



HAL
open science

Quand la cocyclicité rencontre l'alignement

Benoit Chanceaux, Clara Feurtet, Patrick J C Tardivel

► **To cite this version:**

Benoit Chanceaux, Clara Feurtet, Patrick J C Tardivel. Quand la cocyclicité rencontre l'alignement. 2024. hal-04825951

HAL Id: hal-04825951

<https://hal.science/hal-04825951v1>

Preprint submitted on 8 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Quand la cocyclicité rencontre l'alignement

Auteurs : Benoit Chanceaux*, Clara Feurtet†

Relecteur : Patrick Tardivel ‡

Avant de commencer votre lecture, nous vous suggérons de visionner la vidéo, qui vient compléter l'article, disponible au lien suivant : <https://www.youtube.com/watch?v0KKLDFbWPM>

Les mathématiques constituent un véritable trésor de découvertes, notamment la géométrie qui regorge de théorèmes captivants. Leurs abondances nous conduisent à en délaissier certains, malgré leur éclat. L'un de ces trésors oubliés est le théorème de la droite de Steiner. Ce résultat, méconnu, est une illustration parfaite de la puissante élégance de la géométrie. En plongeant dans son étude, des concepts géométriques avancés viendront rythmer notre voyage. Le chemin emprunté pour le prouver nous invite à repenser la perception de la géométrie et à apprécier la beauté des idées mathématiques.

Théorème (Droite de Steiner). *Considérons un triangle non plat et non réduit à un point.*

→ Si un point appartient au cercle circonscrit du triangle, alors les symétriques orthogonaux de ce point par rapport aux côtés du triangle sont alignés. FIGURE (1)

→ Réciproquement, si les symétriques orthogonaux d'un point par rapport aux côtés du triangle sont alignés, alors ce point appartient au cercle circonscrit du triangle.

(Autrement-dit, si un point n'appartient pas au cercle circonscrit d'un triangle, alors les symétriques orthogonaux de ce point par rapport aux côtés du triangle ne sont pas alignés.) FIGURE (2)

La droite passant par les symétriques d'un point se situant sur le cercle circonscrit à un triangle est appelée **droite de Steiner** de ce point.

Ce théorème, énoncé et démontré par le mathématicien suisse Jakob Steiner (1796 – 1863), établit une relation inattendue entre un point et ses symétriques par rapport aux côtés d'un triangle. Cependant, sa démonstration est ardue et exige une compréhension approfondie de la géométrie. L'objectif est de rendre la démonstration du théorème de la droite de Steiner aussi accessible que possible. Il s'agira de simplifier les concepts complexes et de guider le lecteur à travers cette exploration géométrique captivante.

Un peu à l'idée d'un maçon qui construit un mur, pour bâtir cette démonstration, certains outils seront indispensables : le théorème du cercle circonscrit à un triangle rectangle, le théorème de cocyclicité et le théorème de la droite de Simson. En utilisant ces trois outils, que l'on va découvrir par la suite, il sera possible de créer une démonstration compréhensible pour des collégiens ! Familier pour la plupart des lycéens, commençons doucement par le premier :

Théorème (Cercle circonscrit à un triangle rectangle). *Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre son hypoténuse.*

Les lycéens effectuent généralement la preuve de ce théorème en classe de première spécialité mathématiques à l'aide du théorème de la médiane. Toutefois, il nous semble pertinent de donner une démonstration utilisant des outils abordés dès la classe de cinquième.

*Benoit Chanceaux, professeur de mathématiques au collège Suzanne Lenglen à Persan.

†Clara Feurtet, professeure de mathématiques au collège Camille Chevalier à Chalon-sur-Saône.

‡Patrick Tardivel, maître de conférence à l'université de Bourgogne à Dijon, a participé à la relecture du manuscrit.

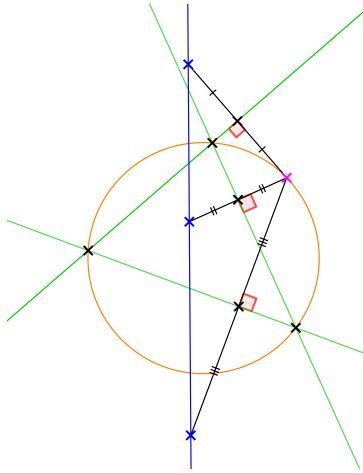


FIGURE 1 – (Droite de Steiner). Le point rose est sur le cercle circonscrit orange au triangle formé par les droites vertes. Ainsi, d'après le théorème précédent, les trois symétriques orthogonaux du point rose par rapport aux côtés du triangle sont alignés. La droite bleue passant par ces points est la droite de Steiner du point rose.

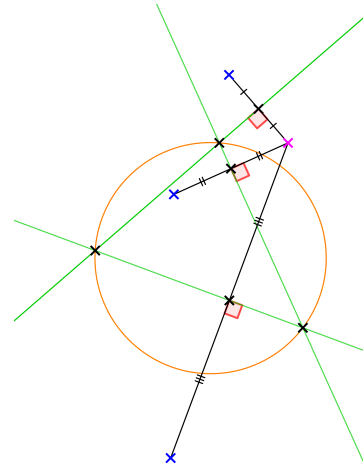


FIGURE 2 – Le point rose n'est pas sur le cercle circonscrit orange au triangle formé par les droites vertes. Ainsi, d'après le théorème précédent, les trois symétriques orthogonaux du point rose par rapport aux côtés du triangle ne sont pas alignés.

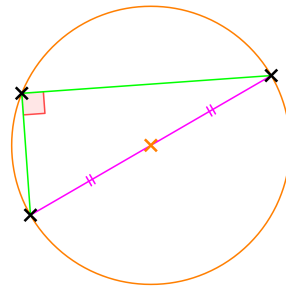


FIGURE 3 – Le triangle rectangle est inscrit dans le cercle orange qui a pour diamètre l'hypoténuse rose de ce triangle.

Démonstration. (Cercle circonscrit à un triangle rectangle) Considérons un triangle ABC rectangle en A et construisons le point A' , symétrique du point A par rapport au milieu O du segment $[BC]$. Le quadrilatère $ABA'C$ a des diagonales qui se coupent en leur milieu, donc c'est un parallélogramme. De plus, ce parallélogramme a un angle droit, ainsi $ABA'C$ est un rectangle. Comme les diagonales ont la même longueur on en déduit que $OA = OB = OC$, donc les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O et de diamètre le segment $[BC]$. \square

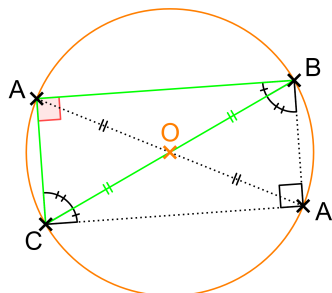


FIGURE 4 – Figure illustrant la démonstration précédente.

