



HAL
open science

Introduction aux méthodes haute résolution de détection des angles d'arrivée

Patrick Vaudon

► **To cite this version:**

Patrick Vaudon. Introduction aux méthodes haute résolution de détection des angles d'arrivée. Doctorat. France. 2015. hal-04838346

HAL Id: hal-04838346

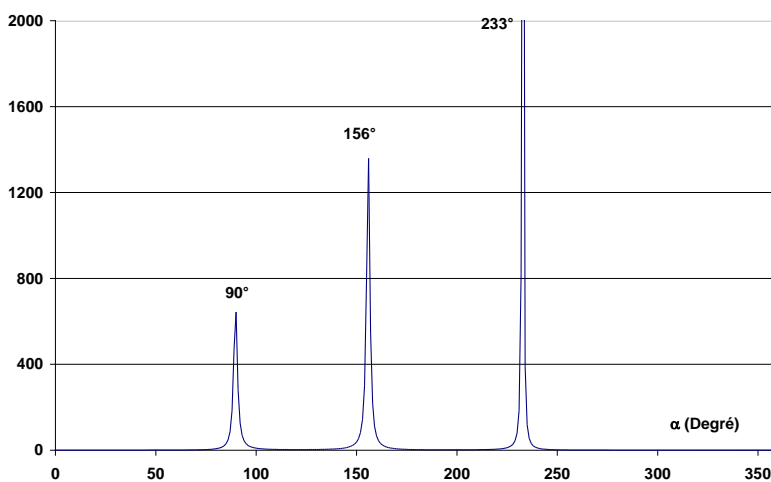
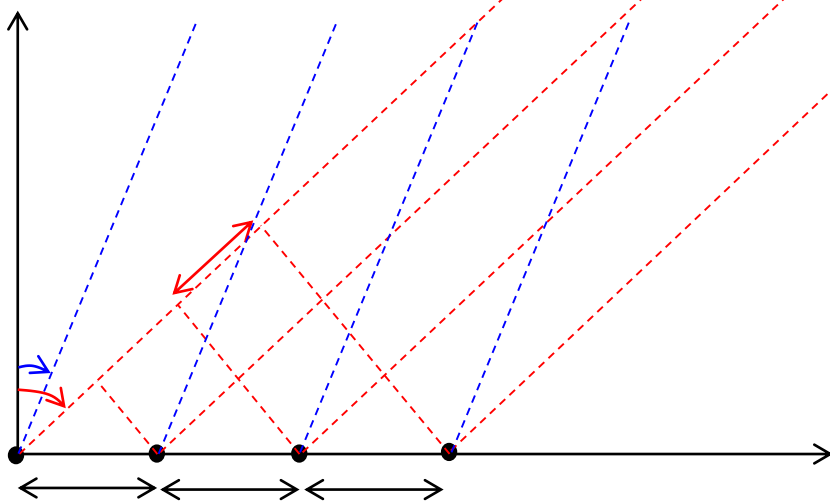
<https://hal.science/hal-04838346v1>

Submitted on 14 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Introduction aux méthodes haute résolution de détection des angles d'arrivée



Patrick VAUDON

Xlim - Université de Limoges – France

Table des matières

Introduction aux méthodes haute résolution de détection des angles d'arrivée

I - Détection des angles d'arrivée : généralités	3
II - Propriétés des matrices hermitiennes	7
III - Propriétés de la matrice d'autocorrélation	23
IV - Décomposition en sous espaces	31
V - La méthode MUSIC standard.....	37
VI - La méthode Root MUSIC	43
VII - La méthode ESPRIT.....	50
Bibliographie.....	58

I - Détection des angles d'arrivée : généralités

La plupart des systèmes de télécommunications mobiles établissent le lien entre émetteur et récepteur sans que chacun des deux ne connaisse rien de la position de l'autre.

Dans ces conditions chaque système, lorsqu'il est en position d'émetteur, doit engendrer un rayonnement électromagnétique omnidirectionnel pour avoir l'assurance d'une transmission correcte des données vers le récepteur (Figure I-1)

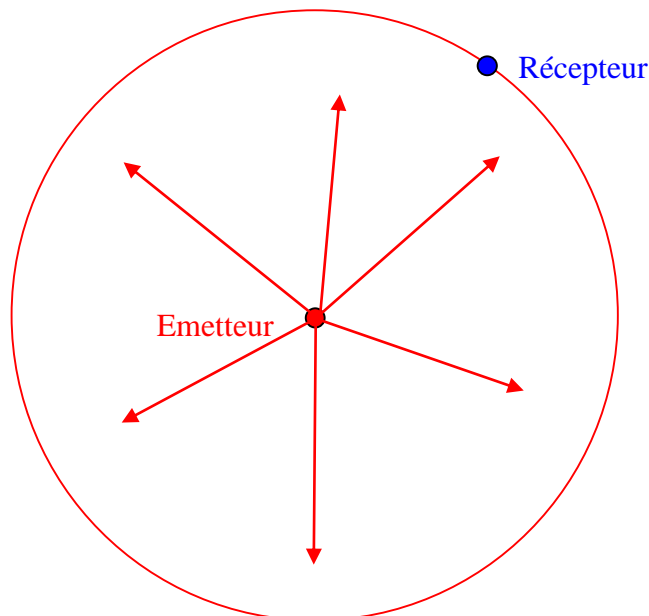


Figure I-1 : *Rayonnement omnidirectionnel de l'émetteur*

Il apparaît qu'une telle manière de procéder génère une dépense d'énergie inutile considérable puisque dans toutes les directions autres que celle du récepteur cette énergie est rayonnée en pure perte.

Une idée simple consiste à imaginer un dispositif qui localise la direction du récepteur, après quoi une technique classique de pointage électronique permettra de canaliser l'essentiel de l'énergie rayonnée dans sa direction (Figure I-2).

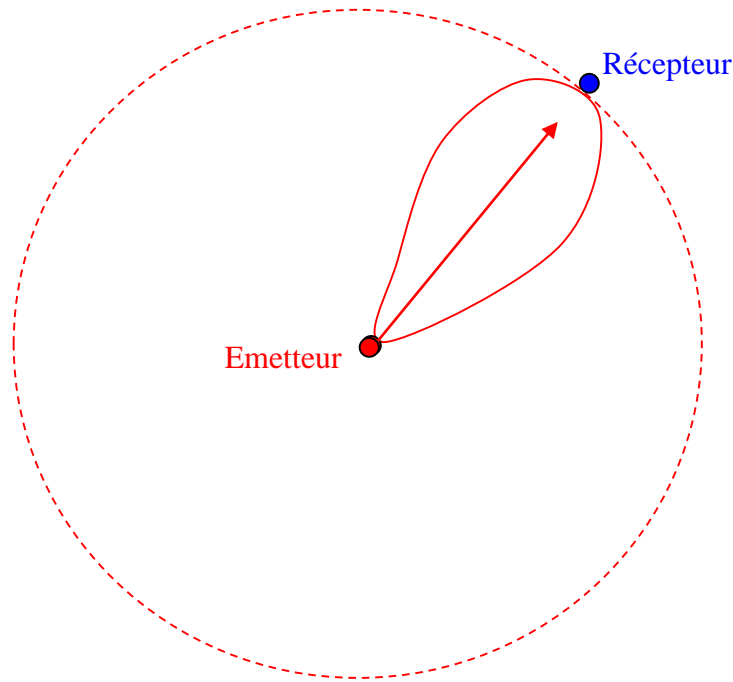


Figure I-2 : concentration de l'énergie rayonnée en direction du récepteur.

On désigne par antenne intelligente une antenne qui est associée à un dispositif complet permettant la détection de l'angle d'arrivée et la formation du diagramme de rayonnement en direction du récepteur.

Une antenne intelligente permet une économie d'énergie très importante puisqu'elle focalise l'énergie électromagnétique dans la direction du récepteur. Elle contribue de cette manière au développement durable et limite la pollution électromagnétique omniprésente dans notre environnement.

Le premier maillon de la chaîne de traitement du signal sera un dispositif de détection de la position du récepteur. Cette détection peut s'effectuer au moment de la demande de communication, phase pendant laquelle le correspondant n'est pas encore localisé.

Nous allons nous intéresser essentiellement dans ces éléments de cours à quelques méthodes qui permettent de localiser l'émetteur. Le lecteur intéressé par une mise en œuvre complète du dispositif pourra utilement consulter la thèse de Moctar MOUHAMADOU qui décrit dans le détail la réalisation et le test d'un démonstrateur d'antenne intelligente.

Afin de cerner à la fois les insuffisances et les difficultés inhérentes à chaque méthode, nous examinerons successivement des situations de complexité croissante, en commençant, dans un objectif pédagogique par des exemples basiques

Toutes les méthodes traiteront des problèmes à une dimension où la détection est effectuée à l'aide d'un réseau plan linéaire. Le lecteur intéressé par une détection en deux dimensions pourra utilement consulter le rapport de stage de Master Recherche de Fatna BENAHMED

I) Détection de l'angle d'arrivée d'une porteuse sinusoïdale à l'aide d'un réseau à 2 éléments

Un réseau (linéaire !) de 2 éléments reçoit une onde plane d'amplitude unité, dont la direction d'incidence fait un angle θ avec la normale au réseau (Figure I-3)

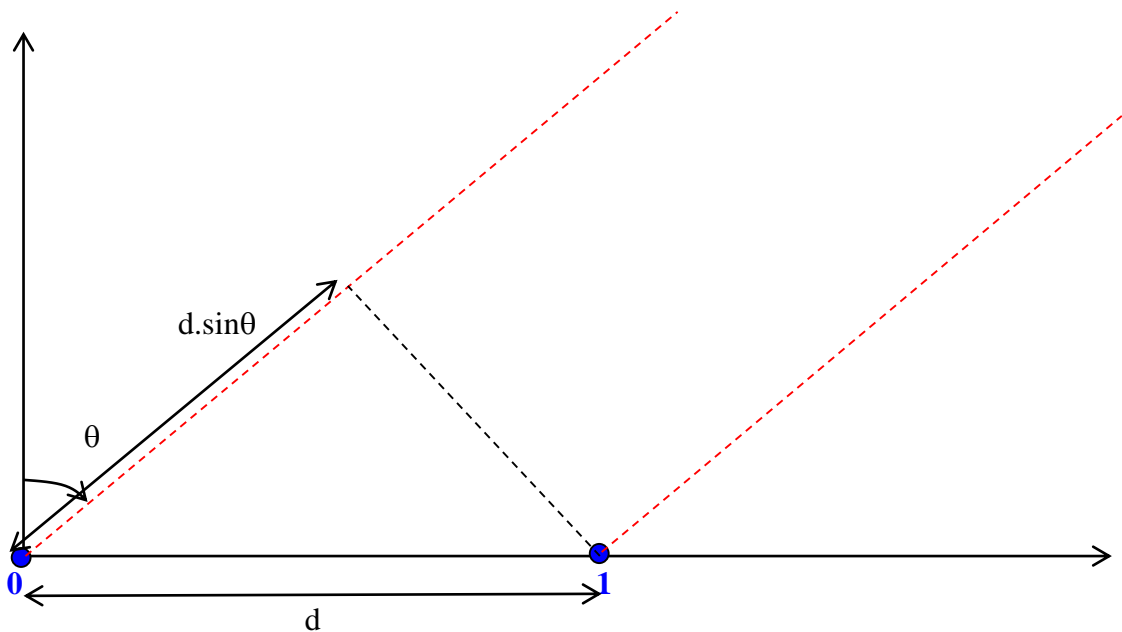


Figure I-3 : Représentation d'un réseau à 2 éléments illuminé par une onde plane en incidence oblique

Les éléments du réseau sont espacés d'une distance d et sont numérotés 0 et 1.

Chaque élément est supposé avoir un diagramme de rayonnement omnidirectionnel et le signal collecté par le réseau est égal à la somme des signaux incidents sur chacun des éléments.

Dans ces conditions, si on choisit l'origine des phases sur l'élément N°0, les signaux $S_i(t)$ reçus sur chacune des antennes sont les suivants :

$$S_0(t) = e^{j\omega t} \tag{I-1}$$

$$S_1(t) = e^{jk d \sin \theta} e^{j\omega t} = e^{j\phi_1} e^{j\omega t} \tag{I-2}$$

L'information sur la phase relative des signaux ϕ_1 peut être obtenue simplement en effectuant le produit des signaux, où, en grandeurs complexes, le produit d'un signal par le conjugué de l'autre :

$$\overline{S_0(t)} \cdot S_1(t) = e^{-j\omega t} e^{j(\omega t + \phi_1)} = e^{j\phi_1} \tag{I-3}$$

d'où on déduit l'angle d'arrivée θ suivant la relation :

$$\phi_1 = kd \sin \theta \tag{I-4}$$

Sous ces hypothèses très simplificatrices, la détection de l'angle d'arrivée de l'onde constituée par une porteuse non modulée est donc particulièrement simple.

Dans la réalité, les signaux reçus sont de faible amplitude et peuvent donc être accompagnés de bruit. Dans ces conditions, le produit (1-3) que l'on effectue à chaque instant t peut varier, et conduit à une fluctuation de l'angle détecté en fonction du temps.

Le souci majeur de la méthode simpliste qui est proposé est son incapacité à déterminer la direction d'arrivée lorsque deux signaux $X_0(t)$ et $X_1(t)$ (ou plus) arrivent simultanément sur les antennes.

II) Détection de l'angle d'arrivée de deux porteuses sinusoïdales à l'aide d'un réseau à 2 éléments

Si on suppose que deux porteuses de fréquences légèrement différentes f_0 et f_1 arrivent sur chacun des capteurs avec un angle d'incidence θ_0 et θ_1 , les signaux reçus sur chaque antenne sont de la forme suivante :

$$S_0(t) = A_0 e^{j\omega_0 t} + A_1 e^{j\omega_1 t} \quad (\text{I-5})$$

$$S_1(t) = A_0 e^{jk_0 d \sin \theta_0} e^{j\omega_0 t} + A_1 e^{jk_1 d \sin \theta_1} e^{j\omega_1 t} = A_0 e^{j\phi_0} e^{j\omega_0 t} + A_1 e^{j\phi_1} e^{j\omega_1 t} \quad (\text{I-6})$$

Le signal $X_1(t)$ qui arrive simultanément avec $X_0(t)$ perturbe la phase strictement relative à $X_0(t)$ sur chacun des capteurs, et empêche ainsi de remonter à l'information sur la direction de provenance de $X_0(t)$ par la méthode simple décrite précédemment.

On est alors obligé de développer des techniques plus sophistiquées, dont les plus performantes à l'heure actuelle sont les méthodes dites « haute résolution ».

C'est le principe de quelques-unes de ces méthodes qui est développé dans les chapitres suivants.

II - Propriétés des matrices hermitiennes

Les techniques de détection des angles d'arrivée à haute résolution font largement appel aux propriétés de la matrice de covariance des signaux qui est une matrice hermitienne. Même sans voir une culture mathématique très étoffée dans ce domaine, il est important d'avoir à l'esprit quelques propriétés fondamentales de ces matrices.

D'un point de vue pédagogique, ces propriétés sont présentées sur des espaces vectoriels classiques, car il est plus simple de s'en faire une représentation imagée, par exemple dans un espace à trois dimensions. L'extension à la matrice d'autocorrélation sera effectuée en étendant ces propriétés aux espaces de fonctions munis des opérations et des propriétés convenablement définies par les mathématiciens.

Ces rappels sont constitués essentiellement par l'énoncé des propriétés utiles, appliquées à un exemple particulier qui est repris tout au long de ce chapitre.

I - Définition

Soit un espace vectoriel E, de dimension fini N sur l'ensemble des nombres complexes C, et $[A] = (a_{ij})$ une matrice associée à l'application linéaire f sur une base B de E.

La matrice $[A]$ est hermitienne si la matrice conjuguée de $[A]$ est égale à la matrice transposée de $[A]$, ce qu'on écrit en notation abrégée :

$${}^t[A] = \overline{[A]} \quad (\text{II-1})$$

L'application linéaire f associée à la matrice prend le nom de forme hermitienne.

On en déduit la propriété suivante pour chacun des termes de la matrice :

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}} \quad (\text{II-2})$$

Sur la diagonale, cette dernière relation s'écrit :

$$a_{ii} = \overline{a_{ii}} \quad (\text{II-3})$$

ce qui implique que les termes de la diagonale principale sont réels.

exemple :

$$\text{Soit } [A] = \begin{bmatrix} 1 & j\sqrt{2} & 0 \\ -j\sqrt{2} & 1 & -j\sqrt{2} \\ 0 & j\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } j^2 = -1 \quad (\text{II-4})$$

La matrice transposée ${}^t[A]$ s'écrit en échangeant les lignes et les colonnes :

$${}^t[A] = \begin{bmatrix} 1 & -j\sqrt{2} & 0 \\ j\sqrt{2} & 1 & j\sqrt{2} \\ 0 & -j\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-5})$$

La matrice conjuguée $[\bar{A}]$ s'obtient en prenant le conjugué de chacun des termes de la matrice A, soit donc en changeant le signe de la partie imaginaire :

$$[\bar{A}] = \begin{bmatrix} 1 & -j\sqrt{2} & 0 \\ j\sqrt{2} & 1 & j\sqrt{2} \\ 0 & -j\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-6})$$

Puisque ${}^t[A] = [\bar{A}]$, la matrice [A] est hermitienne.

II - Vecteurs propres – valeurs propres

\vec{V} est un vecteur propre si on peut trouver un nombre complexe λ tel que :

$$f(\vec{V}) = \lambda \vec{V} \quad (\text{II-7})$$

soit en écriture matricielle :

$$[A] [V] = \lambda [V] \quad (\text{II-8})$$

$$([A] - \lambda[I])[V] = [0] \quad (\text{II-9})$$

où [I] représente la matrice identité.

