



**HAL**  
open science

# Nouveaux résultats analytiques sur le décalage latéral dû à la réfraction atmosphérique

Luc Dettwiller

► **To cite this version:**

Luc Dettwiller. Nouveaux résultats analytiques sur le décalage latéral dû à la réfraction atmosphérique. 2024. hal-04825900v2

**HAL Id: hal-04825900**

**<https://hal.science/hal-04825900v2>**

Preprint submitted on 22 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0  
International License

# New analytical results on the lateral shift due to atmospheric refraction

## *Nouveaux résultats analytiques sur le décalage latéral dû à la réfraction atmosphérique*

**Luc Dettwiller**<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France*

E-mail: [dettwiller.luc@gmail.com](mailto:dettwiller.luc@gmail.com)

**Abstract.** Our two analytical methods of studying the total lateral shift  $\Delta_\infty$  related to astronomical refraction, described in our article [1], are carrying new and unprecedented results, which we presented at the seminar that we gave at ONERA (Palaiseau), 12-16-2024. On the one hand, the detailed exploitation of the Bouguer invariant allows us to show, with numerical values in support, how to give a development of  $\Delta_\infty$ , within the astronomical horizon, at order 2 (relative to the apparent height) in relation to the asymmetry of the image of the setting sun – and diagnose non-standard cases of it that go visually unnoticed. On the other hand, the exploitation of the quadrature governing the light rays in a continuous medium with spherical symmetry allows us to develop  $\Delta_\infty$  according to the air refractivity, not only at order 1 as in [1], but at order 2 (which allows to better highlight the questions of mathematical methodology), and thus obtain a new approximate expression of  $\Delta_\infty$ , more efficient. We show that it accounts very well numerically (up to and including the zenith distance of  $75^\circ$ ) for non-linearity of  $\Delta_\infty$  as a function of pressure, as shown by [2] but left unexplained; we take advantage of this to predict the effects, on previous results, of the violation of the Gladstone-Dale rule (paradoxically more important than those of the violation of the ideal gases law); we also analyze the small variation (null, according to Rayleigh) of  $\Delta_\infty$  with temperature, and show that there is an unexplained residue which remains mysterious because it is probably not due to order 3. We also obtain an original integral formula, and its series expansion, for the lateral shift due to the propagation through a supposedly stratified atmosphere. Finally, we study quantitatively the effect, on  $\Delta_\infty$ , of the presence of an inversion layer above the observer, and recall (through a historical model) that it can cause critical phenomena to appear which may exalt chromatic dispersion for  $\Delta_\infty$ , compared to its standard dispersion on the astronomical horizon.

**Key words.** Astronomical refraction, ray curvature, lateral shift, Biot's theorem, local vertical angular magnification, image flattening, distortion coefficient, asymmetry, non-

linear variation of the lateral shift as a function of pressure / temperature, shift in a stratified atmosphere, effect of an inversion layer, optical duct, exaltation of chromatic dispersion.

**Résumé.** Nos deux méthodes d'étude analytique du décalage latéral total  $\Delta_\infty$  lié à la réfraction astronomique, exposées dans notre article [1], sont porteuses de nouveaux résultats inédits, que nous avons présentés à l'occasion du séminaire que nous avons donné à l'ONERA (Palaiseau) le 16 / 12 / 2024. D'une part, l'exploitation approfondie de l'invariant de BOUGUER nous permet de montrer, valeurs numériques à l'appui, comment donner un développement de  $\Delta_\infty$  au voisinage de l'horizon astronomique à l'ordre 2 (par rapport à la hauteur apparente) en lien avec l'asymétrie de l'image du Soleil couchant – et diagnostiquer des cas non-standard de celle-ci qui passent visuellement inaperçus. D'autre part, l'exploitation de la quadrature régissant les rayons lumineux dans un milieu continu à symétrie sphérique nous permet de développer  $\Delta_\infty$  en fonction de la réfractivité, non seulement à l'ordre 1 comme dans [1], mais à l'ordre 2 (ce qui permet de mieux mettre en évidence les questions de méthodologie mathématique), et d'obtenir ainsi une nouvelle expression approchée de  $\Delta_\infty$ , plus performante. Nous montrons qu'elle rend très bien compte numériquement (jusqu'à la distance zénithale  $75^\circ$  inclus) de la non-linéarité de  $\Delta_\infty$  en fonction de la pression, mise en évidence par [2] mais laissée inexplicée ; nous en profitons pour prédire les effets, sur les résultats précédents, de la violation de la loi de GLADSTONE-DALE (paradoxalement plus importants que ceux de la violation de la loi des gaz parfaits) ; nous analysons aussi la petite variation (nulle selon RAYLEIGH) de  $\Delta_\infty$  avec la température, et montrons qu'il subsiste un résidu inexplicé qui reste mystérieux car il n'est vraisemblablement pas dû à l'ordre 3. Nous obtenons aussi une formule intégrale inédite, et son développement en série, pour le décalage latéral à la traversée d'une atmosphère supposée stratifiée. Enfin, nous étudions quantitativement l'effet, sur  $\Delta_\infty$ , de la présence d'une couche d'inversion au-dessus de l'observateur, et rappelons (grâce à un modèle historique) qu'elle peut faire apparaître des phénomènes critiques susceptibles d'exalter la dispersion chromatique pour  $\Delta_\infty$ , par rapport à sa dispersion standard sur l'horizon astronomique.

**Mots clés.** Réfraction astronomique, courbure des rayons, décalage latéral, théorème de Biot, grandissement angulaire vertical local, accourcissement, coefficient de distorsion, asymétrie, variation non-linéaire du décalage en fonction de la pression / de la température, décalage latéral dans une atmosphère stratifiée, effet d'une couche d'inversion, chenal optique, exaltation de la dispersion chromatique.

# Nouveaux résultats analytiques sur le décalage latéral dû à la réfraction atmosphérique

« The purpose of calculus is insight, not numbers » Richard W. HAMMING (1915-1998, Prix Turing 1968)  
*Insight allows diagnoses and makes it possible to perceive mysteries...*



## Study of the lateral shift due to atmospheric refraction: alternative analytical methods, and new results

L. DETTWILLER

Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, Saint-Etienne, France (dettwiller.luc@gmail.com)

Received 4 March 2024; revised 6 May 2024; accepted 28 May 2024; posted 29 May 2024; published 11 June 2024

Atmospheric refraction modifies the apparent position of objects in the sky, and also produces a progressive lateral shift of the light rays received from these objects; in the case of a spherically symmetric atmosphere, for the first time, this shift has been numerically studied in 2022, and different analytical estimators have been compared (by Labriji *et al.*) for the total shift. This topic is important for the reconstruction of meteor trajectories, for the analysis of wavefront sensing in adaptive optics, etc. Always in the case of a spherically symmetric atmosphere, we show two other analytical methods to study this lateral shift, and to be able to estimate it analytically in the difficult case when the celestial object is seen near the astronomical horizon. One of these methods allows us to deduce an estimator, not only of the total shift, but also of the shift of any point of the ray. We compare properties of the total lateral shift and of the refraction angle, and also the chromatism of the total lateral shift to the chromatism of the air refractivity, for rays coming from an object seen either high enough above the astronomical horizon, or on it. In this latter case, our first method shows departures from proportionality between the chromatisms of the air refractivity, of the astronomical refraction angle, and, even more, of the total lateral shift. © 2024 Optica Publishing Group

<https://doi.org/10.1364/JOSAA.522962>

Réimpression d'un extrait de [1, p. 1310] – avec la permission de © Optical Society of America

## Motivations de l'article [1]

- Explorer deux méthodes, jusqu'ici inexploitées pour étudier ce qui fait l'objet de l'article [2] : le décalage latéral  $\Delta(r, Z', \lambda_0)$ , dans une atmosphère à symétrie sphérique<sup>1</sup> de centre  $C$  avec un « profil » de masse volumique  $r \mapsto \mu(r)$  et un observateur  $S$ , recevant un rayon lumineux issu de l'infini –  $\lambda_0$  désignant la longueur d'onde dans le vide, et  $Z'$  la distance zénithale apparente.
- Chercher des résultats supplémentaires auxquels ces méthodes donnent accès.

## But du séminaire donné à l'ONERA le 16 / 12 / 2024

En ajoutant d'autres discussions ou résultats (par ex., une meilleure formule d'approximation du décalage « total ») à ceux déjà publiés [1,2], s'entraîner sur ces deux méthodes alternatives :

1. la première, fondée sur l'interprétation géométrique de l'invariant de BOUGUER en terme de paramètre d'impact  $D(\lambda_0) = n_s(\lambda_0) r_s \sin Z'$  – où  $n_s(\lambda_0)$  désigne l'indice de réfraction de l'air au niveau de  $S$ , et  $r_s := SC$  (le symbole  $:=$  indique une définition ou une notation – une table des autres notations est mise dans les pages finales) ;
2. la seconde, fondée sur l'utilisation d'une quadrature, développée à l'ordre 1 (voire 2) par rapport au « profil » de réfractivité  $r \mapsto \eta(r, \lambda_0)$  de l'air.

<sup>1</sup> (et non plus seulement une atmosphère stratifiée, à laquelle on se restreignait de 1893 [3] à 2006 [4] pour cette étude, excepté en 1968 [5])

# Plan

## Cinq hypothèses sous-jacentes

### 1. Utilisation de l'invariant de BOUGUER (1729)

#### 1.1. Discussions générales sur le décalage total $\Delta_\infty(Z', \lambda_0)$

##### 1.1.1. *Estimation numérique de l'erreur due à l'idéalisation du modèle RGO utilisé par [2]*

##### 1.1.2. *Violation des hypothèses (a) et (d)*

- En ondes radio avec l'humidité de l'air
- En ondes radio avec l'ionisation de l'air

#### 1.2. Discussion de $\left(\frac{\partial\Delta_\infty}{\partial Z'}\right)_{\lambda_0}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right)$ en utilisant le théorème de BIOT (1836)

*avec lequel on voit le lien entre l'accourcissement solaire et  $\left(\frac{\partial\Delta_\infty}{\partial Z'}\right)_{\lambda_0}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right) \dots$*

#### 1.3. Calcul de $\left(\frac{\partial^2\Delta_\infty}{\partial Z'^2}\right)_{\lambda_0}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right)$ moyennant un nouveau théorème (2022)

*avec lequel on voit le lien entre l'asymétrie du soleil couchant et  $\left(\frac{\partial^2\Delta_\infty}{\partial Z'^2}\right)_{\lambda_0}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right) \dots$*

### 2. Technique de la quadrature et de son développement ; applications

#### 2.1. Principe d'obtention du décalage au moyen d'une quadrature

#### 2.2. Développement à l'ordre 2 par rapport à la réfractivité $\eta$

## 2.3. Discussion détaillée du mécanisme de la variation de $\Delta_\infty(Z', \lambda_0)$ en fonction des paramètres thermodynamiques RGO au niveau de l'observateur

### 2.3.1. Influence de la pression $P_S$

### 2.3.2. Influence de la température absolue $T_S$

Remarque : autres causes de non-linéarité de  $\Delta_\infty$  par rapport au profil  $r \mapsto P(r)$

## 2.4. Comparaison graphique de 3 formules d'approximation de $\Delta_\infty$

## 2.5. Variation de $\Delta_\infty$ avec la structure troposphérique à $T_S$ et $P_S$ fixés

## Conclusion

### Références

**Appendice A** : définition, expression et valeurs numériques du coefficient de réfraction

**Appendice B** : démonstration moderne d'une expression de  $\left(\frac{\partial \psi'}{\partial \psi}\right)_{\lambda_0} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right)$  (théorème

de BIOT, 1836) ; expression de  $\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \psi'^2}\right)_{\lambda_0} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right)$ , et du coefficient de distorsion

$\left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial \psi^2}\right)_{h, \lambda_0}$  ([7], 2022)

**Appendice C** : obtention de l'expression finale du terme d'ordre 2 (par rapport au profil de réfractivité en  $\eta$ ) pour le décalage latéral  $\Delta_\infty$

**Appendice D** : propriétés de quelques hauteurs caractéristiques relatives, pour certains modèles d'atmosphère

**Appendice E** : effets des écarts à la loi des gaz parfaits et à celle de GLADSTONE-DALE

**Appendice F** : pour une atmosphère stratifiée, calcul du décalage latéral par l'artifice des pellicules dioptriques infiniment minces ; développement en série

**Appendice G** : un modèle historique de guidage dû au dépassement du gradient thermique critique

*Table des notations utilisées dans ce document*

Pour ce séminaire, on se limite à l'étude détaillée du décalage total<sup>2</sup> (i.e. pour l'intégralité du rayon lumineux venant de l'infini jusqu'à  $S$ ), donc à  $\Delta(\infty, Z', \lambda_0) := \Delta_\infty(Z', \lambda_0)$  – la référence pour ce décalage étant la demi-droite qui serait le trajet du rayon arrivant sur  $S$  en l'absence d'atmosphère [1].

Une bonne partie de la démarche suivie par les articles [1-5] repose sur **cinq hypothèses classiques**, dont :

- a) **la loi empirique de GLADSTONE-DALE** qui dit que, à  $(M, \lambda_0)$  fixé (où  $M$  désigne un point quelconque de l'atmosphère),  $\eta/\mu := C$  n'est fonction que de  $\lambda_0$  et de la composition du gaz (ici, l'air) qui peut varier<sup>3</sup> avec  $M$  dans le cas d'une atmosphère pas bien mélangée (voir la note 11, p. 11) et la date (que nous omettrons dans les notations dès maintenant), donc

$$\eta(T(M), P(M), M, \lambda_0) = C(M, \lambda_0) \mu(T(M), P(M), M)$$

où  $T(M)$  et  $P(M)$  désignent respectivement la température absolue et la pression dans l'atmosphère au point  $M$  avec lequel la composition de l'air varie ;

- b) **l'équilibre hydrostatique (au moins vertical)**, qui donne

$$\mu(T(z'), P(z'), z') g(z') = -(dP/dz')(z') \quad \forall z' := r - r_s, \text{ donc la hauteur réduite}$$

$$H_{1s}(\lambda_0) := \frac{1}{\eta_s(\lambda_0)} \int_0^\infty \eta dz' \text{ s'écrit } H_{1s}(\lambda_0) = \frac{1}{C_s(\lambda_0) \mu_s} \int_0^\infty -\frac{C}{g} \frac{dP}{dz'} dz'$$

(où  $\eta_s$  et  $C_s$  sont les valeurs de  $\eta$  et  $C$  en  $S$ , alors que les 3 grandeurs qui interviennent sous l'intégrale varient avec  $z'$ ), et, de plus, l'altitude relative du barycentre  $B$  de l'air au-dessus de  $S$  et pondéré par  $\eta$  s'écrit

$$H_{BS}(\lambda_0) := \frac{\int_0^\infty z' \eta dz'}{\int_0^\infty \eta dz'} = \frac{\int_0^\infty \frac{C z'}{g} \frac{dP}{dz'} dz'}{\int_0^\infty \frac{C}{g} \frac{dP}{dz'} dz'} \quad \text{(i)}$$

$$= -\frac{\int_0^\infty \left( \frac{\partial}{\partial z'} \frac{C z'}{g} \right)_{\lambda_0} P dz'}{\left[ \frac{\eta_s P_s}{\mu_s g_s} - \int_0^\infty \left( \frac{\partial}{\partial z'} \frac{C}{g} \right)_{\lambda_0} P dz' \right]};$$

- c) **le caractère uniformément parfait du gaz**, qui donne

$$\forall z' \quad P(z')/\mu(z') = R T(z')/M_a(z') \text{ – où } R \text{ désigne la constante}^4 \text{ des gaz parfaits,}$$

$$\text{et } M_a \text{ la masse molaire – donc } H_{1s}(\lambda_0) = \frac{1}{C_s(\lambda_0) \mu_s} \int_0^\infty -\frac{C}{g} \frac{d}{dz'} \left( \frac{\mu R T}{M_a} \right) dz' ;$$

- d) **le caractère bien mélangé de l'atmosphère**, qui donne

$$\forall z', C(z', \lambda_0) = C_s(\lambda_0) \text{ et } M_a(z') = M_{a,s} ;$$

<sup>2</sup> (et algébrique : positif si le rayon lumineux tourne sa concavité partout vers le bas, négatif dans le cas opposé)

<sup>3</sup>  $C$  est donc une constante de type A – selon J.-M. LÉVY-LEBLOND, « The Importance of Being (a) Constant », *Problems in the Foundation of Physics, Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi 72*, North-Holland (Amsterdam, 1979) – car elle est spécifique, i.e. elle ne décrit les propriétés que d'un système particulier.

<sup>4</sup> depuis 2019, de type D car  $R$  est devenu une constante de référence – i.e., dont la valeur numérique est fixée par une convention de coordination entre les définitions de diverses unités.

e) **le caractère uniforme de  $g$** , qui donne  $g(z') = g_S$  pour  $|z'| \ll r_S$  (sachant qu'il en est de même pour la hauteur effective de l'atmosphère) ; des hypothèses (a)-(e) on déduit

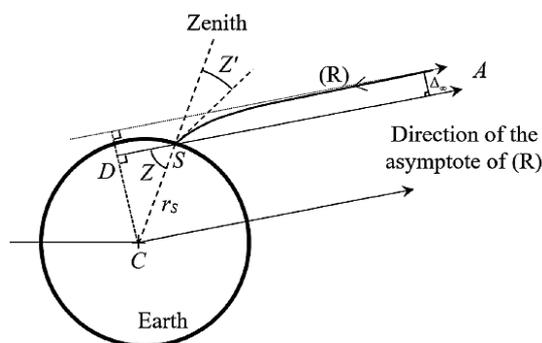
$$H_{1S} = \frac{P_S}{\mu_S g_S} = \frac{RT_S}{M_{aS} g_S} \quad \text{et} \quad H_{BS} = \int_0^\infty P \, dz' / P_S \quad (\text{ii})$$

qui ne dépendent pas de  $\lambda_0$ , et cette dernière expression de  $H_{BS}$  présente l'avantage de ne comporter qu'une seule intégrale ; on voit aussi que le facteur principal  $\eta_S H_{1S} = C_S P_S / g_S$  de  $\Delta_\infty$  est proportionnel à  $P_S$  et ne dépend pas de  $T_S$ .

Cependant, ces cinq hypothèses ne sont pas requises à chaque stade de notre étude ; quand cela est intéressant, nous signalerons les endroits où certaines d'entre elles sont inutiles.

## 1. Utilisation de l'invariant de BOUGUER (1729)

Réimpression à partir de [1, p. 1311] – avec la permission de © Optical Society of America – concernant  $\Delta_\infty(Z', \lambda_0)$



**Fig. 1.** Geometric interpretation ( $D$ ) of the Bouguer invariant of the light ray (R)—arriving on the observer  $S$  from the point at infinity  $A$  (of true zenith distance  $Z$ )—and its use to express  $\Delta_\infty$ , the total lateral shift of (R) from the rectilinear path ( $SA$ ) that it would have in the vacuum. This shift, very exaggerated here for the clarity of the figure, is due to the inhomogeneity of the atmosphere, assumed to have spherical symmetry of center  $C$ . The asymptote of (R) is represented by a fine dotted line, and is pointed to the right.

as a function of parameters  $n_S$ ,  $r_S$ , and of the only variable  $Z'$ , thanks to [5]

$$\Delta_\infty = [n_S \sin Z' - \sin(Z' + \chi_S)] r_S. \quad (3)$$

Because of this relationship, some of the properties of  $\chi_S$  also apply to  $\Delta_\infty$  (for example, see our Subsection 3.C), with some nuances eventually (see Subsections 2.B, 2.C, and 3.B).

