



HAL
open science

Interroger l'enseignement de l'activité de recherche et de modélisation mathématique: pourquoi et comment? Exemple de deux dispositifs de formation à l'Université

Marie-Line Gardes, Sonia Yvain-Prébiski

► To cite this version:

Marie-Line Gardes, Sonia Yvain-Prébiski. Interroger l'enseignement de l'activité de recherche et de modélisation mathématique: pourquoi et comment? Exemple de deux dispositifs de formation à l'Université. 2024. hal-04847230

HAL Id: hal-04847230

<https://hal.science/hal-04847230v1>

Preprint submitted on 18 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Interroger l'enseignement de l'activité de recherche et de modélisation mathématique : pourquoi et comment ?

Exemple de deux dispositifs de formation à l'Université

Marie-Line Gardes & Sonia Yvain-Prébiski

Abstract. This article describes the design and content of two training programmes aimed at examining the teaching of a mathematical problem-solving activity from an epistemological and didactic point of view. The first focuses on the mathematical modelling activity and the second on the mathematical research activity. These training programmes are backed up by research into the didactics of mathematics, rooted in epistemological studies that examine the nature, emergence, evolution and current state of the practices of researchers linked to a mathematical activity (modelling or research). Three guiding ideas underpin these training programmes: putting students in the position of researchers, providing students with tools for identifying and analysing students' mathematical activity, and analysing teaching methods that enable students to engage in mathematical activity (modelling or research).

Keywords. University training, modelling, research activity, mathematics.

Résumé. Cet article décrit la conception et les contenus de deux dispositifs de formation visant à interroger l'enseignement d'une activité mathématique de résolution de problèmes d'un point de vue épistémologique et didactique. Le premier dispositif se focalise sur l'activité de modélisation mathématique et le second est centré sur l'activité de recherche mathématique. Ces dispositifs sont adossés à des recherches en didactique des mathématiques, ancrées sur des études épistémologiques qui consistent à interroger la nature, l'émergence, l'évolution et l'état actuel des pratiques de chercheurs liées à une activité mathématique (modélisation ou recherche). Trois idées directrices structurent ces dispositifs de formation : mettre les étudiants en position de chercheur, mettre à disposition des étudiants des outils pour identifier et analyser l'activité mathématique des élèves et analyser des dispositifs d'enseignement permettant aux élèves de vivre une activité mathématique (modélisation ou recherche).

Mots-clés. Formation universitaire, modélisation, activité de recherche, mathématiques.

Table des matières

1. Introduction.....	2
2. Le dispositif de formation sur le processus de modélisation	3
2.A. Le processus de mathématisation.....	3
2.B. Les outils pour la formation issus de l'étude EPCC	5
2.B.a. Cycle de modélisation mettant en évidence le processus de mathématisation.....	6
2.B.b. Caractérisation de situations favorisant la mathématisation dans ces deux aspects.....	7
2.B.c. Elaboration d'indicateurs d'analyse	7
2.C. Description du dispositif	8
2.D. Conclusion sur ce dispositif	11
3. Le dispositif de formation sur l'activité de recherche mathématique.....	12

3.A. Activité de recherche mathématique.....	12
3.B. Les outils pour la formation issus de l'étude EPCC	13
3.B.a. Caractériser les problèmes permettant l'activité de recherche mathématique	14
3.B.b. Caractériser une Situation Didactique de Recherche de Problèmes.....	15
3.B.c. Gestes de la recherche pour décrire et analyser l'activité de recherche	15
3.C. Descriptif du dispositif.....	17
3.D. Conclusion sur ce dispositif.....	20
4. Conclusion	20
Annexe A : L'énoncé de 'l'arbre'	22
Annexe B : Travaux d'étudiants	22
Annexe C : Productions d'élèves à analyser	23
Annexe D : Productions d'étudiants sur le problème « Fractions Egyptiennes ».....	23
Références.....	27

Introduction

Depuis près de quarante ans, de nombreuses recherches en didactique des mathématiques se sont intéressées à la construction, à la mise en œuvre et à l'analyse de dispositifs didactiques permettant aux élèves de pratiquer une activité de résolution de problèmes (par exemple Schoenfeld, 1985 ; Arzac, Germain, & Mante, 1988 ; Grenier & Payan, 2003 ; Gardes, 2013 ; Yvain-Prébiski, 2018). Le point de vue épistémologique sur l'activité mathématique qui sous-tend ces dispositifs est celui de la place centrale des problèmes dans l'activité mathématique. Comme le mentionne Halmos (1985), les problèmes sont au cœur de l'activité mathématique. C'est la source commune de toute activité mathématique, qu'elle soit axée sur la résolution de problèmes « pour eux-mêmes » ou qu'elle soit centrée sur la découverte et la systématisation des méthodes de recherche de problèmes comme l'œuvre de Descartes (Arsac & Mante, 2007). Nous soutenons l'hypothèse que les mathématiques s'apprennent comme elles se créent, c'est-à-dire en résolvant des problèmes. Ainsi, pour apprendre en mathématiques, il est nécessaire (et non suffisant) de chercher à résoudre des problèmes, car cela participe à la fois à la construction des connaissances et au développement des compétences fondamentales des mathématiques telles que définies dans les programmes français du primaire et du secondaire actuels (chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer). Nous rejoignons en cela le point de vue de Freudenthal (1968) pour qui "les mathématiques sont plus qu'une technique" et qui souligne que l'enseignement des mathématiques doit provoquer et développer en premier lieu la capacité d'action intellectuelle au lieu de se contenter d'accumuler des connaissances¹. Considérer les mathématiques comme une activité humaine (Freudenthal, 1991) nous amène à étudier les pratiques qui permettent de vivre

¹ Notre traduction de "Mathematics education] must provoke and develop in the first place the capacity of intellectual action instead of merely piling up knowledge" (Freudenthal, 1968, p.244)

cette activité. Plus spécifiquement, nos recherches (Gardes, 2013 ; Yvain-Prébiski, 2018) portent sur les pratiques des chercheurs inhérentes à l'activité de recherche et à celle de modélisation. Nous questionnons les conditions de la transposition à la classe de ces pratiques mathématiques « expertes » et en cela celles de placer les étudiants, les élèves en position de chercheur.

L'objectif de cet article est de décrire la conception et les contenus de deux dispositifs de formation visant à interroger l'enseignement d'une activité mathématique de résolution de problèmes d'un point de vue épistémologique et didactique. Le premier dispositif que nous présentons se focalise sur l'activité de modélisation mathématique et le second est centré sur l'activité de recherche mathématique. Ces dispositifs de formation sont adossés à nos recherches et leur conception s'appuie en particulier sur une étude épistémologique de pratiques contemporaines de chercheurs (Gardes, Modeste, Ouvrier-Buffet, Yvain-Prébiski, 2024). Elle consiste à interroger la nature, l'émergence, l'évolution et l'état actuel des pratiques de chercheurs liées à une activité mathématique. Elle s'effectue par des observations de chercheurs en activité ou par des entretiens avec des chercheurs sur leur activité de recherche. Elle vise à mieux comprendre une activité mathématique par le biais de l'identification d'éléments invariants dans les pratiques observées. Elle permet ainsi d'outiller le didacticien, pour identifier les conditions d'une transposition à la classe de ces pratiques et en cela enrichir ses analyses didactiques.

Le dispositif de formation sur le processus de modélisation

L'objectif de ce dispositif est de former des étudiants à la modélisation mathématique et en particulier sur le rôle de la mathématisation dans l'activité de modélisation. Dans une première partie, nous précisons ce que nous entendons par "processus de mathématisation". Dans une seconde partie, nous présentons les outils construits pour la formation, à partir d'une étude EPCC de l'activité de modélisation mathématique. Et enfin nous présentons le dispositif de formation.

1.A. Le processus de mathématisation

Dans les prescriptions curriculaires à tous les niveaux, en France comme à l'international, le développement de compétences liées à la modélisation est mis en avant. Les enseignants sont invités à proposer des situations ancrées dans une certaine réalité, qui amènent les élèves à mettre en œuvre une démarche différente de celle rencontrée dans la résolution de problèmes intra-mathématiques.

« Il faut prendre en compte le fait qu'une question de vie quotidienne est rarement directement une question mathématique. Elle le devient à travers un processus de mathématisation ou modélisation mathématique qui simplifie et interprète la réalité. Il est important de rendre visible cette étape, les choix qui y sont faits et la façon dont ils conditionnent l'appréhension du réel, en y associant activement les élèves. »
(Artigue dans Masselin, 2020, p.13).

Une première étape est nécessaire pour les rendre accessibles à un traitement mathématique. Comme dans les travaux de Treffers (1978) et Freudenthal (1991), nous distinguons le travail de mathématisation nécessaire pour passer du réel au monde mathématique de celui de la mathématisation du problème mathématique obtenu, en utilisant les expressions mathématisation

horizontale et mathématisation verticale utilisées dans le cadre de la Realistics Mathematics Education (RME).

« Treffers, in his thesis of 1978, distinguished horizontal and vertical mathematising not sharply but with due reservations: Horizontal mathematising, which makes a problem field accessible to mathematical treatment (mathematical in the narrow formal sense) versus vertical mathematising, which effects the more or less sophisticated mathematical processing.» (Freudenthal, 1991, p.40)

Comme nous l'avons montré dans Yvain-Prébiski (2023), pour mieux cerner le rôle de la mathématisation dans un processus de modélisation, nous nous sommes également appuyées sur l'ouvrage "La mathématisation du réel" d'Israël (1996). Nous en retenons qu'un modèle rend compte non pas de la réalité mais de certains aspects de cette réalité, et que "non seulement un seul modèle peut décrire différentes situations réelles, mais le même fragment de réalité peut être représenté à l'aide de modèles différents. » (Israël, 1996, p. 11) et définissons un modèle mathématique comme « un fragment de mathématique appliqué à un fragment de réalité ».

Ainsi en croisant les travaux d'Israël et ceux de Freudenthal, nous avons défini les formes de la mathématisation horizontale et de la mathématisation verticale dans nos travaux (Yvain-Prébiski, 2018) récapitulées dans le tableau suivant :

Mathématisation horizontale	Mathématisation verticale
<ul style="list-style-type: none"> - Choisir un fragment de réalité sur lequel on se questionne en vue de répondre à la question posée - Identifier et choisir les aspects du fragment de réalité (éléments de contexte, grandeurs) susceptibles de relever d'un traitement mathématique - Mettre en relation les aspects retenus en vue de la construction d'un modèle mathématique - La quantification (Chabot & Roux, 2011) : manière dont certaines propriétés sont associées à des quantités. (Associer une valeur numérique à un objet d'étude, lien avec la mesure) 	<ul style="list-style-type: none"> - La traduction mathématique de la mise en relation des aspects pertinents choisis - Le traitement mathématique à partir de cette traduction

Tableau 1 : Les formes de la mathématisation horizontale et verticale

C'est dans ce cadre théorique que s'inscrit le dispositif de formation que nous avons proposé au sein du Master 1 Didactique Des Sciences de l'Université de Montpellier co-accrédité avec l'université Lyon 1 et l'ENS de Lyon².