[V] étant non nul, la matrice $([A] - \lambda[I])$ doit être singulière. Pour que l'équation (II-9) ait une solution non nulle, il faut nécessairement :

$$\det([A] - \lambda[I]) = 0 \quad (\text{II-10})$$

Ce déterminant est un polynôme de degré N, qui a donc N racines complexes. On montre que lorsque la matrice [A] est hermitienne, ces racines sont réelles. Si de plus, la forme hermitienne est définie positive, comme ce sera le cas pour la matrice d'autocorrélation, alors toutes les racines sont réelles et positives.

exemple :

Recherchons les valeurs propres de la matrice proposée au I). Il nous faut résoudre :

$$\det([A] - \lambda[I]) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & j\sqrt{2} & 0 \\ -j\sqrt{2} & 1 - \lambda & -j\sqrt{2} \\ 0 & j\sqrt{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3 - 4(1 - \lambda) = (1 - \lambda)(1 + \lambda)(\lambda - 3) = 0$$

(II-11)

On obtient ainsi les trois valeurs propres qui sont réelles :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 3$$

(II-12)

A chaque valeur propre λ_i , on associe le vecteur propre correspondant \vec{V}_i dont les composantes forment une matrice colonne $[V_i]$.

$$[V_i] = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

(II-13)

Pour déterminer les vecteurs propres, on est amené à résoudre :

$$([A] - \lambda_i[I])[V_i] = [0]$$

(II-14)

Détermination du vecteur propre $[V_1]$ associé à $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & j\sqrt{2} & 0 \\ -j\sqrt{2} & 0 & -j\sqrt{2} \\ 0 & j\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(II-15)

$$j\sqrt{2}y_1 = 0$$

$$-j\sqrt{2}x_1 - j\sqrt{2}z_1 = 0$$

(II-16)

$$j\sqrt{2}y_1 = 0$$

d'où un vecteur propre possible :

$$[V_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(II-17)

Détermination du vecteur propre $[V_2]$ associé à $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & j\sqrt{2} & 0 \\ -j\sqrt{2} & 2 & -j\sqrt{2} \\ 0 & j\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-18})$$

$$2x_2 + j\sqrt{2}y_2 = 0$$

$$-j\sqrt{2}x_2 + 2y_2 - j\sqrt{2}z_2 = 0 \quad (\text{II-19})$$

$$j\sqrt{2}y_2 + 2z_2 = 0$$

d'où un vecteur propre possible :

$$[\mathbf{V}_2] = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2j \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II-20})$$

Détermination du vecteur propre $[\mathbf{V}_3]$ associé à $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{bmatrix} -2 & j\sqrt{2} & 0 \\ -j\sqrt{2} & -2 & -j\sqrt{2} \\ 0 & j\sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-21})$$

$$-2x_3 + j\sqrt{2}y_3 = 0$$

$$-j\sqrt{2}x_3 - 2y_3 - j\sqrt{2}z_3 = 0 \quad (\text{II-22})$$

$$j\sqrt{2}y_3 - 2z_3 = 0$$

d'où un vecteur propre possible :

$$[\mathbf{V}_3] = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -2j \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II-23})$$

III - Propriétés des vecteurs propres

On définit le produit scalaire hermitien de deux vecteurs de la manière suivante :

$$\bar{\mathbf{V}}_i \cdot \bar{\mathbf{V}}_j = \overline{[\mathbf{V}_i]} [\mathbf{V}_j] = [\mathbf{V}_i]^H [\mathbf{V}_j] \quad (\text{II-24})$$

où l'indice ^H désigne la matrice conjuguée de la matrice transposée.

III-1 Propriété 1

Les vecteurs propres sont linéairement indépendants.

Sur l'exemple proposé, on peut vérifier que le déterminant de la matrice des vecteurs propre est différent de zéro, ce qui permet d'affirmer qu'il n'y a pas deux vecteurs colinéaires entre eux. :

$$\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & j2 & -j2 \\ -1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix} = j8\sqrt{2} \quad (\text{II-25})$$

III-2 Propriété 2

Les vecteurs propres forment une famille de vecteurs orthogonaux : ils sont orthogonaux deux à deux.

Vérification :

$$[\mathbf{V}_1]^H[\mathbf{V}_2] = [1 \quad 0 \quad -1] \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ j2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II-26})$$

$$[\mathbf{V}_2]^H[\mathbf{V}_3] = [\sqrt{2} \quad -j2 \quad \sqrt{2}] \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -j2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II-27})$$

$$[\mathbf{V}_3]^H[\mathbf{V}_1] = [\sqrt{2} \quad j2 \quad \sqrt{2}] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II-28})$$

III-3 Propriété 3

Des propriétés 1 et 2, on déduit qu'on peut toujours trouver une base orthonormée construite uniquement à partir des vecteurs propres.

Cette base est obtenue de manière triviale en normant les vecteurs propres :

$$[\mathbf{U}_1] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathbf{V}_1] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II-29})$$

$$[U_2] = \frac{1}{2\sqrt{2}} [V_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{j}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II-30})$$

$$[U_3] = \frac{1}{2\sqrt{2}} [V_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{j}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II-31})$$

On peut vérifier que la norme de $[U_2]$ est bien unitaire, en n'oubliant pas de considérer le vecteur conjugué dans la définition de la norme :

$$\|U_2\|^2 = [U_2]^H [U_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{j}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 1 \quad (\text{II-32})$$

III-4 Propriété 4

La matrice constituée par les vecteurs propres est unitaire : sa matrice inverse est égale à sa matrice transposée conjuguée, ce que l'on peut écrire sous l'une des formes suivantes :

$$[U]^{-1} = [U]^H \quad (\text{II-33})$$

$$[U] \cdot [U]^H = [I] \quad (\text{II-34})$$

Poursuite de la vérification sur l'exemple proposé :

$$[U] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{j}{\sqrt{2}} & -\frac{j}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{II-35})$$

$$[U]^H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{j}{\sqrt{2}} & \frac{j}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{II-36})$$

$$[U][U]^H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{j}{\sqrt{2}} & -\frac{j}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{j}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{j}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II-37})$$

III-5 Propriété 5

Toute matrice hermitienne $[A]$ peut être diagonalisée au moyen de la matrice des vecteurs propres normalisés de la manière suivante :

$$[U]^H [A] [U] = [D] \quad (\text{II-38})$$

où $[D]$ est la matrice diagonale constituée des valeurs propres.

Une écriture équivalente à la relation (II-38) est la suivante :

$$[U] [D] [U]^H = [A] \quad (\text{II-39})$$

Vérification :

$$[U][D] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{j}{\sqrt{2}} & -\frac{j}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{j}{\sqrt{2}} & -\frac{3j}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{II-40})$$

$$[U][D][U]^H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{j}{\sqrt{2}} & -\frac{3j}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{j}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{j}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j\sqrt{2} & 0 \\ -j\sqrt{2} & 1 & -j\sqrt{2} \\ 0 & j\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II-41})$$

Une autre écriture équivalente à la relation (II-39) est la suivante :

$$[A] = \sum_{i=1}^{N=3} \lambda_i [U_i] [U_i]^H \quad (\text{II-42})$$

Vérification :

$$\lambda_1 [U_1] [U_1]^H = 1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{II-43})$$

$$\lambda_2[\mathbf{U}_2][\mathbf{U}_2]^H = -1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{j}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -1 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{j}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \\ \frac{j}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{j}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & -\frac{j}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (\text{II-44})$$

$$\lambda_3[\mathbf{U}_3][\mathbf{U}_3]^H = 3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{j}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{j}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{j}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \\ -\frac{j}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{j}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & \frac{j}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (\text{II-45})$$

et on doit vérifier que :

$$[\mathbf{A}] = \lambda_1[\mathbf{U}_1][\mathbf{U}_1]^H + \lambda_2[\mathbf{U}_2][\mathbf{U}_2]^H + \lambda_3[\mathbf{U}_3][\mathbf{U}_3]^H \quad (\text{II-46})$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{j}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \\ \frac{j}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{j}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & -\frac{j}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{j}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \\ -\frac{j}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{j}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & \frac{j}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & j\sqrt{2} & 0 \\ -j\sqrt{2} & 1 & -j\sqrt{2} \\ 0 & j\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = [\mathbf{A}] \quad (\text{II-47})$$

L'ensemble des propriétés qui ont été illustrée ci-dessus, vont être appliquée à une matrice d'autocorrélation au chapitre suivant.

IV - Décomposition d'un vecteur sur la base des vecteurs propres

L'ensemble des vecteurs propres $[\mathbf{U}_i]$ forme une base orthonormée de l'espace vectoriel E . Il s'ensuit que tout vecteur $[\mathbf{V}]$ admet une décomposition sur cette base. Les coordonnées sur la base des vecteurs propres sont obtenues en effectuant le produit scalaire hermitien de chacun des vecteurs de la base par le vecteur $[\mathbf{V}]$:

$$[\mathbf{V}] = ([\mathbf{U}_1]^H[\mathbf{V}])[\mathbf{U}_1] + ([\mathbf{U}_2]^H[\mathbf{V}])[\mathbf{U}_2] + ([\mathbf{U}_3]^H[\mathbf{V}])[\mathbf{U}_3] \quad (\text{II-48})$$

exemple :

$$\text{soit le vecteur : } \vec{\mathbf{V}} = 3\vec{\mathbf{e}}_1 + (2j)\vec{\mathbf{e}}_2 + (1-j)\vec{\mathbf{e}}_3. \quad (\text{II-49})$$

On recherche les coordonnées α_i de ce vecteur dans la base $[U_i]$, soit donc l'écriture :

$$\vec{V} = \alpha_1 \bar{U}_1 + \alpha_2 \bar{U}_2 + \alpha_3 \bar{U}_3 \quad (\text{II-50})$$

avec :

$$\alpha_1 = [U_1]^H [V] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2j \\ 1-j \end{bmatrix} = \frac{2+j}{\sqrt{2}} \quad (\text{II-51})$$

$$\alpha_2 = [U_2]^H [V] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2j \\ 1-j \end{bmatrix} = \frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} - \frac{j}{2} \quad (\text{II-52})$$

$$\alpha_3 = [U_3]^H [V] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{j}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2j \\ 1-j \end{bmatrix} = \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} - \frac{j}{2} \quad (\text{II-53})$$

La relation de décomposition sur la base des vecteurs propres (II-48) se vérifie de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2j \\ 1-j \end{bmatrix} = \frac{2+j}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \left(\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} - \frac{j}{2} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{j}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \left(\frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} - \frac{j}{2} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{j}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II-54})$$

V Décomposition en sous-espaces

L'ensemble des vecteurs propres $[U_i]$ forme une base orthonormée de l'espace vectoriel E. Il s'ensuit que toute partition de cette base définit des sous espaces vectoriels de E.

Exemple :

Considérons le sous espace vectoriel E1 défini sur la base $[U_1]$ et $[U_2]$, et le sous espace vectoriel E2, défini sur la base $[U_3]$.

Tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs appartenant à chacun des sous espaces E1 et E2.

Ces sous espaces sont orthogonaux : tout vecteur de E1 est orthogonal à tout vecteur de E2

Considérons alors le problème suivant :

Soit une famille $[V(\theta)]$ de vecteurs de E définie à l'aide d'un paramètre θ , dont la norme reste constante lorsque θ varie. Pour fixer les idées, on peut choisir cette famille avec pour composantes :

$$[V(\theta)] = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -j\sqrt{1 - 2 \sin^2 \theta} \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad \theta \text{ variant entre } 0 \text{ et } 2\pi \quad (\text{II-55})$$

On se pose alors la question de savoir quels sont, dans cette famille, le ou les vecteurs qui sont « au mieux » inclus dans l'un des sous espaces, par exemple E_2 .

On peut donner une représentation des sous-espaces E_1 et E_2 , de deux vecteurs $[V_1]$ et $[V_2]$ de cette famille, et de leur projection sur chacun des sous espaces (Figure II-1 et II-2)

On peut à priori procéder de deux manières différentes :

- par projection de chaque vecteur de cette famille sur le sous espace E_2 et recherche de celui ou ceux qui ont la norme projetée maximum (Figure II-1).
- par projection de chaque vecteur de cette famille sur le sous espace orthogonal E_1 et recherche de celui ou ceux qui ont la norme projetée minimum.

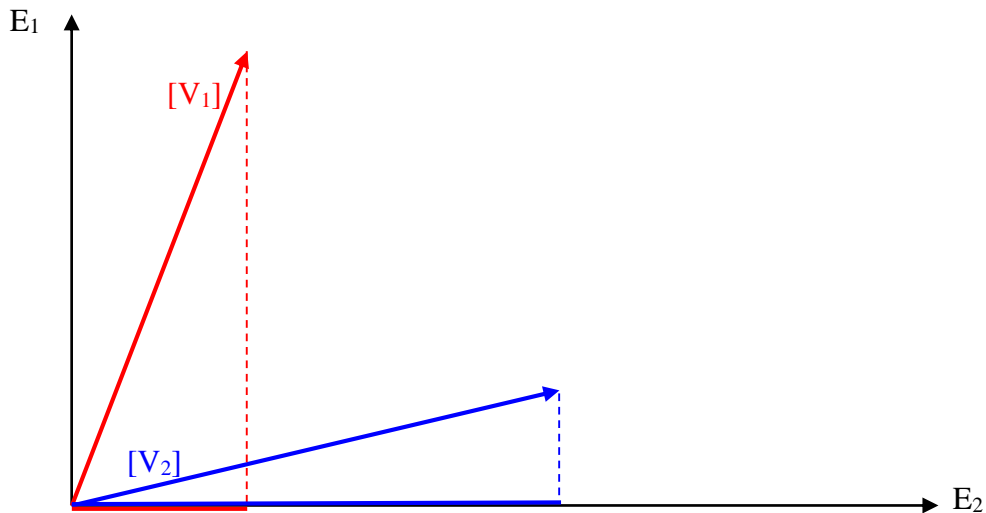


Figure II-1 : Représentation de la projection maximum de deux vecteurs sur le sous espace E_2

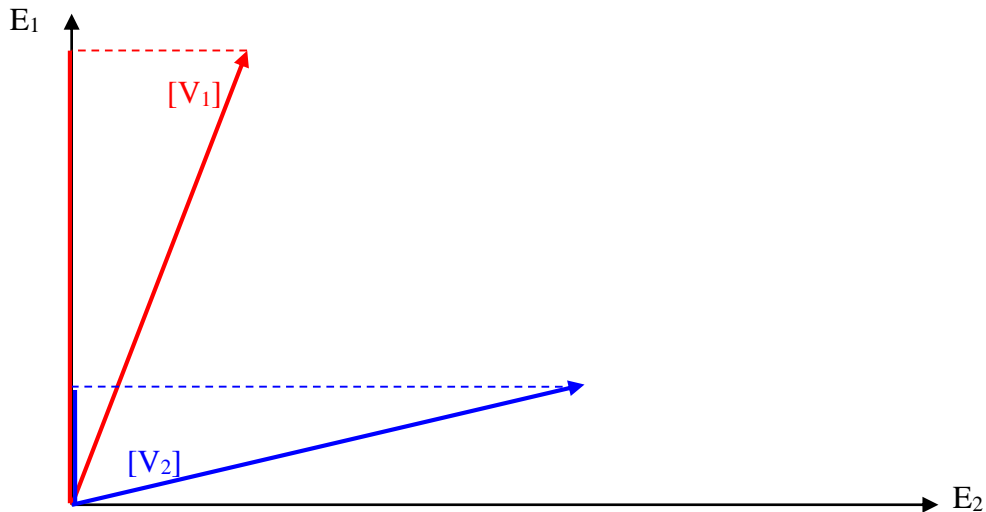


Figure II-2 : Représentation de la projection minimum de deux vecteurs sur le sous espace E_1 orthogonal à E_2

Il est important que la norme des vecteurs soit conservée lorsque θ varie. Dans le cas contraire, on peut obtenir la situation suivante (Figure II-3) dans laquelle la norme projetée maximum ne correspond pas au vecteur le « mieux inclus » dans E_2 :

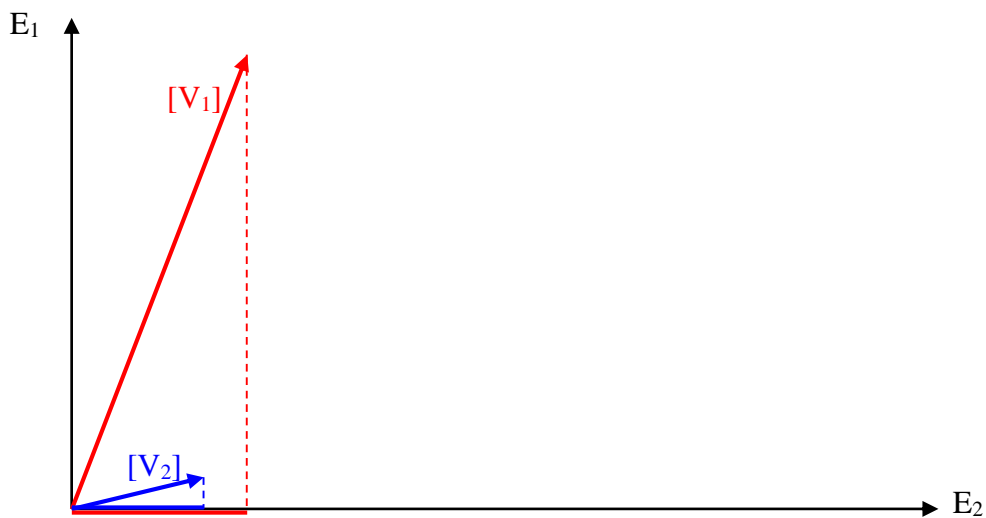


Figure II-3 : Représentation de la projection de deux vecteurs de normes différentes sur le sous espace E_2

Il apparaît que la norme de la projection du vecteur $[V_1]$ est supérieure à la norme de la projection du vecteur $[V_2]$, alors que le vecteur $[V_2]$ semble manifestement « mieux inclus » dans E_1 que le vecteur $[V_1]$.

Pour résoudre notre problème, si nous adoptons la deuxième méthode, nous devons projeter la famille $[V(\theta)]$ sur le sous espace E_1 . Il suffit pour cela de ne retenir dans la décomposition sur la base de vecteurs propres (II-48), que les composantes sur la base de E_1 , à savoir :

$$[V(\theta)]_{E_1} = ([U_1]^H [V(\theta)]) [U_1] + ([U_2]^H [V(\theta)]) [U_2] \quad (\text{II-56})$$

$$[\mathbf{V}(\theta)]_{E_1} = \alpha_1[\mathbf{U}_1] + \alpha_2[\mathbf{U}_2] \quad (\text{II-57})$$

La norme au carré du vecteur $[\mathbf{V}(\theta)]_{E_2}$ est donnée par la relation :

$$|\mathbf{V}(\theta)|_{E_1}^2 = \bar{\alpha}_1\alpha_1 + \bar{\alpha}_2\alpha_2 = \left(\overline{[\mathbf{U}_1]^H[\mathbf{V}(\theta)]} \right) \left([\mathbf{U}_1]^H[\mathbf{V}(\theta)] \right) + \left(\overline{[\mathbf{U}_2]^H[\mathbf{V}(\theta)]} \right) \left([\mathbf{U}_2]^H[\mathbf{V}(\theta)] \right) \quad (\text{II-58})$$

Cette relation peut être réécrite en notant que :

$$\overline{[\mathbf{U}_1]^H[\mathbf{V}(\theta)]} = \overline{[\overline{\mathbf{U}_1}]^H[\mathbf{V}(\theta)]} = [\mathbf{V}(\theta)]^H[\overline{\mathbf{U}_1}] = [\mathbf{V}(\theta)]^H[\mathbf{U}_1] \quad (\text{II-59})$$

On obtient alors :

$$|\mathbf{V}(\theta)|_{E_1}^2 = [\mathbf{V}(\theta)]^H[\mathbf{U}_1][\mathbf{U}_1]^H[\mathbf{V}(\theta)] + [\mathbf{V}(\theta)]^H[\mathbf{U}_2][\mathbf{U}_2]^H[\mathbf{V}(\theta)] \quad (\text{II-60})$$

exemple :

L'objectif est de trouver dans la famille de vecteur paramétrée par θ :

$$[\mathbf{V}(\theta)] = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -j\sqrt{1-2\sin^2 \theta} \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (\text{II-61})$$

le vecteur qui est le « mieux inclus » dans le sous espace vectoriel E_2 défini par $[\mathbf{U}_3]$.