D'après le théorème précédent, si deux triangles rectangles partagent la même hypoténuse, alors les sommets

de ces triangles sont cocycliques¹. Nous utiliserons fréquemment ce commentaire dans la suite de cet article. Concernant le théorème de cocyclicité, il faudra quitter le chemin des mathématiques classiques enseignées au lycée. La beauté et la puissance de ce théorème nous oblige à faire un petit détour. Pour les plus audacieux d'entre vous, la preuve, légèrement technique, de ce théorème se trouve en annexe.

Théorème (Cocyclicité). Soient A, B, M et N , quatre points distincts du plan.

→ Si les points A, B, M et N sont cocycliques ou alignés, alors $\text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \text{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \pmod{\pi}$.

→ Réciproquement, si $\text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \text{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \pmod{\pi}$, alors les points A, B, M et N sont cocycliques ou alignés.

La notation $\text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ désigne une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ en radians.

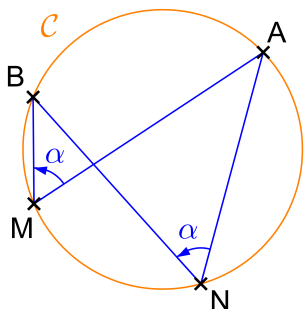


FIGURE 5 – Figure illustrant le théorème de cocyclicité lorsque les segments $[MN]$ et $[AB]$ ne se coupent pas.

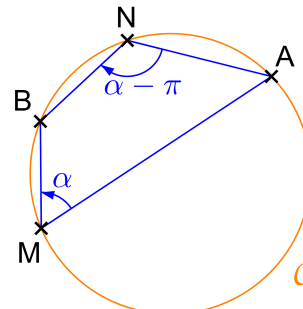


FIGURE 6 – Figure illustrant le théorème de cocyclicité lorsque les segments $[MN]$ et $[AB]$ se coupent. D'où l'importance de travailler modulo π .

Ce théorème établit une relation entre deux mesures d'angles orientés égales, formées par quatre points cocycliques. Ce résultat relativement simple à comprendre permet de résoudre bon nombre de théorèmes de géométrie. Cela va être le cas avec notre troisième outil nécessaire pour montrer le théorème de la droite de Steiner : le théorème de la droite de Simson.

Théorème (Droite de Simson). Considérons un triangle non plat et non réduit à un point.

→ Si un point appartient au cercle circonscrit à un triangle, alors les projetés orthogonaux de ce point sur les côtés du triangle sont alignés. FIGURE (7)

→ Réciproquement, si les projetés orthogonaux d'un point sur les côtés du triangle sont alignés, alors ce point appartient au cercle circonscrit à ce triangle.

(Autrement-dit, si un point n'appartient pas au cercle circonscrit à un triangle, alors les projetés orthogonaux de ce point sur les côtés du triangle ne sont pas alignés.) FIGURE (8)

La droite passant par les projetés orthogonaux d'un point se situant sur le cercle circonscrit à un triangle est appelée **droite de Simson** de ce point.

1. Des points cocycliques sont des points appartenant à un même cercle.

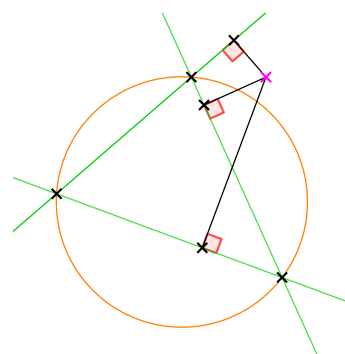
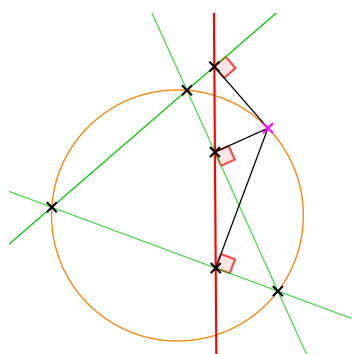


FIGURE 7 – (Droite de Simson). Le point rose est sur le cercle circonscrit orange au triangle formé par les droites vertes. Ainsi, d'après le théorème précédent, les trois projetés orthogonaux du point rose sur les côtés du triangle sont alignés. La droite rouge passant par ces points est la droite de Simson du point rose.

FIGURE 8 – Le point rose n'est pas sur le cercle circonscrit orange au triangle formé par les droites vertes. Ainsi, d'après le théorème précédent, les trois projetés orthogonaux du point rose sur les côtés du triangle ne sont pas alignés.

La droite de Steiner et la droite de Simson sont deux concepts géométriques étroitement liés. Dans le premier, ce sont les symétriques orthogonaux qui sont alignés, tandis que dans le second, ce sont les projetés orthogonaux qui le sont. En démontrant le théorème de la droite de Simson, à l'aide des deux outils précédents, nous nous rapprochons du but.

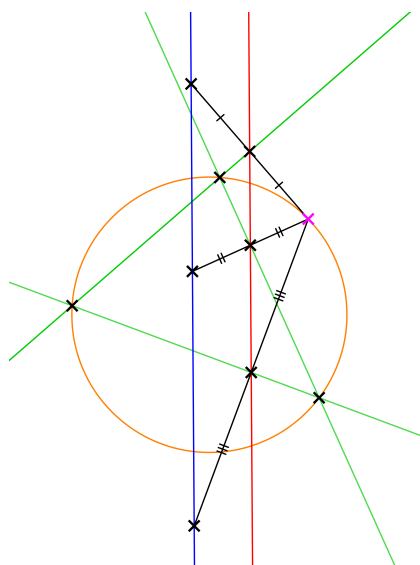


FIGURE 9 – Le point rose étant sur le cercle circonscrit au triangle formé par les droites vertes, les projetés orthogonaux du point rose sur les côtés de ce triangle sont alignés sur la droite de Simson en rouge et ses symétriques orthogonaux sont alignés sur la droite de Steiner en bleu.

Pour éviter de se perdre dans la preuve, elle sera divisée en deux temps. Pour commencer, nous démontrons le premier point du théorème, la partie la plus technique, puis, le second découlera facilement.

Démonstration. (Droite de Simson) Soit M un point quelconque du plan et ABC un triangle non plat et non réduit à un point. On note \mathcal{C} le cercle circonscrit au triangle ABC et M_{AB} , M_{AC} et M_{BC} les projetés orthogonaux respectifs du point M sur les droites (AB) , (AC) et (BC) .

→ **Montrons tout d'abord le premier point du théorème :**

Supposons que le point M soit sur le cercle circonscrit \mathcal{C} au triangle ABC et montrons que les projetés orthogonaux M_{AB} , M_{AC} et M_{BC} sont alignés.

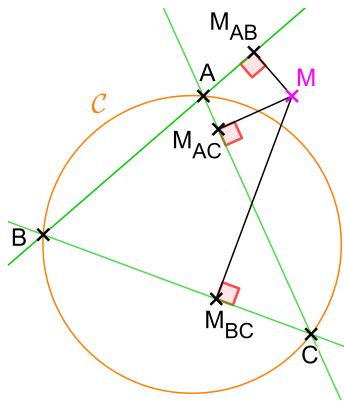


FIGURE 10 – Figure représentant les notations utilisées pour la démonstration du théorème de la droite de Simson.