Illustrons dès maintenant, de façon générale, la dernière phrase de l'extrait ci-dessus de [1, p. 1311] – mais sans oublier que l'expression (3) suppose  $\eta(\infty) = 0$  – ce qui équivaut à  $\lim_{r \rightarrow \infty} n(r) = 1$ .

## 1.1. Discussions générales sur le décalage total $\Delta_\infty(Z', \lambda_0)$

### 1.1.1. Estimation numérique de l'erreur due à l'idéalisation du modèle RGO utilisé par [2]

Adaptation à partir de [1, p. 1316] – avec la permission de © Optical Society of America

[On the astronomical horizon, i.e. for  $Z' = \pi/2$  rad, Relation (3)] gives, with the horizontal refraction  $\chi_{Sb}$  (already mentioned in Section 2), a simple approximate relation:

$$\Delta_\infty \cong \left( \eta_S + \frac{\chi_{Sb}^2}{2} \right) r_S. \quad (39)$$

The difficulty here comes from  $\chi_{Sb}$ , which (although its variations come mainly from the nearby troposphere) depends on the entire atmosphere [25], and which has no rigorous or simple expression, but is numerically tabulated ([20], Section 8). In standard conditions, and for the  $d$  line,  $\chi_{Sb} \cong 0.010$  rad (therefore  $\chi_{Sb}^2/2$  is 5.6 times smaller than  $\eta_S$ ), and we found  $\Delta_\infty \cong 2.1$  km. In the 19th century, some observers were troubled to note that at  $Z'$  fixed and close to  $90^\circ$  there are, without variation of  $(P_S, T_S)$ —hence of  $\eta_S$ —variations of  $\chi_S$  (this being mainly due to variations in the structure of the atmosphere just above the observer [25]); the same can be said for  $\Delta_\infty$ , since  $\chi_{Sb}^2/2$  is not negligible in Expression (39). Furthermore, as here  $Z = 90^\circ + \chi_{Sb} > 90^\circ$ , at  $\eta_S$  fixed  $\Delta_\infty$  and  $\chi_{Sb}$  vary together in the same direction, contrary to cases where  $Z$  remains in  $[0^\circ, 90^\circ]$ —cf. Subsection 2.C.

Notons bien que la démonstration des relations (3) et (39) ci-dessus ne requiert aucune des hypothèses (a)-(e).

Pour l'intégration numérique, l'article [2] utilise un modèle d'atmosphère de type RGO, i.e. comme ceux adoptés par le *Royal Greenwich Observatory*, constitués d'une troposphère polytropique d'épaisseur  $H_t = 11$  km, puis d'une « stratosphère isotherme » non seulement de 11 à 20 km d'altitude, mais jusqu'à l'infini. En ce qui concerne la valeur de  $\Delta_\infty$ , à quelle erreur doit-on s'attendre, compte tenu du gradient thermique stratosphérique standard 1.0 K/km de 20 à 32 km (puis 2.8 K/km de 32 à 47 km), et de l'existence des couches supérieures – mésosphère puis thermosphère ?

Dans l'approximation où  $Z'$  est assez éloigné de  $90^\circ$  pour que le « théorème » d'ORIANI soit applicable, l'erreur cherchée est nulle, puisque parmi les paramètres de structure thermodynamique de l'atmosphère, la température absolue  $T_S$  en  $S$  ainsi que la pression  $P_S$  suffisent<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup> Car le « théorème approximatif » d'ORIANI, publié pour la première fois en 1787, et dont la démonstration recèle malheureusement un glissement entre les variables du développement, stipule que les coefficients du développement de  $\chi_S$  en série, jusqu'à l'ordre 3 en  $\tan Z'$  pas trop grand, dépendent – moyennant les hypothèses (a)-(e) – de la structure atmosphérique seulement par le biais de  $(T_S, P_S)$ . Si ce développement

Il n'en est plus de même auprès de l'horizon astronomique, ou sur lui – i.e. quand  $Z' = 90^\circ$  (et pour distinguer les grandeurs associées à ce cas particulier, nous ajoutons à leur notation la lettre  $h$  en indice). Dans ce cas, on sait [6, p. 3629] que si le gradient thermique vertical<sup>6</sup> était  $-\sigma \cong -6.5 \text{ K/km}$  sur toute l'atmosphère (qui s'arrêterait à 44.33 km d'altitude par rapport au niveau de la mer à  $15^\circ \text{C}$ , et serait donc entièrement polytropicque d'indice  $j := \frac{M_a g_s}{R \sigma} - 1 \cong 4.26$  si  $g \cong g_s \cong 9.81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , et correspondrait à une atmosphère stable<sup>7</sup>), puisque le théorème d'ORIANI s'applique dans la stratosphère pour un rayon arrivant horizontal en  $S$  au niveau de la mer (i.e. quand l'altitude absolue  $H_s$  de  $S$  est nulle),  $\chi_{S_h}$  (appelé la « réfraction horizontale » pour  $S$ ) ne changerait que de  $\delta \chi_{S_h} \cong 2.3'' \cong 1.1 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$ , alors que  $\chi_{S_h} \cong 35' \cong 0.010 \text{ rad}$  est dû pour 1 / 8 à la stratosphère ! En effet, pour un point P sur la tropopause à la distance (de C)  $r_p = r_s + (H_t - H_s)$ , les conditions sont  $-56.5^\circ \text{C}$  et 226.32 hPa dans l'atmosphère standard, et l'indice à 550 nm vaut  $n_p \cong 1.000\,078$  – d'après les hypothèses (a) et (c)-(d) ; toujours dans le cas de la réfraction horizontale, sur un rayon arrivant de l'infini dans un milieu à symétrie sphérique, l'angle du rayon par rapport à la direction radiale en P vaut  $\alpha_p$ , et avec l'invariant de Bouguer on trouve  $\alpha_p = \arcsin \frac{n_s r_s}{n_p r_p} \cong 86.8^\circ$  [7, p. 70]. Ceci est suffisamment inférieur à  $90^\circ$  pour que la réfraction<sup>8</sup>, partielle car observée en P et non en  $S$ , soit nettement moins sensible (en vertu de la loi de SIMPSON<sup>9</sup>) à la façon dont l'indice tend vers 1 au-dessus de P, à partir de sa valeur imposée par les conditions de pression et de température en P. Cette quasi-indépendance de la réfraction par rapport à la structure de la haute atmosphère,

---

d'ordre 3 suffit aux observateurs, ce résultat leur est précieux, car les seuls instruments météorologiques dont ils ont alors besoin pour chiffrer  $\chi_s$  dans cette approximation se résument à un thermomètre et un baromètre au niveau de la pupille d'entrée de leur télescope ou leur lunette.

<sup>6</sup> Sa valeur minimale pour une atmosphère stable est le gradient thermique adiabatique  $-\sigma_a$  tel que, dans le cadre

des hypothèses (b)-(c),  $\sigma_a = \frac{M_a g}{R} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cong 9.8 \text{ K/km}$  où  $\gamma \cong 1.4$  est le rapport des capacités thermiques de

l'air à pression et à volume respectivement constants.

<sup>7</sup> Le critère de stabilité équivaut, dans le cadre des hypothèses (b)-(c), à  $j \in ]-\infty, 0[ \cup ]1/(\gamma - 1), \infty[$  indépendamment de  $g$  et de  $M_a$  ; pour l'air,  $1/(\gamma - 1) \cong 2.5$ .

<sup>8</sup> Dans notre contexte, « la réfraction » (en un point) désigne l'angle  $\chi$  de la tangente au rayon lumineux (en ce point) vers son asymptote – et orienté de façon que  $\chi > 0$  quand la concavité du rayon est tournée partout vers le bas. Ce n'est donc pas « le phénomène de réfraction », qui désigne le fait que, le long d'un rayon dans un milieu quasi transparent inhomogène, sa direction change dans le cadre de « l'approximation de l'optique géométrique » – par rapport auquel les écarts constituent précisément (et par définition) les phénomènes de diffraction.

<sup>9</sup> Déjà entrevue par FLAMSTEED et NEWTON puis redite par EULER en 1754, cette loi – qui a trouvé ensuite dans le développement de LAPLACE, annoncé par le théorème d'ORIANI, une justification meilleure que dans la formule de SIMPSON (1743) – stipule qu'à  $\lambda_0$  fixé (ainsi que la distance zénithale apparente, mais suffisamment inférieure à  $90^\circ$  – ce qui est vague),  $\chi_s$  ne dépend de l'atmosphère que par la réfractivité de l'air en  $S$ . On a la même propriété, mais rigoureuse, dans le cas d'une atmosphère stratifiée ; en ce sens, la loi et la formule de SIMPSON reviennent à négliger la rotondité de la Terre. La formule de SIMPSON, moins précise que le développement dû à LAPLACE, est en contrepartie moins exigeante : celui-ci requiert toutes les hypothèses (a)-(e), celle-là ne nécessite aucune d'elles.

même pour la réfraction horizontale, avait déjà été soulignée par Jean-Baptiste BIOT (1774-1862) [8, p. 112], Azeglio BEMPORAD (1875-1945) [9], etc.

On en déduit que, en partant de l'atmosphère standard, le remplacement des couches au-dessus de la troposphère par le prolongement polytropique de celle-ci (i.e. le maintien du gradient thermique troposphérique dans le reste de l'atmosphère) ne change, pour  $Z' = 90^\circ$ , le décalage total que de  $\delta\Delta_\infty/\Delta_\infty \cong (0.010 \times 1.1 \cdot 10^{-5} \times 6\,378 \text{ km})/\Delta_\infty \cong 0.72 \text{ mm}/2.2 \text{ km} \cong 3.3 \cdot 10^{-7}$  en valeur relative. La relation (3) fait que la loi de SIMPSON pour  $\chi_s$  s'applique aussi à  $\Delta_\infty$  [1, p. 1312] ; et l'on peut s'attendre à une valeur de  $\delta\Delta_\infty$  notablement plus petite si, au lieu de faire passer les gradients thermiques standard des 3 sous-couches stratosphériques (0 K / km, 1.0 K / km, 2.8 K / km) tous à  $-6.5 \text{ K / km}$ , on les fait passer à 0 K / km (qui correspond à l'indice polytropique infini).

### 1.1.2. Violation des hypothèses (a) et (d)

#### • En ondes radio avec l'humidité de l'air

Dans la pratique, des violations des hypothèses (a) et (d) peuvent être dues notamment à la vapeur d'eau atmosphérique, responsable d'une variation de  $M_a$  avec l'altitude absolue. Dans le domaine visible, les conséquences optiques de cette variation sont négligeables, car la vapeur d'eau influe très peu sur la réfractivité de l'air humide – comme l'ont montré Jean-Baptiste BIOT et François ARAGO (1786-1853) les premiers, en 1806. En effet, la réfractivité de la vapeur d'eau dans le visible est 0,9 fois celle de l'air sec sous les mêmes conditions de  $T$  et  $P$  (mais 1,4 fois avec le même  $\mu$ ) ; donc à  $T$  et à une pression *totale* fixées, l'augmentation du titre en vapeur d'eau *diminue* légèrement la réfractivité de l'air.

En ondes décimétriques le coefficient de réfraction  $\kappa_s(\lambda_0)$  est plus fortement variable que dans le visible<sup>10</sup>. Cela vient, pour commencer, de la violation de l'hypothèse (d), qui se manifeste entre autres par la faible échelle de hauteur  $H_v$  de la vapeur d'eau atmosphérique (elle ne suit pas la loi de BOLTZMANN, et ce n'est pas un gaz bien mélangé à l'air) :  $H_v$  est typiquement de l'ordre du huitième de la hauteur d'échelle de l'atmosphère ; ainsi, l'augmentation de la polarisabilité de la vapeur d'eau du domaine visible au domaine radio – dont nous précisons ci-dessous la raison – accroît le gradient de  $n$  huit fois plus que ne le ferait la même augmentation pour l'air sec (à concentration identique). Corrélativement, en ondes radio, la vapeur d'eau a une réfractivité bien plus grande que dans le visible à  $T$  et  $P$  fixés, donc l'influence de la vapeur d'eau est beaucoup plus forte sur l'accroissement de  $\Delta_\infty$  pour  $Z' = 90^\circ$  par le biais de  $\eta_s$  dans la relation (39). Ceci vient en partie de l'importance de la polarisabilité d'orientation de l'eau, bien augmentée dans le domaine micro-onde (alors qu'elle est imperceptible dans le visible) à cause de sa raie de rotation pure et de résonance R(0) à  $\lambda_0 \cong 1.35 \text{ cm}$ , qui joue donc un rôle important dans l'absorption des micro-ondes par l'atmosphère ; en plus, dans ce domaine spectral, la différence de population des états correspondants à R(0) varie facilement avec la température au voisinage de l'ambiante, ce qui rend la réfractivité de l'air *humide* plus sensible à la température en micro-ondes que dans le

---

<sup>10</sup> dans l'Appendice A nous rappelons la définition de  $\kappa_s(\lambda_0)$ , ainsi qu'une expression commode numériquement dans le visible, et des valeurs numériques utiles dans ce domaine.

visible – mais cet effet est secondaire. La polarisabilité d'orientation de l'eau détruit, pour sa vapeur, l'indépendance de  $C$  (i.e.  $\eta/\mu$ ) par rapport à  $(T, P)$ , d'où une violation de l'hypothèse

(a)<sup>11</sup> qui se manifeste par la présence du terme  $\frac{5\,748\text{ K}}{T}$  dans la formule d'ESSEN et FROOME [10] ci-dessous, valable pour l'air humide à 24 GHz :

$$10^6 \eta \cong \frac{103,49\text{ K}}{T} \frac{P_1}{1\text{ torr}} + \frac{177,4\text{ K}}{T} \frac{P_2}{1\text{ torr}} + \frac{86,26\text{ K}}{T} \left( 1 + \frac{5\,748\text{ K}}{T} \right) \frac{P_3}{1\text{ torr}}$$

(où  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  désignent respectivement les pressions partielles de l'air pur, du dioxyde de carbone et de la vapeur d'eau) – en conséquence, l'hypothèse (a) est intenable dans le domaine des ondes radio avec l'air humide, dont la masse volumique  $\mu$  (à composition donnée) est, contrairement à  $\eta$ , quasi proportionnelle à  $(P_1 + P_2 + P_3)/T$ .

Pour  $Z'$  proche de  $90^\circ$ , l'effet ci-dessus d'accroissement de  $\Delta_\infty$  se trouve amplifié lors des très fortes inversions de température au-dessus de l'océan, quand une couche d'air froid et humide au-dessus de l'eau est surmontée d'une couche d'air chaud et sec (comme celui du désert apporté par les vents Santa Ana, ainsi nommés d'après une montagne et un canyon californiens, pouvant produire un gradient thermique vertical de  $300\text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$  sur 50 m d'épaisseur). Les effets de courbure des rais en ondes centimétriques sont alors très forts. En ondes radar  $\kappa_s(\lambda_0)$  est aussi plus variable avec la météo, d'où de fréquentes anomalies de réfraction ; celles-ci doivent avoir – à cause de la relation (3) – leurs contreparties en termes de décalage latéral. Dans ce domaine spectral, des valeurs de  $\kappa_s(\lambda_0)$  approchant 1 sont plus fréquentes, donc des angles  $\chi_{sh}$  plus importants aussi, ainsi que – d'après la relation (39) – de forts décalages  $\Delta_\infty$  pour  $Z' = 90^\circ$ .

### • En ondes radio avec l'ionisation de l'air

Bien sûr, en radioastronomie aussi les valeurs de  $\chi_s$  sont prises en compte et finement étudiées [11] ; la relation (3) permet d'en déduire celles de  $\Delta_\infty$ . En ce qui concerne l'influence de l'ionosphère, le tracé des rais pour les ondes radio a été très étudié, d'abord dans le modèle d'une couche ionosphérique à symétrie sphérique. À cause de l'importance de l'effet des électrons libres (de population  $N_e$ ) sur l'indice de réfraction à des fréquences juste supérieures à celle de coupure ionosphérique (de l'ordre de 20 MHz),  $\eta < 0$  varie en sens inverse de  $N_e$  (qui caractérise l'ionisation), car dans ce domaine  $\eta \cong -K N_e \lambda_0^2$  où  $K$  est une constante positive indépendante du plasma (donc de type B) ; dans les années 1950 on savait déjà qu'en conséquence, dans une couche ionosphérique, les rais obliques des ondes radio ont leur

---

<sup>11</sup> On ne peut résumer la loi de GLADSTONE-DALE en disant que la valeur de  $\eta$  est proportionnelle à celle de  $\mu$  du gaz considéré en  $M$  pour une longueur d'onde et à une date données : en effet, cette assertion est équivoque, et pour y remédier on précise qu'elle est vraie à  $T$  fixé – un gaz est un système thermodynamique à deux variables, par ex.  $(T, \mu)$  ! Mais la loi de Gladstone donne une seconde information : la valeur de  $\eta$  est encore proportionnelle à celle de  $\mu$  à  $P$  fixé. Donc, pour un gaz qui suit cette loi à une date donnée et à  $(M, \lambda_0)$  fixé, la fonction  $(T, P) \mapsto \eta$  est proportionnelle à la fonction  $(T, P) \mapsto \mu$ .

concavité tournée vers le haut (resp. bas) en dessus (resp. en dessous) de la surface de  $N_e$  maximal – alors que les rayons lumineux obliques du domaine optique ont toujours leur concavité tournée vers le bas sur toute l'étendue de l'atmosphère normale. Des rais critiques peuvent présenter un cercle asymptote [11, chap. 9 § 3] ; celui-ci est forcément d'altitude plus faible que celle de la surface de  $N_e$  maximal.

En ne tenant compte que de l'effet des électrons libres, la traversée oblique d'une couche ionosphérique donnerait, au niveau de l'observateur  $S$  sous celle-ci (où la valeur de  $N_e$  est  $N_{eS} \cong 0$ ) et dans le cadre d'un modèle de Terre plate avec une ionosphère stratifiée traitée par la méthode de RAYLEIGH ([3], [12, p. 359-361]), la déviation totale (*i.e.* la réfraction astronomique vue par  $S$ )

$$\chi_S \cong -\frac{\sin Z'}{\cos^2 Z'} K \lambda_0^2 \int_{\infty}^0 \frac{dN_e}{dz'} dz' = -\frac{\sin Z'}{\cos^2 Z'} K \lambda_0^2 N_{eS} = 0$$

mais un décalage total

$$\Delta_{\infty} \cong -\frac{\sin Z'}{\cos^2 Z'} K \lambda_0^2 \tau_{ec0} < 0 \quad \text{où} \quad \tau_{ec0} := \int_0^{\infty} N_e dz' \quad \text{est le } \textit{zenithal TEC (Total Electronic}$$

*Content)* de la couche ionosphérique ; ici l'hypothèse (a) est violée (car  $N_e$  ne varie pas avec  $(T, P)$  proportionnellement à  $\mu$ ) ainsi que l'hypothèse (d), car les profils<sup>12</sup> de  $N_e$  et de  $\mu$  ne sont pas proportionnels – donc, même avec les hypothèses (b) et (e),  $\Delta_{\infty}$  n'est *a priori* pas proportionnel à  $P_S$ , et  $\tau_{ec0}$  n'est pas non plus proportionnel à  $\mu_S \neq 0$  – ni à  $N_{eS} \cong 0$ .