On adopte la recherche d'une projection minimum sur le sous espace orthogonal E_1 défini par la base $([\mathbf{U}_1], [\mathbf{U}_2])$: c'est souvent la méthode qui est proposée dans l'un des algorithmes haute résolution de détection des angles d'arrivée intitulé MUSIC.

La norme au carré du vecteur projeté est donnée par (II-60). Nous devons calculer séparément chacun des termes :

$$[\mathbf{V}(\theta)]^H[\mathbf{U}_1] = \begin{bmatrix} \sin \theta & j\sqrt{1-2\sin^2 \theta} & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II-62})$$

$$[\mathbf{V}(\theta)]^H[\mathbf{U}_2] = \begin{bmatrix} \sin \theta & j\sqrt{1-2\sin^2 \theta} & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ j \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \sin \theta - \frac{\sqrt{1-2\sin^2 \theta}}{\sqrt{2}} \quad (\text{II-63})$$

La norme au carré du vecteur projeté sur le sous espace orthogonal E_1 est donc :

$$[V(\theta)]_{E_1}^2 = \left(\sin \theta - \frac{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \theta}}{\sqrt{2}} \right)^2 \quad (\text{II-64})$$

En faisant varier θ , on peut représenter l'évolution de cette norme, et trouver la valeur de θ pour laquelle elle est minimum (Figure II-4)

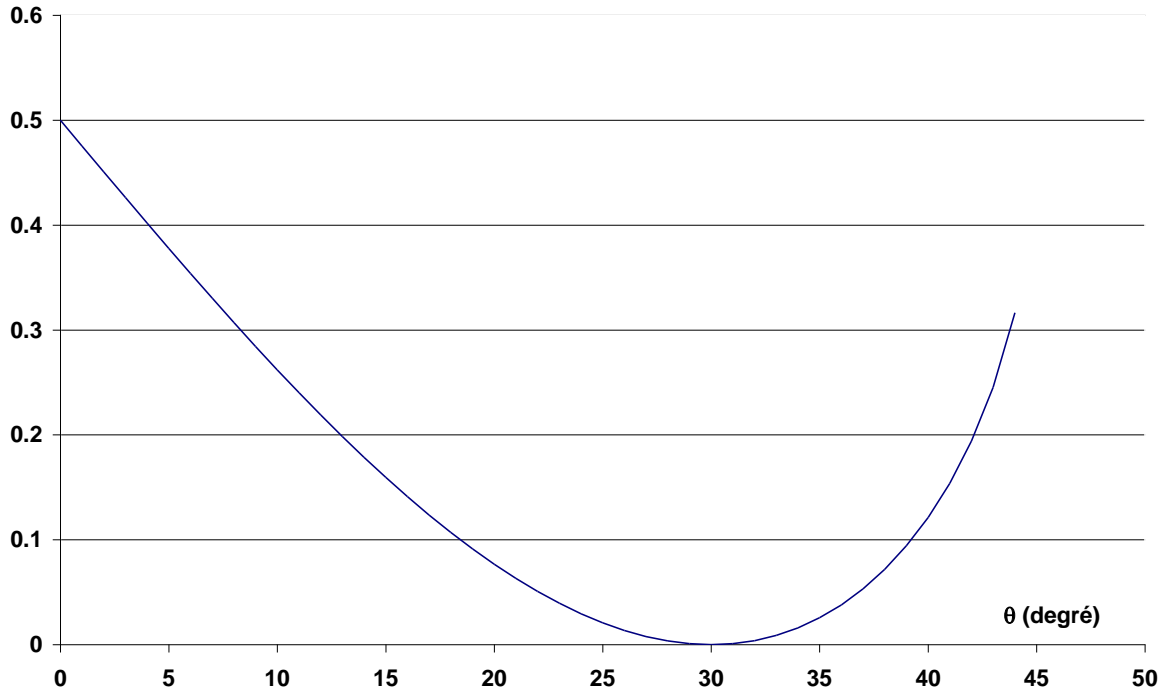


Figure II-4 : Représentation de la norme au carré du vecteur projeté sur E_1 en fonction de θ

Il est difficile de déterminer avec précision la valeur de θ qui rend cette fonction minimum, aussi lui préfère-t-on souvent la représentation de l'inverse (Figure II-5) :

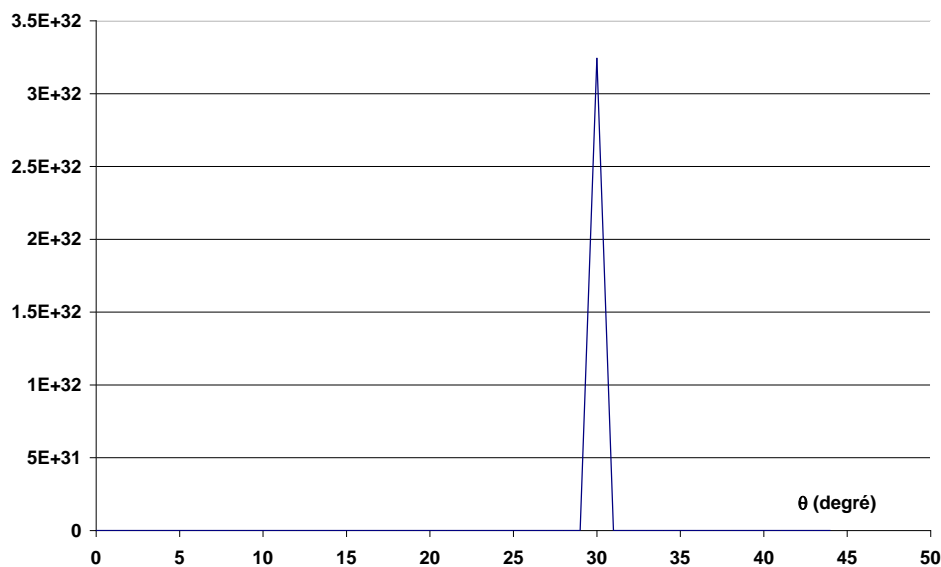


Figure II-5 : Représentation de l'inverse de la norme au carré du vecteur projeté sur E_1 en fonction de θ

Sur cet exemple, la valeur de $\theta = 30^\circ$ annule la projection du vecteur $[V(\theta)]$ sur le sous espace E_1 . Le vecteur obtenu est alors totalement inclus dans E_2 , ce que l'on peut vérifier :

$$[V(\theta = 30^\circ)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{j}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II-65})$$

On reconnaît le vecteur $[U_3]$ qui constitue la base du sous espace E_2 .

Il est intéressant d'examiner un exemple pour lequel aucun des vecteur de la famille ne sera totalement inclus dans le sous espace E_2 , ce qui peut être réalisé avec la famille de vecteurs :

$$[V(\theta)] = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -j\sqrt{1 - (1 + a^2)\sin^2 \theta} \\ a \sin \theta \end{bmatrix} \quad (\text{II-66})$$

où a est un nombre complexe qui permet de paramétrer ce vecteur, dont la norme est constante lorsque a est fixé.

Pour déterminer la norme au carré projetée sur le sous espace E_1 , nous calculons séparément chacun des termes :

$$[V(\theta)]^H [U_1] = \begin{bmatrix} \sin \theta & j\sqrt{1 - (1 + a^2)\sin^2 \theta} & a \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} (1 - a) \quad (\text{II-67})$$

$$[V(\theta)]^H [U_2] = \begin{bmatrix} \sin \theta & j\sqrt{1 - (1 + a^2)\sin^2 \theta} & a \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ j \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II-68})$$

$$[V(\theta)]^H [U_2] = \frac{\sin \theta}{2} (1 + a) - \frac{\sqrt{1 - (1 + a^2)\sin^2 \theta}}{\sqrt{2}} \quad (\text{II-69})$$

La norme au carré du vecteur projeté sur le sous espace orthogonal E_1 est donc :

$$[V(\theta)]_{E_1}^2 = \frac{\sin^2 \theta}{2} (1 - a)^2 + \left(\frac{\sin \theta}{2} (1 + a) - \frac{\sqrt{1 - (1 + a^2)\sin^2 \theta}}{\sqrt{2}} \right)^2 \quad (\text{II-70})$$

L'évolution de cette norme au carré et de son inverse est présentée pour $a = 0.8$ sur les figures II-6 et II-7.

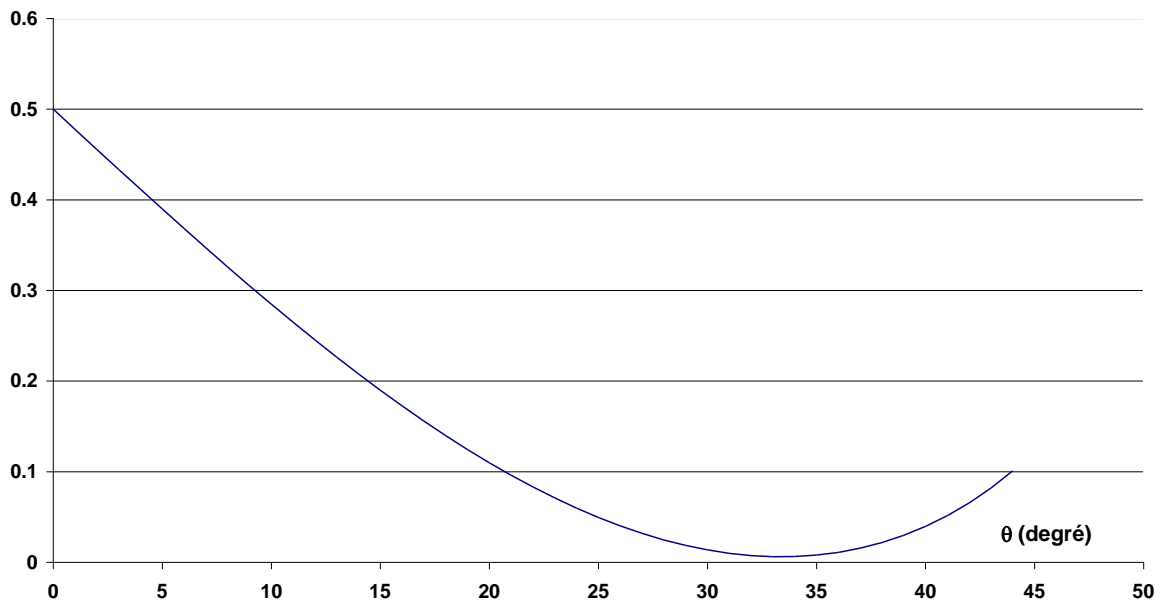


Figure II-6 : Représentation de la norme au carré du vecteur projeté sur E_1 en fonction de θ , pour $a = 0.8$

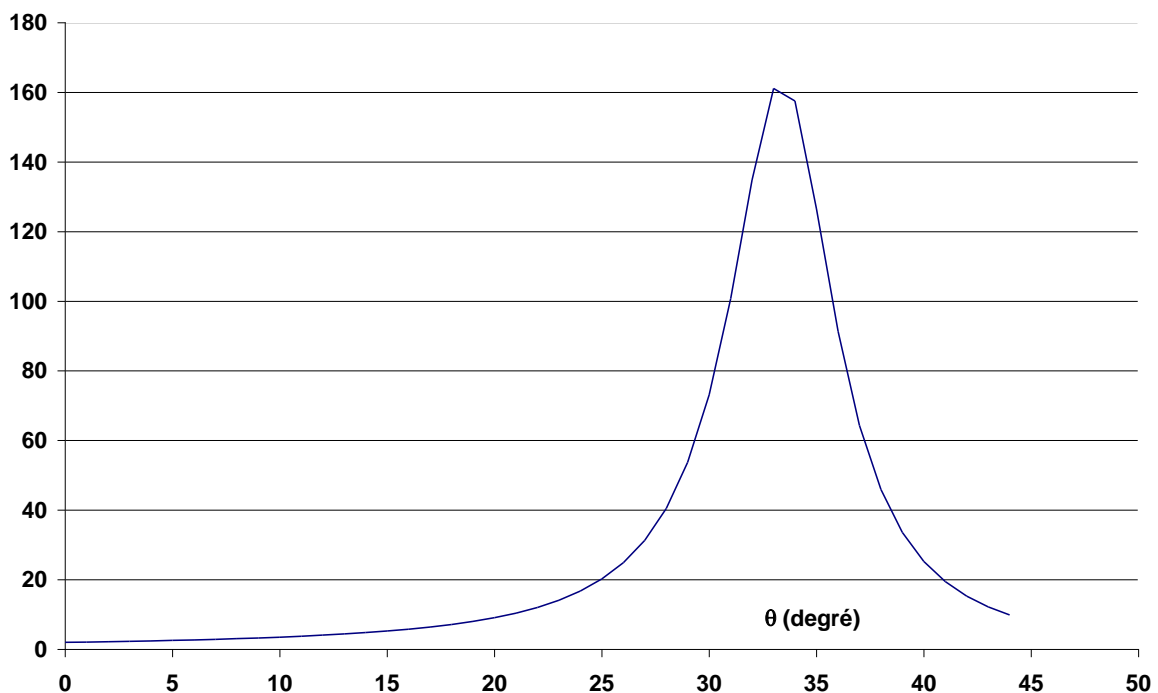


Figure II-7 : Représentation de l'inverse de la norme au carré du vecteur projeté sur E_1 en fonction de θ , pour $a = 0.8$

Sur cet exemple, c'est la valeur de $\theta = 33^\circ$ qui maximise la projection du vecteur $[V(\theta)]$ sur le sous espace E_1 .

$$[\mathbf{V}(\theta = 33^\circ)] = \begin{bmatrix} 0.54 \\ -j0.72 \\ 0.44 \end{bmatrix} \quad (\text{II-80})$$

D'une manière générale, plus le vecteur $[\mathbf{V}(\theta)]$ sera proche de l'inclusion dans le sous espace vectoriel, plus la courbe d'évolution de l'inverse de la norme au carré en fonction de θ présentera un pic de grande amplitude, et donc indiquant avec précision la valeur de θ .

III - Propriétés de la matrice d'autocorrélation

On considère un réseau de N capteurs et on se propose de déterminer la direction d'arrivée de K signaux à l'aide de ce réseau.

On se place dans l'hypothèse simplificatrice où toutes les directions d'arrivées appartiennent à un même plan qui inclut également le réseau de capteurs.

On suppose que ce réseau est linéaire. On fera de plus l'hypothèse que les éléments sont régulièrement espacés, bien qu'elle ne soit pas nécessaire dans cette première partie.

On suppose que le signal délivré au niveau de chaque capteur correspond à l'amplitude complexe du signal incident sur le capteur et on désigne par $S_i(t)$ l'amplitude complexe du signal délivré n° i .

La figure III-1 schématise la position des capteurs, et l'incidence plane de deux ondes porteuses de deux amplitudes complexes :

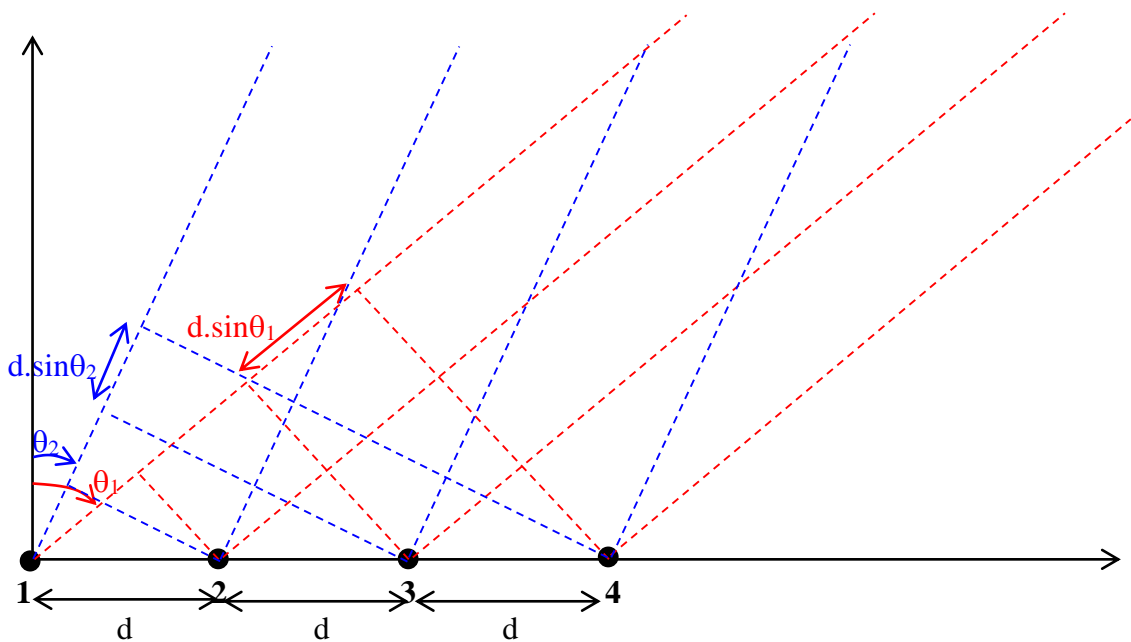


Figure III-1 : Représentation d'un réseau illuminé par deux ondes planes en incidence oblique

On désigne par $n_i(t)$ le bruit blanc qui est capté par l'antenne N° i et par $x_i(t)$ le signal complexe délivré par l'antenne N° i .

I) Construction de la matrice des signaux délivrés

Dans un cadre très général, la position des capteurs peut être quelconque.

Pour exprimer la forme des signaux détectés en sortie de chaque élément du réseau, nous devons affecter chaque capteur d'un état de phase qui lui est propre.