Pour utiliser le [théorème de cocyclicité](#), il faut que les points utilisés A , B , C , M , M_{AB} , M_{AC} et M_{BC} soient tous distincts. Commençons par traiter le cas particulier où au moins deux de ces points se superposent.

Les cas particuliers de la preuve sont inspirés du livre [1, Chapitre 7, p. 42].

Si le point M est sur l'un des trois sommets du triangle ABC , alors deux de ses trois projetés orthogonaux seront confondus donc M_{AB} , M_{AC} et M_{BC} sont alignés. On remarquera également que c'est le seul cas où le point M peut se confondre avec l'un des projetés orthogonaux. Il n'y a donc plus de cas où le point M peut se confondre avec l'un des autres points.

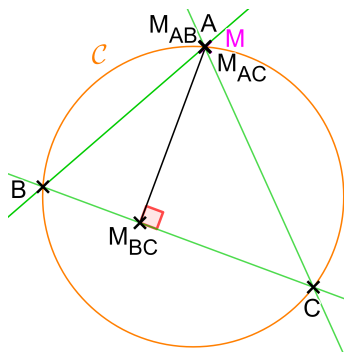


FIGURE 11 – Figure illustrant la cas où le point M est confondu avec le point A . Dans ce cas, les projetés M_{AB} et M_{AC} sont également confondus avec les points M et A .

Si un projeté orthogonal est sur l'un des sommets du triangle ABC , soit le point M est sur ce sommet et cela correspond au cas vu précédemment, soit il se situe sur le cercle \mathcal{C} . En effet, il est possible qu'un des projetés orthogonaux soit sur un sommet sans que le point M y soit. Regardons le cas où le projeté orthogonal M_{AB} est sur un sommet et que le point M n'y est pas :²

Comme le sommet C n'est pas sur la droite (AB) , les points M_{AB} et C ne peuvent pas être confondus.

Si le projeté orthogonal M_{AB} est sur le sommet A , alors M_{AB} et M_{AC} sont sur la droite (AC) . Il suffit donc de vérifier que le projeté orthogonal M_{BC} soit également sur cette droite pour montrer qu'ils sont alignés.

(Phrase A) Comme les points A , B , M et M_{BC} sont bien distincts³, ABM et $M_{BC}BM$ sont bien des triangles rectangles non plats qui partagent la même hypoténuse $[BM]$. D'après le [théorème du cercle circonscrit à un triangle rectangle](#), les points A , B , M et M_{BC} sont cocycliques. Ainsi, le projeté orthogonal M_{BC} appartient au cercle \mathcal{C} et à la droite (BC) . Comme il ne peut pas être sur le point B , M_{BC} ne peut être que sur le sommet C . Les trois projetés

2. Pour les triangles ABC rectangles en C , ce cas n'existe pas.

3. Si M_{BC} est sur le sommet B , alors M aurait deux projetés sur (AB) : M_{AB} et M_{BC} , ce qui est impossible.

orthogonaux sont donc alignés sur la droite (AC). FIGURE (12)

Si le projeté orthogonal M_{AB} est sur le point B, on applique le même raisonnement pour montrer que les trois projetés orthogonaux du point M sont alignés sur la droite (BC). FIGURE (13)

En appliquant la même démarche aux projetés orthogonaux M_{BC} et M_{AC} , on a bien montré que si au moins un des trois projetés orthogonaux est sur un sommet du triangle, alors ils sont tous alignés.

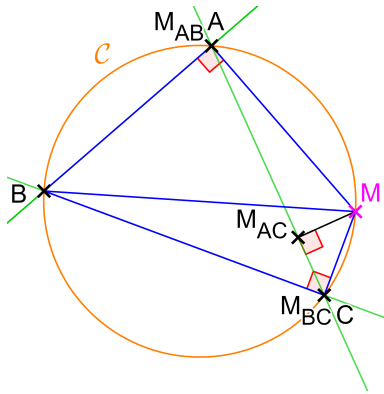


FIGURE 12 – Figure illustrant le cas où le projeté orthogonal M_{AB} est sur le sommet A. Les triangles rectangles ABM et $BM_{BC}M$ en bleu qui ont pour hypoténuse le segment $[BM]$ entraînent la cocyclicité des points A, B, M et M_{BC} .

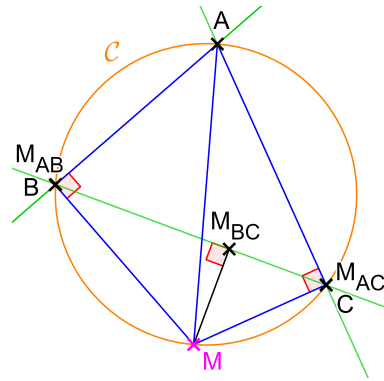


FIGURE 13 – Figure illustrant le cas où le projeté orthogonal M_{AB} est sur le sommet B. Les triangles rectangles ABM et $AM_{AC}M$ en bleu qui ont pour hypoténuse le segment $[AM]$ entraînent la cocyclicité des points A, B, M et M_{AC} .

Nous avons montré que lorsque M est un point du cercle \mathcal{C} et qu'au moins deux des points A, B, C, M, M_{AC} , M_{BC} et M_{AB} sont confondus, alors les projeté orthogonaux M_{AC} , M_{BC} et M_{AB} sont alignés. Il reste à montrer que les projetés orthogonaux sont également alignés lorsque les points A, B, C, M, M_{AC} , M_{BC} et M_{AB} sont bien tous distincts.

La suite de la preuve est inspirée du livre [2, Chapitre 4.3, p. 250].

Comme les points A, B, C et M sont tous distincts sur le cercle circonscrit au triangle ABC, on peut maintenant leur appliquer le **théorème de cocyclicité**. On a :

$$\text{mes}(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) = \text{mes}(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}) \pmod{\pi} \tag{1}$$

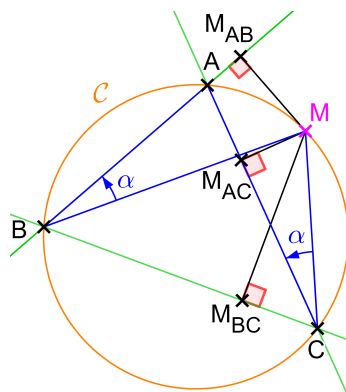


FIGURE 14 – Les points A, B, C et M sont tous distincts sur le cercle \mathcal{C} . D'après le **théorème de cocyclicité**, les angles orientés $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA})$, représentés en bleus, sont de la même mesure modulo π .