1.B. Les outils pour la formation issus de l'étude EPCC

Pour nourrir notre questionnement didactique sur le processus de mathématisation en jeu dans une activité de modélisation, nous avons mené une étude épistémologique des pratiques contemporaines de chercheurs (EPCC) qui utilisent la modélisation mathématique dans leurs travaux dans le but d'apporter des éléments de réponse à la question de recherche suivante : Quelle transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation peut-on envisager, lors du passage du monde réel au monde mathématique ?

L'objectif est de s'appuyer sur les résultats de cette étude pour en outre :

- Élaborer un schéma du cycle de modélisation rendant compte du processus de mathématisation
- Caractériser des situations posées dans un contexte non mathématique a priori, favorisant la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves dans l'activité de modélisation
- Élaborer des indicateurs pour nos analyses didactiques.

Pour mener cette étude, nous avons d'abord étudié dans la littérature les relations entre mathématisation et modélisation dans l'activité de modélisation dans le contexte des sciences de la vie (Delattre 1979, Legay 1997, Schmid 2009, Varenne 2008, Hubert, 2016, entre autres). Pour ce faire, nous avons identifié les formes de mathématisation qui émergent en nous appuyant sur le tableau 1. Il est ressorti de ce travail l'importance du choix des variables pertinentes sur l'interprétation d'un phénomène dans une activité de modélisation, la nécessité d'écrire des relations entre les variables pour rendre compte des phénomènes. Nous avons pointé que les chercheurs dans ce domaine sont amenés à faire des choix à propos du fragment de réalité qu'ils vont modéliser tout en anticipant sur le traitement mathématique qu'induisent ces choix (Yvain-Prébiski, 2023).

Nous avons relevé trois éléments invariants dans leurs pratiques relevant de la mathématisation horizontale :

- Pi1 - Le chercheur fait des hypothèses simplificatrices pour traiter le problème donné en sélectionnant un fragment de réalité. Il identifie les variables pertinentes qui influent sur la situation réelle et choisit des relations pertinentes entre les variables sélectionnées.
- Pi2 - Le choix du modèle de départ est un modèle mathématique connu qui permet au chercheur d'envisager un travail de mathématisation verticale en vue de l'éclairer sur le problème, quitte à affiner ou rejeter le modèle choisi en reconsidérant les choix retenus lors de la pratique Pi1.
- Pi3 - La « quantification » est souvent indispensable dans les pratiques du chercheur pour légitimer le choix du modèle utilisé, dans le sens où elle permet de confronter les résultats

² [MASTER DIDACTIQUE DES SCIENCES - Catalogue des formations - UM \(umontpellier.fr\)](https://www.umontpellier.fr/master-didactique-des-sciences)

obtenus avec le modèle, avec les données réelles. (Associer une valeur numérique à un objet d'étude, lien avec la mesure)

Il est ressorti que les chercheurs sont amenés à faire des hypothèses simplificatrices pour choisir le fragment de réalité à modéliser. Le chercheur commence par choisir un modèle existant en cohérence avec l'identification préalable des variables pertinentes et de leur mise en relation. Le chercheur réfléchit dès cette phase au modèle mathématique qui pourrait être utilisé à partir de ce choix et il choisit un modèle qui doit lui permettre un traitement mathématique afin de recueillir des observables. On peut souligner les rapports dialectiques entre les deux aspects de mathématisation, la mathématisation horizontale prenant en compte les possibles au niveau du travail de la mathématisation verticale qu'elle va induire. Pour valider le choix de modèle, les chercheurs confrontent les résultats obtenus (souvent via une simulation informatique) au sein du modèle mathématique à ceux obtenus expérimentalement. Cette phase matérialise des allers retours entre les deux aspects de la mathématisation. De cette confrontation, les chercheurs sont amenés à revoir soit le choix du fragment de réalité, soit les grandeurs pertinentes retenues pour le modèle ou leur mise en relation, soit les conditions et/ou le protocole de l'expérience réalisée. Il ressort de plus que la quantification de l'objet d'étude semble un incontournable des pratiques de ces chercheurs.

1.B.a. Cycle de modélisation mettant en évidence le processus de mathématisation

En appui sur ces résultats et sur les formes de la mathématisation horizontale (MH) et verticale (MV) (voir tableau 1) et après une étude dans la littérature en éducation mathématique sur la diversité des schémas du processus de modélisation, nous avons élaboré le schéma suivant rendant compte du travail de mathématisation au cours de l'activité de modélisation. Les doubles flèches permettent de mettre en évidence les rapports dialectiques entre l'aspect vertical et l'aspect horizontal de la mathématisation dans un processus de modélisation.

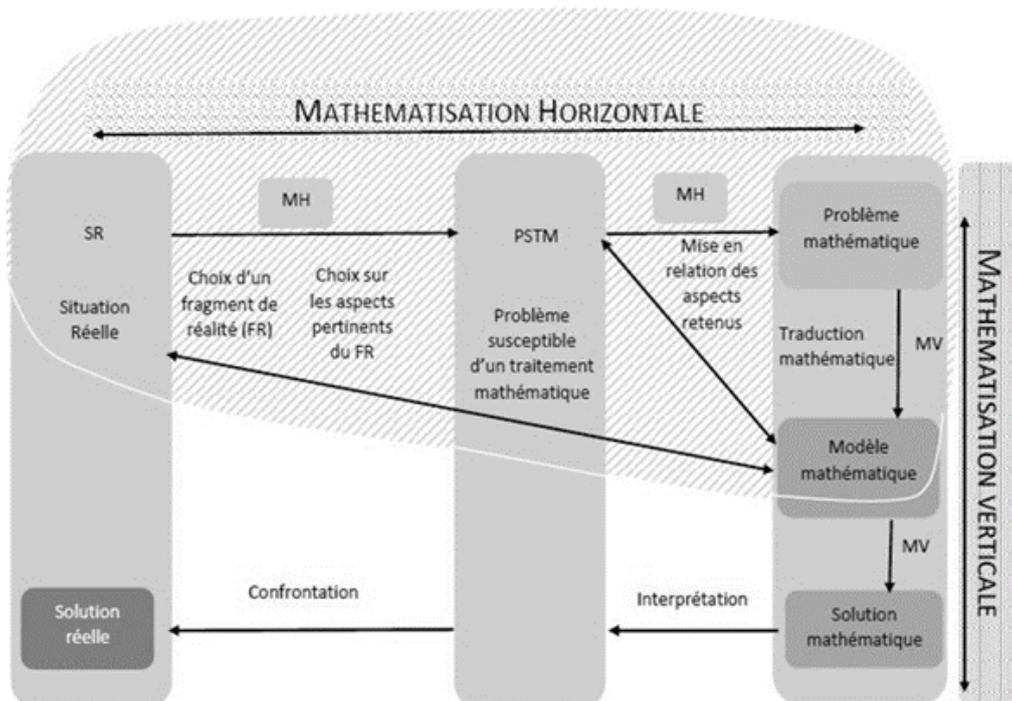


Figure 1 : Cycle de modélisation mettant en évidence les rapports dialectiques entre la MH et la MV auteurs.

1.B.b. Caractérisation de situations favorisant la mathématisation dans ces deux aspects

Les résultats de l'étude EPCC nous a également permis de caractériser des situations pour la classe favorisant le travail de mathématisation en jeu lors du passage d'une situation extra-mathématique à une situation accessible à un traitement mathématique. Ces situations doivent répondre au maximum des critères suivants :

- 1- une situation a priori non mathématique,
- 2- un contexte fictif mais réaliste,
- 3- la nécessité d'une phase de modélisation pour une prise en charge efficace de la situation,
- 4- la phase de modélisation peut renvoyer à plusieurs problèmes mathématiques selon les choix qui sont faits,
- 5- l'énoncé est conçu comme une adaptation d'une problématique de modélisation issue des pratiques scientifiques professionnelles,
- 6- les variables didactiques (Brousseau, 1998) sont choisies de manière à favoriser l'entrée dans la mathématisation horizontale.

Nous avons élaboré une situation pour la classe (Yvain et Modeste, 2018), conçue à partir d'une adaptation d'une problématique professionnelle de modélisation sur la croissance des végétaux (voir l'énoncé de "L'arbre" en annexe A). Les choix didactiques ont été réalisés pour favoriser et attester du développement chez les élèves les invariants identifiés dans les pratiques de chercheurs : par exemple la prise de conscience de la nécessité de faire des choix et l'identification de variables pertinentes pour traiter mathématiquement la situation.

1.B.c. Elaboration d'indicateurs d'analyse

L'étude épistémologique de pratiques de chercheurs en modélisation lors du passage du monde réel au monde mathématique nous a aussi permis à d'élaborer des critères d'analyse pour le questionnement didactique au cœur de nos travaux, à savoir les conditions et les contraintes permettant de favoriser la dévolution aux élèves de la mathématisation en jeu lors du passage d'une situation extra-mathématique à un problème mathématique, dans une activité de modélisation. Ces indicateurs d'analyse sont associés à une modalité qui consiste à proposer une phase de questions-réponses pour débiter la résolution du problème (voir plus loin). Les résolveurs sont donc amenés à se poser des questions entre pairs et à essayer d'y répondre. Ces critères ont favorisé une analyse fine des démarches des élèves, permettant d'identifier comment les élèves rendent la situation extra-mathématique étudiée, accessible à un traitement mathématique (Yvain-Prébiski, 2018). Par exemple, ces critères (voir tableau 2) mettent en évidence les choix d'éléments de contexte, de grandeurs pertinentes ou de modèles, opérés par les élèves en spécifiant si leurs justifications relèvent de considérations ancrées dans le réel ou d'un travail mathématique.

Indicateur Q1	La question montre la recherche d'un modèle permettant de traiter la situation proposée.
---------------	--

Indicateur Q2	La question porte sur l'identification de grandeurs pertinentes pour envisager un traitement mathématique en vue d'élaborer un modèle mathématique.
Indicateur Q3	La question porte sur le choix d'éléments de contexte à prendre en compte pour envisager un traitement mathématique en vue d'élaborer un modèle mathématique.
Indicateur R1	La réponse montre des choix à partir de considérations ancrées dans le réel.
Indicateur R2	La réponse montre des choix sans proposer d'argument.
Indicateur R3	La réponse montre des choix à partir d'un travail mathématique.

Tableau 2 : Les indicateurs pour l'analyse didactique

1.C. Description du dispositif

La formation proposée aux étudiants du Master 1 DDS est composée de 3 séances de trois heures. Elle formation s'appuie sur les outils issus de l'étude EPCC menée. L'objectif principal est d'étudier la modélisation mathématique, sur le plan épistémologique et didactique, en interrogeant :

- La nature et le rôle de la mathématisation dans le processus de modélisation à partir de situations extra-mathématiques ?
- Différents schémas du processus de modélisation mathématique proposés dans la littérature en éducation mathématique.
- Comment et pourquoi faire vivre des activités de modélisation mathématique dans l'enseignement secondaire ?