Dans ces conditions, le signal délivré en sortie de chaque capteur peut être représenté de la manière suivante :

$$x_1(t) = s_1(t)e^{j\phi_{11}} + s_2(t)e^{j\phi_{12}} + s_3(t)e^{j\phi_{13}} + \dots + s_K(t)e^{j\phi_{1K}} + n_1(t) \quad (\text{III-1})$$

$$x_2(t) = s_1(t)e^{j\phi_{21}} + s_2(t)e^{j\phi_{22}} + s_3(t)e^{j\phi_{23}} + \dots + s_K(t)e^{j\phi_{2K}} + n_2(t) \quad (\text{III-2})$$

$$x_3(t) = s_1(t)e^{j\phi_{31}} + s_2(t)e^{j\phi_{32}} + s_3(t)e^{j\phi_{33}} + \dots + s_K(t)e^{j\phi_{3K}} + n_3(t) \quad (\text{III-3})$$

.....

$$x_N(t) = s_1(t)e^{j\phi_{N1}} + s_2(t)e^{j\phi_{N2}} + s_3(t)e^{j\phi_{N3}} + \dots + s_K(t)e^{j\phi_{Nk}} + n_N(t) \quad (\text{III-4})$$

Cette écriture peut être condensée sous forme sommative :

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^{k=K} s_k(t)e^{j\phi_{ik}} + n_i(t) \quad (\text{III-5})$$

Elle peut également être condensée sous forme matricielle en introduisant les matrices suivantes :

- la matrice $X (N , 1)$ des N signaux détectés en sortie de chaque élément :

$$[X] = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III-6})$$

- la matrice $S (K , 1)$ des K enveloppes complexes des signaux incidents :

$$[S] = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \\ \vdots \\ s_K(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III-7})$$

- la matrice $A (N , K)$ de mélange convolutif du réseau :

$$[A] = \begin{pmatrix} e^{j\phi_{11}} & e^{j\phi_{12}} & e^{j\phi_{13}} & \dots & e^{j\phi_{1K}} \\ e^{j\phi_{21}} & e^{j\phi_{22}} & e^{j\phi_{23}} & \dots & e^{j\phi_{2K}} \\ e^{j\phi_{31}} & e^{j\phi_{32}} & e^{j\phi_{33}} & \dots & e^{j\phi_{3K}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{j\phi_{N1}} & e^{j\phi_{N2}} & e^{j\phi_{N3}} & \dots & e^{j\phi_{NK}} \end{pmatrix} \quad (\text{III-8})$$

C'est dans cette matrice que sont contenues, à travers les différents déphasages, les informations relatives à l'angle d'arrivée de chacun des signaux incidents.

- la matrice η (N , 1) de bruit :

$$[\eta] = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_N(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III-9})$$

La matrice des signaux délivrés est liée à la matrice des signaux incidents par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{j\phi_{11}} & e^{j\phi_{12}} & e^{j\phi_{13}} & \dots & e^{j\phi_{1K}} \\ e^{j\phi_{21}} & e^{j\phi_{22}} & e^{j\phi_{23}} & \dots & e^{j\phi_{2K}} \\ e^{j\phi_{31}} & e^{j\phi_{32}} & e^{j\phi_{33}} & \dots & e^{j\phi_{3K}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{j\phi_{N1}} & e^{j\phi_{N2}} & e^{j\phi_{N3}} & \dots & e^{j\phi_{NK}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \\ \vdots \\ s_K(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_N(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III-10})$$

soit encore :

$$[X] = [A] [S] + [\eta] \quad (\text{III-11})$$

II) Construction de la matrice d'autocorrélation

Les signaux à traiter étant complexes, et n'étant pas à énergie finie, on muni l'espace des fonctions du produit scalaire hermitien suivant, que l'on nomme espérance E :

$$E(x_i \overline{x_j}) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} x_i(t) \overline{x_j(t)} dt \quad (\text{III-12})$$

Cette définition est homogène à une énergie par unité de temps, c'est à dire à une puissance. Elle représente de la puissance moyenne de chaque signal détectée (pour $i = j$), et chacune des puissances moyennes d'interaction entre les signaux i et j (pour i différent de j).

La matrice qui rassemble l'ensemble des informations de puissance se nomme matrice de covariance ou matrice d'autocorrélation. Elle est construite uniquement à partir des signaux délivrés et de la définition de puissance moyenne d'interaction (III-12). Les étapes de sa construction sont les suivantes :

- On définit le vecteur transposé des signaux délivrés $[X]^T$:

$$[X]^T = (x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t) \quad \dots \quad x_N(t)) \quad (III-13)$$

- On définit le vecteur conjugué du vecteur transposé précédent $[X]^H$:

$$[X]^H = ([X]^T)^* = (\overline{x_1(t)} \quad \overline{x_2(t)} \quad \overline{x_3(t)} \quad \dots \quad \overline{x_N(t)}) \quad (III-14)$$

- On construit la matrice produit de $[X]$ et $[X]^H$ qui contient toutes les interactions entre les différents signaux :

$$[X][X]^H = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x_1(t)} & \overline{x_2(t)} & \overline{x_3(t)} & \dots & \overline{x_N(t)} \end{pmatrix} \quad (III-15)$$

$$[X][X]^H = \begin{pmatrix} x_1^2(t) & x_1(t)\overline{x_2(t)} & x_1(t)\overline{x_3(t)} & \vdots & x_1(t)\overline{x_N(t)} \\ x_2(t)\overline{x_1(t)} & x_2^2(t) & x_2(t)\overline{x_3(t)} & \vdots & x_2(t)\overline{x_N(t)} \\ x_3(t)\overline{x_1(t)} & x_3(t)\overline{x_2(t)} & x_3^2(t) & \vdots & x_3(t)\overline{x_N(t)} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ x_N(t)\overline{x_1(t)} & x_N(t)\overline{x_2(t)} & x_N(t)\overline{x_3(t)} & \vdots & x_N^2(t) \end{pmatrix} \quad (III-16)$$

Enfin, on applique à chaque terme de la matrice la définition énergétique (III-12) pour obtenir la matrice de corrélation ou matrice de covariance des signaux $[R_{xx}]$ (N, N) :

$$[R_{xx}] = E\{[X][X]^H\} = \begin{pmatrix} E\{x_1^2(t)\} & E\{x_1(t)\overline{x_2(t)}\} & E\{x_1(t)\overline{x_3(t)}\} & \vdots & E\{x_1(t)\overline{x_N(t)}\} \\ E\{x_2(t)\overline{x_1(t)}\} & E\{x_2^2(t)\} & E\{x_2(t)\overline{x_3(t)}\} & \vdots & E\{x_2(t)\overline{x_N(t)}\} \\ E\{x_3(t)\overline{x_1(t)}\} & E\{x_3(t)\overline{x_2(t)}\} & E\{x_3^2(t)\} & \vdots & E\{x_3(t)\overline{x_N(t)}\} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ E\{x_N(t)\overline{x_1(t)}\} & E\{x_N(t)\overline{x_2(t)}\} & E\{x_N(t)\overline{x_3(t)}\} & \vdots & E\{x_N^2(t)\} \end{pmatrix} \quad (III-17)$$

La matrice obtenue a sa diagonale principale réelle, et chaque terme de cette diagonale est égal à son conjugué. Si on transpose cette matrice en échangeant les lignes et les colonnes, puis si on prend le conjugué de chaque terme, on retrouve la matrice initiale : c'est précisément la définition d'une matrice hermitienne.

On va donc pouvoir utiliser sur cette matrice dans un espace de fonctions, toutes les propriétés qui ont été énoncées au chapitre précédent.

III) Relation entre la matrice d'autocorrélation et la matrice de mélange convolutif du réseau.

Dans le problème de la détection des angles d'arrivées, nous connaissons les signaux reçus par chaque capteur, et nous pouvons donner une estimation de la matrice d'autocorrélation $[R_{xx}]$ qui est une donnée du problème. Cette estimation est obtenue en échantillonnant le signal reçu autant de fois que nécessaire.

Nous souhaitons déterminer la direction d'arrivée des différents signaux, et nous savons que cette information est contenue dans la matrice $[A]$ de mélange convolutif du réseau.

Il peut donc être utile d'établir, lorsque les conditions le permettent, une relation entre ces deux matrices.

On peut montrer que pour des signaux stochastiques, stationnaires, à moyenne nulle, et décorrelés, il est possible d'établir une telle relation. Cette dernière n'est rigoureuse qu'à la limite d'un temps d'observation infini, mais elle se révèle suffisante, en pratique, pour fournir des résultats corrects au bout d'une durée finie pendant laquelle on prélève des échantillons sur l'information reçue. On dit alors qu'on a fait une estimation de la matrice d'autocorrélation.

Nous donnons cette relation sans démonstration (III-18). Nous vérifierons sa validité en invoquant les propriétés des signaux que nous avons énoncées.

$$[R_{xx}] = [A] [R_{ss}] [A]^H + \sigma_i^2 [I] \quad (\text{III-18})$$

Dans cette expression, $[R_{ss}]$ (K, K) désigne la matrice de covariance des signaux incidents, et σ_i la variance du bruit détecté sur le capteur N° i, soit explicitement :

$$[R_{ss}] = E\{[S][S]^H\} = \begin{pmatrix} E\{s_1^2(t)\} & E\{s_1(t)\overline{s_2(t)}\} & E\{s_1(t)\overline{s_3(t)}\} & : & E\{s_1(t)\overline{s_K(t)}\} \\ E\{s_2(t)\overline{s_1(t)}\} & E\{s_2^2(t)\} & E\{s_2(t)\overline{s_3(t)}\} & : & E\{s_2(t)\overline{s_K(t)}\} \\ E\{s_3(t)\overline{s_1(t)}\} & E\{s_3(t)\overline{s_2(t)}\} & E\{s_3^2(t)\} & : & E\{s_3(t)\overline{s_K(t)}\} \\ \dots & \dots & \dots & : & \dots \\ E\{s_K(t)\overline{s_1(t)}\} & E\{s_K(t)\overline{s_2(t)}\} & E\{s_K(t)\overline{s_3(t)}\} & : & E\{s_K^2(t)\} \end{pmatrix} \quad (\text{III-19})$$

$$\sigma_i^2 [I] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_K^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III-20})$$

exemples de calcul des coefficients de la matrice $[R_{xx}]$

$$[\mathbf{R}_{xx}](1,1) = E\{x_1 \bar{x}_1\} = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} [s_1 e^{j\phi_{11}} + \dots + s_K e^{j\phi_{1K}} + n_1] [\bar{s}_1 e^{-j\phi_{11}} + \dots + \bar{s}_K e^{-j\phi_{1K}} + \bar{n}_1] dt \quad (\text{III-21})$$

$$[\mathbf{R}_{xx}](1,1) = E\{s_1^2\} + \dots + E\{s_K^2\} + E\{n_1^2\} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1, j \neq i}^k E\{s_i e^{j\phi_{1i}} \bar{s}_j e^{-j\phi_{1j}}\} + \sum_{i=1}^k E\{n_1 \bar{s}_i e^{-j\phi_{1i}}\} + \sum_{i=1}^k E\{\bar{n}_1 s_i e^{j\phi_{1i}}\} \quad (\text{III-22})$$

Les trois derniers termes de (III-22) sont nuls car les signaux incidents s_i sont supposés décorrélés et le bruit blanc n est par nature corrélé à aucune des grandeurs. Il reste donc :

$$[\mathbf{R}_{xx}](1,1) = E\{s_1^2\} + \dots + E\{s_K^2\} + E\{n_1^2\} \quad (\text{III-23})$$

De même :

$$[\mathbf{R}_{xx}](1,2) = E\{x_1 \bar{x}_2\} = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} [s_1 e^{j\phi_{11}} + \dots + s_K e^{j\phi_{1K}} + n_1] [\bar{s}_1 e^{-j\phi_{21}} + \dots + \bar{s}_K e^{-j\phi_{2K}} + \bar{n}_2] dt \quad (\text{III-24})$$

$$[\mathbf{R}_{xx}](1,2) = E\{s_1^2\} e^{j(\phi_{11} - \phi_{21})} + \dots + E\{s_K^2\} e^{j(\phi_{1K} - \phi_{2K})} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1, j \neq i}^k E\{s_i \bar{s}_j e^{j(\phi_{1i} - \phi_{2j})}\} + \sum_{i=1}^k E\{n_1 \bar{s}_i e^{-j\phi_{2i}}\} + \sum_{i=1}^k E\{\bar{n}_2 s_i e^{j\phi_{1i}}\} \quad (\text{III-25})$$

Les trois derniers termes de (III-25) sont nuls pour les mêmes raisons que précédemment. Il reste donc :

$$[\mathbf{R}_{xx}](1,2) = E\{s_1^2\} e^{j(\phi_{11} - \phi_{21})} + \dots + E\{s_K^2\} e^{j(\phi_{1K} - \phi_{2K})} \quad (\text{III-26})$$

En considérant la deuxième partie de l'égalité (III-18) rappelée ci-dessous en (III-27), le développement explicite des termes de la matrice d'autocorrélation peut être obtenu d'une autre manière.

$$[\mathbf{R}_{xx}] = [\mathbf{A}] [\mathbf{R}_{ss}] [\mathbf{A}]^H + \sigma_i^2 [\mathbf{I}] \quad (\text{III-27})$$

Il nous faut pour cela donner la forme de la matrice d'autocorrélation des signaux incidents $[\mathbf{R}_{ss}]$ de dimension (K, K) . Tous les signaux étant supposés décorrélés, cette matrice représente les puissances contenues dans les enveloppes complexes de chacun des signaux incidents.

$$[\mathbf{R}_{ss}] = E\{[\mathbf{S}][\mathbf{S}]^H\} = \begin{pmatrix} E\{s_1^2(t)\} & E\{s_1(t)\overline{s_2(t)}\} & E\{s_1(t)\overline{s_3(t)}\} & : & E\{s_1(t)\overline{s_k(t)}\} \\ E\{s_2(t)\overline{s_1(t)}\} & E\{s_2^2(t)\} & E\{s_2(t)\overline{s_3(t)}\} & : & E\{s_2(t)\overline{s_k(t)}\} \\ E\{s_3(t)\overline{s_1(t)}\} & E\{s_3(t)\overline{s_2(t)}\} & E\{s_3^2(t)\} & : & E\{s_3(t)\overline{s_k(t)}\} \\ \dots & \dots & \dots & : & \dots \\ E\{s_k(t)\overline{s_1(t)}\} & E\{s_k(t)\overline{s_2(t)}\} & E\{s_k(t)\overline{s_3(t)}\} & : & E\{s_k^2(t)\} \end{pmatrix} \quad (\text{III-28})$$

et si on suppose toutes les enveloppes complexes de tous les signaux décorréliées :

$$[\mathbf{R}_{ss}] = E\{[\mathbf{S}][\mathbf{S}]^H\} = \begin{pmatrix} E\{s_1^2(t)\} & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & E\{s_2^2(t)\} & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & E\{s_3^2(t)\} & : & 0 \\ \dots & \dots & \dots & : & \dots \\ 0 & 0 & 0 & : & E\{s_k^2(t)\} \end{pmatrix} \quad (\text{III-29})$$

On peut alors effectuer le calcul matriciel : $[\mathbf{A}] [\mathbf{R}_{ss}] [\mathbf{A}]^H + \sigma^2 [\mathbf{I}]$

Calcul de $[\mathbf{A}] [\mathbf{R}_{ss}]$

$$\begin{pmatrix} e^{j\phi_{11}} & e^{j\phi_{12}} & e^{j\phi_{13}} & \dots & e^{j\phi_{1k}} \\ e^{j\phi_{21}} & e^{j\phi_{22}} & e^{j\phi_{23}} & \dots & e^{j\phi_{2k}} \\ e^{j\phi_{31}} & e^{j\phi_{32}} & e^{j\phi_{33}} & \dots & e^{j\phi_{3k}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{j\phi_{N1}} & e^{j\phi_{N2}} & e^{j\phi_{N3}} & \dots & e^{j\phi_{Nk}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E\{s_1^2(t)\} & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & E\{s_2^2(t)\} & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & E\{s_3^2(t)\} & : & 0 \\ \dots & \dots & \dots & : & \dots \\ 0 & 0 & 0 & : & E\{s_k^2(t)\} \end{pmatrix} \quad (\text{III-30})$$

$$[\mathbf{A}][\mathbf{R}_{ss}] = \begin{pmatrix} E\{s_1^2\}e^{j\phi_{11}} & E\{s_2^2\}e^{j\phi_{12}} & E\{s_3^2\}e^{j\phi_{13}} & \dots & E\{s_k^2\}e^{j\phi_{1k}} \\ E\{s_1^2\}e^{j\phi_{21}} & E\{s_2^2\}e^{j\phi_{22}} & E\{s_3^2\}e^{j\phi_{23}} & \dots & E\{s_k^2\}e^{j\phi_{2k}} \\ E\{s_1^2\}e^{j\phi_{31}} & E\{s_2^2\}e^{j\phi_{32}} & E\{s_3^2\}e^{j\phi_{33}} & \dots & E\{s_k^2\}e^{j\phi_{3k}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ E\{s_1^2\}e^{j\phi_{N1}} & E\{s_2^2\}e^{j\phi_{N2}} & E\{s_3^2\}e^{j\phi_{N3}} & \dots & E\{s_k^2\}e^{j\phi_{Nk}} \end{pmatrix} \quad (\text{III-31})$$

Calcul de $[\mathbf{A}] [\mathbf{R}_{ss}] [\mathbf{A}]^H$

$$\begin{pmatrix} E\{s_1^2\}e^{j\phi_{11}} & E\{s_2^2\}e^{j\phi_{12}} & E\{s_3^2\}e^{j\phi_{13}} & \dots & E\{s_k^2\}e^{j\phi_{1k}} \\ E\{s_1^2\}e^{j\phi_{21}} & E\{s_2^2\}e^{j\phi_{22}} & E\{s_3^2\}e^{j\phi_{23}} & \dots & E\{s_k^2\}e^{j\phi_{2k}} \\ E\{s_1^2\}e^{j\phi_{31}} & E\{s_2^2\}e^{j\phi_{32}} & E\{s_3^2\}e^{j\phi_{33}} & \dots & E\{s_k^2\}e^{j\phi_{3k}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ E\{s_1^2\}e^{j\phi_{N1}} & E\{s_2^2\}e^{j\phi_{N2}} & E\{s_3^2\}e^{j\phi_{N3}} & \dots & E\{s_k^2\}e^{j\phi_{Nk}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-j\phi_{11}} & e^{-j\phi_{21}} & e^{-j\phi_{31}} & \dots & e^{-j\phi_{N1}} \\ e^{-j\phi_{12}} & e^{-j\phi_{22}} & e^{-j\phi_{32}} & \dots & e^{-j\phi_{N2}} \\ e^{-j\phi_{13}} & e^{-j\phi_{23}} & e^{-j\phi_{33}} & \dots & e^{-j\phi_{N3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{-j\phi_{1k}} & e^{-j\phi_{2k}} & e^{-j\phi_{3k}} & \dots & e^{-j\phi_{Nk}} \end{pmatrix}$$

(III-32)

On obtient ainsi chacun des termes de la matrice $[A] [R_{ss}] [A]^H$, ce qui permet de vérifier l'égalité de ces termes avec ceux de la matrice $[R_{xx}]$:

$$[A R_{ss} A^H](1,1) + \sigma_1^2 = E\{s_1^2(t)\} + E\{s_2^2(t)\} + E\{s_3^2(t)\} + \dots + E\{s_k^2(t)\} + \sigma_1^2 = [R_{xx}](1,1) \quad \text{(III-32)}$$

$$[A R_{ss} A^H](1,2) = E\{s_1^2(t)\}e^{j(\phi_{11}-\phi_{21})} + E\{s_2^2(t)\}e^{j(\phi_{12}-\phi_{22})} + E\{s_3^2(t)\}e^{j(\phi_{13}-\phi_{23})} + \dots + E\{s_k^2(t)\}e^{j(\phi_{1k}-\phi_{2k})} \quad \text{(III-33)}$$

soit donc :

$$[A R_{ss} A^H](1,2) = [R_{xx}](1,2) \quad \text{(III-34)}$$

IV - Décomposition en sous espaces

I- Aspects théoriques

La matrice d'autocorrélation ou de covariance R_{xx} est une matrice hermitienne : tous les termes de sa diagonale sont réels, et elle est égale à la conjuguée de sa matrice transposée. Ses valeurs propres sont réelles et positives.