Les points M_{AB} et M_{AC} sont respectivement sur les droites (BA) et (CA) . On peut donc renommer les angles de l'égalité (1) de la manière suivante :

$$\text{mes}(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM_{AB}}) = \text{mes}(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM_{AC}}) \pmod{\pi} \quad (2)$$

(Phrase B) Comme les triangles BMM_{AB} et BMM_{BC} sont rectangles et qu'ils partagent la même hypoténuse $[BM]$, d'après le théorème du cercle circonscrit à un triangle rectangle, les points B, M_{AB}, M et M_{BC} sont cocycliques. Ainsi, par le théorème de cocyclicité, on a :

$$\text{mes}(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM_{AB}}) = \text{mes}(\overrightarrow{M_{BC}M}, \overrightarrow{M_{BC}M_{AB}}) \pmod{\pi} \quad (3)$$

(Phrase C) De la même manière, comme les triangles CMM_{AC} et CMM_{BC} sont rectangles et qu'ils partagent la même hypoténuse $[CM]$, les points C, M_{BC}, M_{AC} et M sont cocycliques et on a :

$$\text{mes}(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM_{AC}}) = \text{mes}(\overrightarrow{M_{BC}M}, \overrightarrow{M_{BC}M_{AC}}) \pmod{\pi} \quad (4)$$

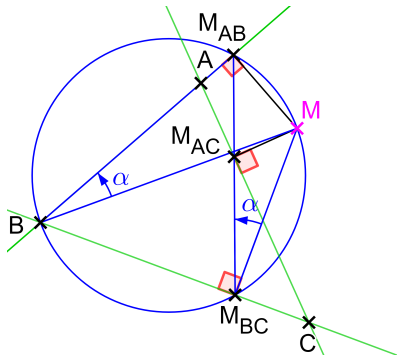


FIGURE 15 – Figure illustrant en bleu le cercle où se trouvent les points B, M_{AB}, M et M_{BC} . Ainsi, par le théorème de cocyclicité, les angles orientés $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM_{AB}})$ et $(\overrightarrow{M_{BC}M}, \overrightarrow{M_{BC}M_{AB}})$ en bleu sont de la même mesure modulo π .

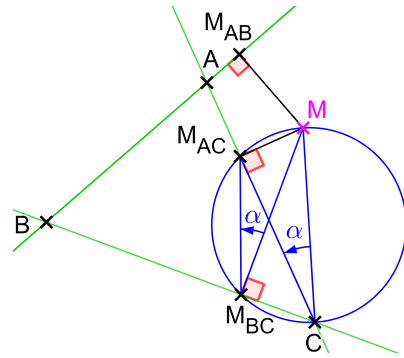


FIGURE 16 – Figure illustrant en bleu le cercle où se trouvent les points C, M_{BC}, M_{AC} et M . Ainsi, par le théorème de cocyclicité, les angles orientés $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM_{AC}})$ et $(\overrightarrow{M_{BC}M}, \overrightarrow{M_{BC}M_{AC}})$ en bleu sont de la même mesure modulo π .

D'après l'égalité (2), on a $\text{mes}(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM_{AB}}) = \text{mes}(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM_{AC}}) \pmod{\pi}$. En remplaçant ces deux mesures par les mesures respectivement égales obtenues en (3) et (4), on obtient que :

$$\text{mes}(\overrightarrow{M_{BC}M}, \overrightarrow{M_{BC}M_{AB}}) = \text{mes}(\overrightarrow{M_{BC}M}, \overrightarrow{M_{BC}M_{AC}}) \pmod{\pi}$$

Comme la mesure, modulo π , des angles orientés $(\overrightarrow{M_{BC}M}, \overrightarrow{M_{BC}M_{AB}})$ et $(\overrightarrow{M_{BC}M}, \overrightarrow{M_{BC}M_{AC}})$ est la même et qu'ils ont le côté $[M_{BC}M]$ en commun, on en déduit que ces deux angles sont identiques et donc que les points M_{AB}, M_{AC} et M_{BC} sont alignés.

→ **Montrons ensuite le deuxième point du théorème :**

Supposons que les projetés orthogonaux M_{AB}, M_{AC} et M_{BC} sont alignés et montrons que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC .

De la même manière, pour utiliser le théorème de cocyclicité, on a besoin que les points utilisés soient tous distincts. Traitons en amont les cas particuliers où les sommets du triangle ABC , le point M et ses projetés orthogonaux peuvent se superposer.

Si les points M_{AB}, M_{AC}, M_{BC} et M ne sont pas distincts, cela implique que le point M est sur l'une des trois

droites qui forment le triangle. Si M est sur l'un des sommets du triangle, il appartient bien au cercle \mathcal{C} . Sinon, si le point M est sur la droite (AB) mais n'est pas un sommet, comme M_{AC} , M et M_{AB} sont alignés, on a $(MM_{AC}) \perp (AC)$ et $(MM_{AC}) \perp (BC)$, ce qui est impossible. De même, si M se trouve sur (AC) et (BC) .

Si un projeté orthogonal est sur l'un des sommets du triangle ABC , soit le point M est sur ce sommet et cela correspond au cas précédent, soit il est autre part. Regardons le cas du projeté orthogonal M_{AB} lorsqu'il est sur un sommet et que le point M n'y est pas.

Comme le sommet C n'est pas sur la droite (AB) , les points M_{AB} et C ne peuvent pas être confondus.

Si le projeté orthogonal M_{AB} est sur le sommet A , alors M_{AB} et M_{AC} sont sur la droite (AC) . Comme les trois projetés orthogonaux sont alignés, M_{BC} est obligatoirement sur le sommet C . (*Phrase D*) Comme les points A , B , C et M sont bien distincts, que $M_{AB} = A$ et $M_{BC} = C$, on a que ABM et BCM sont bien des triangles rectangles non plats qui partagent la même hypoténuse $[BM]$. D'après le théorème du cercle circonscrit à un triangle rectangle, les points A , B , C et M sont cocycliques. Donc le point M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC . On pourra se représenter la situation à l'aide de la FIGURE (12).

Si le projeté orthogonal M_{AB} est sur le point B , on applique le même raisonnement pour montrer que le point M est bien sur le cercle circonscrit au triangle ABC . FIGURE (13).

En appliquant la même démarche aux projetés orthogonaux M_{BC} et M_{AC} , on montre que si au moins un des trois projetés orthogonaux est sur un sommet du triangle, alors le point M est bien sur le cercle circonscrit au triangle ABC .

Il nous reste les cas où les points A , B , C , M , M_{AC} , M_{BC} et M_{AB} sont bien tous distincts. Pour cela, il suffit de reprendre, dans le sens inverse, les étapes de la démonstration du premier point du théorème. En effet, comme les projetés orthogonaux M_{AB} , M_{AC} et M_{BC} sont distincts et alignés, on a que :

$$\text{mes}(\overrightarrow{M_{BC}M}, \overrightarrow{M_{BC}M_{AB}}) = \text{mes}(\overrightarrow{M_{BC}M}, \overrightarrow{M_{BC}M_{AC}}) \pmod{\pi}.$$

On peut remplacer ces deux mesures par celles respectivement égales de (3) et (4). On obtient ainsi :

$$\text{mes}(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM_{AB}}) = \text{mes}(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM_{AC}}) \pmod{\pi}. \quad (5)$$

Comme le sommet A est sur les droites (CM_{AC}) et (BM_{AB}) , on peut renommer les angles de l'égalité (5) de la manière suivante :

$$\text{mes}(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) = \text{mes}(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}) \pmod{\pi}.$$

D'après le théorème de cocyclicité, les points A , B , C et M sont cocycliques ou alignés. Comme les points A , B et C ne sont pas alignés, les quatre points sont donc cocycliques.

