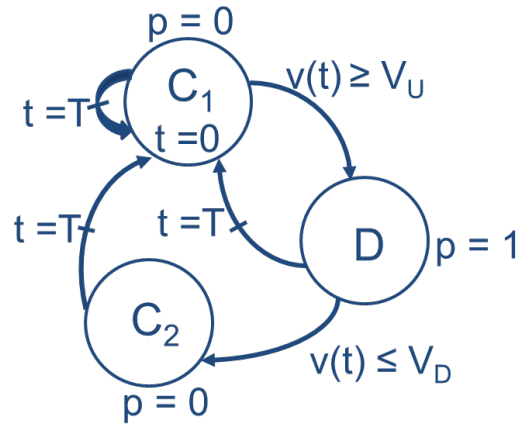


Figure 18b : Le diagramme du circuit logique

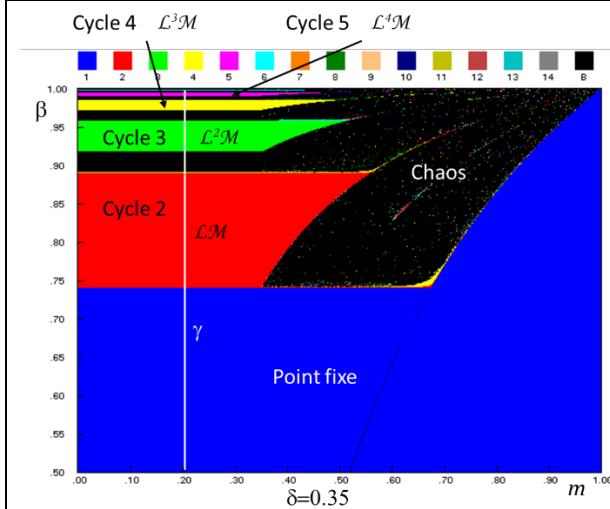


Figure 19 : Simulations dans le plan des paramètres (m, β) pour $\delta = 0.35$.

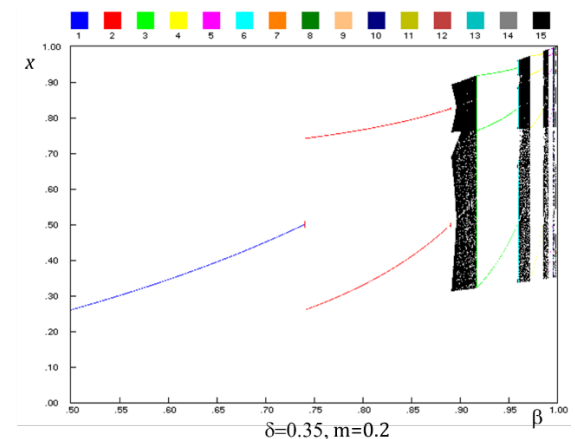


Figure 20 : Diagramme de bifurcations de 14 pour $\delta=0.35$ et $m=0.2$, β varie de 0.5 à 1.

La fonction (14) est représentée sur la Figure 21 ainsi qu'un attracteur chaotique issu de la condition initiale $x_0=0.337$. Les points de l'attracteur chaotique sont localisés sur l'intervalle $[0.4,1]$, la répartition n'est pas globalement uniforme, on constate des accumulations de points par endroits. L'uniformité fait partie des propriétés recherchés pour utiliser du chaos dans des transmissions cryptées [38][39]. Le circuit étudié ici n'est sans doute pas le meilleur candidat pour ces applications. D'autres études ont permis d'améliorer ces propriétés. Par exemple, une augmentation de la dimension permet d'obtenir de meilleurs signaux [40][41][42].

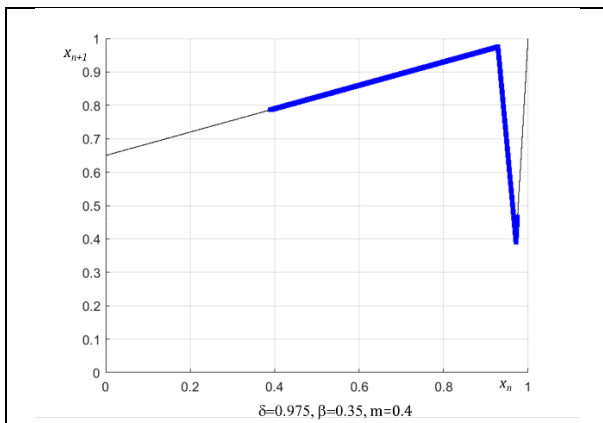


Figure 21 : Représentation de (14) dans le plan (x_n, x_{n+1}) pour $\delta=0.975$, $\beta=0.35$ et $m=0.4$. L'attracteur chaotique est en bleu.