L'approximation de la Terre plate serait, en première intention, acceptable quand la distance zénithale apparente  $Z'$  est suffisamment inférieure à  $90^\circ$ , donc on aurait  $\chi_S$  quasi nul en vertu de la formule<sup>13</sup> de SIMPSON pour  $\chi_S$ , où la réfractivité en  $S$  est  $\eta_S \cong 0$  vers 20 MHz. Ce n'est plus vrai dans un modèle à symétrie sphérique, la courbure des couches ionosphériques produisant pour  $Z'$  assez grand des valeurs de  $\chi_S$  très notables vers 20 MHz ; ceci est possible parce que l'altitude de l'ionosphère n'est plus très petite devant le rayon terrestre, et surtout car les variations de  $n$  avec l'altitude ne sont plus vraiment petites devant 1. Dans cette étude schématique où l'on considère  $\eta_S = 0$ , la relation (30) donne

$$\Delta_{\infty} = [\sin Z' - \sin(Z' + \chi_S)] r_S = -2r_S \sin(\chi_S/2) \cos(Z' + (\chi_S/2))$$

– où, compte tenu de la petitesse de  $\chi_S$ , la seconde forme est plus efficace pour des applications numériques très précises à l'échelle de  $r_S$ . On en déduit que, à  $\lambda_0$  donné (en plus du profil  $z' \mapsto \eta$  fixé et à *support borné*), quand  $r_S$  tend vers l'infini  $\chi_S$  tend (pour  $Z' \neq 0$  donné) vers zéro quasiment aussi vite que  $1/r_S$ .

De plus, des effets de réfraction dus à de forts gradients horizontaux de  $N_e$  sont bien connus des radioastronomes depuis les années 1950 ; ils correspondent à une brisure de symétrie sphérique de l'ionosphère, et sortent donc du cadre de notre étude présente, où nous allons maintenant illustrer des utilisations du théorème de BIOT.

<sup>12</sup> Nous appelons ainsi toutes les fonctions qui expriment la variation d'une grandeur locale (faisant intervenir l'atmosphère) avec  $r$  ou bien  $z' := r - r_S$ .

<sup>13</sup>  $\chi_S \cong \eta_S \tan Z'$

## 1.2. Discussion de $\left(\frac{\partial\Delta_\infty}{\partial Z'}\right)_{\lambda_0}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right)$ en utilisant le théorème de BIOT (1836)

avec lequel on voit le lien entre l'accourcissement solaire et  $\left(\frac{\partial\Delta_\infty}{\partial Z'}\right)_{\lambda_0}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right) \dots$

Adaptation à partir de [1, p. 1312] – avec la permission de © Optical Society of America – concernant

$\left(\frac{\partial\Delta_\infty}{\partial Z'}\right)_{\lambda_0}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right)$  obtenu moyennant le théorème de BIOT

Via Relation (3), we can also deduce, from properties of  $\chi_S$  in a given spherically symmetric atmosphere [20], some properties of  $\Delta_\infty$ —for example, at a fixed wavelength, its derivative with respect to  $Z'$  at  $Z' = \pi/2$  (where the effect of the Earth rotundity is fundamental, and where  $\chi_S$  is denoted by  $\chi_{Sh}$ ): from Relations (1) and (2) we deduce

$$\left(\frac{\partial\Delta_\infty}{\partial Z'}\right)_{\lambda_0}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right) = \left(\frac{\partial Z}{\partial Z'}\right)_{\lambda_0}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right) r_S \sin \chi_{Sh}. \quad (8)$$

Moreover, Biot's theorem gives a compact expression of  $\left(\frac{\partial Z}{\partial Z'}\right)_{\lambda_0}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right)$ , which depends on local properties of  $n$  at  $S$  only (see our Subsection 4.B), and which, in standard conditions and for the  $d$  line (alias D3) of helium (588 nm), is near  $5.9/(5.9 - 1)$  ([20], Subsection 7.1), while  $\chi_{Sh}$  (approximately  $34'$  for the standard atmosphere) depends on the structure of the entire atmosphere. Then, with  $r_S \cong 6371$  km, we get numerical results consistent with Fig. 5 of [4]:  $\Delta_\infty(\pi/2, 588 \text{ nm}) \cong 2.1$  km, thanks to Relation (3), and finally,

$$\left(\frac{\partial\Delta_\infty}{\partial Z'}\right)_{\lambda_0}\left(\frac{\pi}{2}, 588 \text{ nm}\right) \cong 76 \text{ km/rad} \quad (9)$$

—this slope (in other units,  $1.3 \text{ km/}^\circ \cong 22 \text{ m/}'$ ) is steep (like at the right end of the curve on Fig. 5 of [4]), and allows deducing a numerical approximation of  $\Delta_\infty(Z', 588 \text{ nm})$  for  $Z'$  near  $90^\circ$ .

Le théorème de BIOT [7, § 7.1] utilise le coefficient de réfraction de l'atmosphère  $\kappa_S(\lambda_0)$ , pris ici égal à  $1/5.9$  pour l'observateur  $S$  – voir l'Appendice A. Mais dans le domaine spectral des opérateurs radar, il est bien connu que  $\kappa_S(\lambda_0)$  vaut  $1/4$  en moyenne, au lieu d'environ  $1/6$  dans le domaine visible. Pour les ondes radar ce coefficient est aussi plus variable avec la météo, d'où de fréquentes anomalies. Ceci vient de deux effets déjà mentionnés au début du sous-paragraphe 1.1.2 : d'une part, l'importance de la polarisabilité d'orientation de l'eau ; d'autre part, la petitesse et la bien plus grande variabilité temporelle de la hauteur d'échelle de la vapeur d'eau, par rapport à celles de l'atmosphère.

Quoi qu'il en soit, en conséquence du théorème de BIOT, on a

$$\left(\frac{\partial\Delta_\infty}{\partial Z'}\right)_{\lambda_0}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right) / \left(r_S \sin \chi_{Sh}\right) = \frac{1}{1 - \kappa_S(\lambda_0)} ;$$

ce rapport est en moyenne proche de  $4/(4 - 1) \cong 1.33$  pour  $\lambda_0$  dans le domaine des ondes radar, au lieu d'environ  $6/(6 - 1) = 1.2$  pour  $\lambda_0$  dans le domaine visible.

### 1.3. Calcul de $\left(\frac{\partial^2 \Delta_\infty}{\partial Z'^2}\right)_{\lambda_0} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right)$ moyennant un nouveau théorème (2023)

avec lequel on voit le lien entre l'asymétrie du soleil couchant et  $\left(\frac{\partial^2 \Delta_\infty}{\partial Z'^2}\right)_{\lambda_0} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right) \dots$

La dérivée seconde, par rapport à  $Z'$  et à  $\lambda_0$  fixé, de  $\Delta_\infty$  exprimé par la relation (3), est donnée par l'expression

$$\frac{1}{r_S} \left(\frac{\partial^2 \Delta_\infty}{\partial Z'^2}\right)_{\lambda_0} = -n_S \sin Z' - \left[ -\left(\frac{\partial Z}{\partial Z'}\right)_{\lambda_0}^2 \sin(Z' + \chi_S) + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial Z'^2}\right)_{\lambda_0} \cos(Z' + \chi_S) \right] \quad (\mathbf{x})$$

(dont la numérotation est choisie pour faire suite à la relation (9) de la page précédente), d'où

$$\frac{1}{r_S} \left(\frac{\partial^2 \Delta_\infty}{\partial Z'^2}\right)_{\lambda_0} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right) = -n_S(\lambda_0) + \left(\frac{\partial Z}{\partial Z'}\right)_{\lambda_0}^2 \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right) \cos \chi_{Sh}(\lambda_0) + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial Z'^2}\right)_{\lambda_0} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right) \sin \chi_{Sh}(\lambda_0) \quad (\mathbf{xi})$$

– soit, en notations allégées,

$$\frac{1}{r_S} \left(\frac{\partial^2 \Delta_\infty}{\partial Z'^2}\right)_{h\lambda_0} = -n_S + \left(\frac{\partial Z}{\partial Z'}\right)_{h\lambda_0}^2 \cos \chi_{Sh} + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial Z'^2}\right)_{h\lambda_0} \sin \chi_{Sh}. \quad (\mathbf{xii})$$

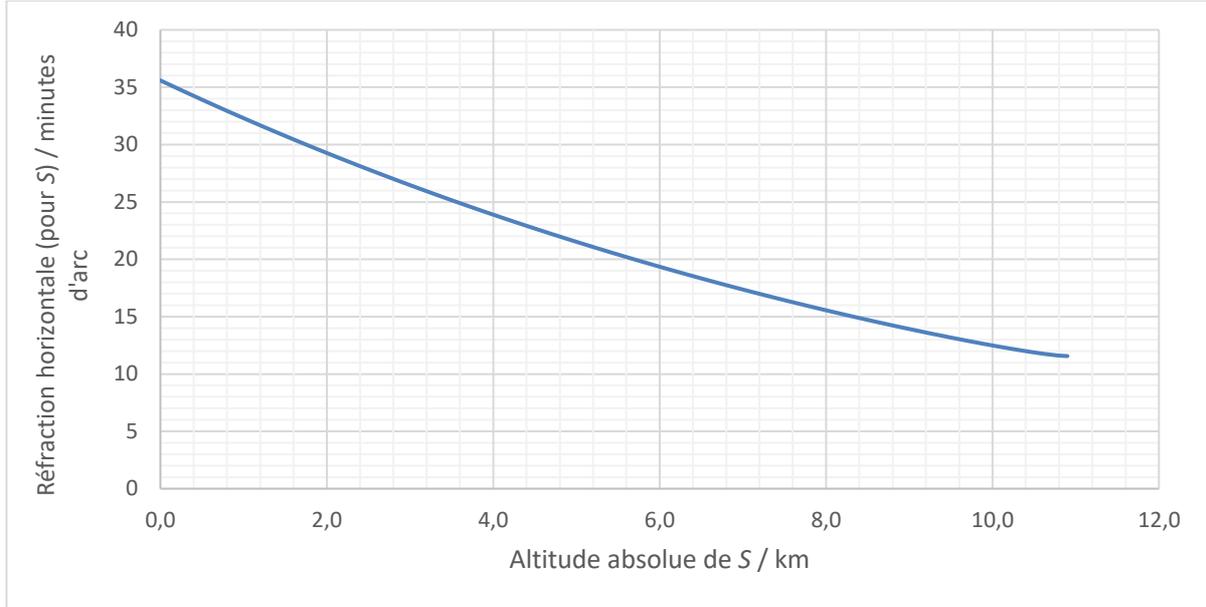
Notons que chacune des dérivées ci-dessus n'est définie que si, depuis  $S$ , on peut voir sur l'horizon astronomique la pseudo-image d'un point objet à l'infini, donc si  $\kappa_S(\lambda_0)$  est inférieur à 1. Dans ce cas, d'après le théorème de BIOT ([7, § 7.1], [13, p. 43], [14, § 3.2]),

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial Z'}\right)_{\lambda_0} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right) = \frac{1}{1 - \kappa_S(\lambda_0)} = \frac{1}{\gamma_{Sh}(\lambda_0)} \quad (\mathbf{xiii})$$

– cette dérivée est l'inverse du grandissement angulaire vertical local sur l'horizon astronomique (pour l'observateur  $S$ ) – positif aussi d'après le théorème de BIOT-SANG-MEYER-FRASER-WHITE [7, § 7.2] ; de plus, d'après le théorème publié en 2023 par [7, p. 97] et mis dans l'Appendice B,

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \psi'^2}\right)_{\lambda_0} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right) = \frac{r_S}{1 - \kappa_S(\lambda_0)} \left(\frac{\partial \chi_h}{\partial r}\right)_{\lambda_0} (r_S, \lambda_0) = -\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial Z'^2}\right)_{\lambda_0} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right) \quad (\mathbf{xiv})$$

où  $\psi$  et  $\psi'$  désignent les hauteurs (angulaires) vraie et apparente, respectivement, pour  $S$ . Cette dérivée seconde  $\left(\partial^2 \psi / \partial \psi'^2\right)_{h\lambda_0}$  s'exprime donc facilement à l'aide d'un nouveau facteur,  $\left(\partial \chi_h / \partial r\right)_{S\lambda_0}$  ; pour un observateur  $S$  au niveau de la mer, ce facteur est la pente de la tangente à l'origine de la courbe de la Figure 1.



*Figure 1 – Réfraction horizontale pour un observateur en fonction de son altitude absolue  $H$  (i.e. par rapport au niveau de la mer) – la réfraction est calculée pour le modèle d’atmosphère de type RGO ayant  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  et  $1\ 000\ \text{hPa}$  comme conditions en  $H = 0$ . La réfraction horizontale étant très sensible à la structure thermique de l’atmosphère juste au-dessus de l’observateur, à  $11\ \text{km}$  d’altitude sa valeur RGO (quasiment le tiers de sa valeur en  $H = 0$ ) doit être très voisine de la valeur réelle puisque la base de la stratosphère est quasiment isotherme.*

*[Données numériques fournies par H. LABRIJI, O. HERSCOVICI-SCHILLER, F. CASSAING]*

Notons que cette dérivée seconde est reliée au **coefficient de distorsion angulaire verticale locale sur l’horizon astronomique**,  $(\partial^2\psi'/\partial\psi'^2)_{h\ \lambda_0}$ , car il s’écrit [7, p. 97]

$$\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial\psi'^2}\right)_{h\ \lambda_0} = -\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\psi'^2}\right)_{h\ \lambda_0} / \left(\frac{\partial\psi}{\partial\psi'}\right)_{h\ \lambda_0}^3 = -r_s (1 - \kappa_s)^2 \left(\frac{\partial\chi_h}{\partial r}\right)_{s\ \lambda_0} > 0 \quad (\text{xv})$$

– et il peut lui-même être relié au **coefficient d’asymétrie** introduit en ([15, § 2.2.2], [7, p. 97]). Il dépend de tout le profil d’indice de l’atmosphère, contrairement à  $\gamma_{sh}$  qui ne dépend que de

$n_s$  et  $\left(\frac{\partial n}{\partial r}\right)(r_s, \lambda_0)$ . La grandeur  $\left(\frac{\partial\chi_h}{\partial r}\right)_{s\ \lambda_0}$  à laquelle il est relié joue un grand rôle dans la

photométrie des éclipses de Lune [16, p. 92], [17-18] et des occultations par les planètes [19] ;

c’est celle que LINK noterait  $\frac{1}{2} \frac{d\omega}{dh_0}$  [18, § 3], et SICARDY  $\frac{1}{2} \frac{d\omega}{dr}$  [19, Eq. (20)]. Ainsi,

$$\frac{1}{r_s} \left(\frac{\partial^2\Delta_{\infty}}{\partial Z'^2}\right)_{\lambda_0} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right) = -n_s(\lambda_0) + \frac{\cos\chi_{sh}(\lambda_0)}{\gamma_{sh}^2(\lambda_0)} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\psi'^2}\right)_{\lambda_0} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right) \sin\chi_{sh}(\lambda_0) \quad (\text{xvi})$$

et l'on met cela, pour préparer des calculs numériques plus précis, sous une forme utilisant  $n_s - 1 := \eta_s$  (de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-4}$ ) afin d'éviter une différence de nombres très voisins – même principe que pour l'expression (10) de [1] :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_s} \left( \frac{\partial^2 \Delta_\infty}{\partial Z'^2} \right)_{\lambda_0} \left( \frac{\pi}{2}, \lambda_0 \right) &= \frac{1}{\gamma_{Sh}^2(\lambda_0)} - 1 - \frac{2 \sin^2 \left[ \chi_{Sh}(\lambda_0)/2 \right]}{\gamma_{Sh}^2(\lambda_0)} - \eta_s(\lambda_0) \\ &\quad - r_s \frac{\sin \chi_{Sh}(\lambda_0)}{\gamma_{Sh}(\lambda_0)} \left( \frac{\partial \chi_h}{\partial r} \right)_{\lambda_0} (r_s, \lambda_0) \end{aligned} \quad (\text{xvii})$$

ou encore, en notations allégées,

$$\frac{1}{r_s} \left( \frac{\partial^2 \Delta_\infty}{\partial Z'^2} \right)_{h \lambda_0} = \frac{1}{\gamma_{Sh}^2} - 1 - \frac{2 \sin^2(\chi_{Sh}/2)}{\gamma_{Sh}^2} - \eta_s - \frac{r_s \sin \chi_{Sh}}{\gamma_{Sh}} \left( \frac{\partial \chi_h}{\partial r} \right)_{S \lambda_0}. \quad (\text{xviii})$$

**Implication dans un développement à l'ordre deux par rapport à la hauteur**

**apparente**  $\psi' := \frac{\pi}{2} - Z'$

$$\Delta_\infty \cong \Delta_\infty \left( \frac{\pi}{2}, \lambda_0 \right) + (-\psi') \left( \frac{\partial \Delta_\infty}{\partial Z'} \right)_{\lambda_0} \left( \frac{\pi}{2}, \lambda_0 \right) + \frac{\psi'^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \Delta_\infty}{\partial Z'^2} \right)_{\lambda_0} \left( \frac{\pi}{2}, \lambda_0 \right) \quad (\text{xix})$$

donne donc, en notations allégées,

$$\Delta_\infty \cong \Delta_{\infty h} - \psi' r_s \frac{\sin \chi_{Sh}}{\gamma_{Sh}} + \frac{\psi'^2}{2} r_s \left[ \frac{(2 - \kappa_s) \kappa_s - 2 \sin^2(\chi_{Sh}/2)}{\gamma_{Sh}^2} - \eta_s - \frac{r_s \sin \chi_{Sh}}{\gamma_{Sh}} \left( \frac{\partial \chi_h}{\partial r} \right)_{S \lambda_0} \right]. \quad (\text{xx})$$

Avec les valeurs usuelles de  $\kappa_s$ ,

$$\frac{1}{\gamma_{Sh}^2} - 1 \gg \left| \frac{r_s \sin \chi_{Sh}}{\gamma_{Sh}} \left( \frac{\partial \chi_h}{\partial r} \right)_{S \lambda_0} \right| \gg \eta_s \gg \frac{2 \sin^2(\chi_{Sh}/2)}{\gamma_{Sh}^2},$$

alors  $\Delta_\infty$  en fonction de  $Z'$  (comme de  $\psi'$ ) est convexe.

### Application numérique

Considérons le cas la raie à 550 nm, avec  $r_s \cong 6\,378,12$  km, et (0 °C, 1 000 hPa) au niveau de  $S$ . Rappelons que pour le modèle RGO correspondant à ces conditions de température et de pression en  $S$ , on a  $\chi_{Sh}(550 \text{ nm}) \cong 35.6'$ , d'où  $\Delta_{\infty h}(550 \text{ nm}) \cong 2.19$  km [1, Eq. (10)] et  $\kappa_s(550 \text{ nm}) \cong 1/5.36$  (obtenu par ex. en corrigeant l'expression (A3) de l'Appendice A pour passer de 588 nm à 550 nm) ; donc

$$\left( \frac{\partial Z}{\partial Z'} \right)_{\lambda_0} \left( \frac{\pi}{2}, 550 \text{ nm} \right) = \frac{1}{\gamma_{Sh}(550 \text{ nm})} \cong \frac{5.36}{5.36 - 1} \quad \text{et, avec}$$

$\eta_S \cong 2.893 \cdot 10^{-4}$ , on obtient  $\left(\frac{\partial \Delta_\infty}{\partial Z'}\right)_{\lambda_0} \left(\frac{\pi}{2}, 550 \text{ nm}\right) \cong 81.2 \text{ km / rad} \cong 1.42 \text{ km / }^\circ \cong 23.6 \text{ m / '}$ .