Pour commencer, les étudiants sont invités à analyser des extraits d'entretiens de chercheurs utilisant la modélisation mathématique afin d'identifier de potentiels invariants dans leurs pratiques dans la phase « passer d'une situation extra-mathématique à une situation mathématique ». Lors du bilan collectif, les résultats issus de l'EPCC concernant les pratiques invariantes identifiées (Pi1, Pi2 et Pi3) sont exposés et discutés. Puis une étude de différents schémas du processus de modélisation mathématique proposés dans la littérature en éducation mathématique (Rodriguez, 2007) est proposée aux étudiants. Il s'agit ici de leur montrer que la diversité des propositions de schémas visant à illustrer le processus de modélisation dans la littérature est essentiellement corrélée aux objectifs d'apprentissage ou de recherche et/ou au choix des compétences à étudier visés par les auteurs. Une focale particulière est mise sur les schémas du cycle de modélisation qui affinent l'étape intermédiaire entre la situation réelle et le monde mathématique, comme le schéma ci-dessous :

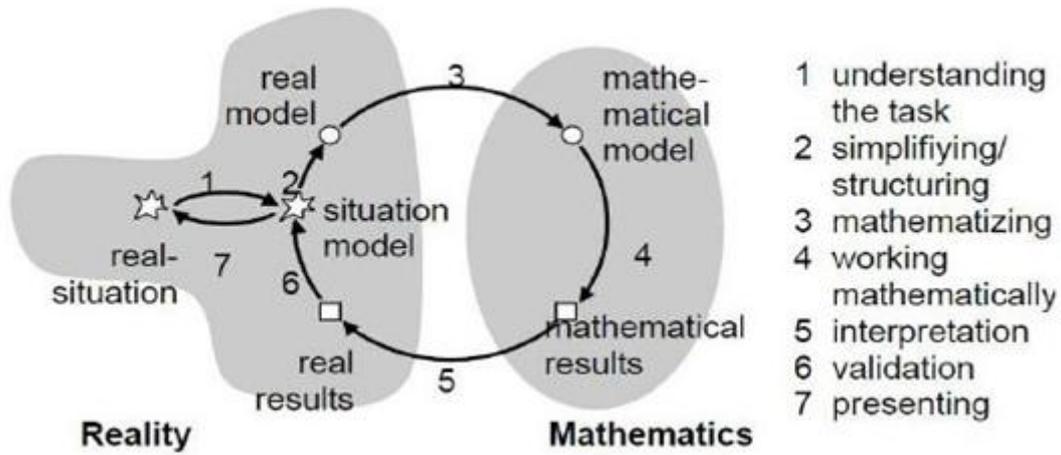


Figure 2 : Le schéma du processus de modélisation de Blum et Leiss (2007)

Le travail proposé dans les étapes 1,2 et 3 relève de la mathématisation horizontale. L'étape supplémentaire de « modèle de situation » met en évidence la nécessité de poser des hypothèses simplificatrices sur la situation réelle avant d'émettre des hypothèses sur l'identification des variables qui influent sur la situation réelle puis de les mettre en relation (real model). Notre schéma du cycle de modélisation (Figure 1) prenant en compte les rapports de la MV et de la MH peut permettre un zoom sur ce qui se passe entre les étapes 1,2 et 3 (Yvain-Prébiski, 2021) comme l'illustre la figure 3.

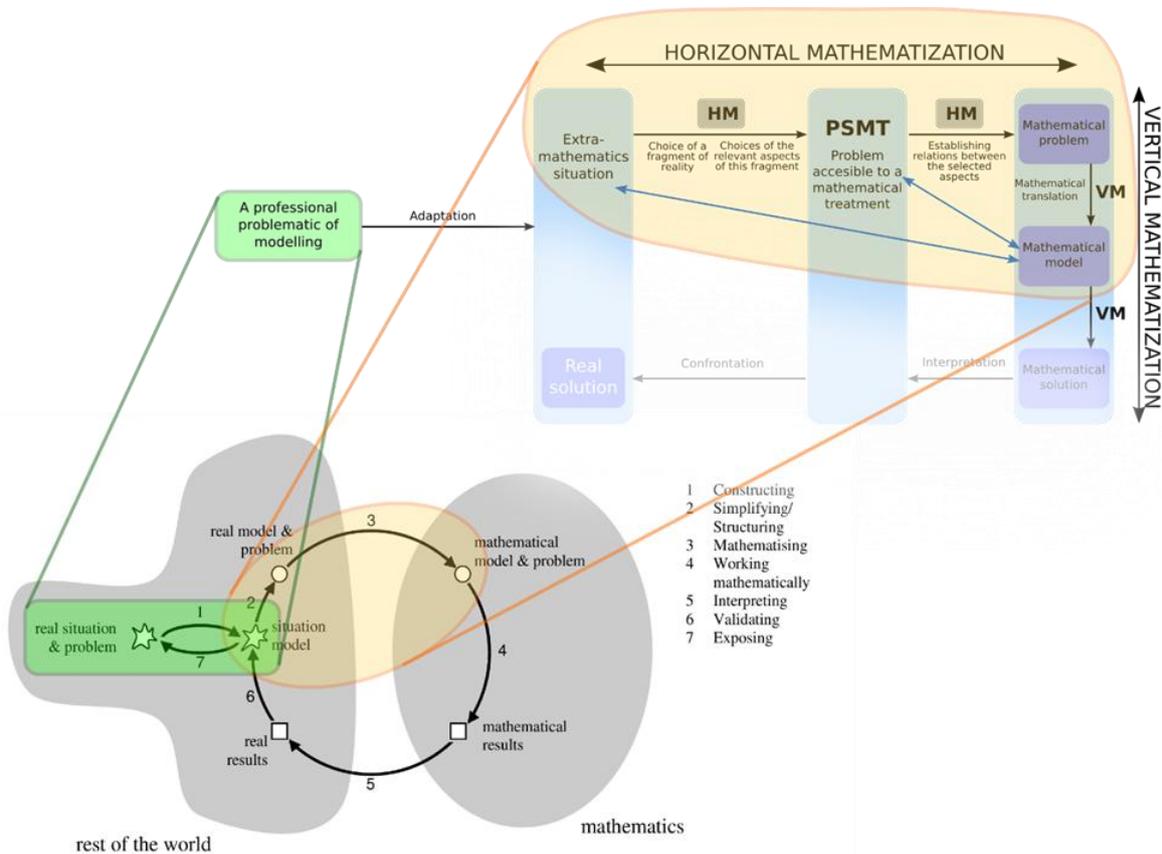


Figure 3 : Enrichissement du cycle de Blum & Leiss (2007)

Ensuite, les étudiants sont invités à vivre la première phase du dispositif ResCo (Résolution collaborative de problèmes) de l'Institut de Recherche pour l'Enseignement des Sciences (IRES) de Montpellier qui consiste en une phase de questions-réponses entre pairs. Ce groupe propose chaque année un dispositif pour les enseignants volontaires du secondaire qui amène les élèves à s'engager dans une activité de modélisation. Les classes sont regroupées par groupe de 3. Chaque groupe travaille collaborativement par le biais d'une plateforme en ligne (pour plus de détails, voir Yvain & Modeste, 2018). La première phase de ce dispositif est une phase de questions-réponses qui s'étend sur deux séances. La première séance vise à faire découvrir la situation extra-mathématique par les élèves et à leur faire formuler les questions qu'ils se posent lors de leurs premières recherches. Il s'agit de faire émerger par les élèves un questionnement sur les différents choix possibles permettant un traitement mathématique du problème. Les questions élaborées par les élèves sont adressées aux deux classes avec lesquelles leur classe est associée, par l'enseignant, via une plateforme en ligne. Lors de la deuxième séance, les élèves reçoivent des questions émanant des autres classes de leur groupe. C'est dans la phase de l'élaboration des réponses par les élèves que, d'une part, les questions pertinentes pour la résolution du problème vont se dégager et que, d'autre part, vont apparaître des différents choix possibles de modélisation. Lors de cette séance, les questions reçues amènent des discussions qui permettent aux élèves de prendre conscience de la nécessité de faire des choix pour traiter mathématiquement le problème, notamment autour de l'identification des grandeurs pertinentes. Nous utilisons les indicateurs issus de l'étude EPCC (voir tableau 2) pour analyser le travail des élèves lors de cette phase de questions-réponses (Yvain-Prébiski, 2018). Ces indicateurs sont d'ailleurs depuis utilisés par le groupe ResCo pour mener leurs propres analyses. Nous faisons vivre cette phase lors de la formation des étudiants à partir de l'énoncé de "l'arbre" (annexe A). L'objectif est à la fois qu'ils cernent en quoi la mathématisation est constitutive de l'activité de modélisation et aussi qu'ils découvrent le dispositif ResCo et en cela de voir la faisabilité de faire vivre un processus de mathématisation constitutif de l'activité de modélisation dans les classes du secondaire (voir des exemples de productions des étudiants en annexe B). Pour les autres phases du dispositif ResCo, non utilisées dans notre dispositif de formation, nous renvoyons le lecteur à (IREM de Montpellier Groupe ResCo, 2014).

Pour compléter ce travail, les étudiants doivent ensuite analyser les variables didactiques de l'énoncé étudié et les mettre en lien avec les pratiques des chercheurs identifiées dans le premier temps de formation. L'objectif est ici de les amener à identifier les variables didactiques et leurs valeurs choisies favorisant potentiellement la transposition des éléments invariants pointés dans les pratiques expertes dans l'énoncé de "l'arbre" (voir annexe A). Lors de la mise en commun est mis en évidence les caractéristiques des énoncés élaborés par ResCo. Depuis 2016 (Yvain-Prébiski, 2018) ces énoncés sont appelés des fictions réalistes conçues comme une adaptation d'une problématique professionnelle de modélisation (FRAPPM). Ils doivent répondre au maximum aux critères donnés en 2.B.b. Par exemple, pour l'énoncé de "l'arbre", est mis en évidence pour les étudiants les choix des variables didactiques et leurs valeurs choisies récapitulés dans le tableau 3.

V1	Des schémas en 2D pour proposer un cadre suffisamment réaliste tout en permettant une activité de modélisation de la 6ème à la terminale.
----	---

V2	Le nombre de schémas : nous en avons proposé trois. De notre point de vue, ce nombre est suffisant pour permettre aux élèves de faire des choix sur les règles de croissance des différents éléments de l'arbre.
V3	La forme de l'arbre (symétrique versus asymétrique) : nous avons choisi une croissance asymétrique pour favoriser le questionnement des élèves autour de la prévision de la croissance de l'arbre.
V4	Le nombre de nouvelles branches apparaissant chaque année : nous avons choisi de faire apparaître deux ou trois nouvelles branches pour amener rapidement les élèves à faire des choix au niveau de la croissance de l'arbre.
V5	Les longueurs des troncs et branches : elles ont été choisies pour questionner un éventuel choix d'un modèle de croissance régulière.
V6	La donnée d'une échelle : afin de permettre des mesures et une prise d'information instrumentée sur les dessins.