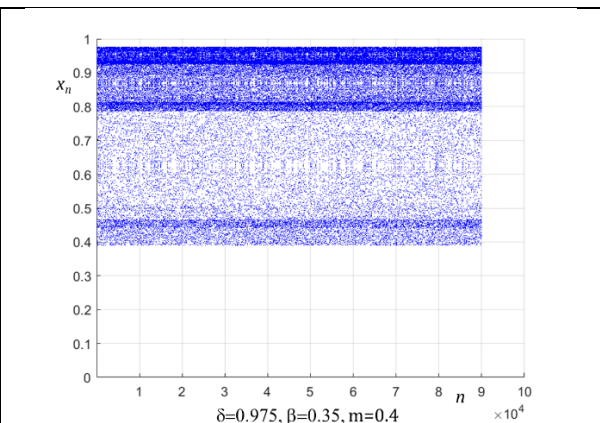


Figure 22 : x_n , représenté en fonction de n , on obtient un attracteur chaotique à partir de la condition initiale $x_0=0.337$ pour $\delta=0.975$, $\beta=0.35$ et $m=0.4$.

À retenir

- Modulateur MICDIF
 - o Structure de bifurcations BEC
 - o Pour certains paramètres, existence d'une dynamique chaotique qui va à l'encontre d'un bon fonctionnement du système
- Modèle d'un oscillateur
 - o Structure BF, accrochage de fréquences et langues d'Arnold
- Générateur de signaux chaotiques
 - o Route vers le chaos via la structure BF incrémentation de périodes

3 Conclusion

Des structures de bifurcation associées à des non linéarités spécifiques ont été présentées. Nous avons décrit les structures de bifurcation boîtes emboîtées et boîtes en file à travers des exemples génériques et des exemples particuliers de systèmes en ingénierie. La connaissance de ces structures permet d'appréhender les comportements qui apparaissent dans certains systèmes non linéaires et de comprendre leur évolution lorsque les paramètres varient, en particulier les routes vers le chaos. Les objectifs de ces études sont doubles : d'une part, chercher à comprendre comment les comportements chaotiques apparaissent afin d'éliminer les paramètres qui induisent ce type de phénomène, d'autre part, obtenir du chaos pour l'utiliser dans certaines applications spécifiques comme les transmissions sécurisées ou la génération de nombres pseudo-aléatoires par exemple.

Ces études peuvent être généralisées. Une transformation polynômiale de degré élevé et comprenant plusieurs extrema fera apparaître une structure de type BE, mais d'autant plus complexe que le nombre d'extrema sera important. Une transformation linéaire par morceaux avec un grand nombre de branches complexifiera également la structure BF induite.

L'existence des structures présentées ici n'est pas exclusive. Lorsque le système considéré contient plusieurs types de linéarité, il est tout à fait envisageable de les voir coexister et/ou se mélanger entre elles. Par exemple, certaines transformations permettent d'obtenir un mélange entre les structures BE et BF [33][43].

Les transformations que nous avons présentées sont de dimension un, des systèmes de dimension deux ou plus vont permettre de retrouver les mêmes structures avec une complexité plus importante. Eliminer les comportements de type chaotique sera plus difficile, mais inversement, il sera plus aisé d'obtenir du chaos plus robuste. En ce qui concerne les systèmes modélisables et exploitables en ingénierie, on va trouver des filtres digitaux ou des convertisseurs par exemple de type boost ou buck qui font apparaître des structures boîtes en files plus complexes dans les espaces de paramètres et qui font l'objet d'analyses plus poussées depuis quelques années.