Sur [15, Fig. 5] (cf. reproduction ci-dessous) la mesure de la différence des positions relatives des points haut et bas de l'image du soleil couchant (par rapport aux points haut et bas du cercle pointillé respectivement) permet d'estimer, pour la hauteur angulaire vraie du centre du Soleil, la valeur du coefficient de distorsion angulaire verticale locale,  $\partial^2 \psi' / \partial \psi^2 \cong (0.24 \pm 0.08) / ^\circ$  d'après la Figure ci-dessous (extraite de [15, p. 399]), alors que d'après [15, Table 1, p. 398] il devrait valoir  $0.06 / ^\circ$  dans l'atmosphère standard (mais pas RGO) [15, p. 407]. Heureusement, ce coefficient de distorsion n'intervient que dans un terme de  $\left(\partial^2 \Delta_\infty / \partial Z'^2\right)_{h \lambda_0}$  qui n'est pas dominant.

Extrait de [15, p. 399] (licence CC BY 4.0), DOI : <https://doi.org/10.5802/crphys.122>

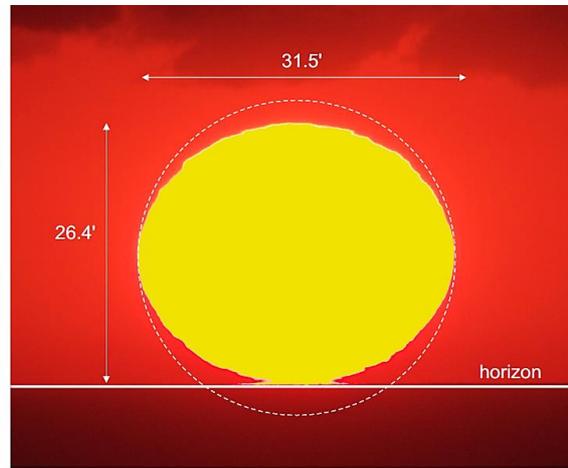


FIGURE 5. Image du Soleil couchant en contact avec l'horizon optique. Un cercle de 31,5' donne la forme géométrique du Soleil (qui est plus bas sous l'horizon). Le grandissement vertical  $\Gamma = 26,4/31,5 \approx 0,83$  (soit ici une compression) est directement relié à la réfraction. (Crédit : F. Mignard)

En utilisant la forme finale de notre relation (xv) – qui donne  $\left(\partial^2 \psi' / \partial \psi^2\right)_{h \lambda_0}$  en  $\text{rad}^{-1}$  – et où l'on injecte  $\left(\partial \chi_h / \partial r\right)_{S \lambda_0} \cong -3.43' / \text{km} \cong -0.997 \cdot 10^{-3} \text{ rad / km}$  (pour  $S$  au niveau de la mer) estimé d'après l'intégration numérique LHSC (i.e. LABRIJI, HERSCOVICI-SCHILLER, CASSAING) – voir la Figure 1 –, nous obtenons d'une part la **valeur numérique théorique du coefficient de distorsion angulaire verticale locale sur l'horizon astronomique**

$$\begin{aligned} \left(\partial^2 \psi' / \partial \psi^2\right)_{h \lambda_0} &= -\gamma_{S h}^3 \left(\partial^2 \psi / \partial \psi'^2\right)_{h \lambda_0} = -[1 - \kappa_S(\lambda_0)]^2 r_S \left(\partial \chi_h / \partial r\right)_{S \lambda_0} \\ &\cong -[1 - (1/5.36)]^2 \times 6\,378 \times (-0.997 \cdot 10^{-3}) \text{ rad}^{-1} \cong 4.21 / \text{rad} \cong 0.0735 / ^\circ, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \Delta_\infty}{\partial Z'^2}\right)_{h \lambda_0} &= \left[ \frac{(2 - \kappa_S) \kappa_S - 2 \sin^2(\chi_{S h} / 2)}{\gamma_{S h}^2} - \eta_S - \frac{r_S \sin \chi_{S h}}{\gamma_{S h}} \left(\frac{\partial \chi_h}{\partial r}\right)_{S \lambda_0} \right] r_S \\ &\cong [3\,257.6 - 0.5 - 1.8 - (-516.5)] \text{ km / rad}^2 \cong 3\,772 \text{ km / rad}^2 \cong 1.15 \text{ km / }^\circ{}^2 \cong 0.319 \text{ m / ' }^2, \end{aligned}$$

d'où 
$$\begin{aligned} \Delta_{\infty} (550 \text{ nm}) &\cong 2.1868 \text{ km} - 1.4167 \text{ km } \psi' / ^{\circ} + 0.5745 \text{ km } \psi'^2 / ^{\circ 2} \\ &\cong 2.187 \text{ km} - 24 \text{ m } \psi' / ' + 0.16 \text{ m } \psi'^2 / ' ^2. \end{aligned} \quad (\text{xxi})$$

Cette application numérique nous donne plusieurs résultats notables concernant  $\Delta_{\infty}$  au voisinage de l'horizon astronomique (voir les Figures 1 et 2) :

- le coefficient de distorsion angulaire verticale locale, dans l'atmosphère RGO avec  $0^{\circ}\text{C}$  et  $1\,000\text{ hPa}$  au niveau de la mer, est beaucoup plus proche de  $0.06/^{\circ}$  que de  $0.24/^{\circ}$  – à partir de la théorie de [7, p. 97] on a trouvé ci-dessus  $0.0735/^{\circ}$ , dont la différence modérée avec  $0.06/^{\circ}$  est cohérente avec le fait que LABRIJ, HERSCOVICI-SCHILLER et CASSAING utilisent un modèle RGO avec  $(t_s, P_s) = (0^{\circ}\text{C}, 1000\text{ hPa})$  tandis que l'article [15] utilise le modèle d'atmosphère standard avec  $(t_s, P_s) = (15^{\circ}\text{C}, 1013.25\text{ hPa})$ . Donc la valeur  $0.24/^{\circ}$ , mesurée sur la Fig. ci-dessus, correspondait vraisemblablement, non pas [15, p. 401] à un gradient thermique nettement différent de sa valeur standard au voisinage de l'observateur (sinon  $\Gamma \cong 0.83$  donné avec [15, Fig. 5] ne serait pas, au centième près, égal au grandissement standard sur l'horizon astronomique [7, p. 79] selon le théorème de BIOT), mais à  $(d^2T/dr^2)_s$  franchement non standard ;
- il y a un excellent accord numérique entre le développement à l'ordre 2 estimé à partir de résultats de l'intégration numérique LHSC (voir la Figure 2), et les 3 coefficients du trinôme en  $\psi'$  que nous avons calculé pour l'expression (xxi) à partir de nos formules théoriques (3), (8) et (xi)-(xii) ; les écarts résiduels, inférieurs à 0.9 %, peuvent être dus aux artefacts de toute intégration numérique, ainsi qu'aux défauts des méthodes de différences finies utilisées pour mesurer  $(\partial\Delta_{\infty}/\partial\psi')_{h_{\lambda_0}}$  et  $(\partial^2\Delta_{\infty}/\partial\psi'^2)_{h_{\lambda_0}}/2$  (cf. *infra*), ainsi que  $(\partial\chi_h/\partial r)_{s_{\lambda_0}}$  – qui permet de prédire la valeur de  $(\partial^2\Delta_{\infty}/\partial\psi'^2)_{h_{\lambda_0}}/2$  (cf. *supra*).

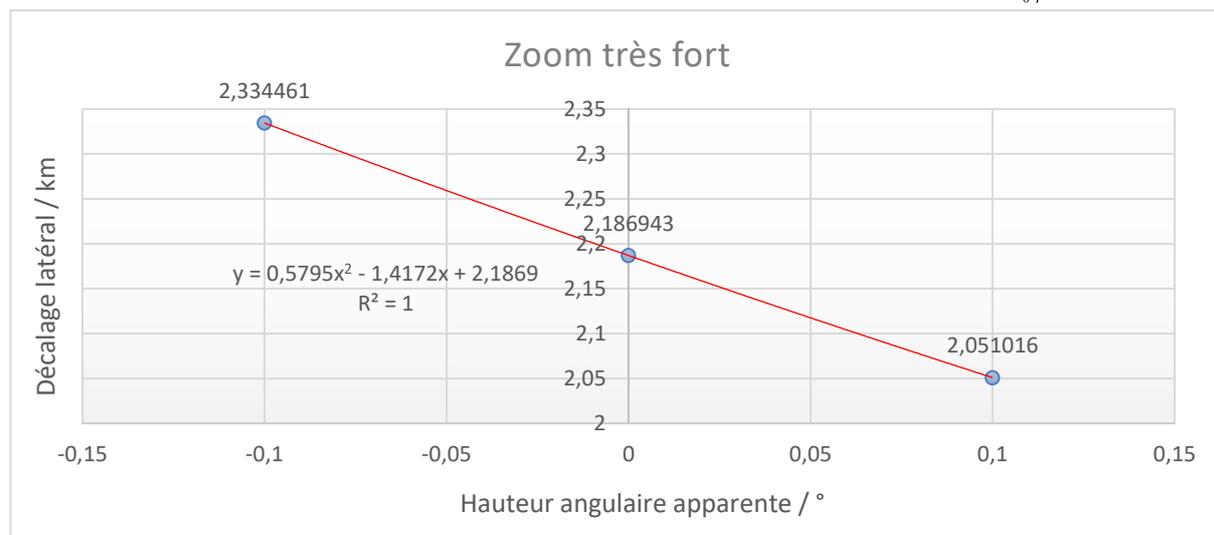


Figure 2 – Estimation du développement d'ordre 2 au voisinage de  $\psi' = 0$ , par l'interpolation (d'où  $R^2 = 1$ ) quadratique entre les 3 points les plus proches de l'origine dans les résultats de l'intégration numérique LHSC

[Données numériques fournies par H. LABRIJ, O. HERSCOVICI-SCHILLER, F. CASSAING – idem pour la Figure 3]

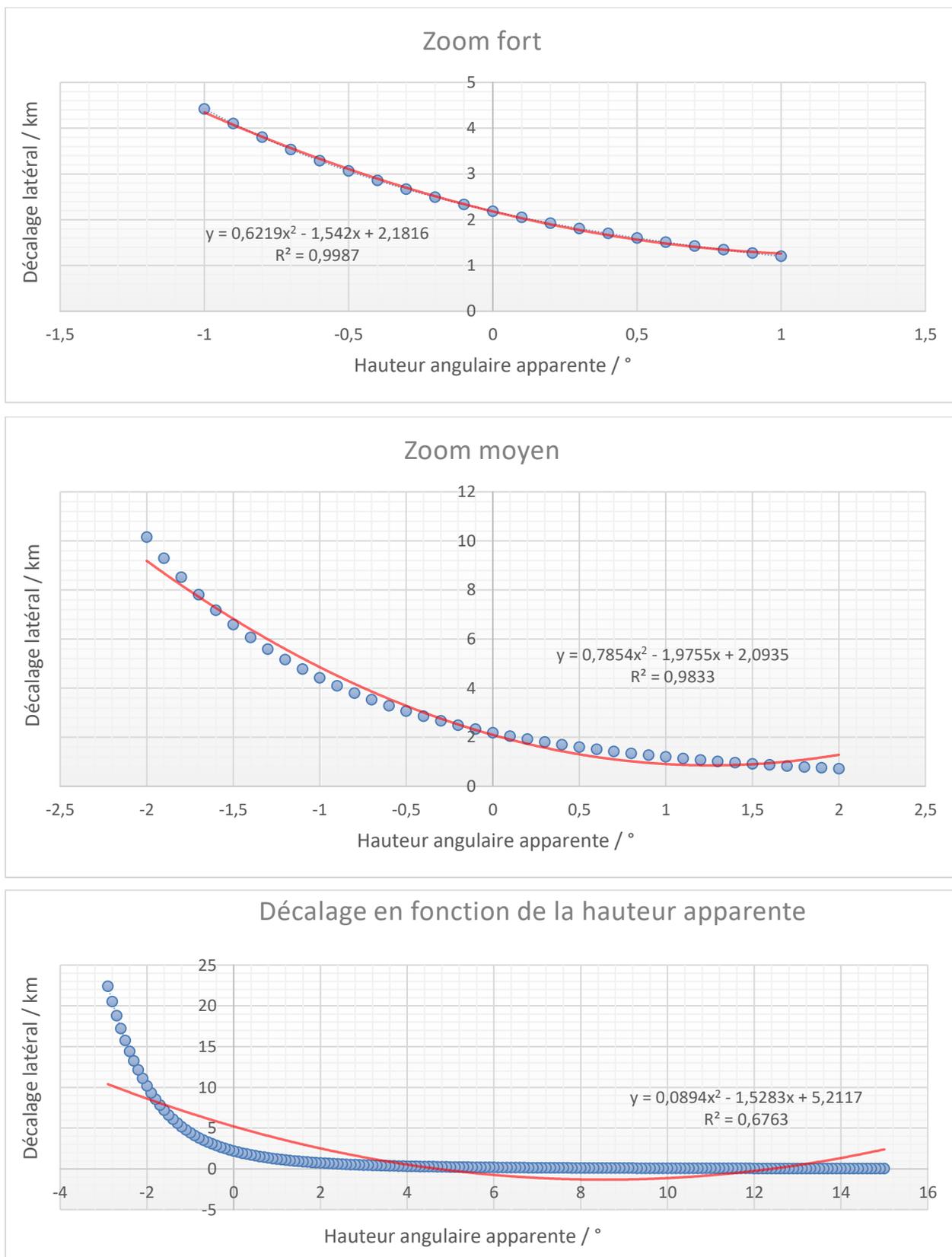


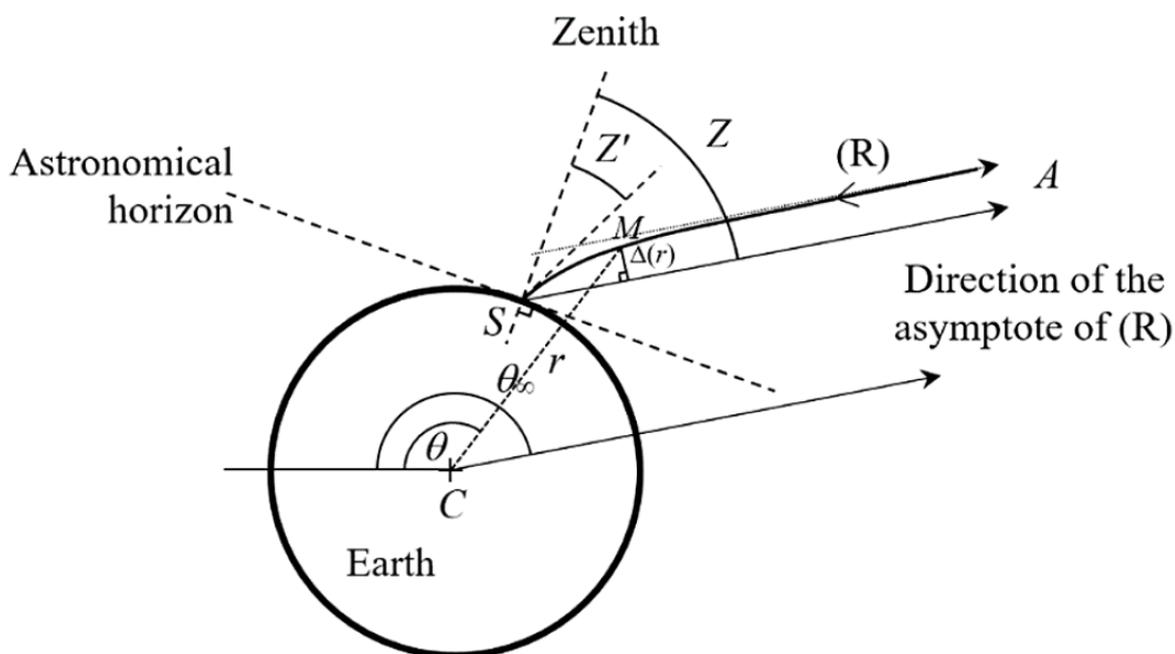
Figure 3 – Ajustement quadratique pour des zooms de moins en moins forts du graphe de  $\Delta_{\infty}$  en fonction de  $\psi'$ . L'équation de chaque courbe rouge n'est pas (xxi) car cette courbe est celle qui minimise l'écart quadratique entre elle et les points, contrairement à la courbe d'équation (xxi) quand il y a plus de 3 points – ou quand il y en a 3 mais pas très proches.

Il serait possible de continuer plus avant avec cette méthode qui consiste à chercher de nouvelles propriétés pour  $\Delta_\infty$  (moins connu que  $\chi_S$ ) en profitant plus des techniques d'étude de  $\chi_S$  – notamment celle de LAPLACE – et en faisant passer de  $\chi_S$  à  $\Delta_\infty$ , au moyen de la relation (3) de l'article [1], les résultats obtenus. Cela nous ferait parler de  $\chi_S$  plus longtemps que de  $\Delta_\infty$  ; pour éviter un tel décentrement, nous en venons maintenant à l'exploitation de notre seconde méthode, i.e. celle qui consiste à utiliser une quadrature permettant d'en déduire  $\Delta_\infty$ .

## 2. Technique de la quadrature et de son développement ; applications

### 2.1. Principe d'obtention du décalage au moyen d'une quadrature

Dans toute notre seconde partie, nous nous appuyons sur une équation différentielle des rayons lumineux (en coordonnées polaires dans un milieu à symétrie sphérique – voir [1, Fig. 2] ci-dessous).



**Fig. 2.** Useful geometric notions, for the ray (R), in the study of the lateral shift  $\Delta(r)$  of (R) with respect to the rectilinear path (SA) that it would have in the vacuum. For the angles of this figure, the positive direction is clockwise.