Tableau 3 : Les variables didactiques du problème de "l'arbre".

Pour terminer, les étudiants analysent ensuite des productions d'élèves ayant participé au dispositif ResCo avec l'énoncé de "l'arbre". L'objectif est de leur permettre de mettre à l'épreuve les indicateurs d'analyse (voir tableau 2) et aussi de voir l'impact du choix de cet énoncé corrélé à la phase de questions-réponses sur l'activité des élèves (voir exemples de productions d'élèves en annexe C).

1.D. Conclusion sur ce dispositif

Les étudiants de ce master, de formation scientifique diverse, expriment souvent qu'ils avaient une vision assez utilitaire des mathématiques dans la modélisation. Analyser la mathématisation en jeu en distinguant les aspects horizontal et vertical en appui sur l'étude épistémologique des pratiques contemporaines, semble leur permettre de mieux comprendre comment on peut rendre accessible à un traitement mathématique une situation extra-mathématique. Leurs retours montrent que la phase de questions-réponses vécue leur a permis de prendre conscience de la nécessité de faire des choix et que selon les choix faits, plusieurs modèles mathématiques sont envisageables. Pour certains, il n'était pas envisageable en classe de mathématique de proposer une situation dans les sciences de la vie en particulier au regard des compétences spécifiques nécessaires dans ce domaine. Les spécificités du dispositif ResCo (les énoncés de type FRAPPM et les modalités de mise en œuvre) leur a permis de voir cette faisabilité associée à un objectif d'apprentissage centré sur la modélisation mathématisation en tant qu'objet d'enseignement.

Le dispositif de formation sur l'activité de recherche mathématique

L'objectif de ce dispositif est de former de futurs enseignants à un enseignement des mathématiques fondé sur la recherche de problèmes. Dans une première partie, nous précisons ce que nous entendons par "activité de recherche mathématique". Dans une seconde partie, nous présentons les outils construits pour la formation, à partir d'une étude EPCC de l'activité de recherche mathématique. Dans une troisième partie, nous présentons le dispositif de formations de futurs enseignants de mathématiques.

1.E. Activité de recherche mathématique

Dans de nombreux curricula, en France comme à l'international, l'enseignement des mathématiques accorde une place centrale à la résolution de problèmes et au développement de six grandes compétences qui sont au cœur de cette activité mathématique³ : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer. La compétence *chercher* est caractérisée par plusieurs descripteurs dont deux sont communs à l'école primaire et au secondaire⁴ :

- s'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture,
- tester, essayer plusieurs pistes de résolution.

Ces descripteurs mettent en évidence un caractère expérimental des mathématiques. Plusieurs chercheurs, à l'instar de Bkouche (1982), reconnaissent un caractère expérimental aux mathématiques dans la mesure où elles relèvent des sciences expérimentales qu'il définit selon deux principes : d'une part, l'origine empirique des objets étudiés et des concepts ainsi mis en jeu et d'autre part, la méthode (ou les méthodes) qui participe à la fois de l'observation empirique et du raisonnement rationnel. Il ajoute que « c'est l'articulation de l'empirique et du rationnel qui constitue la science expérimentale » (Ibid. p. 307). Concernant le premier principe, en prenant l'exemple du concept de nombre (dont l'origine remonte aux pratiques de comptage dans l'Antiquité), Bkouche (1982) met en évidence que certains concepts mathématiques naissent de la manipulation des objets conformément à une théorie, manipulation rendue possible par la représentation sous forme symbolique des objets mathématiques. D'un point de vue didactique, Durand-Guerrier caractérise cette élaboration spécifique de certains concepts mathématiques par la mise en œuvre d'une dimension expérimentale qu'elle définit par « un va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir [...] et l'élaboration [...] d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets » (Durand-Guerrier, 2010, p.1). Il s'agit donc d'une articulation entre expérience et théorie grâce à des allers et retours entre des objets naturalisés et des objets en cours de conceptualisation.

Concernant le second principe, Bkouche (1982) précise que ce qui fonde le caractère expérimental d'une méthode, c'est la définition et le rôle de l'expérimentation. C'est en effet elle qui est porteuse de l'articulation entre l'empirique et le théorique. En effet, l'expérimentation s'appuie sur un double

³ Annexe 3 - BO spécial n° 11 du 26 novembre 2015.

⁴ Annexes 2, 3 et 4 – BO n°31 du 30 juillet 2020.

raisonnement, en amont pour élaborer une expérience pertinente et en aval pour la lecture des résultats. Son rôle est de vérifier l'adéquation entre la théorie et l'expérience dans le but de créer de nouveaux objets mathématiques. Perrin (2007) définit l'expérimentation en mathématiques comme « une méthode d'investigation systématique » qu'il n'hésite pas à « désigner sous le nom de méthode expérimentale » pour résoudre des problèmes mathématiques. Pour cet auteur, l'adéquation entre théorie et expérience se réalise dans un processus itératif composé de plusieurs étapes à renouveler éventuellement :

Expérience, observation de l'expérience, formulation de conjectures, tentative de preuve, contre-expérience, production éventuelle de contre-exemples, formulation de nouvelles conjectures, nouvelles tentatives de preuve, etc. (Perrin, 2007, p.10).

Dans cette description de « la méthode expérimentale », l'expérimentation (faire une expérience, observer l'expérience et en tirer des conclusions) s'articule avec des phases de formulation de conjectures et de tentative de preuves. Dias (2008) prolonge cette idée en pensant l'expérimentation comme un processus dialectique empirique/théorique qui n'a de sens que par ses articulations avec la formulation et la validation. Nous définissons alors une démarche de type expérimental de résolution de problèmes par des va-et-vient constants entre la théorie et l'expérience se réalisant par des rétroactions de trois processus : expérimentation, formulation et validation. Une démarche de type expérimental s'appuie donc sur la mise en œuvre d'une dimension expérimentale portant sur les objets mathématiques en jeu (i.e. des allers et retours entre des objets naturalisés et des objets en cours de conceptualisation).

1.F. Les outils pour la formation issus de l'étude EPCC

Pour nourrir notre questionnement didactique sur l'activité de recherche mathématique, nous avons mené une étude épistémologique des pratiques contemporaines de chercheurs (EPCC) dans le but d'apporter des éléments de réponse à la question de recherche suivante : Quelle transposition à la classe de pratiques de l'activité de recherche de chercheurs en mathématiques peut-on envisager ? L'objectif est de s'appuyer sur les résultats de cette étude pour entre autres :

- Caractériser des problèmes permettant l'activité de recherche mathématique
- Caractériser une Situation Didactique de Recherche de Problème (SDRP)
- Identifier des gestes de la recherche pour décrire et analyser l'activité de recherche

Pour mener cette étude EPCC sur l'activité de recherche mathématique (Gardes, 2013, 2017), nous avons d'abord conduit une étude épistémologique classique, basée sur la lecture de textes de mathématiciens décrivant les processus de l'invention mathématique (e.g. Poincaré 1908, Hadamard 1993, Fehr 1908, Thurston 1994, Nimier 1989, Villani 2012) et d'autres explicitant l'heuristique de l'activité de recherche (e.g. Pólya 1945, 1989 ; Lakatos 1976). Ensuite, nous avons mené une étude épistémologique des pratiques contemporaines liées à l'activité de recherche, où nous avons suivi des travaux de recherche de chercheurs *in statu nascendi* sur un problème de recherche particulier (plus précisément, la conjecture d'Erdős-Straus), à partir de différents matériaux : des courriels, des articles, des rencontres, des entretiens. Ces données ont été recueillies « en direct ». Les correspondances électroniques rendent par exemple compte des avancées de la recherche des chercheurs « à l'instant t » et non *a posteriori*. Les documents joints ne sont pas des

écrits retraçant, après réflexion, la démarche utilisée, ils sont des produits mêmes de la recherche. Cette étude a permis de mieux caractériser l'activité de recherche mathématique en identifiant notamment des invariants dans les pratiques associées. Des invariants généraux ont alors été mis en évidence : un processus de création en quatre étapes, le rôle du temps de la recherche, l'importance et les modalités variées des échanges entre pairs, l'importance de la documentation. Des invariants spécifiques, liés aux heuristiques et appelés "gestes de la recherche" ont également été caractérisés (voir 3.B.c). Cette étude EPCC a ensuite permis de mettre en perspective les processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants sur un même problème mathématique (i.e. la conjecture d'Erdős-Straus).

1.F.a. Caractériser les problèmes permettant l'activité de recherche mathématique

L'étude EPCC sur l'activité de recherche mathématique a également permis de caractériser les problèmes mathématiques qui sont susceptibles de favoriser cette activité de recherche chez les élèves et les étudiants. Nous entendons par "problème mathématique", le problème du mathématicien, c'est-à-dire « un problème mathématique [qui] se doit d'être robuste et en même temps doit se laisser aborder, questionner, explorer » (Front, 2015, p.58). Cette définition renvoie explicitement aux sujets qui se confrontent à la recherche du problème. La robustesse du problème, c'est-à-dire le fait qu'il ne puisse pas être résolu de façon immédiate et demande un effort cognitif certain, est ainsi à considérer relativement à un individu, à ses connaissances et à l'activité qu'il est amené à développer.

Les problèmes que nous proposons aux élèves sont des problèmes mathématiques avec les caractéristiques des problèmes ouverts (Arsac et Mante, 2007) : un énoncé court, l'énoncé ne donne ni la méthode, ni la solution, le problème se trouve dans un domaine conceptuel familier des élèves, auxquelles s'ajoutent les deux caractéristiques suivantes (Gardes, 2018) :

- le problème permet de mettre en œuvre une dimension expérimentale, c'est-à-dire une articulation entre expérience et théorie, via des allers et retours entre des objets naturalisés et des objets en cours de conceptualisation ;
- la recherche du problème met en jeu une dialectique entre la mobilisation, l'approfondissement de connaissances mathématiques et le développement d'heuristiques pour résoudre un problème.