Ainsi, le point M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC . \square

Nous voilà enfin en possession de tout le matériel nécessaire pour prouver efficacement le théorème de la droite de Steiner. Avec le théorème de la droite de Simson, la démonstration est un jeu d'enfant.

Démonstration. (Droite de Steiner) Soit M un point quelconque du plan et ABC un triangle non plat et non réduit à un point. On note \mathcal{C} le cercle circonscrit au triangle ABC et M'_{AB} , M'_{AC} et M'_{BC} les symétriques orthogonaux respectifs du point M par rapport aux droites (AB) , (AC) et (BC) .

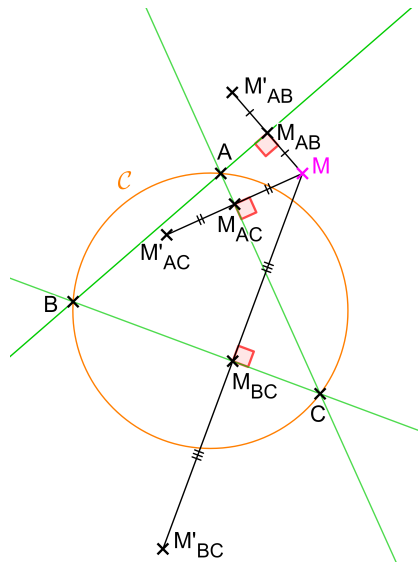


FIGURE 17 – Figure représentant les notations utilisées pour la démonstration du théorème de la droite de Steiner.

→ **Montrons tout d'abord le premier point du théorème :**

Supposons que le point M soit sur le cercle circonscrit au triangle ABC et montrons que les symétriques orthogonaux M'_{AB} , M'_{AC} et M'_{BC} sont alignés.

D'après le [théorème de la droite de Simson](#), les trois projetés orthogonaux M_{AB} , M_{AC} et M_{BC} sont alignés.

L'homothétie de centre M et de rapport 2 envoie les points M_{AB} , M_{AC} et M_{BC} sur les symétriques orthogonaux M'_{AB} , M'_{AC} et M'_{BC} .

Comme les homothéties conservent l'alignement, les points M'_{AB} , M'_{AC} et M'_{BC} sont également alignés.

→ **Montrons ensuite le deuxième point du théorème :**

Supposons que les symétriques orthogonaux M'_{AB} , M'_{AC} et M'_{BC} sont alignés et montrons que le point M appartient au cercle circonscrit du triangle ABC .

L'homothétie de centre M et de rapport $\frac{1}{2}$ envoie les points M'_{AB} , M'_{AC} et M'_{BC} sur les points M_{AB} , M_{AC} et M_{BC} . Comme les homothéties conservent l'alignement, les points M_{AB} , M_{AC} et M_{BC} sont également alignés.

D'après le [théorème de la droite de Simson](#), le point M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC .

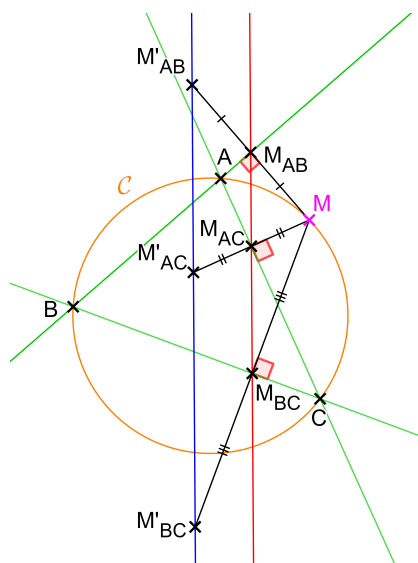


FIGURE 18 – Figure illustrant la droite de Simson en rouge et la droite de Steiner en bleu du point M se situant sur le cercle circonscrit orange au triangle ABC formé par les droites vertes.

□

Il se trouve que l'on peut généraliser les théorèmes de la droite de Simson et de Steiner. En effet, en prenant les projetés obliques et les symétriques obliques d'un point par rapport aux côtés du triangle avec un angle quelconque β , appartenant à l'intervalle $]0; \pi[$, les deux théorèmes restent valides. On doit à Jean-Victor Poncelet (1788 – 1867), un mathématicien français, l'idée de cette généralisation.

Soit (d) une droite du plan et M un point du plan distinct de (d) . Le projeté d'angle β du point M sur (d) est l'unique point M' de (d) , tel que l'angle orienté entre les droites (MM') et (d) mesure $\beta \pmod{\pi}$. De plus, N est le symétrique oblique d'angle β du point M par rapport à (d) , signifie que M' est le milieu du segment $[MN]$.

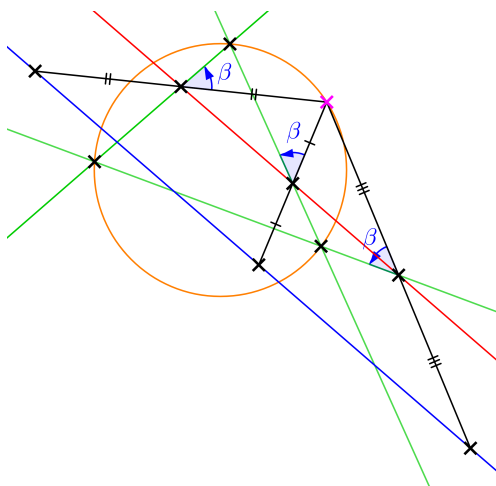


FIGURE 19 – Le point rose est sur le cercle circonscrit orange au triangle formé par les droites vertes. Ainsi, la généralisation des théorèmes de la droite de Simson et de Steiner nous dit que les trois symétriques obliques d'angle orientés β du point rose par rapport aux côtés du triangle sont alignés, de même pour ses projetés obliques d'angle orientés β .

Théorème (Droite de Steiner généralisée). *Considérons un triangle non plat et non réduit à un point et $\beta \in]0; \pi[$ un angle orienté.*

- *Si un point appartient au cercle circonscrit du triangle, alors les symétriques obliques d'angle β de ce point par rapport aux côtés du triangle sont alignés.*
- *Réciproquement, si les symétriques obliques d'angle β d'un point par rapport aux côtés du triangle sont alignés, alors ce point appartient au cercle circonscrit du triangle.*
(Autrement-dit, si un point n'appartient pas au cercle circonscrit d'un triangle, alors les symétriques obliques d'angle β de ce point par rapport aux côtés du triangle ne sont pas alignés.)