Cette équation peut être mise sous la forme d'une quadrature :

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = r^2 \left\{ \left[ \frac{1 + \eta(r)}{1 + \eta_S} \frac{r}{r_S \sin Z'} \right]^2 - 1 \right\} := h(r). \quad (13)$$

The sine arguments of Expression (11) can be deduced from the quadrature Eq. (13):

$$\theta_\infty - \theta = \int_r^\infty \frac{dr'}{\sqrt{h(r')}} \quad \text{and} \quad \theta_\infty - \theta_S = \int_{r_S}^\infty \frac{dr'}{\sqrt{h(r')}}. \quad (14)$$

We obtain

$$\Delta(r) = r \sin \int_r^\infty \frac{dr'}{\sqrt{h(r')}} - r_S \sin \int_{r_S}^\infty \frac{dr'}{\sqrt{h(r')}}. \quad (15)$$

*Réimpression à partir de [1, p. 1313] – avec la permission de © Optical Society of America*

**N. B. :** ces relations générales (13)-(15) ne nécessitent pas que  $\eta(\infty)$  soit nul.

## 2.2. Développement à l'ordre 2 par rapport à la réfractivité $\eta$

Nous allons exprimer l'intégrande  $1/\sqrt{h}$  (liée au profil  $h$  dont la définition se déduit de la relation (13) ci-dessus [1, p. 1313]) sous la forme d'une *série* de fonctions<sup>14</sup> – entière par rapport aux profils  $(\eta, \eta_S)$  ; rappelons que l'intérêt d'un développement *en série* n'est pas que chaque reste d'ordre  $k$  tende vers la fonction nulle quand  $(|\eta|, |\eta_S|) \rightarrow (0, 0)$  – où  $|\eta| := \sup_{r \in [r_S, \infty[} |\eta(r)|$  –, mais fondamentalement que, par conséquence immédiate de la définition des séries et sous réserve de convergence, la suite des restes d'ordre  $k$  tend vers 0 (quand  $k \rightarrow \infty$ ) à  $(\eta, \eta_S)$  fixé. Pour écrire l'intégrande comme une série de fonctions, nous commençons par mettre ici le profil  $h$  sous la forme

---

<sup>14</sup> (où – pour alléger l'écriture – nous omettons de noter, dans tout ce sous-paragraphe 2.2, la dépendance en  $\lambda_0$ ,  $T_S$ ,  $P_S$ , etc.)

$$r \mapsto h(r) = h_{0Z'}(r) + r^2 \left\{ \left[ \frac{1+\eta(r)}{1+\eta_S} \right]^2 - 1 \right\} \left( \frac{r}{r_S \sin Z'} \right)^2 \quad \text{où} \quad h_{0Z'}(r) := r^2 \left[ \left( \frac{r}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right],$$

donc

$$\frac{h^{-1/2}(r)}{h_{0Z'}^{-1/2}(r)} = \left[ 1 + G(\eta(r), \eta_S, r, Z') \right]^{-1/2} := F(r, Z')$$

avec

$$\begin{aligned} G(\eta(r), \eta_S, r, Z') &:= \frac{r^2}{h_{0Z'}(r)} \left\{ [1 + \eta(r)]^2 b_{-2}(\eta_S) - 1 \right\} \left( \frac{r}{r_S \sin Z'} \right)^2 \\ &= \left\{ [1 + \eta(r)]^2 b_{-2}(\eta_S) - 1 \right\} \left/ \left[ 1 - \left( \frac{r_S \sin Z'}{r} \right)^2 \right] \right. \quad \text{et} \quad b_{-2}(\eta_S) := (1 + \eta_S)^{-2}. \end{aligned}$$

Nous mettons  $b_{-2}(\eta_S)$  sous forme de sa série entière (qui est de type binomial<sup>15</sup> [20, p. 242])

$$b_{-2}(\eta_S) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (l+1) \eta_S^l = 1 - 2\eta_S + 3\eta_S^2 + R_3^{(b_{-2})}(\eta_S),$$

et pour laquelle nous introduisons son reste  $R_3^{(b_{-2})}(\eta_S)$  qui est d'ordre 3 ; la substitution de

$\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (l+1) \eta_S^l$  à  $b_{-2}(\eta_S)$  dans  $G(\eta(r), \eta_S, Z')$  permet d'écrire ce dernier sous forme aussi

de série entière par rapport à  $(\eta, \eta_S)$ , ce qui donne la propriété

$$\frac{h}{h_{0Z'}} - 1 = G = \frac{h_{1Z'} + h_{2Z'} + R_{3Z'}^{(h)}}{h_{0Z'}}$$

avec  $h_{1Z'}(r) = 2r^2 [\eta(r) - \eta_S] \left( \frac{r}{r_S \sin Z'} \right)^2$  qui est le terme d'ordre 1 en  $(\eta, \eta_S)$ ,

$$h_{2Z'}(r) = r^2 [\eta^2(r) - 4\eta(r)\eta_S + 3\eta_S^2] \left( \frac{r}{r_S \sin Z'} \right)^2 \quad \text{qui est celui d'ordre 2,}$$

et  $R_{3Z'}^{(h)}$  qui est le reste subséquent.

Enfin, on écrit  $(1+G)^{-1/2} := F(G)$  sous forme de série entière

$$F(G) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{l! 2^l} G^l = 1 - \frac{G}{2} + \frac{3G^2}{8} + \dots$$

binomiale aussi (donc convergente pour  $|G| < 1$ ) [20, p. 242] ; alors on obtient  $1/\sqrt{h}$  sous la forme de la série de fonctions

---

<sup>15</sup> donc la série donnant  $b_{-2}(\eta_S)$  converge pour  $|\eta_S| < 1$  [20, p. 242]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{h}} &= \frac{1}{\sqrt{h_{0Z'} + h_{1Z'} + h_{2Z'} + \dots}} = \frac{1}{h_{0Z'}^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{h_{1Z'} + h_{2Z'}}{h_{0Z'}^{3/2}} + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \frac{h_{1Z'}^2}{h_{0Z'}^{5/2}} + \dots \\ &= \frac{1}{h_{0Z'}^{1/2}} - \frac{h_{1Z'}}{2h_{0Z'}^{3/2}} + \frac{3h_{1Z'}^2 - 4h_{0Z'}h_{2Z'}}{8h_{0Z'}^{5/2}} + \dots \end{aligned}$$

Nous injectons ceci dans l'intégrale  $\theta_\infty - \theta = \int_r^\infty \frac{dr'}{\sqrt{h(r')}} := I(r)$ , ce qui donne  $I$  égal à la série<sup>16</sup>

$$I_0 + I_1 + I_2 + \dots \quad \text{avec} \quad I_0(r) := \int_r^\infty \frac{dr'}{h_{0Z'}^{1/2}(r')}, \quad I_1(r) := \int_r^\infty -\frac{h_{1Z'}(r')}{2h_{0Z'}^{3/2}(r')} dr' \quad \text{et}$$

$$I_2(r) := \int_r^\infty \frac{3h_{1Z'}^2(r') - 4h_{0Z'}(r')h_{2Z'}(r')}{8h_{0Z'}^{5/2}(r')} dr' ; \quad \text{nous posons} \quad I_S := I(r_S), \quad I_{0S} := I_0(r_S), \quad \text{etc.}$$

À ce stade, souvenons-nous que pour alléger l'écriture dans ce sous-paragraphe, nous omettons de noter la dépendance de  $\Delta$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ , etc., en  $\lambda_0$  et  $T_S, P_S, \dots$  (où les points de suspension dans les variables rappellent que, même en adoptant les hypothèses (a)-(e), ces intégrales varient par principe avec d'autres variables thermodynamiques atmosphériques que  $T_S$  et  $P_S$  qui sont pris en  $S$  seulement – il y a notamment les variables caractérisant toute la structure thermodynamique de l'atmosphère, qui n'est pas forcément celle d'un modèle de type RGO.

Le changement de variable tel que  $r' := \frac{r_S \sin Z'}{\sin \beta'}$  donne

$$I_0(r) = \int_{\arcsin \frac{r_S \sin Z'}{r}}^0 \left[ \left( \frac{1}{\sin \beta'} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \left( -\frac{\cos \beta'}{\sin \beta'} \right) d\beta' = \int_{\arcsin \frac{r_S \sin Z'}{r}}^0 -d\beta' = \arcsin \frac{r_S \sin Z'}{r} \quad \text{donc} \quad I_{0S} = Z',$$

puis

---

<sup>16</sup> dont la convergence est, comme nous allons le voir, justifiée pour  $\sin Z'$  assez petit – i.e. tel que  $\sup_{r' \in [r, \infty[} |G(\eta(r'), \eta_S, r', Z')| := M(Z') < 1$ . Dans ce cas en effet, la série donnant  $F(G(\eta(r'), \eta_S, r', Z'))$  converge normalement [20, p. 211-213], et aussi celle donnant  $I$ , car

$$\sup_{r' \in [r, \infty[} \left| \frac{(2l-1)!!}{l! 2^l} G(\eta(r'), \eta_S, r', Z')^l \right| = \frac{(2l-1)!!}{l! 2^l} M(Z')^l \sim_\infty \frac{M(Z')^l}{\sqrt{\pi l}}$$

(où l'équivalent est obtenu grâce à la formule de STIRLING – [22] p. 2868). On voit en plus que pour la série  $I_0 + I_1 + I_2 + \dots$  la convergence n'est plus assurée pour une observation trop proche de l'horizon astronomique, i.e. quand  $Z'$  est trop proche de  $90^\circ$ , car dans ce cas  $M(Z') \geq 1$ . Nous n'avons hélas pas d'expression simple de  $M(Z')$  pour une atmosphère polytropique ou isotherme, donc nous ne pouvons préciser littéralement le domaine de  $Z'$  où  $M(Z') < 1$ . On rencontre une difficulté similaire dans l'étude de  $\chi_{Sh}$  – à ceci près qu'en amont des approximations classiques concernant un développement en série entière de  $\chi_{Sh}$  par rapport à la variable  $\tan Z'$ , celui-ci converge pour  $|\tan Z'| < 1$ .

$$\begin{aligned}
I_1(r) &= \int_r^\infty -[\eta(r') - \eta_S] \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-3/2} \frac{dr'}{r'} \\
&= \eta_S \int_{\arcsin \frac{r_S \sin Z'}{r}}^0 -\frac{d\beta'}{\cos^2 \beta'} - \int_r^\infty \eta(r') \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-3/2} \frac{dr'}{r'} \\
&= \eta_S \tan \left( \arcsin \frac{r_S \sin Z'}{r} \right) - \int_r^\infty \eta(r') \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-3/2} \frac{dr'}{r'}
\end{aligned}$$

donc  $I_{1S} = \eta_S \tan Z' - \int_{r_S}^\infty \eta(r') \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-3/2} \frac{dr'}{r'}$ ,

et ensuite

$$I_2(r) = \int_r^\infty \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \left\{ 3[\eta(r') - \eta_S]^2 \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right] [\eta^2(r') - 4\eta(r')\eta_S + 3\eta_S^2] \right\} \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-5/2} \frac{dr'}{2r'} \quad \text{(xxii)}$$

que nous mettons (voir le détail des calculs dans l'Appendice C) sous la forme

$$\begin{aligned}
I_2(r) &= \int_r^\infty \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \eta^2(r') \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'} \\
&\quad - \eta_S \int_r^\infty \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \eta(r') \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 + 2 \right] \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'} \\
&\quad + \frac{\eta_S^2}{2} \left[ \frac{r_S \sin Z'}{\sqrt{r^2 - (r_S \sin Z')^2}} \right]^3 \quad \text{(xxiii)}
\end{aligned}$$

dont on déduit

$$\begin{aligned}
I_{2S} &= \int_{r_S}^\infty \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \eta^2(r') \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'} \\
&\quad - \eta_S \int_{r_S}^\infty \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \eta(r') \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 + 2 \right] \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'} + \frac{\eta_S^2}{2} \tan^3 Z'.
\end{aligned}$$

Finalement, on substitue à  $I$  (resp.  $I_S$ ) la série  $I_0 + I_1 + I_2 + \dots$  (resp.  $I_{0S} + I_{1S} + I_{2S} + \dots$ ) dans celle donnant  $\sin I(r)$  (resp.  $\sin I_S$ ) qui intervient dans  $\Delta(r)$ :

$$\begin{aligned}
\Delta(r) &= r \sin I(r, \eta(r), \eta_s) - r_s \sin I_s(\eta(r), \eta_s) = r \sin [I_0(r) + I_1(r) + I_2(r) + \dots] - r_s \sin (I_{0s} + I_{1s} + I_{2s} + \dots) \\
&= r \left\{ \sin [I_0(r)] + [I_1(r) + I_2(r)] \cos [I_0(r)] - \frac{I_1^2(r)}{2} \sin [I_0(r)] \right\} \\
&\quad - r_s \left[ \sin I_{0s} + (I_{1s} + I_{2s}) \cos I_{0s} - \frac{I_{1s}^2}{2} \sin I_{0s} \right] + \dots
\end{aligned}$$

Cela nous donne, au moyen du reste  $R_3^{(\Delta)}(r)$  d'ordre 3 de cette série, l'expression du profil  $\Delta$  sous la forme  $\Delta = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + R_3^{(\Delta)}$ , où

- le profil d'ordre zéro,

$$r \mapsto \Delta_0(r) = r \sin [I_0(r)] - r_s \sin I_{0s} = r \sin \left( \arcsin \frac{r_s \sin Z'}{r} \right) - r_s \sin Z' = 0,$$

correspond au cas où la lumière se propage dans un milieu homogène ou dans le vide ;

- celui d'ordre 1 est  $r \mapsto \Delta_1(r)$  tel que

$$\begin{aligned}
\Delta_1(r) &= r I_1(r) \cos [I_0(r)] - r_s I_{1s} \cos I_{0s} \\
&= r \left\{ \eta_s \tan \left( \arcsin \frac{r_s \sin Z'}{r} \right) - \int_r^\infty \eta(r') \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 \left[ \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-3/2} \frac{dr'}{r'} \right\} \cos \left( \arcsin \frac{r_s \sin Z'}{r} \right) \\
&\quad - r_s \left\{ \eta_s \tan Z' - \int_{r_s}^\infty \eta(r') \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 \left[ \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-3/2} \frac{dr'}{r'} \right\} \cos Z',
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
\Delta_1(r) &= \frac{r_s \cos Z'}{\sin^2 Z'} \int_{r_s}^\infty \eta(r') \left( \frac{r'}{r_s} \right)^2 \left[ \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-3/2} \frac{dr'}{r'} \\
&\quad - \frac{\sqrt{r^2 - (r_s \sin Z')^2}}{\sin^2 Z'} \int_r^\infty \eta(r') \left( \frac{r'}{r_s} \right)^2 \left[ \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-3/2} \frac{dr'}{r'}
\end{aligned} \tag{xxiv}$$

donné par [1, Eq. (23)], où les termes en  $\eta_s$  se sont éliminés parce qu'une discontinuité de  $\eta$  en  $r_s$  produit un point anguleux sur le rayon en  $S$  mais pas de décalage en  $S$  lui-même – et sans changer le paramètre d'impact du rayon ni donc son décalage, la variation de  $\eta_s$  à l'ordre 1 (sans variation des  $\eta(r)$  tous fixés sur tout  $]r_s, \infty[$ ) entraîne une variation de  $\sin Z'$  à l'ordre 1, mais inaperçue dans les intégrales de l'expression finale (xxiv) de  $\Delta_1(r)$  car elles contiennent  $\eta(r')$  qui est déjà d'ordre 1 ;

- enfin celui d'ordre 2 est tel que

$$\Delta_2(r) = r \left\{ I_2(r) \cos [I_0(r)] - \frac{I_1^2(r)}{2} \sin [I_0(r)] \right\} - r_s \left( I_{2s} \cos I_{0s} - \frac{I_{1s}^2}{2} \sin I_{0s} \right) \tag{xxv}$$

qui s'écrit (voir le détail des calculs dans l'Appendice C),

$$\begin{aligned}
\Delta_2(r) = & \sqrt{r^2 - (r_S \sin Z')^2} \int_r^\infty \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \eta^2(r') \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'} \\
& - (r_S \cos Z') \int_{r_S}^\infty \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \eta^2(r') \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'} \\
& - \eta_S \sqrt{r^2 - (r_S \sin Z')^2} \int_r^\infty \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \eta(r') \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 + 2 \right] \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'} \\
& + (\eta_S r_S \cos Z') \int_{r_S}^\infty \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \eta(r') \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 + 2 \right] \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'} + \frac{\eta_S^2 r_S}{2} \left[ \frac{r_S^2}{r^2 - (r_S \sin Z')^2} - \frac{1}{\cos^2 Z'} \right] \sin^3 Z' \\
& + \frac{r_S \sin Z'}{2} \left\{ \eta_S \left[ (\tan Z') + \frac{r_S \sin Z'}{\sqrt{r^2 - (r_S \sin Z')^2}} \right] - \int_{r_S}^r \eta(r') \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-3/2} \frac{dr'}{r'} - 2 \int_r^\infty \eta(r') \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-3/2} \frac{dr'}{r'} \right\} \times \\
& \left\{ \eta_S \left[ (\tan Z') - \frac{r_S \sin Z'}{\sqrt{r^2 - (r_S \sin Z')^2}} \right] - \int_{r_S}^r \eta(r') \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-3/2} \frac{dr'}{r'} \right\}.
\end{aligned}$$

(xxvi)

Les explications sont plus courtes si l'on se limite à l'ordre 1, qui donne facilement  $\Delta_1(\infty)$  qu'on déduit de l'expression (xxiv) ; en supposant, pour  $r$  au voisinage de l'infini,  $\eta$  dominé par  $1/r^m$  avec  $m > 0$  (ce qui est bien le cas des modèles assez réalistes), on trouve que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_1(r)$  existe et s'écrit sous la forme [1, p. 1314]

$$\begin{aligned}
\Delta_{1\infty} := \Delta_1(\infty) &= r_S (\cos Z') \int_0^\infty \left( \frac{r_S + z'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \left[ \left( \frac{r_S + z'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-3/2} \frac{\eta}{r_S + z'} dz' \\
&= (\cos Z') (\sin Z') \int_0^\infty \left( 1 + \frac{z'}{r_S} \right) \left[ \left( 1 + \frac{z'}{r_S} \right)^2 - \sin^2 Z' \right]^{-3/2} \eta dz'.
\end{aligned} \tag{25}$$

Adaptation de [1, p. 1314] – avec la permission de © Optical Society of America

Moyennant les hypothèses (a) et (d), il se produit pour  $\Delta_{1\infty}$  une séparation du rôle de  $\lambda_0$ , via le résultat

$$\Delta_{1\infty}(Z', T_S, P_S, \dots, \lambda_0) = \Gamma_1(Z', T_S, P_S, \dots) \eta(T_S, P_S, \lambda_0) = \Gamma_1(Z', T_S, P_S, \dots) \mu(T_S, P_S) C(\lambda_0).$$

La *complexité* de  $\Gamma_1$ , due entre autres aux points de suspension traduisant l'influence des multiples variables décrivant la structure de l'atmosphère, est *réduite si l'on se limite à un type donné de profils*  $r \mapsto g(r)$  et  $r \mapsto T(r)$  – ce dernier étant fixé par  $T_S$  (comme par ex. dans l'article [2] où les modèles d'atmosphère considérés sont de type RGO à gradient thermique –  $\sigma$  imposé). On en déduit

$$\Delta_{1\infty} = \Gamma_1(Z', T_S) \eta_S(\lambda_0)$$

en rajoutant les hypothèses (b)-(c), car, compte tenu de celles-ci, l'équation différentielle régissant le profil de pression  $P$  s'écrit

$$\frac{dP}{dz'} = -\frac{M_a g}{RT} P ; \quad (\text{xxvii})$$

elle est linéaire, donc multiplier  $P_S$  par  $\zeta$ , à profil de  $T$  et  $M_a g$  fixés, produit une multiplication, par ce même facteur  $\zeta$ , des profils  $r \mapsto P(r)$ ,  $r \mapsto \mu(r)$ , et donc aussi de  $r \mapsto \eta(r)$  ainsi que de  $\eta_S(\lambda_0)$  et finalement de  $\Delta_{1\infty}$  – cf. *supra*, [1, Eq. (25)]. Dans toutes nos discussions ultérieures des résultats de l'article [2], notamment pour la fin du présent sous-paragraphe et pour le suivant, nous nous restreignons à un type de profils (par ex., RGO avec  $\sigma$  fixé – donc un indice polytropicque  $j$  imposé), et nous bénéficions ainsi d'une réduction du nombre de variables.