Sources bibliographiques

- DANG VU DELCARTE (C.) - Catastrophe et chaos dans les systèmes dynamiques. [AF1405]. Techniques de l'ingénieur. Sciences fondamentales Mathématiques (2010).
- [1.] DEVANEY (R.) - *An Introduction to Chaotic Dynamical System*. Addison-Wesley, (1989).
- [2.] FATOU (P.) – Mémoire sur les équations fonctionnelles, Bull. Soc. Math. France, 47, 1919, p161-271, 48, p33-94, p208-314 (1920).
- [3.] MIRA (C.) - *Systèmes à dynamique complexe et bifurcations boîtes emboîtées*. RAIRO Aut., Fr, **12**, no 1, pp. 63-94 (1978) ; **12**, no 2, pp. 171-190 (1978).
- [4.] GUMOWSKI (I.) - MIRA (C.), *Dynamique Chaotique*. Ed. Cépadues, Toulouse, (1980).
- [5.] MYRBERG (P. J.). *Iteration der reellen Polynome zweiten Grades*. Ann. Acad. Sc. Fenn. (Finlande), (a) (1958), Sér. A,**256**, pp. 1–10 ; (b) (1959),**268**, pp. 1-10 ; (c) (1963),**336**, pp. 1-10. Sur l'itération des polynômes réels quadratiques – Journal de Math pures et appliquées,41, 339-351. (1962)
- [6.] MIRA (C). *Chaotic Dynamics, From the one-dimensional endomorphism to the two-dimensional diffeomorphism*. World Scientific, (1987).
- [7.] FOURNIER-PRUNARET (D.) *Structure de bifurcations d'un endomorphisme défini par un polynôme du troisième degré*. C.R.A.S. (Compte-Rendus de l'Académie des Sciences), t.294, I, p.455, (1982).
- [8.] MAY, (R.) - *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature 261, 459-467 (1976).
- [9.] FEIGENBAUM (M.J.) - *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, J. Statist. Phys., 19, p. 25-52 (1978).
- [10.] LI (T.Y.), YORKE (J.A.) - *Period Three Implies Chaos*, Amer. Math. Monthly 82, p985-992, (1975).
- [11.] SHARCOVSKII (A.N.) - *Coexistence of cycles of a continuous map of a line onto itself*, Ukrainskii Mat. Journal, 16, 1, p61-71 (1964).
- [12.] COULLET (P.), TRESSER (C.) - *Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation*. Journal de Physique Colloques, 39 (C5), pp.C5-25-C5-28 (1978).
- [13.] SKJOLDING (H.), BRANNER-JORGENSEN (B.), CHRISTIANSEN (P.L.) and JENSEN (H.E.), *Bifurcations in Discrete Dynamical Systems with Cubic Maps*, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 43, No. 3 pp. 520-534 (1983).
- [14.] GRANADOS (A.), ALSEDA (L.), KRUPA (M.) - *The Period Adding and Incrementing Bifurcations: From Rotation Theory to Applications* – SIAM Reviews, 59(2):225-292 (2017)
- [15.] MIRA (C.) - *Dynamique complexe engendrée par une récurrence continue linéaire par morceaux du premier ordre*. Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Série A, 285, 731-734 (1977)
- [16.] MIRA (C). *Sur la structure des bifurcations du diffeomorphisme du cercle*. CRAS, Fr. Ser. A, 287, pp. 883–886 (1978).
- [17.] AVRUTIN (V.), FOSSAS (E.), GRANADOS (A.), SCHANZ (M.) - *Virtual orbits and two-parameter bifurcation analysis in ZAD-controlled buck-converter*. Nonlinear Dynamics, 63:19–33, (2011).