*La droite passant par les symétriques d'angle $\beta \in]0; \pi[$ d'un point se situant sur le cercle circonscrit à un triangle est appelée **droite de Steiner généralisée d'angle β** de ce point.*

Théorème (Droite de Simson généralisée). *Considérons un triangle non plat et non réduit à un point et $\beta \in]0; \pi[$ un angle orienté.*

- *Si un point appartient au cercle circonscrit à un triangle, alors les projetés obliques d'angle β de ce point sur les côtés du triangle sont alignés.*
- *Réciproquement, si les projetés obliques d'angle β d'un point sur les côtés du triangle sont alignés, alors ce point appartient au cercle circonscrit à ce triangle.*
(Autrement-dit, si un point n'appartient pas au cercle circonscrit à un triangle, alors les projetés obliques d'angle β de ce point sur les côtés du triangle ne sont pas alignés.)

*La droite passant par les projetés obliques d'angle β d'un point se situant sur le cercle circonscrit à un triangle est appelée **droite de Simson généralisée d'angle β** de ce point.*

Démonstration. (Droites de Simson et Steiner généralisées) Pour la démonstration de ces généralisations, il suffit de modifier les quatre phrases rouges de la preuve du théorème de la droite de Simson. En effet, il faut montrer que, dans chaque cas, les points restent bien cocycliques avec cette projection d'angle quelconque. Pour cela, on remplacera dans chaque phrase le **théorème du cercle circonscrit à un triangle rectangle**, par le **théorème de cocyclicité** qui est plus fort.

(Phrase A) : Comme les points A , B , M et M_{BC} sont bien distincts et que $\text{mes}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \text{mes}(\overrightarrow{M_{BC}M}, \overrightarrow{M_{BC}B}) \pmod{\pi}$, d'après le **théorème de cocyclicité**, les points A , B , M et M_{BC} sont bien cocycliques. **FIGURE (20)**

(Phrase B) : Comme $\text{mes}(\overrightarrow{M_{BC}M}, \overrightarrow{M_{BC}B}) = \text{mes}(\overrightarrow{M_{AB}M}, \overrightarrow{M_{AB}B}) \pmod{\pi}$, d'après le **théorème de cocyclicité**, les points B , M_{AB} , M et M_{BC} sont bien cocycliques. **FIGURE (21)**

(Phrase C) : De la même manière, comme $\text{mes}(\overrightarrow{M_{BC}M}, \overrightarrow{M_{BC}C}) = \text{mes}(\overrightarrow{M_{AC}M}, \overrightarrow{M_{AC}C}) \pmod{\pi}$, d'après le **théorème de cocyclicité**, les points C , M_{BC} , M_{AC} et M sont bien cocycliques. **FIGURE (22)**

(Phrase D) : Comme les points A , B , C et M sont bien distincts et que $\text{mes}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \text{mes}(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}) \pmod{\pi}$, d'après le **théorème de cocyclicité**, les points A , B , C et M sont bien cocycliques. **FIGURE (20)**

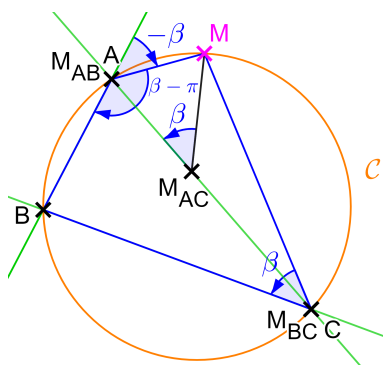


FIGURE 20 – Figure illustrant en bleu la *(Phrase A)* et la *(Phrase D)*, c'est à dire le cas où le projeté oblique M_{AB} d'angle β est sur le sommet A .

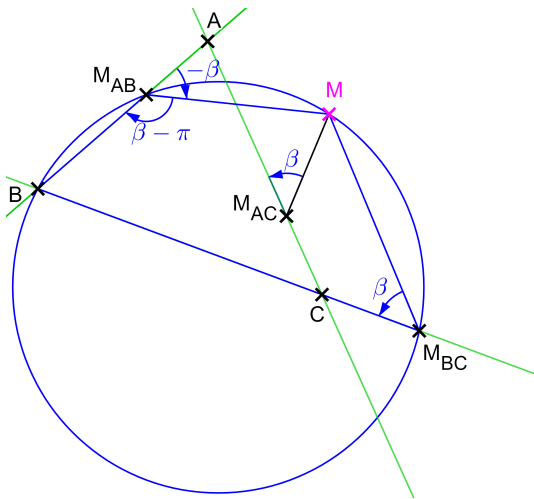


FIGURE 21 – Figure illustrant en bleu la *(Phrase B)* avec les angles orientés $(\overrightarrow{M_{BC}M}, \overrightarrow{M_{BC}B})$ et $(\overrightarrow{M_{AB}M}, \overrightarrow{M_{AB}B})$, qui, modulo π , ont la même mesure. Ainsi, par le **théorème de cocyclicité**, les points B, M_{AB} , M et M_{BC} appartiennent tous à un même cercle, ici représenté en bleu.

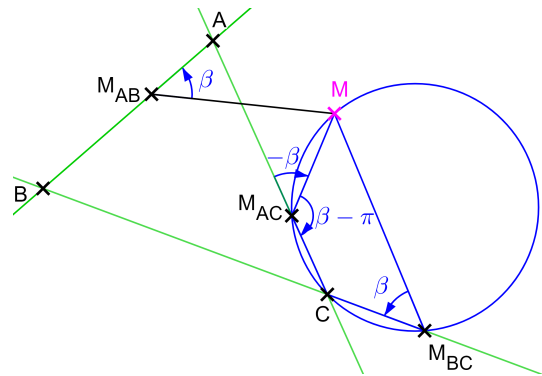


FIGURE 22 – Figure illustrant en bleu la *(Phrase C)* avec les angles orientés $(\overrightarrow{M_{BC}M}, \overrightarrow{M_{BC}C})$ et $(\overrightarrow{M_{AC}M}, \overrightarrow{M_{AC}C})$ qui, modulo π , ont la même mesure. Ainsi, par le **théorème de cocyclicité**, les points B, M_{AB} , M et M_{BC} appartiennent tous à un même cercle, ici représenté en bleu.

En remplaçant les quatre phrases rouges par les quatre phrases précédentes, et bien entendu les mots "projetés orthogonaux" et "symétriques orthogonaux" par "projetés obliques d'angle β " et "symétriques oblique d'angle β " dans les preuves de la droite de Simson et de Steiner, on obtient la preuve dans le cas général. \square

La droite de Steiner permet à son tour de démontrer bon nombre de théorèmes, notamment le théorème du point de Miquel. Vous pouvez retrouver la démonstration, en utilisant cette droite, à travers un devoir maison proposé à la fin de cet article ou bien dans l'article suivant : <https://culturemath.ens.fr/thematiques/geometrie/symphonie-des-cercles>

Annexe

Théorème (Cocyclicité). Soient A, B, M et N , quatre points distincts du plan.

→ Si les points A, B, M et N sont cocycliques ou alignés, alors $\text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \text{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \pmod{\pi}$.

→ Réciproquement, si $\text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \text{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \pmod{\pi}$, alors les points A, B, M et N sont cocycliques ou alignés.

La notation $\text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ désigne une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ en radians.