Concernant l'intégrande de l'expression (25), on rajoute une **approximation classique** dans l'étude analytique de la réfraction :

*Réimpression à partir de [1, p. 1314] – avec la permission de © Optical Society of America*

Then, taking into account the smallness of the effective height of the atmosphere with respect to  $r_S$ , we develop the integrand at order 1 in  $z'/r_S$ :

$$\Delta_\infty \cong \frac{(\cos Z') (\sin Z')}{\cos^3 Z'} \int_0^\infty \left[ 1 + \left( 1 - \frac{3}{\cos^2 Z'} \right) \frac{z'}{r_S} \right] \eta \, dz'. \quad (26)$$

An integration by parts involves the derivative  $\eta'$  of  $\eta$  and gives

$$\Delta_\infty = \frac{\sin Z'}{\cos^2 Z'} \int_0^\infty \left[ z' + \left( 1 - \frac{3}{\cos^2 Z'} \right) \frac{z'^2}{2r_S} \right] (-\eta') \, dz'. \quad (27)$$

By conventionally introducing ([20], Subsection 5.2.1) the characteristic height  $H_{pS}$ , which is the  $p$ -th root of the reduced moment of order  $p$  of  $-\eta'$  above  $S$ , and is given (for  $p \geq 1$ ) by

$$\begin{aligned} \eta_S H_{pS}^p &:= - \int_0^\infty z'^p \eta' \, dz' = \int_0^{\eta_S} z'^p \, d\eta \\ &= \int_0^\infty p z'^{p-1} \eta \, dz', \end{aligned} \quad (28)$$

the final approximate result is obtained:

$$\Delta_\infty = \eta_S \frac{\tan Z'}{\cos Z'} \left[ H_{1S} - \left( \frac{3}{\cos^2 Z'} - 1 \right) \frac{H_{2S}^2}{2r_S} \right]. \quad (29)$$

It agrees with Expression (50) of Labrijij *et al.* [4]: indeed, for  $p = 2$  the last expression of Eq. (28) shows that the height  $H_{BS}$  of the barycenter of an entire column of atmosphere above  $S$  is involved in

$$\begin{aligned} \eta_S H_{2S}^2 &= \int_0^\infty 2 z' \eta \, dz' \\ &= 2 H_{BS} \int_0^\infty \eta \, dz' = 2 H_{BS} \eta_S H_{1S}. \end{aligned} \quad (30)$$

et l'on en déduit

$$\Gamma_1(Z', T_S) \cong \frac{\tan Z'}{\cos Z'} H_{1S}(T_S) \left[ 1 - \left( \frac{3}{\cos^2 Z'} - 1 \right) \frac{H_{BS}(T_S)}{r_S} \right];$$

ainsi, l'approximation  $\Delta_{1\infty} = \eta_S \Gamma_1$ , d'ordre 1 en  $\eta$ , se décompose sous la forme  $\Delta_{1\infty} = (1 + \delta_{1\infty}) \Delta_{\infty}^R$  où  $\Delta_{\infty}^R = \eta_S H_{1S} (\tan Z') / \cos Z'$ , lui aussi d'ordre 1 en  $\eta$  (et non pas d'ordre 0), est le terme principal – dû à RAYLEIGH [3] – de  $\Delta_{\infty}$  et  $\Delta_{1\infty}$ , et

$$\delta_{1\infty} = \left( 1 - \frac{3}{\cos^2 Z'} \right) \frac{H_{BS}}{r_S} < 0$$

est sa petite correction relative LHSCD (i.e. LHSC et DETTWILLER) liée à la rotondité de la Terre [1,2].

Bien sûr, l'intérêt du physicien pour ces développements n'est pas tant dans la convergence des séries (que nous avons justifiée dans la note 16) que dans l'espoir que, sauf pour  $Z'$  trop proche de  $90^\circ$ , le profil  $\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2$  soit déjà, compte tenu de la petitesse de  $|\eta|$  et  $|\eta_S|$ , une bonne approximation de  $\Delta$ , i.e. que  $R_3^{(\Delta)}$  soit négligeable.

### 2.3. Discussion détaillée du mécanisme de la variation de $\Delta_{\infty}(Z', \lambda_0)$ en fonction des paramètres thermodynamiques RGO au niveau de l'observateur

Dans tout ce paragraphe, nous n'étudions pas la variation du décalage en fonction du type de modèles d'atmosphère (RGO, ou standard, etc.) ni de la composition de l'air ou de  $(R, M_{aS}, \gamma, g_S, \sigma, r_S, H_t, H_S)$ ; ce dernier constitue donc, par convention, un octuplet de paramètres (invariable, ainsi que la composition), et l'indice polytropique  $j$ , qui se déduit de ces paramètres, est invariable aussi. Pour le présent sous-paragraphe, il est important de préciser que nous considérons  $T_S$ ,  $P_S$ ,  $Z'$  et  $\lambda_0$  comme des variables – donc  $T_0 = T_S + \sigma H_S$  et  $\eta_S(T_S, P_S, \lambda_0)$  sont *a priori* variables aussi.

*Adaptation à partir de [1, p. 1315] – avec la permission de © Optical Society of America*

the analytical expression of  $H_{BS}$  may be derived (assuming a well-mixed atmosphere obeying the Gladstone-Dale rule [20], Subsection 4.1) from two of the three moments calculated in Appendix B of Labriji *et al.* [4], who assumed also the uniformity of the norm of the gravity field and the perfect gas law. Then, these three moments being defined with the *normalized* density profile (which is independent of the atmospheric pressure  $P_S$  at  $S$ ) for a given temperature profile, they yield (with the standard temperature  $15^\circ\text{C}$  at  $S$ )  $H_{1S} \cong 8.43$  km and, with the standard tropospheric height (above  $S$ ) and lapse rate (11 km and  $-6.5^\circ\text{C}/\text{km}$ ),  $H_{BS} \cong 7.31$  km and  $H_{2S} \cong 11.1$  km.

With these values, and with  $\eta_S \cong 2,8 \cdot 10^{-4}$  under standard conditions for the  $d$  line, Eq. (29) gives

$$\Delta_\infty \cong 2.34 \text{ m} \times \left[ 1 - 0.0011 \left( \frac{3}{\cos^2 Z'} - 1 \right) \right] \frac{\tan Z'}{\cos Z'}, \quad (31)$$

with an error (with respect to the Runge-Kutta integration) smaller than 0.1 m for  $Z' \cong 70^\circ$  ([4], Fig. 13), where  $\Delta_\infty \cong 18.2$  m. Under the assumptions above, the prefactor (2.34 m at  $P_S = 1$  atm for the  $d$  line) is independent of  $T_S$  and proportional to  $P_S$ ; here, these parameters are separable in  $\Delta_\infty$ —but this approximate result will no longer be valid in the next subsection.

From the formulae of [4], Appendix B, we have deduced a 13% increase of  $H_{BS}$  when the temperature at  $S$  varies from  $15^\circ\text{C}$  to  $50^\circ\text{C}$ , and verified that it explains a great part of the slight ( $<1\%$ ) decrease of  $\Delta_\infty$  versus  $T_S$ , shown by [4], Fig. 7. However, the slight departure from proportionality between  $\Delta_\infty$  and  $P_S$ , shown by [4], Fig. 6, cannot be explained by the expressions of the moments given by [4], Appendix B: they are independent of  $P_S$ .

Nous nous attaquons ici à l'étude des deux petits résidus inexplicés, mentionnés dans la partie surlignée de l'extrait de [1, p. 1315] reproduit ci-dessus, et concernant, d'un côté, la non proportionnalité entre  $\Delta_\infty$  et  $P_S$ , et de l'autre, la petite partie, inexplicée, de la variation de  $\Delta_\infty$  avec  $T_S$ . Pour la bonne compréhension de cette discussion fine, il faut garder présent à l'esprit le fait que la relation (25) de [1, p. 1314] (que nous avons montrée trois pages plus haut) exprime de manière *rigoureuse* le développement de  $\Delta_\infty$  à l'ordre 1 par rapport au profil  $r \mapsto \eta(r)$ , alors que la formule LHSCD ((50) de [2], ou (29) de [1]) qui en découle fait intervenir, en plus, une **approximation classique** dans l'étude analytique de la réfraction : celle qui permet de passer de la relation (25) à la relation (26) de [1] (montrée deux pages plus haut), et qui introduit plusieurs hauteurs caractéristiques ; ainsi, nous disons que la formule LHSCD est une expression d'ordre 1 *approximatif* (en  $\eta$ ). Nous transposerons cette distinction à l'ordre 2 aussi.

### 2.3.1. Influence de la pression $P_S$

Dans l'article [2], la Fig. 6 reproduite plus loin teste (à  $Z'$  fixé) la linéarité de  $\Delta_\infty$  par rapport à  $P_S$ , et fait constater qu'elle n'est pas parfaite : il y a, pour  $\zeta - 1 = 0.03$  à  $0^\circ\text{C}$  et  $Z' = 85^\circ$ , un écart de variations relatives d'environ  $9.2 \cdot 10^{-4}$  entre celles de  $P_S$  et de  $\Delta_\infty$  compte tenu des hypothèses du calcul numérique de [2]. Mais en fait, compte tenu de l'hypothèses (a) ainsi que de la linéarité (due aux hypothèses (b)-(c), et déjà soulignée à la fin du sous-paragraphe 2.2) de l'équation différentielle (xxvii) régissant le profil  $r \mapsto P(r)$ , c'est plus fondamentalement la linéarité de  $\Delta_\infty$  par rapport au profil  $r \mapsto \eta(r)$  qui est testée négativement par [2, Fig. 6]. De surcroît, l'adoption d'hypothèses plus fines nous montrera (cf. *infra* dans ce sous-paragraphe) que, toujours pour  $0^\circ\text{C}$  et  $\zeta - 1 = 0.03$  (i.e. **pour l'abscisse 1 030 hPa**) **il faut ajouter**  $1.79 \cdot 10^{-5}$  **à toutes les ordonnées de** [2, Fig. 6], **indépendamment de**  $Z'$  (et donc même si  $Z'$  tend vers 0) ; **cela n'est notable que pour**  $Z' < 45^\circ$ .

En outre, on trouve qu'avec un profil de  $T$  fixé, le terme correctif relatif  $\delta_{1\infty}$  (qui requiert les hypothèses (a)-(e), et où  $H_{BS}$  défini par (ii) représente physiquement l'altitude, par rapport à  $S$ , du centre d'inertie de toute colonne d'air élémentaire basée en  $S$  et montant radialement jusqu'à l'infini), grâce aux hypothèses (a)-(c), est invariant par multiplication de  $P_S$  par  $\zeta$ , à profil de  $T$  et  $M_a g$  fixés – comme on le voit en utilisant la multiplicativité ci-dessus et l'expression (i) – donc la valeur approchée  $\Delta_{1\infty}$  (de  $\Delta_\infty$ ) donnée par [1, Eq. (29)] et [2, Eq. (50)] se laisse multiplier par  $\zeta$  ; en effet, le terme principal (i.e.  $\Delta_\infty^R$ ) de  $\Delta_\infty$  et  $\Delta_{1\infty}$  s'avère proportionnel à  $P_S$  et dépendant de  $\lambda_0$  (mais pas de  $T_S$ ) puisqu'il s'écrit

$$\Delta_\infty^R(Z', T_S, P_S, \lambda_0) = \eta_S(T_S, P_S, \lambda_0) H_{1S}(T_S) \frac{\tan Z'}{\cos Z'} = \frac{C_S(\lambda_0)}{g_S} \frac{\sin Z'}{\cos^2 Z'} P_S. \quad (\text{xxviii})$$

Cette écriture du terme principal  $\Delta_\infty^R$  requiert les hypothèses (a)-(b) et (d)-(e), mais pas celle du gaz parfait (i.e. idéal) en  $S$  – agréable coïncidence, car au voisinage des conditions normales, les écarts à cette idéalité (c) sont un ordre de grandeur au-dessus des écarts à la loi de GLADSTONE-DALE (a). Nous verrons plus en détail, au début du paragraphe E4 de l'Appendice E, tout l'intérêt de cet heureux hasard.

Cette discordance (entre les résultats des calculs numériques et ceux des expressions (29) de [1] et (50) de [2]) quant à la linéarité par rapport à  $P_S$ , vient essentiellement des approximations, d'ordre 1 en  $\eta$ , faites pour obtenir ces expressions (les erreurs d'arrondi de l'intégration numérique donneraient des courbes beaucoup plus irrégulières). Ici, il faut bien noter que l'expression générale [1, Eqs. (13)-(15)] du décalage montre qu'il est effectivement non-linéaire en  $\eta$ , même s'il est nul pour le profil  $\eta = 0$ . Plus précisément, nous verrons dans ce sous-paragraphe que la majeure partie de la non-linéarité est approximée par la correction d'ordre 2 en  $\eta$ , que l'on obtient en prenant la limite (notée  $\Delta_{2\infty}$ ), pour  $r$  tendant vers l'infini, de notre expression de  $\Delta_2(r)$  (donnée à la fin du sous-paragraphe 2.2) :

$$\begin{aligned}
\Delta_{2\infty} = & (\eta_S r_S \cos Z') \int_{r_S}^{\infty} \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \eta(r') \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 + 2 \right] \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'} \\
& - (r_S \cos Z') \int_{r_S}^{\infty} \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \eta^2(r') \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'} - \frac{\eta_S^2 r_S \sin^3 Z'}{2 \cos^2 Z'} \\
& + \frac{r_S \sin Z'}{2} \left\{ (\eta_S \tan Z') - \int_{r_S}^{\infty} \eta(r') \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-3/2} \frac{dr'}{r'} \right\}^2
\end{aligned}
\tag{xxix}$$

– où, pour alléger l'écriture, nous avons remplacé  $\eta(r', T, P, \lambda_0)$ , etc., par  $\eta(r')$ , etc. Nous voyons aussi (cf. Appendice C) que les termes en  $\eta_S^2$  s'éliminent comme attendu (car pour le profil  $r \mapsto \eta(r)$  tel que  $\eta(r) = 0 \quad \forall r \in ]r_S, \infty[$  on sait que  $\Delta(r) = 0 \quad \forall r \in ]r_S, \infty[$  rigoureusement, même si  $\eta_S := \eta(r_S) \neq 0$ ) ; il vient

$$\begin{aligned}
\Delta_{2\infty} = & (\eta_S r_S \cos Z') \int_{r_S}^{\infty} \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \eta(r') \left[ (1 - \tan^2 Z') \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 + 1 + \frac{1}{\cos^2 Z'} \right] \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'} \\
& - (r_S \cos Z') \int_{r_S}^{\infty} \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \eta^2(r') \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'} \\
& + \frac{r_S \sin Z'}{2} \left\{ \int_{r_S}^{\infty} \eta(r') \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 \left[ \left( \frac{r'}{r_S \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-3/2} \frac{dr'}{r'} \right\}^2
\end{aligned}
\tag{xxx}$$

en supposant, comme avec  $\Delta_{1\infty}$ , que pour  $r$  au voisinage de l'infini  $\eta$  est dominé par  $1/r^m$  avec  $m > 0$ . À cause de  $\Delta_2$  notamment, le facteur  $\zeta$  ne multiplie pas le profil  $r \mapsto \Delta(r)$ . Dans le cadre de l'hypothèse (a), avec une longueur d'onde  $\lambda_0$  (dans le vide) et une composition données, les variations relatives  $\Delta\eta_S/\eta_S$  et  $\Delta\mu_S/\mu_S$  sont égales, et avec (c) en plus on a  $\Delta\mu_S/\mu_S = \Delta P_S/P_S$  à  $T_S$  fixé ; mais dans la réalité, les violations des hypothèses (a) et (c) font que, dans le visible et pour  $\Delta P_S = 30$  hPa à  $0^\circ\text{C}$ , on a  $\frac{\Delta\eta_S}{\eta_S} \cong \frac{\Delta\mu_S}{\mu_S} + 1.5 \cdot 10^{-6} \cong \frac{\Delta P_S}{P_S} + 1.79 \cdot 10^{-5}$  – cf. le paragraphe E3 de l'Appendice E.

Vu l'intérêt de  $\Delta_{2\infty}$  pour analyser la non-linéarité de  $\Delta_\infty$  par rapport à  $P_S$ , nous cherchons à le connaître plus complètement. À cette fin nous notons que l'on peut encore utiliser l'approximation classique [1, p. 1314], déjà rapportée à la fin du sous-paragraphe 2.2, mais maintenant pour exprimer  $\Delta_{2\infty}$ . Dans ce but, commençons par le mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
\Delta_{2\infty} = & (\cos Z')(\sin Z') \eta_S \int_0^\infty \left(1 + \frac{z'}{r_S}\right) \left[ (1 - \tan^2 Z') \left(1 + \frac{z'}{r_S}\right)^2 + \sin^2 Z' + \tan^2 Z' \right] \left[ \left(1 + \frac{z'}{r_S}\right)^2 - \sin^2 Z' \right]^{-5/2} \eta \, dz' \\
& - (\cos Z')(\sin Z') \int_0^\infty \left(1 + \frac{z'}{r_S}\right) \left[ \left(1 + \frac{z'}{r_S}\right)^2 + \frac{\sin^2 Z'}{2} \right] \left[ \left(1 + \frac{z'}{r_S}\right)^2 - \sin^2 Z' \right]^{-5/2} \eta^2 \, dz' \\
& + \frac{\sin^3 Z'}{2r_S} \left\{ \int_0^\infty \left(1 + \frac{z'}{r_S}\right) \left[ \left(1 + \frac{z'}{r_S}\right)^2 - \sin^2 Z' \right]^{-3/2} \eta \, dz' \right\}^2
\end{aligned}$$

(xxxii)

puis réutilisons cette approximation classique, et en considérant avec NEWCOMB [21, p. 214]

les hauteurs caractéristiques relatives  $h_{1,0} := \frac{1}{\eta_S} \int_0^\infty \eta \, dv' = \frac{H_{1S}}{r_S}$  (où  $v' := z'/r_S$ ) et

$h_{2,0} := \sqrt{\frac{1}{\eta_S} \int_0^\infty 2v' \eta \, dv'} = \frac{H_{2S}}{r_S}$  – déjà rencontrées dans [1, Eq. (29)-(30)] – comme les premiers

éléments de l'ensemble des hauteurs caractéristiques relatives  $h_{m,q}$  (toujours avec  $m \in \mathbb{N}^*$ ) telles que

$$\begin{aligned}
\eta_S^{q+1} h_{m,q}^m & := \int_0^{\eta_S} \left(\frac{z'}{r_S}\right)^m \eta^q \, d\eta = - \int_0^\infty \left(\frac{z'}{r_S}\right)^m \frac{d}{dz'} \frac{\eta^{q+1}}{q+1} \, dz' \\
& = - \left[ \left(\frac{z'}{r_S}\right)^m \frac{\eta(z')^{q+1}}{q+1} \right]_0^\infty + \int_0^\infty m \left(\frac{z'}{r_S}\right)^{m-1} \frac{\eta(z')^{q+1}}{q+1} \frac{dz'}{r_S} = \frac{m}{q+1} \int_0^\infty v'^{m-1} \eta^{q+1} \, dv'.
\end{aligned}$$

(xxxiii)

Dans le cadre des hypothèses (a) et (d) qui permettent d'écrire

$$\mu_S^{q+1} h_{m,q}^m = - \left[ \left(\frac{z'}{r_S}\right)^m \frac{\mu(z')^{q+1}}{q+1} \right]_0^\infty + \int_0^\infty m \left(\frac{z'}{r_S}\right)^{m-1} \frac{\mu(z')^{q+1}}{q+1} \frac{dz'}{r_S} = \frac{m}{q+1} \int_0^\infty v'^{m-1} \mu^{q+1} \, dv', \quad (\text{xxxiiii})$$

puis des hypothèses (b)-(c) et (e) qui permettent d'aller plus loin (voir le détail des calculs dans l'Appendice C), nous trouvons

$$\Delta_{2\infty}(Z', T_S, P_S, \lambda_0) = \Gamma_2(Z', T_S) \eta^2(T_S, P_S, \lambda_0) \quad (\text{xxxv})$$

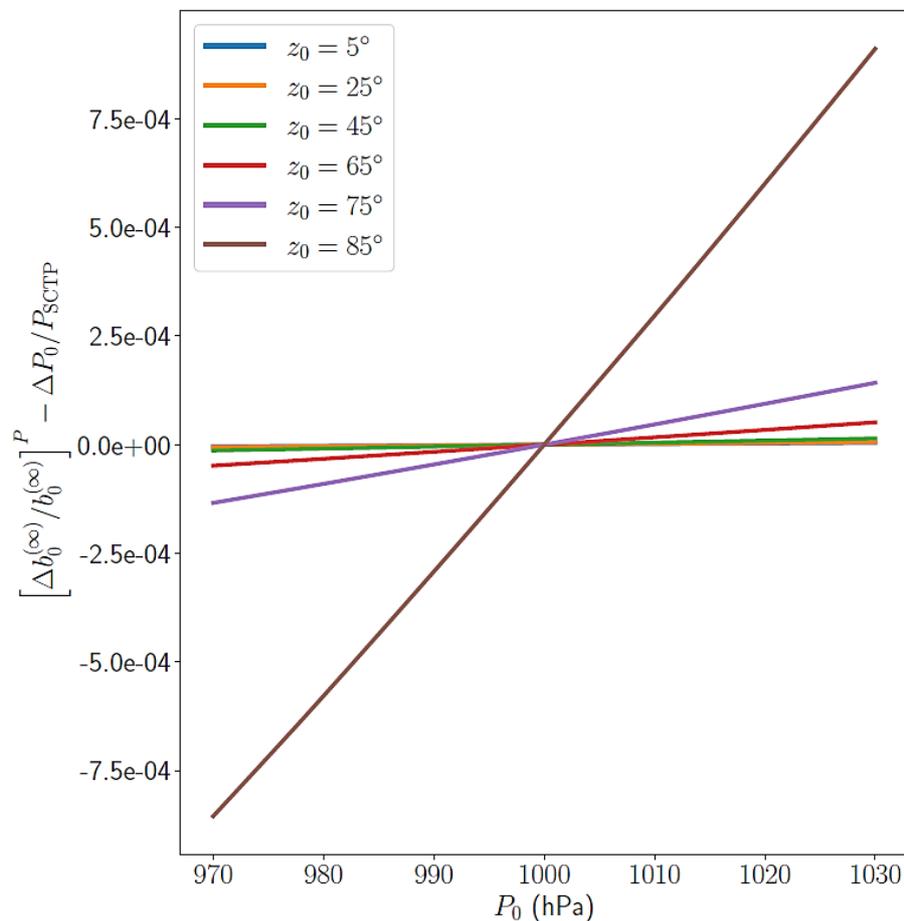
avec

$$\begin{aligned}
\frac{\cos^4 Z'}{\sin Z'} \frac{\Gamma_2(Z', T_S)}{r_S} & \cong (1 + \sin^2 Z') h_{1,0}(T_S) + \left[ (\sin^2 Z') - 2 - 12 \tan^2 Z' \right] \frac{h_{2,0}^2(T_S)}{2} \\
& + \frac{\tan^2 Z'}{2} \left[ h_{1,0}(T_S) + \left(1 - \frac{3}{\cos^2 Z'}\right) \frac{h_{2,0}^2(T_S)}{2} \right]^2 \\
& - (2 + \sin^2 Z') h_{1,1}(T_S, P_S) - \left[ 11 + (\sin^2 Z') - \frac{15}{\cos^2 Z'} \right] \frac{h_{2,1}^2(T_S)}{2}
\end{aligned} \quad (\text{xxxv})$$

qui donne une expression *approximative* du terme d'ordre 2 du développement de  $\Delta_\infty$  par rapport à  $\eta$ , par opposition à l'expression (xxx) qui est *rigoureuse*.