Pour illustrer ces caractéristiques, prenons le problème suivant : *Trouver tous les nombres entiers qui sont la somme d'au moins deux nombres entiers naturels consécutifs*. L'énoncé du problème est court, il ne donne pas de méthode pour le résoudre et les notions mathématiques mobilisées (les nombres entiers) sont dans un domaine conceptuel familier des élèves (à partir du cycle 2). La recherche de ce problème, robuste jusqu'au début de l'université, demande la mobilisation de nombreuses connaissances mathématiques (divisibilité, suite arithmétique, raisonnement par l'absurde, etc.) et d'heuristiques (expérimenter sur des valeurs numériques à la main ou la calculatrice, dégager des sous-problèmes, mettre en place un procédé algorithmique pour définir les nombres qui ont la propriété demandée, etc.). L'articulation des connaissances mathématiques et des heuristiques, notamment dans une recherche basée sur l'expérimentation sur des valeurs numériques à la main, permet aux élèves de progresser dans la recherche du problème en élaborant des résultats partiels (par exemple les nombres impairs sont la somme de deux entiers naturels

consécutifs). Les élèves cherchent très souvent ce problème dans une démarche de type expérimental⁵.

Si ce type de problèmes mathématiques porte un fort potentiel didactique, ils ne permettent pas en eux-mêmes les apprentissages. C'est la mise en œuvre d'une situation didactique qui doit les assurer. L'étude EPCC nous a ainsi permis de caractériser une Situation Didactique de Recherche de Problème (SDRP) que nous détaillons dans la partie suivante.

1.F.b. Caractériser une Situation Didactique de Recherche de Problèmes

Nous définissons une situation didactique de recherche de problèmes (Front, 2015) comme une situation :

- didactique, c'est-à-dire des situations où l'enseignant cherche à faire dévolution à l'élève d'une situation adidactique ;
- d'apprentissage, c'est-à-dire des situations où l'élève fait fonctionner ses connaissances et où la réponse initiale envisagée par l'élève doit seulement permettre de mettre en œuvre une stratégie de base à l'aide de ses connaissances anciennes ; mais très vite, cette stratégie devrait se révéler suffisamment inefficace pour que l'élève puisse modifier son système de connaissances pour répondre à la situation proposée ;
- où le projet commun de l'enseignant et des élèves est avant tout l'engagement dans la résolution du problème proposé et l'élaboration de résultats au moins partiels, la genèse de savoirs sur des objets mathématiques nouveaux ;
- où la dimension expérimentale est fortement présente.

Ce qui est au cœur d'une situation didactique de recherche de problèmes, c'est donc le problème mathématique. Il définit le projet commun et donne le sens de l'action. Cependant, il ne permet pas en lui-même les apprentissages et c'est la mise en œuvre de la situation didactique de recherche de problèmes qui doit les garantir. Aldon et ses collègues (2010) ont élaboré, mis en œuvre en classe et analysé sept situations didactiques de recherche de problèmes sur des thématiques variées, du cycle 3 à l'université. Nous renvoyons le lecteur au site du groupe DREAM⁶ pour les découvrir.

1.F.c. Gestes de la recherche pour décrire et analyser l'activité de recherche

Nous avons emprunté la notion de « geste » à la philosophie des mathématiques (Cavaillès, 1938, 1994 ; Châtelet, 1993, et Bailly & Longo, 2003) et nous l'avons développée pour analyser l'activité effective de recherche d'un problème mathématique. Dans les travaux de Cavaillès (1938), repris par Cassou-Noguès (2001), on trouve trois gestes de nature différente. Le geste naturel est une manipulation de signes mathématiques (par exemple, des chiffres, des symboles algébriques ou encore des figures géométriques). Lorsque ce geste s'effectue dans un milieu propre au travail mathématique, il devient un geste combinatoire, c'est-à-dire soumis à des règles d'emploi de ces signes. Il relève de la dimension syntaxique. Le geste opératoire, quant à lui, renvoie à l'acte de pensée associé au geste combinatoire. Il est défini comme un procédé ou une opération sur des objets mathématiques. Il relève de la dimension sémantique. Voici un exemple pour illustrer ces

⁵ Pour en savoir plus, consulter le site <https://dreamaths.univ-lyon1.fr/>

⁶ <https://dreamaths.univ-lyon1.fr/>

trois gestes : imaginons un enfant qui joue avec des magnets représentant des chiffres et les signes + et =. Par un geste naturel, l'enfant utilise ces magnets, sans intentionnalité mathématique, et juxtapose par exemple les signes $3 = 2 +$. Le geste devient combinatoire si l'enfant respecte les règles d'utilisation des signes mathématiques, par exemple le signe + doit être complété à gauche et à droite, de même que le signe =. L'enfant peut alors écrire $2 + 3 = 7$. Enfin, le geste est qualifié d'opérateur si la mise en relation des trois nombres par l'opération est correcte mathématiquement, ce qui conduit l'enfant à écrire $2 + 3 = 5$.

Cavaillès définit ensuite l'expérience comme un système de gestes et Cassou-Noguès précise alors que « l'expérience mathématique serait un double système de gestes : gestes combinatoires dans les espaces combinatoires, gestes opératoires dans les théories mathématiques » (Cassou-Noguès, 2001, p. 13). Ce ne sont pas deux actes distincts mais un seul acte qui se déploie comme combinatoire et opératoire. Cette double facette donnée au geste unifie et articule les dimensions sémantique et syntaxique de l'activité mathématique. Enfin, il met en évidence le pouvoir de créer de nouveaux objets mathématiques au moyen de l'expérience, donc au moyen de gestes.

Cette étude nous a amené à la notion de geste de la recherche que nous définissons comme suit : un geste est un acte de mise en relation d'objets mathématiques dans une intentionnalité. Il possède un pouvoir de créer (de nouveaux objets mathématiques) dans sa possibilité d'ouvrir le champ des possibles dans le travail mathématique, en saisissant l'intuition au moyen d'une expérience (Gardes, 2013, p.155). Dans nos travaux, nous avons identifié sept gestes de la recherche (Gardes, 2013, pp.162-165). Nous choisissons de présenter les trois gestes qui seront utilisés dans la suite de l'article :

- **Désigner un objet** : il s'agit de représenter cet objet par le langage ou par un signe. Ce geste permet d'articuler les dimensions syntaxique et sémantique d'un objet : en représentant un objet par un signe, on peut ensuite effectuer des opérations sur les signes sans toujours se référer aux objets qu'ils désignent ;
- **Construire des exemples et les questionner** : il s'agit de déterminer une méthode de construction des exemples à partir de manipulations des objets mathématiques et un questionnement de ces différents exemples dans le but d'en dégager des informations. Ce geste est porteur de l'articulation syntaxe/sémantique dans la mesure où le travail mathématique s'appuyant sur des exemples est un moyen de construire une syntaxe sur les objets ;
- **Effectuer des contrôles locaux** : il s'agit de vérifier les différentes étapes des manipulations et combinaisons de signes dans les écritures mathématiques. Ce geste favorise une articulation syntaxe/sémantique car il s'agit de faire référence aux objets désignés par les signes en les positionnant au premier plan.

La notion de geste de la recherche est un outil permettant, d'une part de caractériser la nature de l'activité mathématique relative aux manipulations d'objets et aux élaborations théoriques, et d'autre part d'identifier les éléments déclencheurs des allers et retours entre ces activités. Il permet ainsi de mettre en évidence les éléments moteurs dans l'avancée de la recherche du problème et l'élaboration de preuves.

1.G. Descriptif du dispositif

Il s'agit d'un dispositif de formation de futurs enseignants de mathématiques proposé dans le cadre du master MEFF. Il se déroule sur les deux années du master : trois séances de deux heures en M1 et six séances de deux heures en M2. L'objectif est d'étudier l'activité de recherche mathématique, sur le plan épistémologique et didactique, en utilisant les outils issus de l'étude EPCC et décrits dans la partie précédente. Nous cherchons à interroger, avec les étudiants les éléments suivants : la nature de l'activité de recherche mathématique, les caractéristiques d'un problème mathématique favorisant une activité de recherche, la mise en œuvre d'une activité de recherche mathématique dans l'enseignement secondaire.

Dans cet article, nous ne décrivons pas l'ensemble du dispositif, nous nous centrons sur quatre points clés. Le premier est la mise en situation des étudiants : nous leur faisons vivre la recherche d'un problème (figure 4) lors de la première séance du dispositif, en M1.

Peut-on trouver deux nombres entiers naturels distincts, a et b tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$? Peut-on trouver trois entiers naturels distincts a , b et c tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$? Peut-on trouver quatre entiers naturels distincts a , b , c et d tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$? etc.

Figure 4 - Énoncé du problème "Fractions égyptiennes" proposé aux étudiants

Le scénario proposé est le suivant : une phase de recherche individuelle (10 minutes), une phase de recherche en petits groupes (environ 1h), une mise en commun des productions de chaque groupe (30 minutes), suivi d'un débat de validation (15 minutes). Lors de la phase de recherche, il est demandé à chaque groupe de produire un document présentant leurs résultats mathématiques obtenus sur le problème et identifiant les connaissances mathématiques et les heuristiques de résolution de problèmes qu'ils ont utilisées (voir des productions d'étudiants en annexe D). La séance se termine par une synthèse sur la solution du problème mathématique⁷. L'objectif de cette séance est qu'ils se confrontent à l'activité de recherche mathématique pour qu'ils puissent ensuite la questionner d'un point de vue épistémologique et didactique.

Le deuxième point-clé du dispositif est une séance consacrée à l'analyse de travaux d'élèves, sur le même problème (séance 2, M1). L'objectif est d'amener les étudiants à identifier ce qu'on peut travailler, avec des élèves, à partir de leurs recherches. Nous leur présentons les productions de quatre groupes d'élèves⁸ et pour chaque production, les étudiants doivent : expliciter les procédures mises en œuvre par les élèves, repérer les difficultés des élèves, préciser les connaissances mathématiques mobilisées, analyser les méthodes et raisonnements utilisés. Pour ce dernier point, nous leur présentons un outil issu de l'EPCC : les gestes de la recherche pour décrire et analyser l'activité de recherche des élèves. Sur l'extrait suivant, nous les amenons par exemple à identifier que les élèves utilisent le geste de construire et questionner leurs exemples afin de déterminer des régularités et essayer de généraliser.

⁷ Voir l'analyse mathématique du problème sur le site du groupe DREAM de l'IREM de Lyon : https://math.univ-lyon1.fr/dream/?page_id=1026

⁸ Des extraits de ces productions sont disponibles dans (Gardes, 2018).

Élève D : J'ai trouvé sur la calculatrice $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$ attention, je vais vérifier...

Élève A : Comment t'as fait ?

Élève D : La fraction la plus petite avec des entiers c'est $\frac{1}{2}$; tu peux pas avoir une fraction d'entiers plus petite.

Élève C : Ah oui, t'as raison.

Élève D : Le 1 c'est pas possible, la fraction la plus petite c'est $\frac{1}{2}$.

Élève B : Tu peux expliquer ?

Élève D : Pour 2, la solution est : $a = 2, b = 3, c = 6$; et pour 3, c'est $a = 2, b = 3, c = 9, d = 18$.

Élève A : Pourquoi le 1 n'est pas possible ?