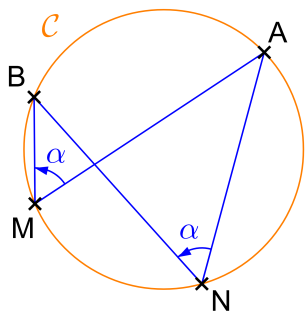


FIGURE 23 – Figure illustrant le théorème de cocyclicité lorsque le segment $[MN]$ ne coupe pas la droite (AB) .

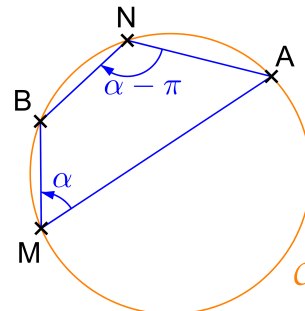


FIGURE 24 – Figure illustrant le théorème de cocyclicité lorsque le segment $[MN]$ coupe la droite (AB) . D'où l'importance de travailler modulo π .

→ **Démonstration du premier point du théorème de cocyclicité :**

Soient A, B, M et N , quatre points distincts du plan. Montrons que si ces quatre points sont cocycliques ou alignés, alors $\text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \text{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \pmod{\pi}$.

Pour démontrer ce point, nous allons avoir besoin de plusieurs outils, le premier étant le théorème de l'angle au centre énoncé et démontré ci-dessous.

Théorème (Angle au centre). Soit \mathcal{C} un cercle de centre Ω , et A et B deux points distincts de \mathcal{C} . Si un point M du plan appartient au cercle \mathcal{C} , alors

$$2 \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \text{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \pmod{2\pi}.$$

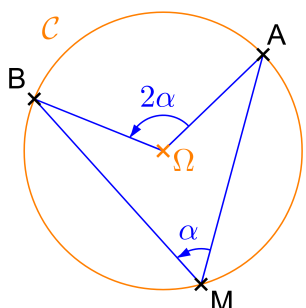


FIGURE 25 – Figure illustrant le théorème de l'angle au centre lorsque les segments $[AB]$ et $[OM]$ ne s'intersectent pas.

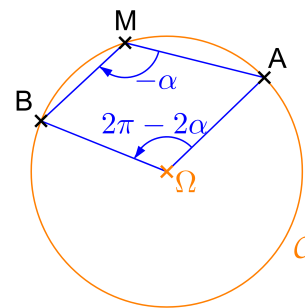


FIGURE 26 – Figure illustrant le théorème de l'angle au centre lorsque les segments $[AB]$ et $[OM]$ s'intersectent. D'où l'importance de travailler modulo 2π .

Démonstration. Soient \mathcal{C} un cercle de centre Ω , et A, B et M trois points distincts de \mathcal{C} .

Si deux des trois points sont diamétralement opposés, en utilisant la somme des mesures des angles d'un triangle et le [théorème du cercle circonscrit à un triangle rectangle](#), on obtient facilement que $2 \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \text{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \pmod{2\pi}$.

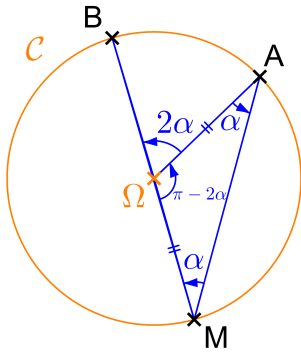


FIGURE 27 – Figure illustrant le théorème de l'angle au centre lorsque le point B , est diamétralement opposé au point M .

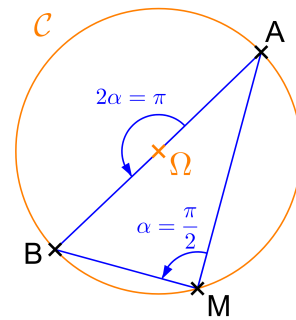


FIGURE 28 – Figure illustrant le théorème de l'angle au centre lorsque le point B , est diamétralement opposé au point A . Comme A et B sont sur un même diamètre, on utilise ici le [théorème du cercle circonscrit à un triangle rectangle](#).

Si ce n'est pas le cas, les triangles $MA\Omega$ et $BM\Omega$ seront isocèles et non plats. Ainsi, comme la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à π radians, on a :

$$\begin{aligned} \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M\Omega}) + \text{mes}(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AM}) + \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A}) &= \pi \pmod{2\pi}, \\ \text{mes}(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MB}) + \text{mes}(\overrightarrow{B\Omega}, \overrightarrow{BM}) + \text{mes}(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega M}) &= \pi \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Comme les angles de la base d'un triangle isocèle sont égaux, on obtient les deux égalités suivantes :

$$2 \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M\Omega}) + \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A}) = \pi \pmod{2\pi}, \quad (6)$$

$$2 \text{mes}(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MB}) + \text{mes}(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega M}) = \pi \pmod{2\pi}. \quad (7)$$

En sommant (6) et (7), on obtient :

$$\begin{aligned} 2 \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M\Omega}) + 2 \text{mes}(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MB}) + \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A}) + \text{mes}(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega M}) &= 0 \pmod{2\pi}, \\ 2 \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \text{mes}(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) &= 0 \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

D'où :

$$2 \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \text{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \pmod{2\pi}.$$

□

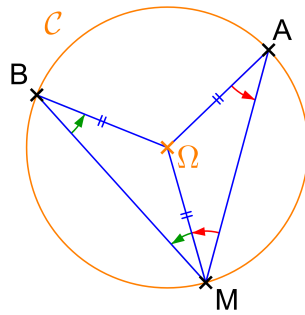


FIGURE 29 – Figure illustrant la démonstration du théorème de l’angle au centre lorsqu’il n’y a pas de points diamétralement opposés.

De ce théorème découle un résultat très fort : le **théorème de l’angle inscrit** qui est le deuxième outil pour démontrer le premier point du théorème de cocyclicité.

Théorème (Angle inscrit). Soit \mathcal{C} un cercle de centre Ω et A et B deux points distincts de \mathcal{C} . Si M et N sont deux points de $\mathcal{C} \setminus \{A, B\}$ alors, $\text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \text{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \pmod{\pi}$. FIGURE (23) et FIGURE (24).

Démonstration. D’après le **théorème de l’angle au centre**, on a :

$$\begin{aligned} 2 \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) &= \text{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \pmod{2\pi}. \\ 2 \text{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) &= \text{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

D’où :

$$2 \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 2 \text{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \pmod{2\pi} \iff \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \text{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \pmod{\pi}.$$

□

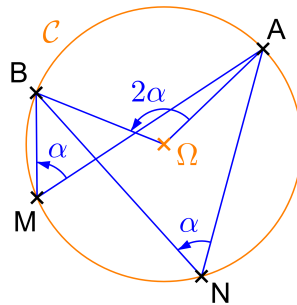


FIGURE 30 – Figure illustrant la démonstration du théorème de l’angle inscrit, où \mathcal{C} est le cercle de centre Ω en orange passant par les points distincts A , B , M , et N . Les angles cités dans la démonstration sont représentés en bleu.