Elle possède donc toutes les propriétés qui ont été rappelées au chapitre II, et qui vont maintenant être développées sur un espace de fonctions.

Cet espace est constitué par un ensemble de fonctions qui, en électronique, sont essentiellement construites à partir de fonctions sinusoïdales.

On n'aura à considérer ici qu'un espace dont la base comporte un nombre limité de fonctions par opposition aux espaces munis de bases infinies comme cela est nécessaire par exemple lors de la décomposition en séries de FOURIER.

Les fonctions sinusoïdales sont des fonctions dont l'énergie est infinie sur une durée infinie. On doit donc prendre quelques précautions pour définir leur produit scalaire hermitien, et la définition généralement adoptée est la suivante :

$$E(x_i \overline{x_j}) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} x_i(t) \overline{x_j(t)} dt \quad (IV-1)$$

On notera que le produit scalaire n'est plus représentatif d'une énergie, mais d'une énergie par unité de temps, c'est à dire d'une puissance.

Si on considère un réseau de N antennes sur lesquelles ont fait tomber K signaux incidents ($K < N$), on a montré au chapitre précédent que la matrice de covariance des signaux délivrés est une matrice carrée comportant N lignes et N colonnes appelée en (IV-2).

On suppose que cette matrice est non singulière : cela implique en particulier que les signaux incidents sont décorrélés entre eux.

Cette hypothèse peut être mise en défaut, notamment lors de trajets multiples où une onde issue d'une même source peut parvenir à un même point d'observation par des chemins différents en subissant diverse réflexions ou diffractions. Des techniques existent pour décorréler artificiellement les signaux et utiliser malgré tout la méthode exposée.

$$[\mathbf{R}_{xx}] = E\{[\mathbf{X}][\mathbf{X}]^H\} = \begin{pmatrix} E\{x_1^2(t)\} & E\{x_1(t)\overline{x_2(t)}\} & E\{x_1(t)\overline{x_3(t)}\} & : & E\{x_1(t)\overline{x_N(t)}\} \\ E\{x_2(t)\overline{x_1(t)}\} & E\{x_2^2(t)\} & E\{x_2(t)\overline{x_3(t)}\} & : & E\{x_2(t)\overline{x_N(t)}\} \\ E\{x_3(t)\overline{x_1(t)}\} & E\{x_3(t)\overline{x_2(t)}\} & E\{x_3^2(t)\} & : & E\{x_3(t)\overline{x_N(t)}\} \\ \dots & \dots & \dots & : & \dots \\ E\{x_N(t)\overline{x_1(t)}\} & E\{x_N(t)\overline{x_2(t)}\} & E\{x_N(t)\overline{x_3(t)}\} & : & E\{x_N^2(t)\} \end{pmatrix} \quad (\text{IV-2})$$

Cette matrice étant supposée non singulière, elle possède N valeurs propres notées $\lambda_1.. \lambda_N$ réelles et positives, et N vecteurs propres unitaires notés $[\mathbf{V}_1]..[\mathbf{V}_N]$. Ces vecteurs propres forment une base orthonormée de l'espace de fonctions sur lequel est définie la matrice.

La matrice \mathbf{R}_{xx} peut être décomposée sur la base de vecteurs propres, et une des écritures possibles donnée au chapitre II est la suivante :

$$[\mathbf{R}_{xx}] = \sum_{i=1}^N \lambda_i [\mathbf{V}_i][\mathbf{V}_i]^H \quad (\text{IV-3})$$

Dans cette décomposition en vecteurs propres, il existe K signaux incidents, avec $K < N$.

En l'absence de bruit et pour des signaux sinusoïdaux, on peut montrer que la relation (IV-3) possède K valeurs propres non nulles, et N-K valeurs propres nulles.

Si les valeurs propres sont rangées dans un ordre décroissant, les K premières valeurs sont associées à K vecteurs propres. Ces K vecteurs propres définissent la base d'un sous-espace considéré comme l'espace « signal ».

On peut donc réécrire (IV-3) en le restreignant à l'espace signal et en tronquant le développement :

$$[\mathbf{R}_{xx}] = \sum_{i=1}^K \lambda_i [\mathbf{V}_i][\mathbf{V}_i]^H \quad (\text{IV-4})$$

D'autre part, si on considère que le niveau de bruit incident sur chaque antenne est identique, on peut exprimer la matrice d'autocorrélation du bruit sous la forme :

$$[\mathbf{R}_{nn}] = \sigma^2 [\mathbf{I}] = \sigma^2 \sum_{i=1}^N [\mathbf{V}_i][\mathbf{V}_i]^H \quad (\text{IV-5})$$

On en déduit que la matrice d'autocorrélation du signal bruité s'écrit :

$$[\mathbf{R}_{xx}] = \sum_{i=1}^K \lambda_i [\mathbf{V}_i][\mathbf{V}_i]^H + \sigma^2 \sum_{i=1}^N [\mathbf{V}_i][\mathbf{V}_i]^H \quad (\text{IV-6})$$

$$[\mathbf{R}_{xx}] = \sum_{i=1}^K (\lambda_i + \sigma^2) [\mathbf{V}_i][\mathbf{V}_i]^H + \sigma^2 \sum_{i=K+1}^N [\mathbf{V}_i][\mathbf{V}_i]^H \quad (\text{IV-7})$$

Cette dernière relation fait clairement apparaître deux sous espaces :

- le premier constitué sur la base des K vecteurs propres associés aux K plus grandes valeurs propres constitue le sous espace signal
- le second constitué sur la base des N-K vecteurs associés aux N-K plus faibles valeurs propres constitue le sous espace bruit.

Les valeurs propres et les espaces associés sont représentés figure IV-1.

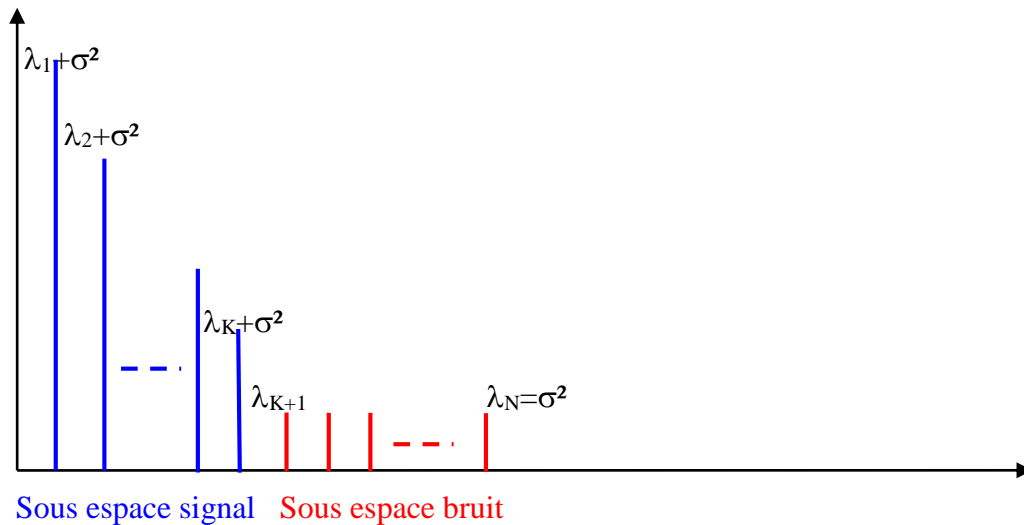


Figure VI-1 : Représentation des valeurs propres classées dans l'ordre décroissant

Plusieurs méthodes utilisent cette décomposition, et en particulier la méthode MUSIC standard (Multiple Signal Classification) qui sera développée dans le prochain chapitre.

II – Exemple de décomposition

En pratique, la matrice d'autocorrélation est estimée en prélevant des échantillons de mesure sur chacun des capteurs.

En théorie, on peut construire cette matrice suivant la démarche donnée au chapitre précédent.

On considère un réseau de 3 antennes régulièrement espacées d'une distance égale à d et deux signaux incidents sinusoïdaux : le premier de pulsation ω_1 et d'amplitude 1, le second de pulsation ω_2 et d'amplitude 2.

Si on adopte pour chacun des signaux une origine des phases sur la première antenne, les signaux reçus en l'absence de bruit par chaque antenne sont les suivants :

$$x_1(t) = 1.e^{j\omega_1 t} + 2.e^{j\omega_2 t} \quad (\text{IV-8})$$

$$x_2(t) = 1.e^{-jk_1 d \sin \theta_1} e^{j\omega_1 t} + 2.e^{-jk_2 d \sin \theta_2} e^{j\omega_2 t} \quad (\text{IV-9})$$

$$x_3(t) = 1.e^{-2jk_1d \sin \theta_1} e^{j\omega_1 t} + 2.e^{-2jk_2d \sin \theta_2} e^{j\omega_2 t} \quad (IV-10)$$

Soit encore sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-jk_1d \sin \theta_1} & e^{-2jk_2d \sin \theta_2} \\ e^{-2jk_1d \sin \theta_1} & e^{-2jk_2d \sin \theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.e^{j\omega_1 t} \\ 2.e^{j\omega_2 t} \end{bmatrix} \quad (IV-11)$$

$$[X] = [A] [S] \quad (IV-12)$$

La matrice d'autocorrélation du signal délivré R_{xx} est construite à partir des matrices ci-dessus par la relation :

$$[R_{xx}] = [A] [R_{ss}] [A]^H \quad (IV-13)$$

où R_{ss} désigne la matrice d'autocorrélation des signaux incidents :

$$[R_{ss}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (IV-14)$$

On obtient successivement :

$$[A][R_{ss}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-jk_1d \sin \theta_1} & e^{-jk_2d \sin \theta_2} \\ e^{-2jk_1d \sin \theta_1} & e^{-2jk_2d \sin \theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ e^{-jk_1d \sin \theta_1} & 4.e^{-jk_2d \sin \theta_2} \\ e^{-2jk_1d \sin \theta_1} & 4.e^{-2jk_2d \sin \theta_2} \end{bmatrix} \quad (IV-15)$$

$$[A][R_{ss}][A]^H = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ e^{-jk_1d \sin \theta_1} & 4.e^{-jk_2d \sin \theta_2} \\ e^{-2jk_1d \sin \theta_1} & 4.e^{-2jk_2d \sin \theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e^{jk_1d \sin \theta_1} & e^{2jk_1d \sin \theta_1} \\ 1 & e^{jk_2d \sin \theta_2} & e^{2jk_2d \sin \theta_2} \end{bmatrix} \quad (IV-16)$$

$$[A][R_{ss}][A]^H = \begin{bmatrix} 5 & e^{jk_1d \sin \theta_1} + 4.e^{jk_2d \sin \theta_2} & e^{2jk_1d \sin \theta_1} + 4.e^{2jk_2d \sin \theta_2} \\ e^{-jk_1d \sin \theta_1} + 4.e^{-jk_2d \sin \theta_2} & 5 & e^{jk_1d \sin \theta_1} + 4.e^{jk_2d \sin \theta_2} \\ e^{-2jk_1d \sin \theta_1} + 4.e^{-2jk_2d \sin \theta_2} & e^{-jk_1d \sin \theta_1} + 4.e^{-jk_2d \sin \theta_2} & 5 \end{bmatrix} \quad (IV-17)$$

Afin d'obtenir une matrice simple, nous faisons la choix suivants :

- La distance entre antenne d est choisie telle que $k_1d = 2\pi$, et l'angle d'incidence $\theta_1 = 30^\circ$. Dans ces conditions, on a $k_1d \sin \theta_1 = \pi$.

- L'angle d'incidence du deuxième signal est choisi tel que $\theta_2 = 0$. Dans ces conditions, on a $k_2d \sin \theta_2 = 0$.

La matrice d'autocorrélation en l'absence de bruit prend alors la forme suivante :

$$[\mathbf{R}_{xx}] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-18})$$

Nous devons décomposer cette matrice en deux sous espaces : un sous espace signal et un sous espace bruit.

Bien que la recherche des valeurs propres soit ici possible sans technique numérique (on trouve $\lambda_1 = \frac{15 + \sqrt{97}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{15 - \sqrt{97}}{2}$, $\lambda_3 = 0$), il est recommandé d'utiliser un logiciel de calcul (citons parmi les logiciels libres du moment SCILAB). On obtient immédiatement les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants :

$$\lambda_1 = 12,4244 \quad \lambda_2 = 2,5756 \quad \lambda_3 = 0 \quad (\text{IV-19})$$

$$[\mathbf{V}_1] = \begin{bmatrix} 0,6139 \\ 0,4961 \\ 0,6139 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{V}_2] = \begin{bmatrix} 0,3508 \\ 0,8682 \\ 0,3508 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{V}_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-20})$$

Les vecteurs $[\mathbf{V}_1]$ et $[\mathbf{V}_2]$ constituent une base du sous espace signal, tandis que le vecteur $[\mathbf{V}_3]$ est une base du sous espace bruit. On verra au chapitre suivant comment déterminer l'angle d'arrivée à partir de la connaissance de ces vecteurs.

On note que pour ces signaux non bruités, la valeur propre correspondant au sous espace bruit est égale à 0.

Si on souhaite obtenir une matrice d'autocorrélation bruitée, de variance de bruit égale à 1, il suffit d'ajouter 1 à chacun des termes de la diagonale de la matrice non bruitée (IV-18).

On obtient :

$$[\mathbf{R}_{xx}] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-21})$$

La recherche des valeurs propres et vecteurs propres donne les résultats suivants :

$$\lambda_1 = 13,4244 \quad \lambda_2 = 3,5756 \quad \lambda_3 = 1 \quad (\text{IV-22})$$

$$[\mathbf{V}_1] = \begin{bmatrix} 0,6139 \\ 0,4961 \\ 0,6139 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{V}_2] = \begin{bmatrix} 0,3508 \\ 0,8682 \\ 0,3508 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{V}_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-23})$$

On note que l'introduction du bruit a une incidence sur chaque valeur propre qui a été augmentée de 1 (voir figure IV-1 avec $\sigma^2 = 1$), mais que cela n'a changé en rien les vecteurs propres, ce qui était un résultat attendu puisque l'angle d'incidence des signaux n'a pas varié entre les deux simulations.

V - La méthode MUSIC standard

MUSIC est un acronyme formé à partir des mots anglais : Multiple Signal Classification. Il s'agit d'une méthode dite haute résolution de recherche des directions d'arrivée des ondes électromagnétiques.

Cette méthode s'appuie sur la décomposition de l'espace des signaux délivrés en un sous espace signal et un sous espace bruit.

En projetant une famille de vecteurs paramétrés par leur direction d'arrivée θ , pour θ variant de -90° à $+90^\circ$, sur le sous espace bruit, on ne retient que ceux dont la norme projetée constitue un minimum relatif.

Cette famille de vecteurs est construite en supposant connue la structure du réseau d'antennes qui est utilisé pour la détection des angles d'arrivée, et donc l'état de phase relatif des différents signaux sur chaque capteur.

Lorsque la matrice d'autocorrélation est connue, les différentes étapes qui conduisent à la détection des angles d'arrivée sont les suivantes :

1 – Recherche des vecteurs propres et des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation.

2 – Classement de ces valeurs propres suivant les valeurs décroissantes et identification des vecteurs propres associés aux valeurs propres les plus importantes : ces vecteurs constituent une base du sous espace signal. Les vecteurs propres restant constituent une base du sous espace bruit.

3 – Construction d'une famille de vecteurs paramétrée par l'angle d'arrivée possédant un état de phase relatif théorique imposé par la géométrie du réseau.

4 – projection de cette famille de vecteurs sur le sous espace bruit et détermination des valeurs de la direction d'arrivée pour lesquelles on a un minimum relatif

Cette méthode s'adapte à priori à n'importe quelle structure de réseau. Des simplifications peuvent être apportées dans le cas de réseaux linéaires et régulièrement espacés.

Exemple 1 :

On considère un réseau de trois antennes régulièrement espacées d'une distance égale à d et deux signaux sinusoïdaux incidents dans les directions θ_1 et θ_2 . Ces signaux ont pour fréquences respectives f_1 et f_2 .

La matrice d'autocorrélation obtenue est la suivante :

$$[\mathbf{R}_{xx}] = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{V-1})$$

La recherche des valeurs propres et vecteurs propres donne les résultats suivants :

$$\lambda_1 = 13,4244 \quad \lambda_2 = 3,5756 \quad \lambda_3 = 1 \quad (\text{V-2})$$

$$[\mathbf{V}_1] = \begin{bmatrix} 0,6139 \\ 0,4961 \\ 0,6139 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{V}_2] = \begin{bmatrix} 0,3508 \\ 0,8682 \\ 0,3508 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{V}_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{V-3})$$

Les vecteurs $[\mathbf{V}_1]$ et $[\mathbf{V}_2]$ constituent une base du sous espace signal, tandis que le vecteur $[\mathbf{V}_3]$ est une base du sous espace bruit.