Élève D : On met les premières [il écrit : $\frac{1}{1} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{4}$ et en-dessous : 1 ; 0,5 ; 0,33 ; 0,25]. Comment tu peux faire ? C'est pas possible. J'en suis sûr. J'ai pris le chiffre le plus petit sans que ça arrive à 1. C'est le truc des fractions égyptiennes : $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, j'ai pris le nombre au-dessus : $\frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$. On peut continuer en mettant au lieu de 18...

[...]

Élève D : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{26} + \frac{1}{486} + \frac{1}{936}$ tu changes les deux derniers

Élève B : ça va s'arrêter après ?

Élève D : c'est moi qui l'arrête quand je veux. Et il écrit $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$; $\frac{1}{15} - \frac{1}{20} = \dots$, il faut que $b < 2a$ tout en étant entier

Dans l'extrait suivant, nous mettons en évidence que les élèves cherchent à contrôler les manipulations qu'ils effectuent sur l'expression $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ en revenant au sens des objets désignés par a et b , à savoir des nombres entiers naturels. Cela leur permet d'avancer dans la formulation d'arguments pour montrer qu'il n'existe pas d'entiers naturels distincts a et b tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

Elève D : entiers donc pas de virgule

Elève B : c'est pas possible

Elève E : si

[L'élève B réduit au même dénominateur et arrive à $a + b = ab$]

Elève B : c'est pas possible car ce sont des entiers naturels donc pas négatifs

Elève D : on ne peut pas avoir 0

Elèves B et C : Impossible car on a toujours $ab > a + b$

Ensuite, nous demandons aux étudiants de se projeter dans la classe en imaginant la phase de mise en commun, débat et institutionnalisation. Nous leur demandons de : proposer un ordre de passage

des groupes pour la présentation de leur affiche ; proposer une institutionnalisation à partir des travaux des quatre groupes. Pour choisir l'ordre de passage des groupes, trois critères peuvent être utilisés : la justesse des résultats trouvés, la clarté des explications apportées et la présence d'éléments de preuve. L'objectif est de valoriser le travail de chaque groupe d'élèves et d'avancer progressivement vers la solution la plus aboutie. Nous insistons ensuite sur une institutionnalisation qui porte, à la fois sur des connaissances notionnelles (nature et écriture des nombres, fractions et opérations sur les fractions, équation, calcul algébrique et équivalence, inverse d'un nombre non nul) et à la fois sur des heuristiques de résolution de problèmes (étude de cas particuliers, rôle du contre-exemple, formulation d'une conjecture, raisonnement par disjonction de cas, etc.).

Le troisième point-clé du dispositif est d'amener les étudiants à identifier les problèmes qui peuvent permettre aux élèves de développer une activité de recherche mathématique. Pour cela, nous leur proposons un outil issu de l'EPCC : les caractéristiques d'un problème de recherche. Nous leur proposons différents problèmes et nous leur demandons d'identifier s'ils sont de bons candidats pour permettre une activité de recherche mathématique pour des élèves (séance 3 en M1). Nous confrontons, par exemple, un problème de type Brevet (examen de fin collège en France) et un problème de recherche (figure 5) pour mettre en évidence que l'activité mathématique des élèves sera différente lors de la résolution de ces deux problèmes. L'étude des caractéristiques d'un problème de recherche met en évidence que le problème 1 a, certes, un énoncé assez court mais la formulation des questions donne les réponses (montrer que...) et n'engage pas les élèves dans une démarche de type expérimental. De plus, les connaissances visées sont essentiellement notionnelles (application du théorème de Pythagore et de propriétés géométriques). A contrario, le problème 8 un énoncé très court (une phrase), il n'induit pas de méthode de résolution et il se situe dans un contexte familier des élèves, celui des nombres entiers et des opérations. Pour l'aborder, les élèves peuvent mettre en œuvre une démarche de type expérimental en essayant sur de petits nombres, en cherchant des régularités pour généraliser et en formulant des conjectures et des arguments de validation. La recherche permet de mobiliser des connaissances notionnelles (nombres entiers, additions, multiplication, numération décimale) et des heuristiques (étudier des exemples, formuler des conjectures, argumenter, etc.).

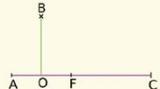
<p>Problème 1 (extrait de SESAMATH Quatrième p.150-151)</p>	<p>57 Extrait du Brevet Les points A, O, F et C sont alignés. AC = 15 cm ; AO = OF = 3 cm ; BO = 6 cm. Les droites (AC) et (BO) sont perpendiculaires.</p>  <p>a. Construire la figure en vraie grandeur. b. Montrer que $AB^2 = 45$ et que $BC^2 = 180$. c. Montrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires. d. Tracer le cercle de diamètre [FC], il coupe (BC) en H. e. Montrer que le triangle FHC est rectangle. f. Montrer que les droites (AB) et (FH) sont parallèles.</p>	<p>Problème 8 (Source : Site Dreamaths)</p> <p>Chercher, parmi toutes les décompositions additives d'un entier, celle(s) dont le produit des termes est le plus grand.</p>
--	---	---

Figure 5 - Exemple de deux problèmes à comparer du point de vue de leur potentiel pour pratiquer une activité de recherche mathématique.

La quatrième point-clé est l'élaboration et la mise en œuvre en classe d'une situation didactique de recherche de problème. Six séances en M2 sont consacrées à ce travail. Deux séances portent sur

l'élaboration d'une situation didactique de recherche de problème et son analyse a priori. Pour la conception de la situation, nous utilisons, avec les étudiants, deux outils issus de l'étude EPCC, les caractéristiques des problèmes de recherche et les caractéristiques d'une situation didactique de recherche de problème. Cela les amène à penser au milieu didactique de la situation, aux rôles des élèves et de l'enseignant pour favoriser une activité de recherche mathématique. Pour l'analyse a priori, les gestes de la recherche sont utilisés afin de décrire l'activité de recherche potentielle des élèves lors de la résolution du problème. Deux séances se focalisent ensuite sur le débat : l'une amène les étudiants à analyser le travail mathématique des élèves lors d'un débat à partir de verbatim (productions écrites et échanges oraux) et l'autre porte sur la gestion d'un débat à partir d'un jeu de rôle (préparation, animation d'un débat, institutionnalisation à partir des échanges et productions des élèves). Enfin, deux séances sont consacrées à la préparation de la mise en œuvre de la situation en classe, par petits groupes, puis à l'analyse de leur pratique, suite à la mise en œuvre dans leur classe. Lors de cette dernière séance, plusieurs éléments ressortent des expériences des étudiants : le changement de leur posture en tant qu'enseignant, de la transmission du savoir à l'observation du travail mathématique des élèves, la nécessité et l'intérêt de laisser du temps aux élèves pour qu'ils puissent pratiquer une activité de recherche, notamment pour permettre un questionnement sur la preuve, l'engagement de tous les élèves, y compris ceux en difficulté dans la recherche du problème. Ils soulignent également l'exigence des compétences professionnelles pour mener de telles situations, notamment la gestion du travail en petits groupes et du débat en classe.

1.H. Conclusion sur ce dispositif

Très peu d'étudiants ont été confrontés, lors de leurs études, à une activité de recherche en mathématiques. Ils expriment souvent avoir une image assez procédurale et applicative des mathématiques et de l'enseignement des mathématiques. Les retours sur le dispositif mis en place montrent qu'ils réussissent à se saisir des intérêts d'un enseignement des mathématiques fondé sur la recherche de problèmes. Ces intérêts sont d'ordre épistémologique, donner une raison d'être aux objets mathématiques étudiés à l'école, d'ordre didactique, construire de nouvelles connaissances, approfondir et consolider des connaissances, développer des compétences comme chercher, raisonner, modéliser et d'ordre institutionnel, répondre aux instructions officielles qui mettent au cœur de l'apprentissage des mathématiques la résolution de problèmes. Les outils mis à disposition dans ce dispositif (gestes et caractérisations) permettent aux étudiants d'identifier la nature du travail mathématique effectué par les élèves dans la recherche de problèmes, de l'analyser, de le relier aux éléments mentionnés dans les programmes et de l'utiliser pour construire des institutionnalisations (de connaissances notionnelles et d'heuristiques). L'appui sur les travaux du groupe DREAM de l'IREM de Lyon permet de réaliser des analyses de réelles productions d'élèves avec les étudiants et de rendre compte de la faisabilité de mettre en œuvre un enseignement fondé sur la recherche de problèmes en classe, au sein de progressions prenant en compte les instructions des programmes.

Conclusion

Dans cet article, nous avons décrit la conception et les contenus de deux dispositifs de formation à l'Université visant à interroger l'enseignement d'une activité mathématique de résolution de problèmes d'un point de vue épistémologique et didactique. Nous pouvons faire ressortir trois idées

directrices qui structurent ces formations. La première prend en compte notre intention de mettre les étudiants en position de chercheur, d'une part en leur faisant vivre la recherche d'un problème, comme un chercheur en mathématiques ; et d'autre part en leur faisant vivre une partie des analyses didactiques sur l'activité mathématique vécue, comme un chercheur en didactique. Nous faisons l'hypothèse qu'expérimenter cette double position de chercheur leur permet de développer une compréhension plus approfondie de l'activité mathématique concernée et d'en percevoir l'intérêt pour l'enseignement des mathématiques. La seconde idée directrice est de mettre à disposition des étudiants des outils issus de résultats de recherche pour caractériser des situations porteuses de l'activité mathématique visée et pour identifier et analyser des traces de cette activité dans des productions d'élèves. La troisième est de présenter et d'analyser des dispositifs d'enseignement existants dans l'enseignement qui permettent aux élèves de vivre une activité mathématique. L'analyse de ces dispositifs d'enseignement permet de mettre en évidence pour les étudiants à la fois la faisabilité de transposer à la classe des éléments de pratiques de chercheurs et les effets de cette transposition sur les apprentissages des élèves.

Nous espérons que cet article suscite chez des collègues l'envie de s'emparer de ces dispositifs de formation et de les mettre en place dans leurs enseignements. De plus, les idées directrices identifiées nous semblent transférables pour concevoir des dispositifs de formation sur une autre activité mathématique (par exemple l'activité de définition, de preuve, de raisonnement) en s'appuyant en amont sur une étude EPCC. Pour nous, nul doute que les connaissances et compétences mathématiques de nos étudiants n'en seront que plus enrichies !

Annexe A : L'énoncé de 'l'arbre'

L'arbre

Des botanistes du Jardin des Plantes ont rapporté un arbre exotique inconnu, dont on vient de découvrir l'espèce. Pour étudier cette nouvelle espèce, les botanistes ont réalisé les croquis de l'arbre chaque année depuis 2013.



Schémas de l'arbre en novembre 2013, novembre 2014 et novembre 2015.

Les botanistes veulent faire construire une serre pour protéger l'arbre. Ils estiment qu'il aura atteint sa maturité en 2023. Pour les aider dans ce projet, prévoyez comment sera l'arbre en 2023 ?