**N. B. :** si l'on n'avait pas particularisé un type de modèles d'atmosphère à ce stade (ici, RGO d'indice polytropique fixé), dans les relations (xxxiv)-(xxxv) il faudrait mettre le jeu de variables  $(Z', T_S, P_S, \dots)$  pour  $\Gamma_2$ , et  $(T_S, P_S, \dots)$  pour  $h_{1,0}$ ,  $h_{2,0}$  et  $h_{2,1}$ .

Dans les intégrales de (xxxiii), l'intégration par parties a permis de passer de l'exposant  $m$  à l'exposant  $m - 1$ . Pour le cas des modèles d'atmosphère polytropique d'indice  $j$  – étudié par James IVORY (1765-1842) pour  $j = 4$ , Carl Max VON BAUERNFEIND (1818-1894) pour  $j = 5$ , etc. – Simon NEWCOMB (1835-1909) reconnaît à ce stade une intégrale eulérienne de première espèce (« intégrale bêta » – [22, p. 209]) ; elle se traite en remarquant qu'une primitive de  $\eta(z)^{q+1}$  est proportionnelle à une autre puissance de  $\eta(z)$ , et donc qu'en itérant cette intégration par parties encore  $m - 1$  fois on arrive à une intégrale triviale.



Reproduction de [2, Fig. 6] (licence CC BY 4.0),  
DOI : <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202142338>

Munis des résultats (xxxiv)-(xxxv), nous pouvons avancer plus profondément dans l'étude de la non-linéarité de  $\Delta_\infty$  par rapport à  $P_S$  mise en évidence par la Fig. reproduite ci-dessus [2, Fig. 6]. En effet, si nous admettons les hypothèses (a)-(c) ainsi que  $\Delta_\infty \cong \Delta_{1_\infty} + \Delta_{2_\infty}$  – i.e. si nous considérons  $R_3^{(\Delta)}(\infty)$  comme négligeable –, nous écrivons

$$\Delta_{\infty}(Z', T_S, P_S, \lambda_0) = \Gamma_1(Z', T_S) \eta(T_S, P_S, \lambda_0) + \Gamma_2(Z', T_S) \eta^2(T_S, P_S, \lambda_0), \quad (\text{xxxvi})$$

et nous en déduisons la caractéristique  $A$  des courbes de [2, Fig. 6] à  $P_S = P_{SCTP} = 1000$  hPa pour divers triplets  $(Z', 273.15 \text{ K}, 550 \text{ nm})$  :

$$A := \frac{\Gamma_1 + 2\Gamma_2 \eta_S}{\Delta_{\infty}} \left( \frac{\partial \eta}{\partial P} \right)_{T, \lambda_0}(T_S, P_S, \lambda_0) - \frac{1}{\eta_S} \left( \frac{\partial \eta}{\partial P} \right)_{T, \lambda_0}(T_S, P_S, \lambda_0) = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2 \eta_S} \left( \frac{\partial \eta}{\partial P} \right)_{T, \lambda_0}(T_S, P_S, \lambda_0). \quad (\text{xxxvii})$$

Or, pour la Fig. 6 de [2, p. 6] ci-dessus, établie *dans le cadre des hypothèses (a)-(e) et des modèles RGO d'indice polytropique  $j$  fixé*, la liste des variables est par convention pour nous (cf. nos explications au début du sous-paragraphe 2.2) ramenée à  $(Z', T_S, P_S, \lambda_0)$  ; ainsi,

toujours pour cette Fig.,  $\frac{1}{\Delta_{\infty}} \left( \frac{\partial \Delta_{\infty}}{\partial P_S} \right)_{Z', T_S, \lambda_0} - \frac{1}{P_S} = A$  est donc, pour  $(Z', T_S, P_S, \lambda_0) = (Z', 273.15 \text{ K}, 1000 \text{ hPa}, 550 \text{ nm})$ , la pente théorique de chaque courbe (associée à  $Z'$ ) en son point d'intersection  $I$  avec les autres courbes de [2, Fig. 6] où  $\eta_S \cong 2.8926 \cdot 10^{-4}$  – et  $(\partial \eta / \partial P)_{T, \lambda_0} \cong 2.8926 \cdot 10^{-7} / \text{hPa}$  car nous assimilons cette dérivée à  $(\partial \eta / \partial P)_{T, \lambda_0}^{(a),(c)} \cong 2.8926 \cdot 10^{-4} / 1000 \text{ hPa}$  calculée en admettant les hypothèses (a) et (c). Nous testons ce résultat théorique en comparant, sur notre Figure 4,  $A$  à la pente  $B$  mesurée en  $I$  sur [2, Fig. 6].

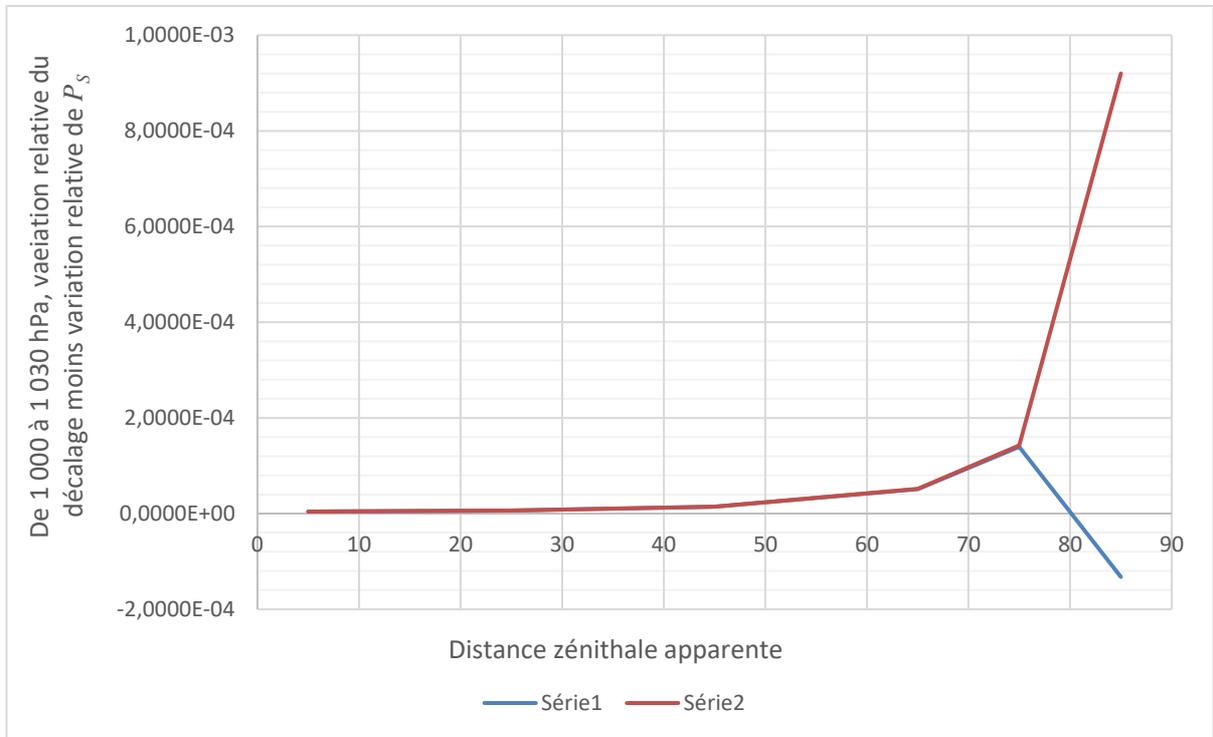


Figure 4 – Pentes théoriques  $A$  (Série 1), puis pentes mesurées  $B$  (Série 2), au point  $I$  de [2, Fig. 6] avec  $(T_S, P_S, \lambda_0) = (273.15 \text{ K}, 1000 \text{ hPa}, 550 \text{ nm})$

[Données numériques de la Série 2 fournies par H. LABRIJ, O. HERSCOVICI-SCHILLER, F. CASSAING]

L'examen de notre Figure 4 montre que notre étude théorique du terme  $\Delta_2$  conduit à un accord majeur avec la valeur des défauts de linéarité dans la relation entre  $\Delta_\infty$  et  $\eta_S$  ou  $P_S$ , pour  $Z' \in ]0^\circ, 75^\circ]$  – car sur ce domaine, les courbes bleue et rouge de la Figure 4 sont quasiment superposées. La brutale séparation de ces courbes au-delà de  $75^\circ$  est probablement indépendante des imperfections<sup>17</sup> de notre étude de  $\Delta_2$  ; elle doit être une manifestation des effets d'ordre 3 (et plus) en  $\eta$  qui sont pris en compte par l'intégration numérique [2], et la magnitude relative de ces effets (par rapport à ceux d'ordre inférieur) s'accroît à l'approche de  $90^\circ$ . Ainsi, le fait que la courbe bleue se sépare brutalement de notre courbe rouge n'est guère étonnant ; et le fait que celle-ci aille à des ordonnées négatives s'explique très bien – cf. la note 17 ci-dessous). Mais le sens de variation de la courbe bleue au-delà de  $75^\circ$  est hors de portée de notre étude.

Il existe aussi une autre raison, mineure, de non-linéarité entre  $\Delta_\infty$  et  $P_S$  : la non-linéarité entre  $\eta_S$  et  $P_S$ , qui a elle-même deux causes physiques très différentes et qu'il convient de bien distinguer, tant dans leurs mécanismes que dans leurs valeurs...

### Remarque : autres causes de non-linéarité de $\Delta_\infty$ par rapport au profil $r \mapsto P(r)$

Il y a deux causes supplémentaires de non-linéarité, qui sont occultées par les hypothèses (a) et (c), car elles résident dans la relation entre  $\eta$  et  $P$  à  $T$  fixé ([13, § 6.1], [24]) ; nous les détaillons dans l'Appendice E, où nous montrons que leur conséquence essentielle concernant  $\Delta_\infty$  est – voir l'expression (E6) – qu'il faut ajouter, au terme correctif relatif  $\delta_{1\infty}$ , le terme supplémentaire

$$c_{1\infty}(T_S, P_S, \dots, \lambda_0) \cong \frac{C(\lambda_0) \mu^2(T_S, P_S)}{3} g_S r_S \frac{h_{1,1}(T_S, P_S, \dots)}{P_S} \ll 1$$

dont la valeur numérique usuelle montre qu'expérimentalement, il passe actuellement inaperçu.

<sup>17</sup> dues à l'approximation classique qui conduit à introduire les hauteurs caractéristiques – on sait que celle-ci est responsable de la divergence particulière, connue sous le nom de *semi-convergence*, des séries classiques de fonctions censées exprimer la fonction  $Z' \mapsto \chi_S(Z', T_S, P_S, \dots, \lambda_0)$  sur l'intervalle de  $Z'$  (inclus dans  $[0^\circ, 90^\circ[)$ ) où il y a convergence normale en amont de cette approximation classique ([7, p. 74], [13, p. 52], [23]) : ces séries classiques de fonctions divergent ; mais à un ordre donné  $k$ , la valeur  $\chi_S(Z', T_S, P_S, \dots, \lambda_0)$  moins la valeur pour  $Z'$  de la somme partielle jusqu'à l'ordre  $k-1$  inclus, est négligeable devant  $\tan^{2k-1} Z'$  pour  $Z'$  au voisinage de 0.

En fonction de  $Z'$ , les expressions de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  divergent chacune sur l'horizon astronomique, selon un équivalent proportionnel (avec une constante positive) respectivement à  $-1/\psi'^4$  et  $1/\psi'^{10}$  (voir le sous-paragraphe 2.4) ; comme  $\Gamma_1(85^\circ, 273.15 \text{ K}) + \Gamma_2(85^\circ, 273.15 \text{ K}) \eta(273.15 \text{ K}, 1000 \text{ hPa}, 550 \text{ nm}) < 0$ , il existe forcément un angle  $Z'_d < 90^\circ$  pour lequel la grandeur ci-dessus tend vers  $0_-$  (et donc  $A$  vers  $-\infty$ ) quand  $Z' \rightarrow Z'_d^-$  – on voit le début de cette divergence pour la courbe rouge de notre Figure 4. Si on renonçait à l'approximation classique, et donc si on donnait une expression rigoureuse de  $\Delta_{2\infty}$ , on conserverait les relations (xxxvi)-(xxxvii) mais avec de légères modifications pour  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , donc pour  $Z'_d$ .

### 2.3.2. Influence de la température absolue $T_s$

Au sous-paragraphe précédent, on a vu qu'avec les hypothèses (a)-(d), quand  $P_s$  varie, à *profil* de  $T/g$  (et donc à  $T_s/g_s$ ) fixé, le terme correctif relatif  $\delta_{1\infty} = \left(1 - \frac{3}{\cos^2 Z'}\right) \frac{H_{BS}}{r_s}$  de l'expression LHSCD (31) de  $\Delta_\infty$  est invariant. Ce n'est plus le cas si l'on fait varier  $T_s$  à  $P_s$  fixé : en effet, la variation de  $T_s/g_s$  ne produit pas une multiplication du profil de  $P$ , mais une modification plus complexe (même à  $P_s$  fixé) qui change (même si l'on reste dans le cadre des modèles d'atmosphère de type RGO à gradient thermique fixé) le coefficient (en général non uniforme)  $-M_a g/(RT)$  de l'équation différentielle linéaire (xxvii) régissant  $P$ .

Un premier test intéressant consiste à voir si la pente de chaque courbe associée à  $Z'$ , en son point d'intersection  $J$  avec les autres courbes de la Fig. 7 de [2, p. 6], s'explique bien par le développement à l'ordre 1 en  $\eta$  ; nous allons donc regarder si cette pente est quasi égale à  $\frac{1}{\Delta_{1\infty}} \left( \frac{\partial \Delta_{1\infty}}{\partial T_s} \right)_{Z', P_s, \lambda_0} (Z', 273.15 \text{ K}, 1000 \text{ hPa}, 550 \text{ nm})$  – le nombre de variables de cette dérivée se limitant à 4 pour la même raison que celle déjà indiquée à la fin du sous-paragraphe 2.2 – et sachant que  $\eta(273.15 \text{ K}, 1000 \text{ hPa}, 550 \text{ nm}) \cong 2.8926 \cdot 10^{-4}$ ,  $(\partial \eta / \partial T)_{T, \lambda_0} (273.15 \text{ K}, 1000 \text{ hPa}, 550 \text{ nm}) \cong -2.8926 \cdot 10^{-4} / 273.15 \text{ K} = -1.0590 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ , et en utilisant l'expression théorique

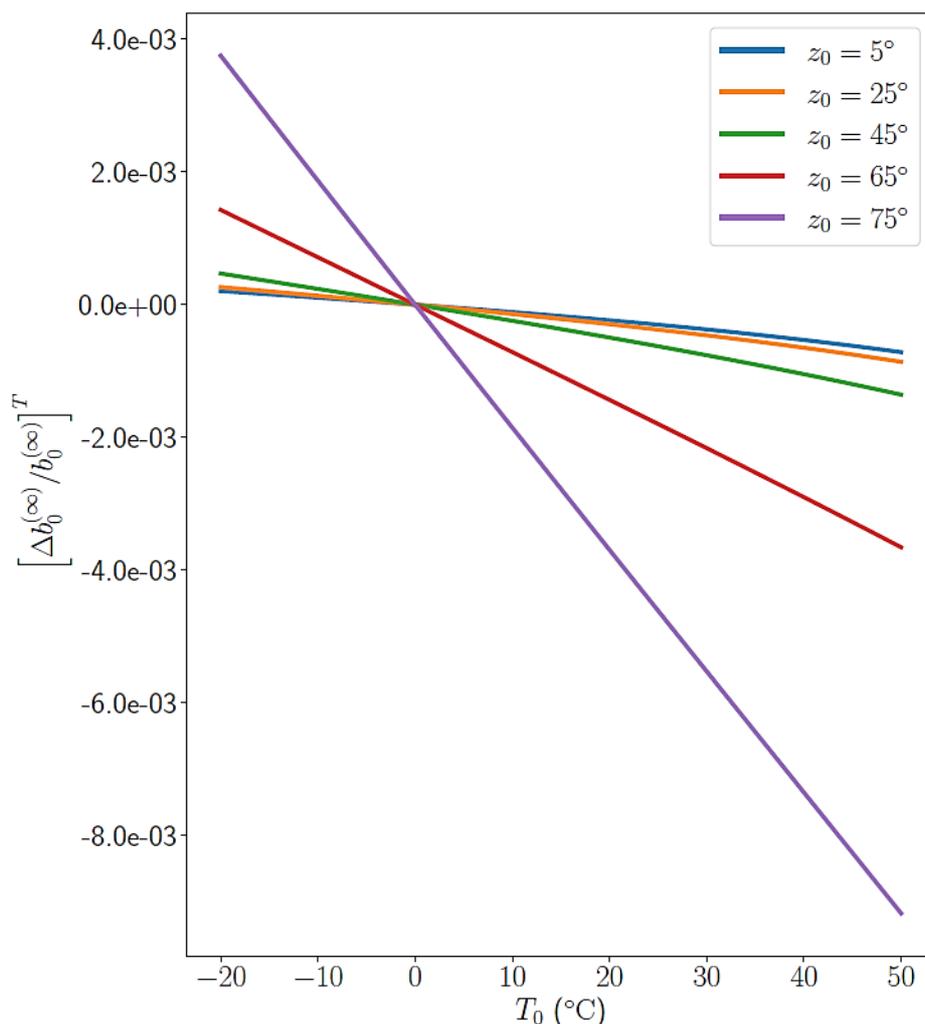
$$\Delta_{1\infty}(Z', T_s, P_s, \lambda_0) = (\eta_s h_{1,0})(P_s, \lambda_0) r_s \frac{\sin Z'}{\cos^2 Z'} \left[ 1 + \frac{H_{BS}(T_s)}{r_s} \left( 1 - \frac{3}{\cos^2 Z'} \right) \right]$$

fondée – comme déjà rappelé pour les expressions (xxxiii)-(xxxv) – sur les hypothèses (a)-(e) faisant, entre autres, que  $h_{1,0}$  et  $H_{BS}$  ne varient qu'avec  $T_s$ , et  $\eta_s h_{1,0}$  qu'avec  $(P_s, \lambda_0)$ . Nous testons (voir la Figure 5) ce résultat théorique en comparant, aux résultats numériques fournis par les auteurs de [2, Fig. 7], les valeurs données par l'expression théorique

$$\frac{1}{\Delta_{1\infty}} \left( \frac{\partial \Delta_{1\infty}}{\partial T_s} \right)_{Z', P_s, \lambda_0} = \left[ 1 + \left( 1 - \frac{3}{\cos^2 Z'} \right) \frac{H_{BS}}{r_s} \right]^{-1} \left( 1 - \frac{3}{\cos^2 Z'} \right) \frac{1}{r_s} \frac{dH_{BS}}{dT_s}$$

où, puisque nous travaillons dans le cadre des modèles RGO, nous donnons l'expression de  $dH_{BS}/dT_s$  dans l'Appendice D consacré à ceux-ci.