Pour un réseau linéaire et régulièrement espacé, le signal détecté attendu sur chaque élément du réseau est de la forme :

$$[\mathbf{V}(\alpha)] = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\alpha} \\ e^{-2j\alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{V-4})$$

Les vecteurs $[\mathbf{V}(\alpha)]$ forment une famille de vecteurs dont les coordonnées dépendent de la direction d'arrivée par l'intermédiaire du paramètre α . La norme de ce vecteur est constante et ne dépend pas de α : $|\mathbf{V}(\alpha)|^2 = [\mathbf{V}(\alpha)]^H [\mathbf{V}(\alpha)] = 3$

On projette ces vecteurs sur le sous espace bruit en utilisant la relation établie au chapitre II qui permet d'obtenir la norme projetée au carré (l'indice $_{SEB}$ indique que la norme est calculée sur la projection dans le sous espace bruit) :

$$|\mathbf{V}(\alpha)|_{SEB}^2 = [\mathbf{V}(\alpha)]^H [\mathbf{V}_3] [\mathbf{V}_3]^H [\mathbf{V}(\alpha)] \quad (\text{V-5})$$

On obtient successivement :

$$[\mathbf{V}(\alpha)]^H [\mathbf{V}_3] = \begin{bmatrix} 1 & e^{j\alpha} & e^{2j\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - e^{2j\alpha}) \quad (\text{V-6})$$

$$[\mathbf{V}_3]^H[\mathbf{V}(\alpha)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\alpha} \\ e^{-2j\alpha} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - e^{-2j\alpha}) \quad (\text{V-7})$$

$$|\mathbf{V}(\alpha)|_{\text{SEB}}^2 = [\mathbf{V}(\alpha)]^H[\mathbf{V}_3][\mathbf{V}_3]^H[\mathbf{V}(\alpha)] = \frac{1}{2}(1 - e^{-2j\alpha})(1 - e^{2j\alpha}) = 1 - \cos(2\alpha) \quad (\text{V-8})$$

Les valeurs de α qui minimisent cette norme au carré s'obtiennent sans représentation graphique : on a immédiatement sur l'intervalle $[0..2\pi]$:

$$\alpha_1 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \pi \quad (\text{V-9})$$

On en déduit les directions d'arrivée par les relations :

$$\alpha_1 = k_1 d \sin(\theta_1) = 0 \quad \text{d'où} \quad \theta_1 = 0 \quad (\text{V-10})$$

$$\alpha_2 = k_2 d \sin(\theta_2) = \pi \quad (\text{V-11})$$

Si la distance d entre éléments du réseau est telle que $k_2 d = 2\pi$, on obtient :

$$\sin(\theta_2) = \frac{1}{2} \quad \text{et donc} \quad \theta_2 = 30^\circ \quad (\text{V-12})$$

Exemple 2 :

On considère un réseau de cinq antennes régulièrement espacées d'une distance égale à d et trois signaux sinusoïdaux incidents dans les directions θ_1 , θ_2 et θ_3 . Ces signaux sont supposés décorrélés.

On obtient la matrice d'autocorrélation bruitée ci-dessous :

$$[\mathbf{R}_{xx}] = \begin{bmatrix} 6,2 & -3,643 - 0,57j & -0,467 + 1,4j & 2,178 - 0,21j & -1,8 - 3,527j \\ -3,643 + 0,57j & 6,5 & -3,643 - 0,57j & -0,467 + 1,4j & 2,178 - 0,21j \\ -0,467 - 1,4j & -3,643 + 0,57j & 6,3 & -3,643 - 0,57j & -0,467 + 1,4j \\ 2,178 + 0,21j & -0,467 - 1,4j & -3,643 + 0,57j & 6,4 & -3,643 - 0,57j \\ -1,8 + 3,527j & 2,178 + 0,21j & -0,467 - 1,4j & -3,643 + 0,57j & 6,5 \end{bmatrix} \quad (\text{V-13})$$

On détermine par logiciel les 5 valeurs propres :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 15,52 & \lambda_2 &= 10,34 & \lambda_3 &= 5,285 \\ \lambda_4 &= 0,363 & \lambda_5 &= 0,395 \end{aligned} \quad (\text{V-14})$$

Les 3 premières (λ_1 , λ_2 , λ_3) sont associées au sous espace signal, tandis que les 2 dernières (λ_4 , λ_5) sont associées au sous espace bruit.

Les vecteurs propres associés sont les suivants :

$$\begin{aligned}
 [V_1] &= \begin{bmatrix} -0,393 - 0,282j \\ 0,43 - 0,088j \\ -0,114 + 0,355j \\ -0,297 - 0,318j \\ 0,496 \end{bmatrix} & [V_2] &= \begin{bmatrix} 0,223 - 0,235j \\ -0,46 + 0,151j \\ 0,565 \\ -0,456 - 0,15j \\ 0,229 + 0,244j \end{bmatrix} & [V_3] &= \begin{bmatrix} 0,484 - 0,133j \\ -0,145 - 0,399j \\ -0,358 + 0,047j \\ -0,05 + 0,418j \\ 0,512 \end{bmatrix} \\
 [V_4] &= \begin{bmatrix} 0,555 - 0,188j \\ 0,606 \\ 0,421 + 0,059j \\ 0,065 - 0,009j \\ -0,104 - 0,306j \end{bmatrix} & [V_5] &= \begin{bmatrix} -0,19 + 0,173j \\ 0,062 - 0,148j \\ 0,454 - 0,158j \\ 0,634 \\ 0,465 + 0,244j \end{bmatrix} & & (V-15)
 \end{aligned}$$

Les vecteurs $[V_1]$, $[V_2]$ et $[V_3]$ constituent une base du sous espace signal, tandis que les vecteurs $[V_4]$ et $[V_5]$ constituent une base du sous espace bruit.

Pour un réseau linéaire et régulièrement espacé, le signal détecté attendu sur chaque élément du réseau est de la forme :

$$[V(\alpha)] = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\alpha} \\ e^{-2j\alpha} \\ e^{-3j\alpha} \\ e^{-4j\alpha} \end{bmatrix} \quad (V-16)$$

Les vecteurs $[V(\alpha)]$ forment une famille de vecteurs dont les coordonnées dépendent de la direction d'arrivée par l'intermédiaire du paramètre α et dont la norme ne dépend pas de α .

On peut trouver les directions d'arrivée en projetant ces vecteurs sur le sous espace signal et en recherchant valeurs de α qui maximisent la norme de la projection, ou en projetant ces vecteurs sur le sous espace bruit et en recherchant valeurs de α qui minimisent la norme de la projection.

La solution la plus rapide est donnée par la base de projection qui contient le plus petit nombre de vecteurs, en l'occurrence sur cet exemple, il s'agit du sous espace bruit.

On projette donc ces vecteurs sur le sous espace bruit en utilisant la relation établie au chapitre II qui permet d'obtenir la norme projetée au carré :

$$|V(\alpha)|_{SEB}^2 = [V(\alpha)]^H [V_4] [V_4]^H [V(\alpha)] + [V(\alpha)]^H [V_5] [V_5]^H [V(\alpha)] \quad (V-17)$$

On obtient successivement :

$$[\mathbf{V}(\alpha)]^H [\mathbf{V}_4] = \begin{bmatrix} 1 & e^{j\alpha} & e^{2j\alpha} & e^{3j\alpha} & e^{4j\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,555 - 0,188j \\ 0,606 \\ 0,421 + 0,059j \\ 0,065 - 0,009j \\ -0,104 - 0,306j \end{bmatrix} \quad (\text{V-18})$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{V}(\alpha)]^H [\mathbf{V}_4] &= 0,555 - 0,188j + 0,606 \cos \alpha + 0,606j \sin \alpha \\ &+ 0,421 \cos 2\alpha - 0,059 \sin 2\alpha + 0,421j \sin 2\alpha + 0,059j \cos 2\alpha \\ &+ 0,065 \cos 3\alpha + 0,009 \sin 3\alpha + 0,065j \sin 3\alpha - 0,009j \cos 3\alpha \\ &- 0,104 \cos 4\alpha + 0,306 \sin 4\alpha - 0,104j \sin 4\alpha - 0,306j \cos 4\alpha \end{aligned} \quad (\text{V-19})$$

$$[\mathbf{V}(\alpha)]^H [\mathbf{V}_5] = \begin{bmatrix} 1 & e^{j\alpha} & e^{2j\alpha} & e^{3j\alpha} & e^{4j\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,19 + 0,173j \\ 0,062 - 0,148j \\ 0,454 - 0,158j \\ 0,634 \\ 0,465 + 0,244j \end{bmatrix} \quad (\text{V-20})$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{V}(\alpha)]^H [\mathbf{V}_5] &= -0,19 + 0,173j \\ &+ 0,062 \cos \alpha + 0,148 \sin \alpha + 0,062j \sin \alpha - 0,148j \cos \alpha \\ &+ 0,454 \cos 2\alpha + 0,158 \sin 2\alpha + 0,454j \sin 2\alpha - 0,158j \cos 2\alpha \\ &+ 0,634 \cos 3\alpha + 0,634j \sin 3\alpha \\ &+ 0,465 \cos 4\alpha - 0,244 \sin 4\alpha + 0,465j \sin 4\alpha + 0,244j \cos 4\alpha \end{aligned} \quad (\text{V-21})$$

La norme au carré de la projection est obtenue en sommant la norme au carré du nombre complexe obtenu en (V-18) et la norme au carré du nombre complexe obtenu en (V-20).

En traçant l'inverse de cette norme, soit la quantité qu'on trouve sous l'appellation de pseudo-spectre MUSIC $P(\alpha)$:

$$P(\alpha) = \frac{1}{|\mathbf{V}(\alpha)|_{\text{SEB}}^2} = \frac{1}{[\mathbf{V}(\alpha)]^H [\mathbf{V}_4] [\mathbf{V}_4]^H [\mathbf{V}(\alpha)] + [\mathbf{V}(\alpha)]^H [\mathbf{V}_5] [\mathbf{V}_5]^H [\mathbf{V}(\alpha)]} \quad (\text{V-22})$$

on repère très simplement les valeurs de α qui correspondent à des maxima relatifs : voir figure (V-1)

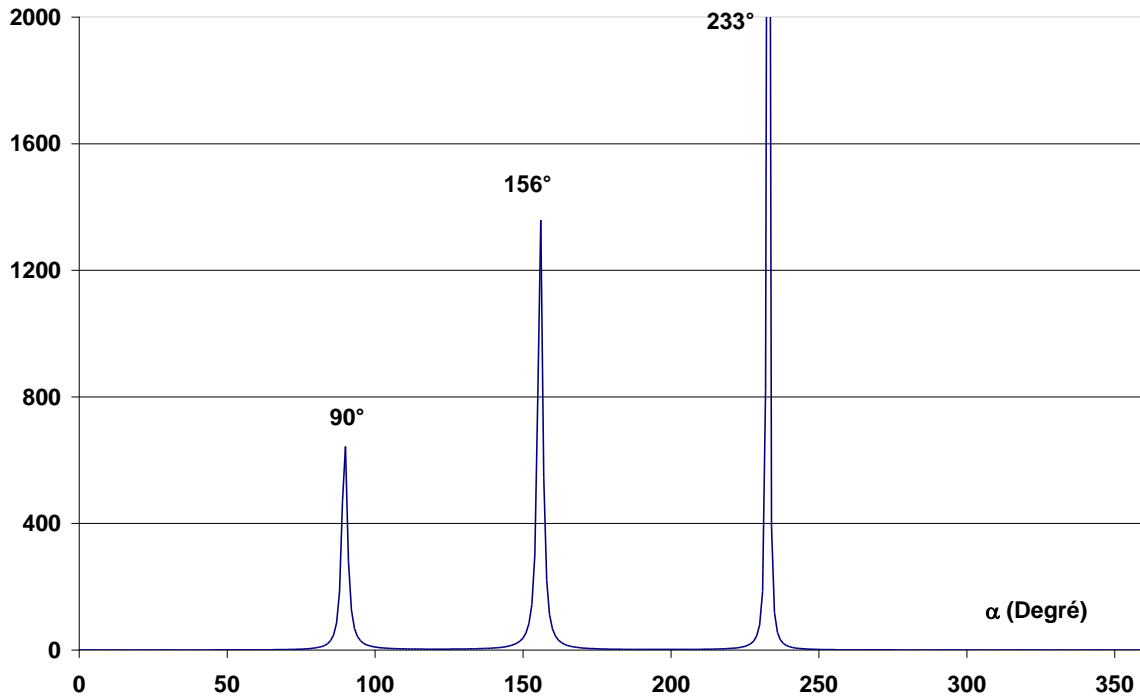


Figure V-1 : Inverse de la norme au carré de la projection sur le sous espace bruit de la famille de vecteur $[V(\alpha)]$ en fonction de α .

Les maxima sont obtenus pour :

$$\alpha_1 = 90^\circ \quad \alpha_2 = 156^\circ \quad \alpha_3 = 233^\circ \text{ ou } \alpha_3 = -127^\circ \quad (\text{V-23})$$

Si on suppose les signaux incidents décorrélés, mais de fréquences suffisamment proches pour pouvoir considérer qu'on sensiblement à chaque fréquence (la distance entre éléments du réseau est prise égale à $d = \lambda/2$) :

$$kd = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} = \pi \quad (\text{V-24})$$

on obtient les directions d'arrivée par la relation :

$$\alpha_i = \pi \sin(\theta_i) \quad (\text{V-25})$$

soit donc :

$$\sin(\theta_1) = \frac{1}{2} \quad \theta_1 = 30^\circ \quad (\text{V-26})$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{156}{180} = 0.866 \quad \theta_2 = 60^\circ \quad (\text{V-27})$$

$$\sin(\theta_3) = -\frac{127}{180} = -0.705 \quad \theta_3 = -45^\circ \quad (\text{V-28})$$

VI - La méthode Root MUSIC

Cette méthode utilise, comme la précédente, la décomposition de l'espace vectoriel décrit par la matrice d'autocorrélation en deux sous espaces vectoriels : le sous espace bruit et le sous espace signal.

La méthode précédente permet la recherche d'une direction d'arrivée dans un plan, mais elle ne fait à priori aucune hypothèse sur les capteurs qui sont situés dans ce plan : ils peuvent être ou non équidistants, et pourraient même ne pas être alignés (pour cette dernière hypothèse, il faut les voir décalés « en hauteur »).

Pour un réseau de N antennes, et avec K signaux incidents, l'espace signal est de dimension K , et l'espace bruit de dimension $N-K$.

La projection de la famille de vecteurs de norme constante et dépendant de la direction α sur le sous espace bruit s'exprime d'une manière générale sous la forme :

$$|V(\alpha)|_{\text{SEB}}^2 = \sum_{i=K+1}^N [V(\alpha)]^H [V_i] [V_i]^H [V(\alpha)] \quad (\text{VI-1})$$

où les $[V_i]$ sont les $(N-K)$ vecteurs propres qui constituent une base du sous espace bruit.

Lorsque les antennes constituent un réseau linéaire dont tous les éléments sont équidistants, on peut montrer que l'expression (VI-1) se réduit à une expression polynomiale fonction d'un variable complexe.

Dans cette hypothèse, le vecteur $[V(\alpha)]$ attendu comme signal reçu d'une direction α prend une forme simplifiée (C'est celle que nous avons utilisée implicitement jusqu'à présent) en prenant l'origine où se situe le premier élément comme origine des phases :

$$[V(\alpha)] = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\alpha} \\ e^{-2j\alpha} \\ \vdots \\ e^{-(N-1)j\alpha} \end{bmatrix} \quad [V(\alpha)]^H = [1 \quad e^{j\alpha} \quad e^{2j\alpha} \quad \dots \quad e^{(N-1)j\alpha}] \quad (\text{VI-2})$$

On peut utiliser l'associativité du produit des matrices pour calculer séparément et progressivement l'expression (VI-1).

Le produit $[V_i] [V_i]^H$ se présente sous la forme :

$$[\mathbf{V}_i][\mathbf{V}_i]^H = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{i1} \\ \mathbf{V}_{i2} \\ \mathbf{V}_{i3} \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{iN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{V}}_{i1} & \overline{\mathbf{V}}_{i2} & \overline{\mathbf{V}}_{i3} & \dots & \overline{\mathbf{V}}_{iN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{i1}^2 & \mathbf{V}_{i1}\overline{\mathbf{V}}_{i2} & \mathbf{V}_{i1}\overline{\mathbf{V}}_{i3} & \dots & \mathbf{V}_{i1}\overline{\mathbf{V}}_{iN} \\ \mathbf{V}_{i2}\overline{\mathbf{V}}_{i1} & \mathbf{V}_{i2}^2 & \mathbf{V}_{i2}\overline{\mathbf{V}}_{i3} & \dots & \mathbf{V}_{i2}\overline{\mathbf{V}}_{iN} \\ \mathbf{V}_{i3}\overline{\mathbf{V}}_{i1} & \mathbf{V}_{i3}\overline{\mathbf{V}}_{i2} & \mathbf{V}_{i3}^2 & \dots & \mathbf{V}_{i3}\overline{\mathbf{V}}_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{V}_{iN}\overline{\mathbf{V}}_{i1} & \mathbf{V}_{iN}\overline{\mathbf{V}}_{i2} & \mathbf{V}_{iN}\overline{\mathbf{V}}_{i3} & \dots & \mathbf{V}_{iN}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{VI-3})$$

On calcule ensuite :

$$[\mathbf{V}(\alpha)]^H[\mathbf{V}_i][\mathbf{V}_i]^H = \begin{bmatrix} 1 & e^{j\alpha} & e^{2j\alpha} & \dots & e^{(N-1)j\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{i1}^2 & \mathbf{V}_{i1}\overline{\mathbf{V}}_{i2} & \mathbf{V}_{i1}\overline{\mathbf{V}}_{i3} & \dots & \mathbf{V}_{i1}\overline{\mathbf{V}}_{iN} \\ \mathbf{V}_{i2}\overline{\mathbf{V}}_{i1} & \mathbf{V}_{i2}^2 & \mathbf{V}_{i2}\overline{\mathbf{V}}_{i3} & \dots & \mathbf{V}_{i2}\overline{\mathbf{V}}_{iN} \\ \mathbf{V}_{i3}\overline{\mathbf{V}}_{i1} & \mathbf{V}_{i3}\overline{\mathbf{V}}_{i2} & \mathbf{V}_{i3}^2 & \dots & \mathbf{V}_{i3}\overline{\mathbf{V}}_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{V}_{iN}\overline{\mathbf{V}}_{i1} & \mathbf{V}_{iN}\overline{\mathbf{V}}_{i2} & \mathbf{V}_{iN}\overline{\mathbf{V}}_{i3} & \dots & \mathbf{V}_{iN}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{VI-4})$$