Annexe B : Travaux d'étudiants

Quels aléas environnementaux on prend en compte ?

- Peut-être que cette question ne peut pas être traitée en même temps que le problème de croissance. Nous pourrions modéliser la croissance de manière générale, sans aléas environnementaux, et si nous devons nous intéresser aux aléas (nous pourrions prendre le gel par exemple en compte) alors créer un autre modèle à rajouter au premier.

Est-ce qu'on prend en compte les angles ?

- A fortiori, les branches vont à un moment se croiser, bien avant 2023. Il faudrait simplifier le modèle (et donc ne pas prendre en compte les angles, ou alors très grossièrement) parce que l'arbre n'est pas aussi régulier.

Est-ce que l'arbre à une croissance continue ?

-théoriquement non ! Un jeune arbre pousse vite pour avoir le plus de soleil possible mais à un certain âge il faut que le tronc et les anciennes branches grossissent afin de pouvoir supporter les nouvelles branches donc la croissance ralentit.

On le constate déjà si on mesure la longueur du tronc et aussi des nouvelles branches.

Est-ce que l'on est sûr que l'arbre va suivre la même logique de croissance ?

- A des fins méthodologiques, on suppose que oui.

Est-ce que toutes les ramifications respectent la règle de : si 3 l'année $n-1$, avec les trois ramifications à l'année n possèdent 2, 2 et 3 ramifications ? Ou si 2 l'année $n-1$, alors les ramifications résultantes présentent 2 et 3 branches ? Est-ce que modèle est valable ?

Combien de ramifications y'aurait-il en 2023 ? Comment les compter et mesurer ?

On peut modéliser un pattern de ramifications :

- quand il y a 2 branches à un noeud, 2 branches puis 3 branches poussent donc 5 branches
- Quand il y a 3 branches à un noeud, 3 puis 2 puis 2 branches poussent donc 7 branches

Donc avec ça on peut réussir à trouver le nombre de ramifications (on n'a pas eu le temps de calculer)

Annexe C : Productions d'élèves à analyser

Q_{grandeurs_M} : Quelle est la distance à respecter entre la serre et l'arbre ?

« On doit simplement connaître la taille de l'arbre en 2023, on n'a donc pas besoin de savoir la distance entre la serre et l'arbre. »

Q_{contexte-F} : Est-ce que l'arbre a ou aura des feuilles ? On ne peut pas savoir, mais on peut supposer qu'elles constituent 5 % du volume total.

Q_{modèle-modèle} : L'arbre penchera-t-il ?

« On ne peut pas savoir mais on peut supposer que l'on mettra des tuteurs pour qu'il reste droit ! »

Q_{modèle-Proportionnalité} : Est ce que les arbres évoluent de manière proportionnelle ?

« Compte-tenu du contexte naturel les arbres n'évoluent pas de manière proportionnelle, mais pour la résolution on va considérer que oui. »

Q_{modèle-modèle} : Comment évolue la taille des branches qui s'ajoutent chaque année ?

« La taille des branches diminue car elles sont plus nombreuses et qu'il y a moins de place. »

Q_{modèle-serre} : De quelle forme doit-être la serre ?

« Cela dépend des matériaux utilisés, mais un cube est plus simple ou un pavé »

Q_{grandeurs_M} : Ses racines grandissent de combien par année ?

« Cela n'a pas d'importance, car les racines poussent sous terre et donc elles ne posent pas de soucis pour la serre. »

Q_{contexte-Besoins} : L'exposition au soleil ou l'arrosage ont-ils un rapport avec la taille de l'arbre ?

« Nous pensons que non, sinon l'énoncé comporterait davantage d'informations sur ce sujet. »

Q_{contexte-arbre} : D'où vient l'arbre ?

« On ne sait pas mais cela ne nous semble pas important »

Q_{modèle-serre} : Quelle est la forme de la serre ?

« Nous pensons à un demi-cylindre ou encore un tétraèdre. »

Q_{grandeurs_I} : Taille-t-on l'arbre ?

« Il faut supposer que non pour se simplifier la tâche. »

Q_{grandeurs_I} : Doit-on prendre en compte que la hauteur ou aussi la largeur ?

« On doit prendre en compte les 2, car la serre devra avoir un toit (hauteur) et des murs (largeur) »

Q_{modèle-Proportionnalité} : La mesure de l'arbre double-t-elle chaque année ?

« La mesure de l'arbre ne peut pas doubler chaque année parce que sinon il atteindrait vite des hauteurs démentielles. »

Q_{modèle-serre} : Quelle sera la forme de la serre ?

« On ne sait pas on peut imaginer une sphère mais ce serait plus simple avec un pavé pour la construction ! »

Q_{grandeurs_I} : Est-ce que durant les années, on a taillé l'arbre ?

« On ne peut pas savoir mais on va considérer que non. On va négliger ces informations pour la résolution du problème. »

Q_{grandeurs_M} : Quelle est la circonférence des branches de l'arbre en novembre 2013-2014 et 2015 ?

« On mesure le diamètre sur le dessin, et on trouve 1mm la 1ère année, on convertit en grandeur réelle grâce à l'échelle : 1 m est représenté par 2,8 cm, donc 1 mm représente 3,57 cm. On multiplie par pi pour obtenir la circonférence, ce qui donne : En 2013 : 11,21 cm ; en 2014 : 22,43 cm ; en 2015 : 33,64 cm »

Q_{contexte-F} : Est-ce que l'arbre possédera des feuilles ?

On pense que oui mais on pense négliger la taille des feuilles pour la résolution du problème.

Q_{contexte-Botaniste} : Si les chercheurs ont laissé l'arbre dehors tout le temps, comment pouvaient-ils savoir qu'un changement brusque de température n'allait pas tuer l'arbre ou lui implanter des maladies ?

« Justement, ils construisent une serre pour pouvoir contrôler la température et éviter les maladies. »

Q_{grandeurs_I} : Est-ce qu'on compte que les nouvelles branches ou toutes les branches ?

*« On a choisi de les compter toutes, les nouvelles et les vieilles, ça revient au même. Un groupe a calculé le nombre de branches en 2013 puis a trouvé une technique pour calculer le nombre de branches à chaque année : 2013 : 3 ; 2014 : $3*2 + 1 = 7$; 2015 : $7*2 + 3 = 17$; 2016 : $17*2 + 7 = 41$... 2023 : il trouve 19601 branches »*

Q_{grandeurs_M} : Combien de branches poussent chaque année et combien en aura-t-il en 2023 ?

« On a cherché à partir des dessins si on pouvait trouver une relation de proportionnalité pour déterminer le nombre de branches qui poussaient chaque année mais on n'en a pas trouvé, il faudrait faire des hypothèses. »

Q_{grandeurs_I} : Est-ce que le tronc de l'arbre s'arrête de grandir avant 2023 ?

« Nous pensons que non, puisqu'on peut lire l'âge d'un arbre lorsqu'on le coupe c'est que le tronc continue de grandir. »

Q_{modèle-Proportionnalité} : Comment on fait si ce n'est pas proportionnel ?

« On cherche autre chose : on part du principe qu'il doit y avoir une suite logique. (Les 1ères ont pensé à une fonction). Nombre de branches à ajouter chaque année : on pense qu'il faut additionner le nombre de branches en plus de l'avant-dernière année avec 2 fois celles de l'année précédente. Formule : $a+2b=c$ (a année 2013, b année 2014, c année 2015). Taille des branches : on a trouvé une formule : $a+b=c$ (taille en cm) »

Q_{grandeurs_M} : Quel est le diamètre du tronc chaque année ?

« Nous ne savons pas car il n'y a pas de généralité pour l'évolution du diamètre de l'arbre. Nous avons effectué un produit en croix après avoir mesuré le diamètre en 2013. »

Q_{contexte-Besoins} : L'orientation de la serre est-elle importante ?

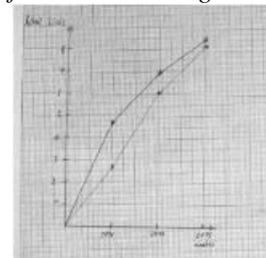
« Oui pour que l'arbre pousse bien mais pas pour répondre au problème. »

Q_{modèle-modèle} : La proposition « on multiplie toutes les épaisseurs du tronc précédentes entre elles » est-elle valide ? (Exemple année 4 : $2 \times 3 \times 6$ mm).

« Nous pensons que cette proposition n'est pas valide, l'épaisseur du tronc dépasserait 1 m en 2016. »

Q_{modèle-Proportionnalité} : L'arbre grandit-il proportionnellement chaque année ?

« Nous pensons que l'arbre ne grandit pas proportionnellement à son âge, car quand il aura atteint sa maturité, il grandira moins vite qu'avant (dans ses premières années). Nous avons pensé faire une analogie avec la



croissance d'un être humain. Certains élèves l'ont prouvé en dessinant un graphique

Q_{grandeurs_E} : Les trois croquis sont-ils à la même échelle ?

« Les 3 croquis sont à la même échelle car ce serait contre-productif pour une étude scientifique, de produire des schémas à des échelles différentes. »

Q_{modèle-schéma} L'arbre grandit en 2D ou en 3D ?

Généralement, un arbre pousse en 3D.

Q_{modèle-modèle} : Le nombre de branches évolue-t-il comme la suite de Fibonacci ?

« Non il suffit de regarder le nombre de branches sur les trois premiers dessins pour se rendre compte que le nombre de branches à une année n'est pas la somme du nombre de branches des deux précédentes. »

Q_{modèle-Proportionnalité} : Y-a-t-il proportionnalité entre les années et la taille de l'arbre ? Taille du tronc, en hauteur, en largeur de la ramure, en nombre de branches ?

« En utilisant l'échelle 3 cm sur le dessin = 1 m en réalité, on peut mesurer l'arbre chaque année, et on voit que le coefficient pour passer d'une année à une autre n'est pas constant, donc il n'y a pas proportionnalité. »

Q_{grandeurs_M} : Combien de branches poussent par an ?

« On suppose que le nombre de branches double chaque année. »

Q_{grandeurs_M} : Combien de mètres faut-il entre l'arbre et la serre ?

« Au niveau de la largeur, on pense qu'il faut plusieurs mètres, pour qu'un tracteur puisse passer par exemple. Au niveau de la hauteur, on pense qu'il faut également plusieurs mètres, pour que le soleil ne brûle pas les feuilles par exemple. »

Q_{modèle-modèle} : Comment compte-t-on le nombre de branches ?

« On compte les branches à partir de 3 branches, 7 apparaissent, puis 17 et ainsi de suite ce qui donne un coefficient de proportionnalité de 2,4 et donc en 2023 il y aura 18938 branches. »

Q_{grandeurs_M} : Au bout d'un an, combien de branches arrivent environ et de quelle taille seront ces nouvelles branches ? Le développement des branches sera-t-il toujours identique ?