En démontrant le théorème de l’angle inscrit, nous avons montré le premier point du théorème de cocyclicité.

→ **Démonstration du deuxième point du théorème de cocyclicité :**

Théorème (Réciproque du théorème de l’angle inscrit). Soit A , B , M et N quatre points distincts du plan. Si

$$\text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \text{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \pmod{\pi},$$

alors A , B , M et N sont alignés ou cocycliques.

Démonstration. Prenons A, B, M et N quatre points distincts du plan et supposons que $\text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \text{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \pmod{\pi}$.

Si les points A, B et M sont alignés ou les points A, B et N sont alignés, le résultat est immédiat, les quatre points sont alignés.

Si A, B, M ne sont pas alignés et A, B, N ne sont pas alignés, on note \mathcal{C}_M et \mathcal{C}_N les cercles circonscrits de centre Ω_M et Ω_N aux triangles ABM et ABN respectivement.

D'après le [théorème de l'angle au centre](#), on a :

$$\text{mes}(\overrightarrow{\Omega_M A}, \overrightarrow{\Omega_M B}) = 2 \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 2 \text{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = \text{mes}(\overrightarrow{\Omega_N A}, \overrightarrow{\Omega_N B}) \pmod{2\pi}.$$

Comme les deux centres Ω_N et Ω_M appartiennent à la médiatrice de la corde $[AB]$ et que $\text{mes}(\overrightarrow{\Omega_M A}, \overrightarrow{\Omega_M B}) = \text{mes}(\overrightarrow{\Omega_N A}, \overrightarrow{\Omega_N B}) \pmod{2\pi}$, cela implique que $\Omega_M = \Omega_N$. Comme les cercles \mathcal{C}_M et \mathcal{C}_N ont leur centre et un point en commun, ils sont confondus, et les points A, B, M et N sont cocycliques.

Ceci démontre le deuxième point du théorème de cocyclicité. □

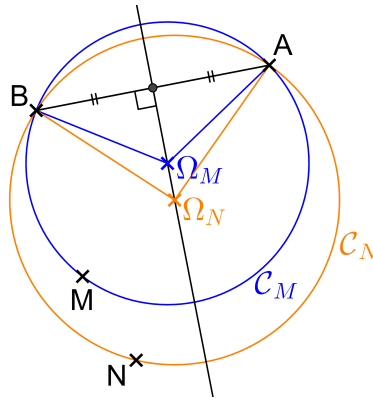


FIGURE 31 – Figure illustrant la démonstration de la réciproque du théorème de l'angle inscrit. Le cercle \mathcal{C}_M de centre Ω_M en bleu passe par les points A, B et M et le cercle \mathcal{C}_N de centre Ω_N en orange passe par les points A, B et N . Les centres Ω_M et Ω_N appartiennent à la médiatrice de la corde $[AB]$ en noir.

Le [théorème de l'angle inscrit](#) et la [réciproque du théorème de l'angle inscrit](#) démontrent les deux points du théorème de cocyclicité.

DM première spécialité mathématiques

Droite de Simson

En classe de première spécialité mathématiques, il est plus approprié de travailler sur la droite de Simson qui utilise la notion de projeté orthogonal qui est vue à ce niveau. L'exercice qui suit s'intègre bien dans une séquence sur la géométrie repérée.

Source : [3, n°87,p. 267].

Thème : géométrie repérée (projeté orthogonal, équation d'un cercle, alignement de points).

1. Soient $A(2; -2)$, $B(4; 4)$ et $C(-2; 0)$ trois points du plan.
 - (a) Sur un logiciel de géométrie dynamique, placer les trois points et tracer le cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle ABC .
 - (b) Soit M le point du cercle \mathcal{C} d'ordonnée 0 et distinct du point C . Tracer les points I , J et K projetés orthogonaux de M sur (AC) , (AB) et (CB) .
 - (c) Émettre une conjecture sur la position relative des points I , J et K .
2. L'objectif de cette question est de démontrer la conjecture émise à la question précédente.
 - (a) Déterminer une équation du cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle ABC .
 - (b) En déduire l'abscisse du point M qui appartient au cercle \mathcal{C} , a une ordonnée nulle et est distinct du point C .
 - (c) Déterminer les coordonnées des points I , J et K .
 - (d) Conclure.

La droite à laquelle les points I , J et K précédemment cités appartiennent est appelée **droite de Simson**, du nom du mathématicien écossais Robert Simson.

DM : Démonstration du théorème du point de Miquel

Théorème (Point de Miquel). *Soit quatre droites en position générale⁴ dans le plan. Alors, les cercles circonscrits aux triangles formés par chaque triplet de droites sont concourants en un point, appelé **point de Miquel**.*

Les questions de ce devoir vont vous aider à démontrer le théorème du point de Miquel en utilisant le théorème de la droite de Steiner énoncé ci-dessous.

Théorème (Droite de Steiner). *Considérons un triangle non plat et non réduit en un point.*

→ *Si un point appartient au cercle circonscrit d'un triangle, alors les symétriques orthogonaux de ce point par rapport aux côtés du triangle sont alignés.*

→ *Réciproquement, si les symétriques orthogonaux d'un point par rapport aux côtés d'un triangle sont alignés, alors ce point appartient au cercle circonscrit du triangle.*

*La droite passant par les symétriques d'un point se situant sur le cercle circonscrit à un triangle est appelée **droite de Steiner** de ce point.*

Soient d_1, d_2, d_3 et d_4 , quatre droites en position générale. On note $C_{1,2,3}$ le cercle circonscrit au triangle formé par les droites d_1, d_2 et d_3 . De même, on note $C_{1,2,4}, C_{2,3,4}$ et $C_{1,3,4}$ les autres cercles circonscrits associés aux trois autres triplets de droites.

Partie 1 : Considérons $C_{1,2,3}$ et $C_{1,2,4}$ et notons M le point d'intersection de ces cercles qui n'est pas le point d'intersection des droites d_1 et d_2 .

1. Montrer que les symétriques du point M par rapport aux droites d_1, d_2 et d_3 sont alignés.
2. Montrer que les symétriques du point M par rapport aux droites d_1, d_2 et d_4 sont alignés.
3. En déduire que les points d_1, d_2, d_3 et d_4 sont sur une même droite.

Partie 2 :

1. Montrer que M appartient au cercle $C_{2,3,4}$.
2. Montrer que M appartient au cercle $C_{1,3,4}$.
3. En déduire que les cercles $C_{1,2,3}; C_{1,2,4}; C_{2,3,4}$ et $C_{1,3,4}$ sont concourants.

4. Des droites sont en position générale s'il n'y a pas de paire de droites parallèles ni de triplet de droites concourantes.

Références

- [1] Sortais Yvonne et René. *La Géométrie du triangle exercices résolus*. Hermann, 1997.
- [2] Boyer Pascal. *Algèbre et géométries*. Calvage & Mounet, 2015.
- [3] Christophe Barnet et Eric Barbazo. *Première mathématiques spécialité*. Hachette éducation, 2019.