Les expressions de la matrice uniligne résultat étant trop longues, elles sont présentées de la manière suivante :

$$[\mathbf{V}(\alpha)]^H[\mathbf{V}_i][\mathbf{V}_i]^H = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \dots \quad v_N] \quad (\text{VI-5})$$

avec :

$$v_1 = \mathbf{V}_{i1}^2 + e^{j\alpha}\mathbf{V}_{i2}\overline{\mathbf{V}}_{i1} + e^{2j\alpha}\mathbf{V}_{i3}\overline{\mathbf{V}}_{i1} + \dots + e^{(N-1)j\alpha}\mathbf{V}_{iN}\overline{\mathbf{V}}_{i1} \quad (\text{VI-6})$$

$$v_2 = \mathbf{V}_{i1}\overline{\mathbf{V}}_{i2} + e^{j\alpha}\mathbf{V}_{i2}^2 + e^{2j\alpha}\mathbf{V}_{i3}\overline{\mathbf{V}}_{i2} + \dots + e^{(N-1)j\alpha}\mathbf{V}_{iN}\overline{\mathbf{V}}_{i2} \quad (\text{VI-7})$$

$$v_3 = \mathbf{V}_{i1}\overline{\mathbf{V}}_{i3} + e^{j\alpha}\mathbf{V}_{i2}\overline{\mathbf{V}}_{i3} + e^{2j\alpha}\mathbf{V}_{i3}^2 + \dots + e^{(N-1)j\alpha}\mathbf{V}_{iN}\overline{\mathbf{V}}_{i3} \quad (\text{VI-8})$$

$$v_N = \mathbf{V}_{i1}\overline{\mathbf{V}}_{iN} + e^{j\alpha}\mathbf{V}_{i2}\overline{\mathbf{V}}_{iN} + e^{2j\alpha}\mathbf{V}_{i3}\overline{\mathbf{V}}_{iN} + \dots + e^{(N-1)j\alpha}\mathbf{V}_{iN}^2 \quad (\text{VI-9})$$

Il reste un dernier produit à effectuer par $[\mathbf{V}(\alpha)]$:

$$[\mathbf{V}(\alpha)]^H[\mathbf{V}_i][\mathbf{V}_i]^H[\mathbf{V}(\alpha)] = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \dots \quad v_N] \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\alpha} \\ e^{-2j\alpha} \\ \vdots \\ e^{-(N-1)j\alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-10})$$

$$[\mathbf{V}(\alpha)]^H[\mathbf{V}_i][\mathbf{V}_i]^H[\mathbf{V}(\alpha)] = v_1 + v_2 e^{-j\alpha} + v_3 e^{-2j\alpha} + \dots + v_N e^{-(N-1)j\alpha} \quad (\text{VI-11})$$

Cette somme peut être exprimée en fonction des coordonnées des vecteurs propres $[V_i]$ et réorganisée de manière à la faire apparaître comme une somme d'exponentielles complexes coefficientées que l'on peut présenter sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & V_{i1}^2 + e^{j\alpha} V_{i2} \overline{V_{i1}} + e^{2j\alpha} V_{i3} \overline{V_{i1}} + \dots + e^{(N-1)j\alpha} V_{iN} \overline{V_{i1}} \\
 & + V_{i1} \overline{V_{i2}} e^{-j\alpha} + V_{i2}^2 + e^{j\alpha} V_{i3} \overline{V_{i2}} + \dots + e^{(N-2)j\alpha} V_{iN} \overline{V_{i2}} \\
 & + V_{i1} \overline{V_{i3}} e^{-2j\alpha} + e^{-j\alpha} V_{i2} \overline{V_{i3}} + V_{i3}^2 + \dots + e^{(N-3)j\alpha} V_{iN} \overline{V_{i3}} \\
 & + \dots \\
 & + V_{i1} \overline{V_{iN}} e^{-(N-1)j\alpha} + \dots + V_{iN}^2
 \end{aligned} \tag{VI-12}$$

En effectuant la somme des termes colonne par colonne, on peut donner une écriture condensée :

$$[V(\alpha)]^H [V_i] [V_i]^H [V(\alpha)] = \sum_{p=-(N-1)}^{p=(N-1)} C_p e^{pj\alpha} = \sum_{p=-(N-1)}^{p=(N-1)} C_p z^p \tag{VI-13}$$

avec $z = e^{j\alpha}$ et $C_p = \sum_{m=n} V_{im} \overline{V_{in}}$ (VI-14)

Nous devons donc chercher à minimiser l'expression :

$$|V(\alpha)|_{SEB}^2 = \sum_{i=K+1}^N [V(\alpha)]^H [V_i] [V_i]^H [V(\alpha)] = \sum_{i=K+1}^N \left(\sum_{p=-(N-1)}^{p=(N-1)} C_p z^p \right) = \sum_{i=K+1}^N \left(\sum_{p=-(N-1)}^{p=(N-1)} \left(\sum_{m=n} V_{im} \overline{V_{in}} \right) z^p \right) \tag{VI-15}$$

Avec la méthode MUSIC standard, cette recherche de minimum est effectuée en calculant explicitement l'expression (VI-15) ci-dessus pour chaque valeur de α .

Avec la méthode Root MUSIC, on va rechercher les zéros de l'expression polynomiale complexe (VI-15). Les zéros correspondants aux directions d'arrivée seront des racines doubles dans le cas idéal, des racines « appariées » dans le cas de matrices d'autocorrélation bruitées de manière aléatoire.

Exemple 1

On considère un réseau de 3 capteurs avec 2 signaux incidents. La matrice de corrélation est bruitée uniquement sur sa diagonale et avec une variance de bruit identique ($\sigma^2 = 1$).

$$[R_{xx}] = \begin{bmatrix} 6 & -0,606 + 3,204j & -4,266 + 0,964j \\ -0,606 - 3,204j & 6 & -0,606 + 3,204j \\ -4,266 - 0,964j & -0,606 - 3,204j & 6 \end{bmatrix} \tag{VI-16}$$

La recherche des valeurs propres et vecteurs propres donne les résultats suivants :

$$\lambda_1 = 13,15 \quad \lambda_2 = 3,48 \quad \lambda_3 = 1 \quad (\text{VI-17})$$

$$[\mathbf{V}_1] = \begin{bmatrix} -0,597 + 0,044j \\ 0,02 + 0,532j \\ 0,599 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{V}_2] = \begin{bmatrix} 0,057 + 0,472j \\ -0,553 - 0,491j \\ 0,476 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{V}_3] = \begin{bmatrix} -0,513 + 0,39j \\ -0,39 + 0,132j \\ -0,644 \end{bmatrix} \quad (\text{VI-18})$$

Les vecteurs $[\mathbf{V}_1]$ et $[\mathbf{V}_2]$ constituent une base du sous espace signal, tandis que le vecteur $[\mathbf{V}_3]$ est une base du sous espace bruit.

Pour un réseau linéaire et régulièrement espacé, le signal détecté attendu sur chaque élément du réseau est de la forme :

$$[\mathbf{V}(\alpha)] = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\alpha} \\ e^{-2j\alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-19})$$

Les vecteurs $[\mathbf{V}(\alpha)]$ forment une famille de vecteurs dont les coordonnées dépendent de la direction d'arrivée par l'intermédiaire du paramètre α . La norme de ce vecteur est constante et ne dépend pas de α : $|\mathbf{V}(\alpha)|^2 = [\mathbf{V}(\alpha)]^H [\mathbf{V}(\alpha)] = 3$

On projette ces vecteurs sur le sous espace bruit en utilisant la relation établie au chapitre II qui permet d'obtenir la norme projetée au carré (l'indice _{SEB} indique que la norme au carré est calculée sur la projection dans le sous espace bruit) :

$$|\mathbf{V}(\alpha)|_{\text{SEB}}^2 = [\mathbf{V}(\alpha)]^H [\mathbf{V}_3] [\mathbf{V}_3]^H [\mathbf{V}(\alpha)] \quad (\text{VI-20})$$

On calcule successivement :

$$[\mathbf{V}(\alpha)]^H [\mathbf{V}_3] = \begin{bmatrix} 1 & e^{j\alpha} & e^{2j\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{13} \\ \mathbf{V}_{23} \\ \mathbf{V}_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{V}_{13} + \mathbf{V}_{23}e^{j\alpha} + \mathbf{V}_{33}e^{2j\alpha} \quad (\text{VI-21})$$

$$[\mathbf{V}_3]^H [\mathbf{V}(\alpha)] = \overline{[\mathbf{V}(\alpha)]^H [\mathbf{V}_3]} = \overline{\mathbf{V}_{13} + \mathbf{V}_{23}e^{j\alpha} + \mathbf{V}_{33}e^{2j\alpha}} = \overline{\mathbf{V}_{13}} + \overline{\mathbf{V}_{23}}e^{-j\alpha} + \overline{\mathbf{V}_{33}}e^{-2j\alpha} \quad (\text{VI-22})$$

$$[\mathbf{V}(\alpha)]^H [\mathbf{V}_3] [\mathbf{V}_3]^H [\mathbf{V}(\alpha)] = (\mathbf{V}_{13} + \mathbf{V}_{23}e^{j\alpha} + \mathbf{V}_{33}e^{2j\alpha}) (\overline{\mathbf{V}_{13}} + \overline{\mathbf{V}_{23}}e^{-j\alpha} + \overline{\mathbf{V}_{33}}e^{-2j\alpha}) \quad (\text{VI-23})$$

soit encore en posant : $z = e^{j\alpha}$:

$$|\mathbf{V}(\alpha)|_{\text{SEB}}^2 = [\mathbf{V}(\alpha)]^H [\mathbf{V}_3] [\mathbf{V}_3]^H [\mathbf{V}(\alpha)] = (\mathbf{V}_{13} + \mathbf{V}_{23}z + \mathbf{V}_{33}z^2) (\overline{\mathbf{V}_{13}} + \overline{\mathbf{V}_{23}}z^{-1} + \overline{\mathbf{V}_{33}}z^{-2})$$

(VI-24)

$$|V(\alpha)|_{SEB}^2 = V_{13}\overline{V_{33}}z^{-2} + (V_{13}\overline{V_{23}} + V_{23}\overline{V_{33}})z^{-1} + (V_{13}\overline{V_{13}} + V_{23}\overline{V_{23}} + V_{33}\overline{V_{33}}) + (V_{23}\overline{V_{13}} + V_{33}\overline{V_{23}})z + V_{33}\overline{V_{13}}z^2 \quad (VI-25)$$

On obtient le polynôme en z recherché en multipliant cette dernière expression par z^2 :

$$P(z) = V_{13}\overline{V_{33}} + (V_{13}\overline{V_{23}} + V_{23}\overline{V_{33}})z + (V_{13}\overline{V_{13}} + V_{23}\overline{V_{23}} + V_{33}\overline{V_{33}})z^2 + (V_{23}\overline{V_{13}} + V_{33}\overline{V_{23}})z^3 + V_{33}\overline{V_{13}}z^4 \quad (VI-26)$$

$$P(z) = (0,33 - 0,251j) + (-0,4 + 0,135j)z + z^2 + (-0,4 - 0,135j)z^3 + (0,33 + 0,251j)z^4 \quad (VI-27)$$

Les racines doubles de l'équation $P(z) = 0$ sont données par logiciel, et on obtient :

$$z_1 = j \quad \text{et} \quad z_2 = -0,605 - 0,796j \quad (VI-28)$$

Les arguments de ces racines sont respectivement :

$$\alpha_1 = \pi/2 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = 232,7^\circ = -127,3^\circ \quad (VI-29)$$

On en déduit les angles θ_1 et θ_2 d'arrivée par les relations :

$$\alpha_1 = kd \sin(\theta_1) \quad \text{et} \quad \alpha_2 = kd \sin(\theta_2) \quad (VI-30)$$

Si les éléments sont distants de $\lambda/2$, on a $kd = \pi$:

$$\theta_1 = 30^\circ \quad \text{et} \quad \theta_2 = -45^\circ \quad (VI-31)$$

Exemple 2

Nous reprenons l'exemple du chapitre précédent, en n'indiquant plus que les grandes lignes du calcul. Cet exemple concerne une structure de 5 capteurs, avec 3 signaux incidents. La matrice d'autocorrélation obtenue est la suivante :

$$[R_{xx}] = \begin{bmatrix} 6,2 & -3,643 - 0,57j & -0,467 + 1,4j & 2,178 - 0,21j & -1,8 - 3,527j \\ -3,643 + 0,57j & 6,5 & -3,643 - 0,57j & -0,467 + 1,4j & 2,178 - 0,21j \\ -0,467 - 1,4j & -3,643 + 0,57j & 6,3 & -3,643 - 0,57j & -0,467 + 1,4j \\ 2,178 + 0,21j & -0,467 - 1,4j & -3,643 + 0,57j & 6,4 & -3,643 - 0,57j \\ -1,8 + 3,527j & 2,178 + 0,21j & -0,467 - 1,4j & -3,643 + 0,57j & 6,5 \end{bmatrix} \quad (VI-32)$$

On détermine par logiciel les 5 valeurs propres :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 15,52 & \lambda_2 &= 10,34 & \lambda_3 &= 5,285 & & (VI-33) \\ \lambda_4 &= 0,363 & \lambda_5 &= 0,395 & & & & \end{aligned}$$

Les 3 premières ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) sont associées au sous espace signal, tandis que les 2 dernières (λ_4, λ_5) sont associées au sous espace bruit.

Les vecteurs propres associés sont les suivants :

$$\begin{aligned}
 [V_1] &= \begin{bmatrix} -0,393 - 0,282j \\ 0,43 - 0,088j \\ -0,114 + 0,355j \\ -0,297 - 0,318j \\ 0,496 \end{bmatrix} & [V_2] &= \begin{bmatrix} 0,223 - 0,235j \\ -0,46 + 0,151j \\ 0,565 \\ -0,456 - 0,15j \\ 0,229 + 0,244j \end{bmatrix} & [V_3] &= \begin{bmatrix} 0,484 - 0,133j \\ -0,145 - 0,399j \\ -0,358 + 0,047j \\ -0,05 + 0,418j \\ 0,512 \end{bmatrix} \\
 [V_4] &= \begin{bmatrix} 0,555 - 0,188j \\ 0,606 \\ 0,421 + 0,059j \\ 0,065 - 0,009j \\ -0,104 - 0,306j \end{bmatrix} & [V_5] &= \begin{bmatrix} -0,19 + 0,173j \\ 0,062 - 0,148j \\ 0,454 - 0,158j \\ 0,634 \\ 0,465 + 0,244j \end{bmatrix} & & (VI-34)
 \end{aligned}$$

Les vecteurs $[V_1], [V_2]$ et $[V_3]$ constituent une base du sous espace signal, tandis que les vecteurs $[V_4]$ et $[V_5]$ constituent une base du sous espace bruit.

Pour un réseau linéaire et régulièrement espacé, le signal détecté attendu sur chaque élément du réseau est de la forme :

$$[V(\alpha)] = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\alpha} \\ e^{-2j\alpha} \\ e^{-3j\alpha} \\ e^{-4j\alpha} \end{bmatrix} \quad (VI-35)$$

On projette cette famille de vecteurs sur le sous espace bruit en utilisant la relation établie au chapitre II qui permet d'obtenir la norme projetée au carré :

$$|V(\alpha)|_{SEB}^2 = [V(\alpha)]^H [V_4] [V_4]^H [V(\alpha)] + [V(\alpha)]^H [V_5] [V_5]^H [V(\alpha)] \quad (VI-36)$$

et nous formons le polynôme $P(z)$ associé, en décomposant suivant chaque vecteur de la base du sous espace bruit :

$$\begin{aligned}
 P_4(z) = & V_{14}\overline{V_{54}} + (V_{14}\overline{V_{44}} + V_{24}\overline{V_{54}})z + (V_{14}\overline{V_{34}} + V_{24}\overline{V_{44}} + V_{34}\overline{V_{54}})z^2 + \\
 & (V_{14}\overline{V_{24}} + V_{24}\overline{V_{34}} + V_{34}\overline{V_{44}} + V_{44}\overline{V_{54}})z^3 + (V_{14}\overline{V_{14}} + V_{24}\overline{V_{24}} + V_{34}\overline{V_{34}} + V_{44}\overline{V_{44}} + V_{54}\overline{V_{54}})z^4 + \\
 & (V_{14}\overline{V_{24}} + V_{24}\overline{V_{34}} + V_{34}\overline{V_{44}} + V_{44}\overline{V_{54}})z^5 + (V_{14}\overline{V_{34}} + V_{24}\overline{V_{44}} + V_{34}\overline{V_{54}})z^6 + \\
 & (V_{14}\overline{V_{44}} + V_{24}\overline{V_{54}})z^7 + \overline{V_{14}V_{54}}z^8
 \end{aligned} \tag{VI-37}$$

$$P(z) = P_4(z) + P_5(z) \tag{VI-38}$$

Le polynôme (VI-38) obtenu par logiciel est le suivant :

$$\begin{aligned}
 P(z) = & (-0,046 + 0,316j) + (-0,153 + 0,204j)z + (0,298 - 0,213j)z^2 + (1,211 - 0,451j)z^3 \\
 & + 2,001z^4 + (1,211 + 0,451j)z^5 + (0,298 + 0,213j)z^6 + (-0,153 - 0,204j)z^7 + (-0,046 + 0,316j)z^8
 \end{aligned} \tag{VI-39}$$

Les 12 racines complexes de (VI-39) sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= 0,005 + 1,018j \\
 Z_2 &= 0,005 + 0,982j \\
 Z_3 &= -0,927 + 0,416j \\
 Z_4 &= -0,897 + 0,403j \\
 Z_5 &= -0,608 - 0,801j \\
 Z_6 &= -0,601 - 0,792j \\
 Z_7 &= 0,479 - 0,174j \\
 Z_8 &= 1,843 - 0,671j
 \end{aligned} \tag{VI-40}$$

On remarque que pour une matrice d'autocorrélation bruitée, les racines doubles ne sont pas rigoureusement identiques. On peut penser qu'on minimise l'incertitude en prenant la moyenne de ces deux racines, ce qui conduit à la prise en compte des racines suivantes :

$$R_1 = \frac{Z_1 + Z_2}{2} = 0,005 + j \tag{VI-41}$$

$$R_2 = \frac{Z_3 + Z_4}{2} = -0,912 + 0,409j \tag{VI-42}$$

$$R_3 = \frac{Z_5 + Z_6}{2} = -0,604 - 0,796j \tag{VI-43}$$

dont les arguments respectifs sont :

$$\alpha_1 \cong 90^\circ \quad \alpha_2 \cong 156^\circ \quad \alpha_3 \cong 233^\circ \tag{VI-44}$$

Ce sont les résultats obtenus au chapitre précédent.

VII - La méthode ESPRIT

ESPRIT est un acronyme formé à partir des initiales de l'expression anglaise : *Estimation of Signal Parameters via Rotationnal Invariance Techniques*.

Cette méthode de détection des angles d'arrivée ne s'applique qu'à des réseaux qui sont invariants par translation. En dimension 1, il s'agit essentiellement de réseaux linéaires et régulièrement espacés.

D'un point de vue mathématique, on montre que cette propriété induit une invariance rotationnelle de la structure du sous espace signal que nous allons détailler plus avant.