- [18.] BANERJEE (S.) and VERGHESE (G.C.). *Nonlinear Phenomena in Power Electronics – Attractors, Bifurcations, Chaos, and Nonlinear Control*. Wiley - IEEE Press, (2001).
- [19.] DI BERNARDO (M.), C. J. BUDD (C.J.), CHAMPNEYS (A.R.). *Grazing, skipping and sliding: analysis of the nonsmooth dynamics of the DC/DC buck converter*. *Nonlinearity*, 11(4):858–890, (1998).
- [20.] FOSSAS (E.), HOGAN (S.J.) and SEARA (T.M.). *Two-parameter bifurcation curves in power electronic converters*. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 19:341–357, (2009).
- [21.] LEONOV (N.N.), *Map of the line onto itself*, *Radiofizika*, 2 (6), 942-956 (1959) - 3 (3), 496-510 (1960) - 3 (5), 872-886 (1960)
- [22.] BELLANGER M. - *Analyse des signaux et filtrage numérique adaptatif*, Masson Ed. (1989).
- [23.] CHU (W.C.) - *Speech coding algorithms: foundation and evolution of standardized coders*, Wiley-Intersciences, (2003).
- [24.] CHEN & RAMABADRAN - *Near-lossless compression of medical images through entropy-coded DPCM*. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol 13, n° 3, pp. 538-48, (1994).
- [25.] GHANBARI (M.) - *Standard Codecs: Image Compression to Advanced Video Coding (Telecommunications)*, Institution Electrical Engineers, IEEE, Piscataway, NJ, (2003).
- [26.] UHL (C.), FOURNIER-PRUNARET (D.) – *Chaotic phenomena in an order 1 DPCM transmission system*. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, vol.5, n° 4, pp.1033-1070 (1995).
- [27.] FOURNIER-PRUNARET (D.) - *Dynamical behaviour in DPCM system with an order 2 predictor. Case of a constant input*, *Circuits, System and Signal Processing*, special issue on "Applications of Chaos in Communications", vol.24, N°5, 615-638 (2005).
- [28.] TARALOVA-ROUX (I.), FOURNIER-PRUNARET (D.) – *Dynamical study of a second order DPCM transmission system modeled by a piece-wise linear function*, *IEEE Transactions of Circuits and Systems I*, vol. 49, n° 11, IEEE publisher 1592-1609 (2002).
- [29.] MACCHI (O.), UHL (C.) - *Stability of the DPCM transmission system*, *IEEE Trans. Circuit Systems I*, vol. 39, no. 10, (1993).
- [30.] BOYLAND (P.) - *Bifurcations of circle maps, Arnold tongues, bistability and rotation intervals*. *Comm. Math. Phys.*, 106, pp 353-381, (1986).
- [31.] GLASS (L.) - *Cardiac arrhythmias and circle maps—A classical problem*. *Chaos* **1**, 13 (1991).
- [32.] ARNOLD (V. I.) - *Cardiac arrhythmias and circle mappings*, *Chaos* **1**, 20–24 (1991).
- [33.] FOURNIER-PRUNARET (D.) – *Structure des bifurcations d'un endomorphisme du cercle en lui-même dans un plan de paramètres*, *Ann. Télécomm.*, t.42, n°5-6, pp.247-254, (1987).
- [34.] CHUA (L. O.), MATSUMOTO (T.), KOMURO (M.) - *The Double Scroll*, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. IEEE. CAS-32 (8), 798–818 (1985).
- [35.] BANERJEE (S.), YORKE (J.A.), GREBOGI (C.) - *Robust Chaos*. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3049, (1998).
- [36.] FOURNIER-PRUNARET (D.), CHARGÉ (P.) - *Route to chaos in a circuit modeled by a one-dimensional piecewise linear map*, *IEICE Nonlinear Theory and its Applications*, Vol.3, N°4, pp.521-532, (2012).
- [37.] AVRUTIN (V.), CLUVER (M.), MAHOUT (V.), FOURNIER-PRUNARET (D.) - *Bandcount adding structure and collapse of chaotic attractors in a piecewise linear bimodal map*. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol.309, pp.37-56, N° 14522 (2015).
- [38.] KOCAREV (L.) - *Chaos-based cryptography: a brief overview*, *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 1 (3), pp. 6-21, (2001).
- [39.] KOCAREV (L.), JAKIMOSKI (G.) - *Pseudorandom bits generated by chaotic maps*. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 50 (1), pp. 123-126, (2003).
- [40.] FOURNIER-PRUNARET (D.), CHARGÉ (P.), GARDINI (L.) - *Border Collision Bifurcations and Chaotic Sets in a Two-Dimensional Piecewise Linear Map*, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. Volume 16, Issue 2, p. 916-927, (2011).

- [41.] MANJUNATH (G.), FOURNIER-PRUNARET (D.) – *Strong Persistence of an Attractor and Generalized Partial Synchronization in a Coupled Chaotic System*, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, Vol.21, N°2, pp.023110-1-023110-13, (2011).
- [42.] FOURNIER-PRUNARET (D.), TAHA (A.K.) - *Chaotic sequences as pseudo-random sequences obtained from 2D maps*. International Journal of Applied Mathematics & Statistics (IJAMAS) Special Issue (SI) "Statistical Chaos and Complexity", Vol.26, N°2, 14p., (2011).
- [43.] FOURNIER-PRUNARET (D.) – *The bifurcation structure of a family of degree one circle endomorphisms*. International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, vol.1, n°4, p823-838 (1991).