« Nous n'avons pas vraiment cherché le nombre de branches. Mais on doit supposer que le développement des branches est identique chaque année, sinon on ne peut rien prévoir. »

Q_{contexte-Arbre} : Pourquoi l'arbre est-il schématisé en novembre ?

« L'arbre est schématisé en novembre car il a été découvert ce mois-là. On suppose que l'arbre est un feuillu est qu'il perd ces feuilles. Il est donc plus facile de l'observer et de le schématiser sans ces feuilles. L'arbre est schématisé en novembre car c'est à cette période de l'année qu'il pousse. »

Q_{grandeurs_I} : Est-ce que les branches de l'arbre vont grossir en largeur ?

« Oui car avec les années, le bois grossit »

Q_{modèle-Proportionnalité} : Est-ce proportionnel ?

« La taille de l'arbre n'est pas proportionnelle à son âge, nous avons mesuré l'arbre chaque année en l'encadrant dans un rectangle, et les dimensions du rectangle chaque année ne sont pas proportionnelles (il tend à devenir un carré) »

Q_{modèle-serre} : Quelle forme doit prendre la serre ?

« Plutôt ronde pour le soleil »

Q_{modèle-modèle} : Quelle est la probabilité que d'une branche naissent 3 branches ?

« Probabilité de 8/21 d'obtenir 3 branches et probabilité de 13/21 d'obtenir 2 branches. »

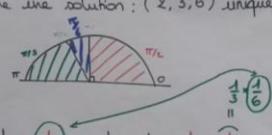
Annexe D : Productions d'étudiants sur le problème « Fractions Égyptiennes »

RÉSULTATS

• $n=2$: impossible

Soit $a < b$, si $a=1$ alors $1 + \frac{1}{b} > 1$
 si $a=2$ alors $\frac{1}{2} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b=2$
 si $a > 2$ alors $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1$

• $n=3$: Il existe une solution : $(2, 3, 6)$ unique



• $n=4$: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$

• $n=k$: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 9} + \frac{1}{3 \times 9} + \dots + \frac{1}{3^{k-4} \times 9} + \frac{1}{3^{k-3} \times 6}$

COMPÉTENCES ET CONNAISSANCES

- Chercher : il faut tester un des petites valeurs de
- Reasonner : séparer la fraction en deux termes et itérer ce processus
- Communiquer : à travers l'affiche

→ Comparer des nombres
 → Manipuler des fractions

NIVEAU SCOLAIRE : Cycle 4

<p>$n=2$ IMPOSSIBLE</p> <p>On suppose $x_1 < x_2$ Si $x_1=1$ pas de solution Si $x_1=2$ alors $x_2=x_1=2$ or $x_1 < x_2$ Si $x_1 > 2$ alors $\frac{1}{x_1} < \frac{1}{2}$ donc On veut $\frac{1}{x_2} > \frac{1}{2}$ or $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} < \frac{1}{2}$ Donc pas de solutions</p>	<p>On suppose qu'il existe x_1, x_2 tels que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$ $\Leftrightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{x_2-1}{x_2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{x_2}{x_2-1}$ (avec $x_2 \neq 1$) Or $x_1 \in \mathbb{N}$ donc $x_2-1 \mid x_2$ ce qui est impossible pour $x_2 > 2$</p>
<p>$n=3$ POSSIBLE $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$</p> <p>remarque : Ce triplet est unique</p>	
<p>$n \geq 3$ POSSIBLE</p> <p>Montrons le par récurrence :</p> <p><u>Hérédité</u> : Soit $n \geq 3$ tel que il existe (x_1, \dots, x_n) vérifiant $\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1$. Alors $\frac{1}{2x_1} + \dots + \frac{1}{2x_n} + \frac{1}{2} = 1$. Donc il existe (x_1', \dots, x_{n+1}') tels que $\frac{1}{x_1'} + \dots + \frac{1}{x_{n+1}'} = 1$.</p>	
<p>Connaissances : calcul littéral, opérations sur les fractions, divers modes de raisonnement (absurde)</p>	

Références

- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage
- Aldon, G., Cahuet, P.-Y., Durand-Guerrier, V., Front, M., Krieger, D., Mizony, M., & Tardy, C. (2010). *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. Cédérom INRP.
- Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème*. Université Claude Bernard Lyon I.
- Arsac, G., & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Lyon, France : SCEREN-CRDP Académie de Lyon.
- Bailly, F., & Longo, G. (2003). Incomplétude et incertitude en Mathématiques et en Physique. Consulté le 4 décembre 2012 sur <http://www.di.ens.fr/users/longo/files/PhilosophyAndCognition/incompl-incert.pdf>
- Bkouche R. (2008). Du caractère expérimental des mathématiques. *Repères IREM*, 70, 33-76.
- Blum, W., & Leiss, D. (2007). How the students and teacher deal with mathematical modelling problems? In C. Haines, G. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Eds), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222–231). Chichester : Horwood Publishing.
- Cassou-Noguès, P. (2001). *De l'expérience mathématique. Essai sur la philosophie des sciences de J. Cavailles*. Paris : VRIN.
- Cavaillès, J. (1938). *Méthode axiomatique et Formalisme*. Paris : Hermann.
- Cavaillès, J. (1994). *Œuvres complètes de philosophie des sciences*. Paris : Hermann.
- Châtelet, G. (1993). *Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie*. Paris : Éditions du Seuil.
- Chabot, H. & Roux, S. (2011). *La mathématisation comme problème*, Archives contemporaines.
- Delattre, P. (1979). Le problème de la justification des modèles dans le cadre du formalisme des systèmes de transformations. In P Delattre et M. Thellier (Ed) *Actes du colloque" Elaboration et Justification des Modèles : Applications en Biologie (Vol. 1, p. 97-128)*.
- Dias T. (2008). La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage. *Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon I*.
- Durand-Guerrier V. (2010). La dimension expérimentale en mathématiques. Enjeux épistémologiques et didactiques. In *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. INRP Cédérom.
- Fehr, H. (1908). *Enquête de l'Enseignement Mathématique sur la méthode de travail des mathématiciens*. Gauthier-Villars.
- Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational studies in mathematics*, 3-8.

- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic.
- Front M. (2015). Émergence et évolution des objets mathématiques en situation didactique de recherche de problème : le cas des pavages archimédiens du plan. *Thèse de doctorat, Université de Lyon*.
- Gardes, M. L. (2013). Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres. *Thèse de doctorat, Université de Lyon*.
- Gardes, M.-L. (2017). Une étude d'épistémologie contemporaine sur l'activité de recherche mathématique de chercheurs : intérêt pour l'étude didactique. In M. Bächold, V. Durand-Guerrier & V. Munier, *Epistémologie & Didactique, Synthèses et études de cas en mathématiques et en sciences expérimentales (pp.177-192)*. Presses universitaires de Franche-Comté.
- Gardes, M.-L. (2018). Démarches d'investigation et recherche de problèmes. In G. Aldon, *Le Rallye mathématique, un jeu très sérieux ! (pp. 73-96)*. Canopé Editions.
- Grenier, D. & Payan, C. (2003). Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahier du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*. Paris.
- Halmos, P. R. (1985). *I want to be a mathematician: An automathography*. Springer Science & Business Media.
- Hubert, C. (2016). Modélisation : Complexifier ou simplifier ? Dans Alain Pavé (dir.), *Modélisation : succès et limites, CNRS & Académie des Technologies (p. 81-88)*. Paris, ISTE Éditions
- Hadamard, J. (1993). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*. Sceaux : Les Grands Classiques Gauthiers-Villars. Éditions Jacques Gabay.
- Irem de Montpellier, groupe ResCo (2014). La résolution collaborative de problèmes comme modalité de la démarche d'investigation. *Repères IREM*, 96, 73-96.
- Israël G. (1996). *La mathématisation du réel : essai sur la modélisation mathématique*. Paris, Seuil Eds.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press.
- Legay, J. M. (1997). *L'expérience et le modèle*. Paris, Inra Editions.
- Masselin, B. (2020). *Ingénieries de formation en mathématiques de l'école au lycée. Des réalisations inspirées des Lesson Studies*. Presses Universitaires de Rouen et du Havre
- Nimier, J. (1989). *Entretiens avec des mathématiciens : l'heuristique mathématique*. IREM de Lyon.
- Ouvrier-Bufferet, C., Gardes, M. L., Modeste, S., & Yvain-Prébiski, S. (2024). Étude épistémologique de pratiques contemporaines de chercheurs : caractérisation et apports pour la recherche en didactique des mathématiques. *Document de travail*. <https://hal.science/hal-04518907v1>

- Perrin D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x*, 73, 6-34.
- Poincaré, H. (1908). L'invention Mathématique. *Bulletin de l'Institut Général Psychologique*, 3, 175-187.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.
- Pólya, G. (1989). *Comment poser et résoudre un problème*. Sceaux : Editions Jacques Gabay.
- Rodriguez, R. (2007). Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S. *Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier-Grenoble I*.
- Schoenfeld, A. H. (2014). *Mathematical problem solving*. Elsevier.
- Schmid, A. (2009). Sciences, philosophies, modélisations : pour un nouvel usage de l'épistémologie. Dans Hervé D., Laloë F. (coord), 2009, *Modélisation de l'environnement : entre natures et sociétés* Paris coll. « Indisciplines », coédition Quæ/NSS-Dialogues, p. 181-190
- Thurston, W. (1995). Preuve et progrès en mathématiques. *Repères IREM*, 21, 7-26.
- Treffers, A. (1978). *Wiskobas Doelgericht*. Utrecht : IOWO
- Varenne F. (2008). *Epistémologie des modèles et des simulations*. HAL Id: hal-00674144 <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00674144>
- Villani, C. (2012). *Théorème vivant*. Paris : Grasset.
- Yvain, S. et Modeste, S. (2018). Faire entrer les élèves dans la mathématisation horizontale. Des fictions réalistes et un dispositif de résolution collaborative in *Proceedings of the CIEAEM 69 "Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)"*, n. 27, Supplemento n.2, 2017 p.288-296
- Yvain-Prébiski, S. (2018). *Etude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves* (Doctoral dissertation, Université de Montpellier).
- Yvain-Prébiski, S. (2021). Didactical adaptation of professional practice of modelling: a case study. In F.K.S. Leung, G.A. Stillman, G. Kaiser, K.L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. (p. 305-319). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_26
- Yvain-Prébiski, S. (2023). La mathématisation horizontale : quels apports pour une recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation mathématique. In Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques*. Volume des séminaires et des posters. ARDM & IREM de Paris. p.209-218. <http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/ACTESE21.pdf>

Marie-Line Gardes
Haute Ecole Pédagogique du Canton de Vaud, Lausanne, Suisse
e-mail: marie-line.gardes@hepl.ch

Sonia Yvain-Prébiski

Université Claude Bernard Lyon 1
S2HEP UR 4148
Villeurbanne, 69622, France
e-mail: sonia.yvain@univ-lyon1.fr