Soit un réseau linéaire de N éléments régulièrement espacés. L'invariance de translation peut s'appliquer a priori à un sous réseau de n'importe quelle dimension dont les éléments sont adjacents. La solution optimum consiste à considérer un sous réseau R1 de (N-1) éléments construit à partir du premier élément, et un sous réseau R2 construit à partir de R1 par translation d'une longueur égale à la distance entre éléments (Figure VII-1).

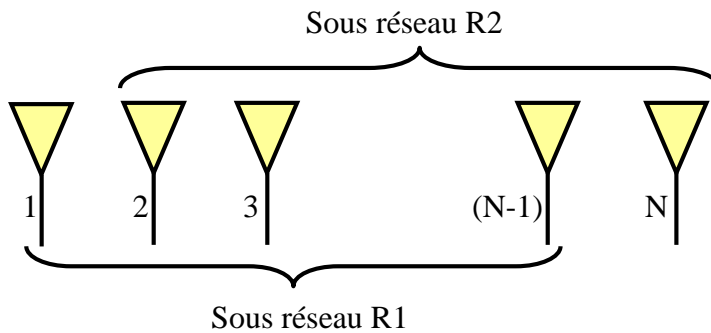


Figure VII-1 : représentation du réseau complet de N éléments, et des deux sous réseaux dont le second est obtenu par translation du premier.

Si on considère K signaux incidents, et en reprenant les notations des chapitres précédents, les signaux délivrés par le sous réseau R1 composé des (N-1) premiers éléments s'expriment sous la forme :

$$x_1(t) = s_1(t)e^{j\phi_{11}} + s_2(t)e^{j\phi_{12}} + s_3(t)e^{j\phi_{13}} + \dots + s_K(t)e^{j\phi_{1K}} + n_1(t) \quad (\text{VII-1})$$

$$x_2(t) = s_1(t)e^{j\phi_{21}} + s_2(t)e^{j\phi_{22}} + s_3(t)e^{j\phi_{23}} + \dots + s_K(t)e^{j\phi_{2K}} + n_2(t) \quad (\text{VII-2})$$

$$x_3(t) = s_1(t)e^{j\phi_{31}} + s_2(t)e^{j\phi_{32}} + s_3(t)e^{j\phi_{33}} + \dots + s_K(t)e^{j\phi_{3K}} + n_3(t) \quad (\text{VII-3})$$

.....

$$x_{N-1}(t) = s_1(t)e^{j\phi_{(N-1)}} + s_2(t)e^{j\phi_{(N-2)}} + s_3(t)e^{j\phi_{(N-3)}} + \dots + s_K(t)e^{j\phi_{(N-1)k}} + n_{N-1}(t) \quad (\text{VII-4})$$

Cette écriture peut être condensée sous forme sommative, pour i variant de 1 à $N-1$:

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^{k=K} s_i(t)e^{j\phi_{ik}} + n_i(t) \quad (\text{VII-5})$$

On peut également adopter une écriture matricielle et la matrice des signaux délivrés est liée à la matrice des signaux incidents par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{j\phi_{11}} & e^{j\phi_{12}} & e^{j\phi_{13}} & \dots & e^{j\phi_{1K}} \\ e^{j\phi_{21}} & e^{j\phi_{22}} & e^{j\phi_{23}} & \dots & e^{j\phi_{2K}} \\ e^{j\phi_{31}} & e^{j\phi_{32}} & e^{j\phi_{33}} & \dots & e^{j\phi_{3K}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{j\phi_{(N-1)1}} & e^{j\phi_{(N-1)2}} & e^{j\phi_{(N-1)3}} & \dots & e^{j\phi_{(N-1)K}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \\ \vdots \\ s_K(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_{N-1}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{VII-6})$$

soit encore :

$$[X_1] = [A_1] [S] + [\eta_1] \quad (\text{VII-7})$$

Cette écriture matricielle peut être reproduite pour le réseau R2, en ne considérant que les $(N-1)$ derniers signaux :

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{j\phi_{21}} & e^{j\phi_{22}} & e^{j\phi_{23}} & \dots & e^{j\phi_{2K}} \\ e^{j\phi_{31}} & e^{j\phi_{32}} & e^{j\phi_{33}} & \dots & e^{j\phi_{3K}} \\ e^{j\phi_{41}} & e^{j\phi_{42}} & e^{j\phi_{43}} & \dots & e^{j\phi_{4K}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{j\phi_{N1}} & e^{j\phi_{N2}} & e^{j\phi_{N3}} & \dots & e^{j\phi_{NK}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \\ \vdots \\ s_K(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_2(t) \\ n_3(t) \\ n_4(t) \\ \vdots \\ n_N(t) \end{pmatrix} \quad (\text{VII-8})$$

soit encore :

$$[X_2] = [A_2] [S] + [\eta_2] \quad (\text{VII-9})$$

Dans l'hypothèse d'un réseau linéaire, avec des éléments régulièrement espacés, et en prenant pour origine des phases le premier élément, les matrices de réseau $[A_1]$ et $[A_2]$ ont la forme particulière suivante :

$$[A_1] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{j\alpha_1} & e^{j\alpha_2} & e^{j\alpha_3} & \dots & e^{j\alpha_K} \\ e^{2j\alpha_1} & e^{2j\alpha_2} & e^{2j\alpha_3} & \dots & e^{2j\alpha_K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{(N-2)j\alpha_1} & e^{(N-2)j\alpha_2} & e^{(N-2)j\alpha_3} & \dots & e^{(N-2)j\alpha_K} \end{pmatrix} \quad (\text{VII-10})$$

$$[A_2] = \begin{pmatrix} e^{j\alpha_1} & e^{j\alpha_2} & e^{j\alpha_3} & \dots & e^{j\alpha_K} \\ e^{2j\alpha_1} & e^{2j\alpha_2} & e^{2j\alpha_3} & \dots & e^{2j\alpha_K} \\ e^{3j\alpha_1} & e^{3j\alpha_2} & e^{3j\alpha_3} & \dots & e^{3j\alpha_K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{(N-1)j\alpha_1} & e^{(N-1)j\alpha_2} & e^{(N-1)j\alpha_3} & \dots & e^{(N-1)j\alpha_K} \end{pmatrix} \quad (\text{VII-11})$$

et ces deux matrices sont liées par la relation :

$$[A_2] = [A_1] \begin{pmatrix} e^{j\alpha_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{j\alpha_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\alpha_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{j\alpha_K} \end{pmatrix} = [A_1][\Phi] \quad (\text{VII-12})$$

En résumé, on peut écrire pour le réseau global, la relation établie dans les chapitres précédents :

$$[X] = [A] [S] + [\eta] \quad (\text{VII-13})$$

et pour chacun des sous réseaux R_1 et R_2 :

$$[X_1] = [A_1] [S] + [\eta_1] \quad [X_2] = [A_2] [S] + [\eta_2] \quad (\text{VII-14})$$

$$\text{avec } [A_2] = [A_1] [\Phi] \quad (\text{VII-15})$$

et où les matrices indicées par 1 sont déduites des matrices globales par suppression de la dernière ligne, et les matrices indicées 2 sont déduites des matrices globales par suppression de la première ligne.

Il est naturel de penser que les sous espaces signaux $[E_1]$ et $[E_2]$ déduits de $[X_1]$ et $[X_2]$ ne sont pas indépendants. A partir des relations (VII-14,15), on peut montrer qu'il existe une matrice $[T]$ qui établit leur relation de la manière suivante :

$$[E_2] [T] = [E_1] [T] [\Phi] \quad (\text{VII-16})$$

On déduit qu'il existe entre les matrices des deux sous espaces signaux E_1 et E_2 la relation ci-dessous :

$$[E_2] = [E_1] [T] [\Phi] [T]^{-1} = [E_1] [\Psi] \quad (\text{VII-17})$$

avec :

$$[\Psi] = [T] [\Phi] [T]^{-1} \quad (\text{VII-18})$$

où de manière équivalente :

$$[\Phi] = [T]^{-1} [\Psi] [T] \quad (\text{VII-19})$$

Un théorème classique de l'algèbre linéaire sur la diagonalisation des matrices indique alors que les valeurs propres de $[\Psi]$ sont les éléments diagonaux de $[\Phi]$, et que les colonnes de $[T]$ sont les vecteurs propres de $[\Psi]$.

L'objectif d'une méthode de détection des angles d'arrivée est la connaissance de la matrice $[\Phi]$, car elle contient à travers sa diagonale les informations sur la direction de provenance de chacun des K signaux incidents.

La donnée du problème est la matrice d'autocorrélation du réseau complet, de laquelle on peut déduire les sous espaces signaux, et donc les matrices $[E_1]$ et $[E_2]$.

Des deux matrices $[E_1]$ et $[E_2]$, on construit la matrice $[\Psi]$ suivant la relation (VII-17).

Les valeurs propres de la matrice $[\Psi]$ constituent les éléments diagonaux de la matrice $[\Phi]$, c'est à dire l'information recherchée.

Dans cette démarche, l'étape délicate est l'obtention de la matrice $[\Psi]$ qui doit vérifier la relation :

$$[E_2] = [E_1] [\Psi] \quad (\text{VII-20})$$

Les matrices $[E_1]$ et $[E_2]$ sont de dimensions $(N-1, K)$ et la matrice $[\Psi]$ est de dimension (K, K) . Cette matrice comporte K^2 termes à déterminer, et on dispose pour cela de $(N-1).K$ équations. Dès l'instant où $(N-1) > K$, il y a plus d'équations que d'inconnues, et le système est le plus souvent sans solution.

On recherche alors la matrice $[\Psi]$ qui satisfait au mieux le système à l'aide d'un critère qui est en général celui des moindres carrés, mais il faut garder à l'esprit qu'il ne s'agit que d'une solution approchée qui dépend de la méthode d'optimisation utilisée.

Exemple 1 :

Nous revenons sur un exemple donné au chapitre précédent :

On considère un réseau de 3 capteurs avec 2 signaux incidents. La matrice de corrélation est bruitée uniquement sur sa diagonale et avec une variance de bruit identique ($\sigma^2 = 1$).

$$[\mathbf{R}_{xx}] = \begin{bmatrix} 6 & -0,606 + 3,204j & -4,266 + 0,964j \\ -0,606 - 3,204j & 6 & -0,606 + 3,204j \\ -4,266 - 0,964j & -0,606 - 3,204j & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{VII-21})$$

La recherche des valeurs propres et vecteurs propres donne les résultats suivants :

$$\lambda_1 = 13,15 \quad \lambda_2 = 3,48 \quad \lambda_3 = 1 \quad (\text{VII-22})$$

$$[\mathbf{V}_1] = \begin{bmatrix} -0,597 + 0,044j \\ 0,02 + 0,532j \\ 0,599 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{V}_2] = \begin{bmatrix} 0,057 + 0,472j \\ -0,553 - 0,491j \\ 0,476 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{V}_3] = \begin{bmatrix} -0,513 + 0,39j \\ -0,39 + 0,132j \\ -0,644 \end{bmatrix} \quad (\text{VII-23})$$

Les vecteurs $[\mathbf{V}_1]$ et $[\mathbf{V}_2]$ constituent une base du sous espace signal, tandis que le vecteur $[\mathbf{V}_3]$ est une base du sous espace bruit.

Nous formons les sous espaces signaux E_1 et E_2 sur les bases $[\mathbf{E}_1]$ et $[\mathbf{E}_2]$ obtenues en amputant les vecteurs $[\mathbf{V}_1]$ et $[\mathbf{V}_2]$ respectivement de leur première ligne et de leur dernière ligne :

$$[\mathbf{E}_1] = \begin{bmatrix} -0,597 + 0,044j & 0,057 + 0,472j \\ 0,02 + 0,532j & -0,553 - 0,49j \end{bmatrix} \quad (\text{VII-24})$$

$$[\mathbf{E}_2] = \begin{bmatrix} 0,02 + 0,532j & -0,553 - 0,491j \\ 0,599 & 0,476 \end{bmatrix} \quad (\text{VII-25})$$

Nous recherchons la matrice $[\Psi]$ telle que $[\mathbf{E}_2] = [\mathbf{E}_1] [\Psi]$. Le logiciel Scilab permet la recherche générale d'une telle matrice en utilisant l'approximation par les moindres carrés. Il fournit le résultat suivant :

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} -0,011 - 0,97j & 0,231 + 0,44j \\ -0,106 + 0,049j & -0,596 + 0,766j \end{bmatrix} \quad (\text{VII-26})$$

dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = -j \quad \lambda_2 = -0,606 + 0,795j \quad (\text{VII-27})$$

et les vecteurs propres :

$$[\mathbf{U}_1] = \begin{bmatrix} 0,998 \\ -0,043 - 0,045j \end{bmatrix} \quad [\mathbf{U}_2] = \begin{bmatrix} 0,178 - 0,186j \\ 0,966 \end{bmatrix} \quad (\text{VII-28})$$

Les arguments des valeurs propres λ_1 et λ_2 sont respectivement :

$$\phi_1 = -\pi/2 \quad \text{et} \quad \phi_2 = -232,7^\circ = 127,3^\circ \quad (\text{VII-29})$$

On en déduit les angles θ_1 et θ_2 d'arrivée par les relations :

$$\phi_1 = -kd \sin(\theta_1) \quad \text{et} \quad \phi_2 = -kd \sin(\theta_2) \quad (\text{VII-30})$$

Si les éléments sont distants de $\lambda/2$, on a $kd = \pi$ et les directions d'arrivée sont les suivantes :

$$\theta_1 = 30^\circ \quad \text{et} \quad \theta_2 = -45^\circ \quad (\text{VII-31})$$

Nous disposons de tous les éléments pour construire les différentes matrices présentées dans la démonstration de la méthode ESPRIT.

Les matrices $[A_1]$ et $[A_2]$ sont données par :

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{j\phi_1} & e^{j\phi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & -0,606 + 0,795j \end{bmatrix} \quad (\text{VII-32})$$

$$[A_2] = \begin{bmatrix} e^{j\phi_1} & e^{j\phi_2} \\ e^{2j\phi_1} & e^{2j\phi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j & -0,606 + 0,795j \\ -1 & -0,266 - 0,964j \end{bmatrix} \quad (\text{VII-33})$$

La matrice de passage $[T]$ est constituée par les vecteurs propres $[U_1]$ et $[U_2]$:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0,998 & 0,178 - 0,186j \\ -0,043 - 0,045j & 0,966 \end{bmatrix} \quad (\text{VII-34})$$

et permet la vérification des relations :

$$[T]^{-1} [\Psi] [T] = \begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & -0,606 + 0,795j \end{bmatrix} = [\Phi] \quad (\text{VII-35})$$

Exemple 2 :

Nous revenons à nouveau sur un exemple examiné dans les deux chapitres précédents :

Cet exemple concerne une structure de 5 capteurs, avec 3 signaux incidents. La matrice d'autocorrélation obtenue est la suivante :

$$[R_{xx}] = \begin{bmatrix} 6,2 & -3,643 - 0,57j & -0,467 + 1,4j & 2,178 - 0,21j & -1,8 - 3,527j \\ -3,643 + 0,57j & 6,5 & -3,643 - 0,57j & -0,467 + 1,4j & 2,178 - 0,21j \\ -0,467 - 1,4j & -3,643 + 0,57j & 6,3 & -3,643 - 0,57j & -0,467 + 1,4j \\ 2,178 + 0,21j & -0,467 - 1,4j & -3,643 + 0,57j & 6,4 & -3,643 - 0,57j \\ -1,8 + 3,527j & 2,178 + 0,21j & -0,467 - 1,4j & -3,643 + 0,57j & 6,5 \end{bmatrix} \quad (\text{VI-36})$$

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} -0,617 + 0,77j & 0,208 - 0,141j & -0,017 - 0,005j \\ -0,163 - 0,008j & -0,895 - 0,392j & -0,167 + 0,146j \\ 0,012 + 0,016j & -0,095 + 0,033j & -0,013 - 0,987j \end{bmatrix} \quad (\text{VII-41})$$

dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = -0,607 + 0,801j \quad \lambda_2 = -0,923 - 0,413j \quad \lambda_3 = 0,005 - 0,997j \quad (\text{VII-42})$$

et les vecteurs propres :

$$[U_1] = \begin{bmatrix} 0,991 \\ -0,037 + 0,126j \\ -0,001 - 0,006j \end{bmatrix} \quad [U_2] = \begin{bmatrix} 0,068 + 0,188j \\ 0,975 \\ 0,092 + 0,019j \end{bmatrix} \quad [U_3] = \begin{bmatrix} -0,024 - 0,022j \\ -0,198 + 0,03j \\ 0,979 \end{bmatrix} \quad (\text{VII-43})$$

Les arguments des valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 sont respectivement :

$$\phi_1 = -232,85^\circ \quad \phi_2 = 204,11^\circ \quad \phi_3 = -90^\circ \quad (\text{VII-44})$$

On en déduit les angles θ_1 , θ_2 et θ_3 d'arrivée par les relations :

$$\phi_1 = -kd \sin(\theta_1) \quad \phi_2 = -kd \sin(\theta_2) \quad \phi_3 = -kd \sin(\theta_3) \quad (\text{VII-45})$$

Si les éléments sont distants de $\lambda/2$, on a $kd = \pi$ et les directions d'arrivées sont les suivantes :

$$\theta_1 = -45^\circ \quad \theta_2 = 60^\circ \quad \theta_3 = 30^\circ \quad (\text{VII-46})$$

La matrice de passage [T] est constituée par les vecteurs propres $[U_1]$ $[U_2]$, et $[U_3]$:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0,991 & 0,068 + 0,188j & -0,024 - 0,022j \\ -0,037 + 0,126j & 0,975 & -0,198 + 0,03j \\ -0,001 - 0,006j & 0,092 + 0,019j & 0,979 \end{bmatrix} \quad (\text{VII-47})$$

et permet la vérification de la relation :

$$[T]^{-1} [\Psi] [T] = \begin{bmatrix} -0,607 + 0,801j & 0 & 0 \\ 0 & -0,923 - 0,413j & 0 \\ 0 & 0 & 0,005 - 0,997j \end{bmatrix} = [\Phi] \quad (\text{VII-48})$$

Bibliographie

Voir la thèse Moctar MOUHAMADOU, et le rapport de Fatna BENHAMED ci-dessous.

Thèse de doctorat de Moctar MOUHAMADOU

Contribution au développement et à l'optimisation d'un démonstrateur d'antennes adaptatives.

Applications à des systèmes de communications sans fil haut débit : WiMax

[Télécharger ce document](#)

Rapport de stage recherche de Fatna BENAHMED

Détection des angles d'arrivée en dimension 2

Extension des méthodes MUSIC et ESPRIT à la recherche d'une direction d'arrivée quelconque dans l'espace.

[Télécharger ce document](#)

Publications

Moctar MOUAMADOU : [Complex weight control of array pattern nulling](#)

Fatna BENHAMED: [Antennes actives : détection d'angles d'arrivée en 2D](#)