Extrait de [2, p. 6] (licence CC BY 4.0), DOI : <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202142338>



**Fig. 7.** Variation of  $[\Delta b_0/b_0]^T$  at  $\lambda_0$  versus ground temperature.

La dérivée logarithmique  $\frac{1}{\Delta_\infty} \left( \frac{\partial \Delta_\infty}{\partial T_s} \right)_{Z', P_s, \lambda_0}$  est, pour  $(Z', T_s, P_s, \lambda_0) = (Z', 273.15 \text{ K}, 1000 \text{ hPa}, 550 \text{ nm})$ , la pente de chaque courbe associée à  $Z'$  en son point d'intersection  $J$  avec les autres courbes de [2, Fig. 7] où  $\eta_s \cong 2.8926 \cdot 10^{-4}$  et  $(\partial \eta / \partial T)_{P, \lambda_0} \cong -2.8926 \cdot 10^{-4} / 273.15 \text{ K} \cong -1.0590 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ . Les relations que nous avons obtenues dans notre étude, sans oublier celles de l'Appendice D, nous permettent d'estimer la dérivée logarithmique ci-dessus. Mais nous avons procédé autrement, dans un premier temps.

À partir des ordonnées des points correspondant aux 5 distances zénithales apparentes considérées dans le graphe ci-dessus (pour lequel  $\sigma$  est fixé), et pour la même abscisse 50 °C, on trace dans la Figure 5 la courbe de la « Série 1 » (bleue) ; puis on trace la « Série 2 » (rouge) correspondant à l'approximation d'ordre 1 déduite des formules (29)-(30), et enfin la « Série 3 » (verte) correspondant à l'approximation d'ordre 2 déduite des formules (xxxiv)-(xxxv).

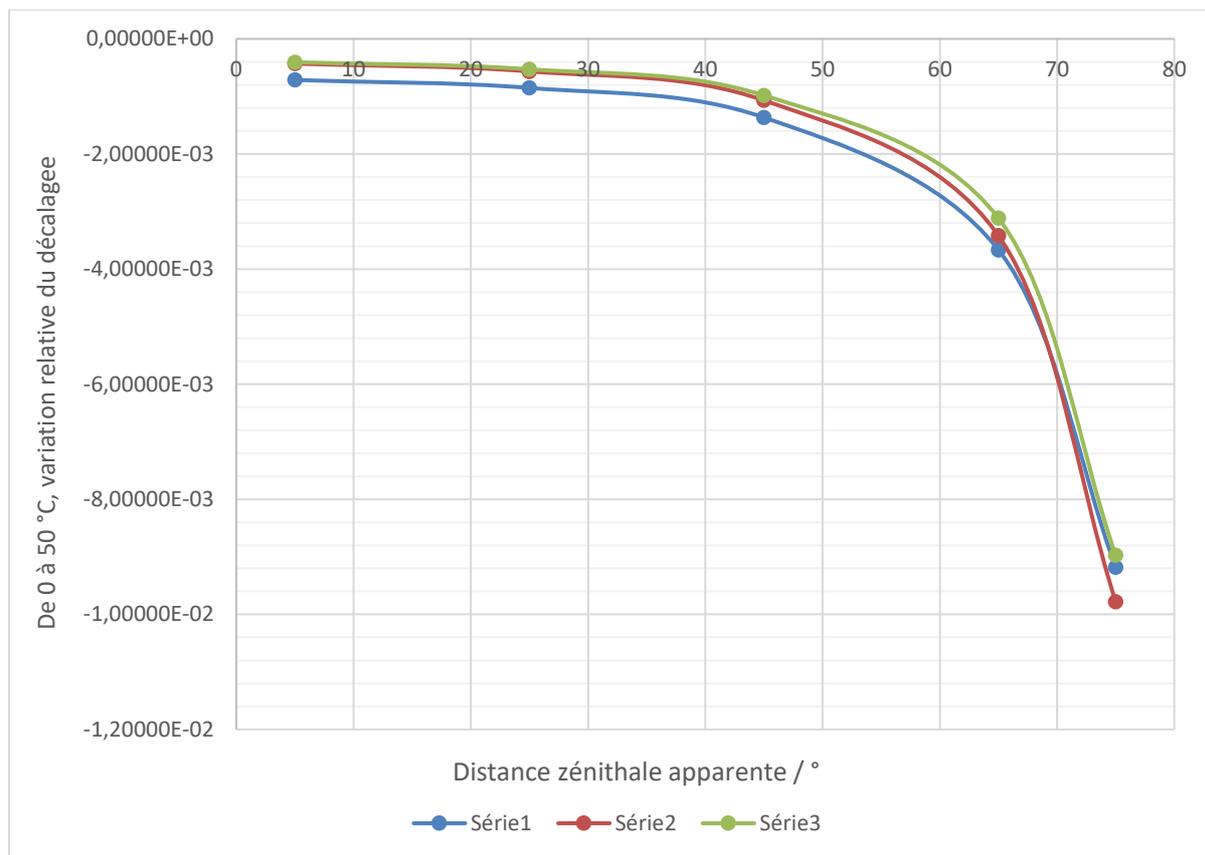


Figure 5 – Pour  $t_s$  passant de 0 °C à 50 °C, variations relatives de  $\Delta_\infty$  – d’après l’intégration numérique LHSC pour la série 1 (bleue), d’après les méthodes analytiques d’ordre 1 et 2 pour les séries 2 et 3 respectivement.

[Données numériques fournies par H. LABRIJI, O. HERSCOVICI-SCHILLER, F. CASSAING]

Cela montre que moyennant les hypothèses (a)-(e), ces théories rendent compte de l’essentiel de la variation relative de  $\Delta_\infty$  avec  $t_s$  aux grandes distances zénithales, mais qu’il y a des résidus aussi bien pour celle d’ordre 2 que pour celle d’ordre 1.

On pouvait espérer que l’écart entre les courbes bleue et rouge de la Figure 6 s’explique essentiellement par  $\Delta_{2\infty}$ . Dans cette perspective, si nous dérivons par rapport à  $T_s$  la relation approchée

$$\frac{\Delta_\infty}{\Delta_{1\infty}}(Z', T_s, P_s, \lambda_0) = 1 + \frac{\Gamma_2(Z', T_s)}{\Gamma_1(Z', T_s)} \eta(T_s, P_s, \lambda_0)$$

à  $(Z', P_s, \lambda_0)$  fixé, nous trouvons – moyennant les hypothèses (a)-(d) – l’expression locale et approximative du résidu rouge vs bleu :

$$\frac{1}{\Delta_\infty} \left( \frac{\partial \Delta_\infty}{\partial T_s} \right)_{Z', P_s, \lambda_0} - \frac{1}{\Delta_{1\infty}} \left( \frac{\partial \Delta_{1\infty}}{\partial T_s} \right)_{Z', P_s, \lambda_0} = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial T_s} \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)_{Z'} \eta_s + \left( \frac{\partial \eta}{\partial T} \right)_{P, \lambda_0} (T_s, P_s, \lambda_0) \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right] \left/ \left( 1 + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \eta_s \right) \right.$$

Les relations que nous avons obtenues permettent d’estimer aussi cette différence de dérivées logarithmiques ; mais il nous a paru plus visuel de faire tracer le graphe du rapport des résidus – voir la Figure 6.

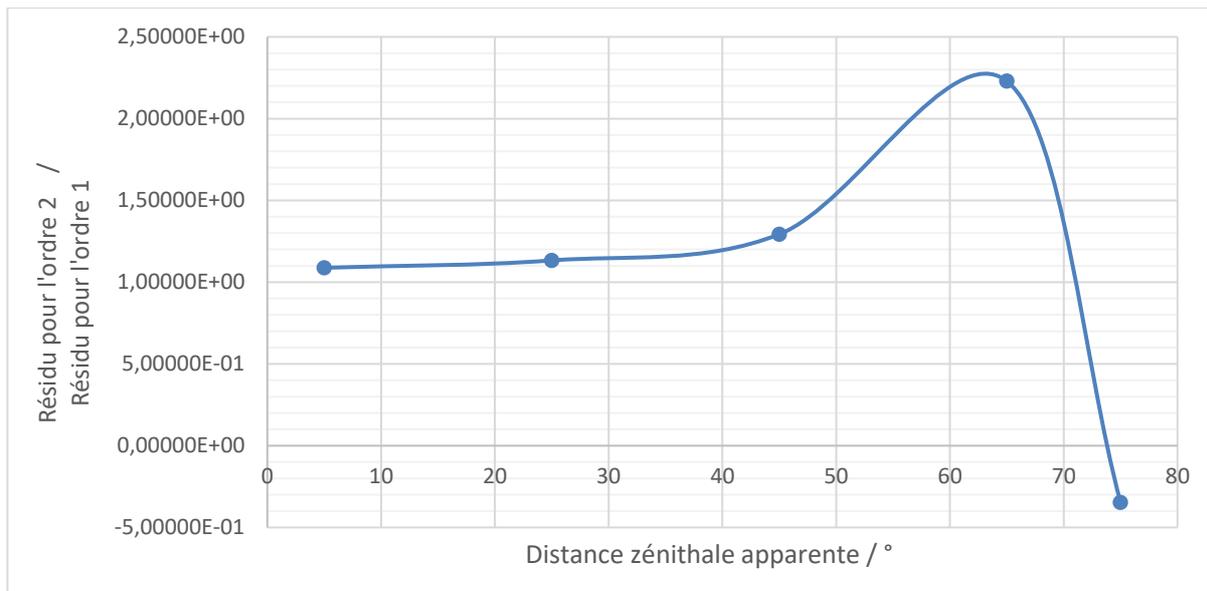


Figure 6 – Rapport des résidus de la théorie d'ordre 2 (vert vs bleu) sur ceux de la théorie d'ordre 1 (rouge vs bleu)

[Les résidus sont définis par rapport aux données numériques fournies par H. LABRIJ, O. HERSCOVICI-SCHILLER, F. CASSAING]

Cette Figure montre que pour  $Z' < 40^\circ$ , les écarts entre l'intégration numérique et chacune des théories sont finalement quasi identiques. Vu l'accord majeur obtenu, si  $Z' \leq 75^\circ$ , dans l'utilisation de  $\Delta_{2\infty}$  approximé (lors de l'introduction des hauteurs caractéristiques) pour rendre compte de l'essentiel de la non-linéarité de  $\Delta_\infty$  par rapport à  $P_S$  (mise en évidence par [2, Fig. 6]), nous sommes portés à penser que le rapport des résidus voisin de 1 avec  $Z' < 40^\circ$  ne dénote pas une imperfection de notre  $\Delta_{2\infty}$  approximatif, mais le fait qu'au moins un autre effet domine largement celui d'ordre 2 dans l'explication de la variation de  $\Delta_{2\infty}$  avec  $T_S$ , et que ce ou ces mécanismes cachés s'accroissent quand  $Z'$  passe de  $40^\circ$  à  $60^\circ$  – notre Figure 5 semblant corroborer, jusqu'à  $75^\circ$  environ, la qualité de notre  $\Delta_{2\infty}$  approximatif.

Quant à l'effet, sur l'influence de  $T_S$ , de la violation des hypothèses (a) ou (c) – donc, de la proportionnalité entre  $\eta_S$  et  $P_S/T_S$  –, il ne peut être une de ces causes occultes (que nous cherchons pour expliquer l'écart entre nos formules et l'intégration numérique LHSC de [2], de type RK4), puisque ni ces formules ni cette intégration LHSC ne tiennent compte de ce défaut de proportionnalité. Malgré tout, il est instructif de prédire l'ordre de grandeur de la conséquence de cette violation sur la variation de  $\Delta_{1\infty}$  avec  $T_S$ , à  $P_S$  fixé. Pour cela, nous exploitons le paragraphe E4 de l'Appendice E, en notant que dans les conditions de [2, Fig. 7],

donc à  $P_S$  fixé, on trouve que la variation relative supplémentaire  $\left( \frac{d\Delta_{1\infty}}{\Delta_{1\infty}} \right)_{\text{suppl}}$  de  $\Delta_{1\infty}$ , associée

à  $dT_S$  (assimilé à  $50^\circ\text{C}$  qui correspond à l'extrémité droite de toutes les courbes de [2, Fig. 6]), et qui n'est pas prise en compte par [2] car elle vient de la violation de (a) qui impose une petite correction relative  $c_{1\infty}$  (qui est indépendante de  $Z'$ ) expliquée au paragraphe E4 de l'Appendice E et incluses dans sa relation (E6) ; elle s'écrit donc (pour les modèles RGO)

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\Delta_{1\infty}}{\Delta_{1\infty}} \right)_{\text{suppl}} &= \frac{dc_{1\infty}}{1+c_{1\infty}} \cong dc_{1\infty} = \frac{C(\lambda_0)M_{aS}P_S}{12R} d \left( \frac{2j+2-\rho_S^{2j+1}}{2j+1} \frac{1}{T_S} \right) \\ &\cong 6.58 \text{ mK} \times d \left( \frac{2j+2-\rho_S^{2j+1}}{2j+1} \frac{1}{T_S} \right) \cong -4.17 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Nous constatons donc qu'elle est insignifiante à l'échelle de [2, Fig. 7].

Ainsi, la cause des écarts entre la courbe bleue et les deux autres, analysé par notre Figure 6, peut être cherchée, soit du côté des défauts numériques de la méthode RK4 (liés par exemple à son pas d'intégration), soit du côté d'effets non pris en compte dans les théories d'ordre 1 et 2.

L'un de ceux-ci serait-il la différence entre  $\left(1 + \frac{z'}{r_S}\right) \left[ \left(1 + \frac{z'}{r_S}\right)^2 - \sin^2 Z' \right]^{-3/2}$  et son

approximation classique  $\left[1 + \left(1 - \frac{3}{\cos^2 Z'}\right) \frac{z'}{r_S}\right] / \cos^3 Z'$  avec laquelle apparaissent, dans nos

expressions de  $\Delta_{1\infty}$  et  $\Delta_{2\infty}$ , les hauteurs caractéristiques ? Ce serait étrange, car le défaut qu'elle induit dans nos expressions ne semble pas du tout se manifester, pour  $Z' \in ]0^\circ, 75^\circ]$ , dans notre Figure 4 – alors que les résidus pour la théorie d'ordre 2 sur l'effet de  $T_S$  sont très nets dans tout l'intervalle angulaire  $[5^\circ, 65^\circ]$ . Faut-il mettre en cause des effets d'ordre 3 en réfractivité, assumés par le modèle d'intégration numérique mais pas par nos formules finales ? On peut adresser la même objection à cette idée, ainsi qu'à celle incriminant des défauts de la méthode RK4. « *La vérité est ailleurs...* » ?

## 2.4. Comparaison graphique de 3 formules d'approximation de $\Delta_\infty$

Aux résultats  $\Delta_\infty^{IN}(Z', T_S, P_S, \lambda_0)$  de l'intégration numérique par la méthode RK4 pour une atmosphère RGO (d'indice polytropique fixé) avec  $(T_S, P_S, \lambda_0) = (273.15 \text{ K}, 1000 \text{ hPa}, 550 \text{ nm})$  [2], nous voulons comparer, en les implémentant pour le même triplet  $(T_S, P_S, \lambda_0)$ , les trois approximations analytiques que – moyennant les hypothèses (a)-(e) – nous avons rencontrées dans notre présente étude, et qui présentent (malheureusement, car la réalité est différente) une divergence<sup>18</sup> en  $\psi' = 0$  que nous précisons (elle est différente pour chacune) sans privilégier un type de modèles d'atmosphère :

$$\bullet \quad \Delta_\infty^R(Z', P_S, \lambda_0) := (\eta_S H_{1S})(P_S, \lambda_0) \frac{\sin Z'}{\cos^2 Z'} \quad (\text{xxxviii})$$

<sup>18</sup> qui est celle d'un ou plusieurs termes d'ordre donné – ou au moins d'une partie d'un terme – du développement de  $\Delta_\infty$  en série de fonctions de  $Z'$ , à  $(T_S, P_S, \dots, \lambda_0)$  fixé ; il ne faut pas confondre cette divergence avec celle de la série elle-même, après l'approximation classique introduisant les hauteurs caractéristiques (et qui a rendu la série semi-convergente seulement – voir la note 17)

donnée par la méthode de RAYLEIGH ([3], [12, p. 360]), et telle que pour  $\psi'$  au voisinage de 0 on a le résultat<sup>19</sup>  $\Delta_\infty^R \sim \eta_S h_{1,0} r_S / \psi'^2 > 0$ . **(xxxix)**

Notons ici, d'une part, que  $\Delta_\infty^R$  ne fait pas intervenir la rotondité de la Terre ; d'autre part, que les coefficients du développement de  $\sin Z' / \cos^2 Z'$  à l'ordre 3 en  $\tan Z'$  sont constants, donc l'expression (xxxviii) justifie un équivalent du théorème d'ORIANI pour  $\Delta_\infty$  – au lieu de  $\chi_S$  ;

$$\bullet \quad \Delta_\infty^L(Z', T_S, P_S, \dots, \lambda_0) := \Delta_\infty^R(Z', P_S, \lambda_0) \left[ 1 + \delta_{1\infty}(Z', T_S, P_S, \dots) \right] \quad \text{avec}$$

$$\delta_{1\infty}(Z', T_S, P_S, \dots) = \frac{H_{BS}(T_S, P_S, \dots)}{r_S} \left( 1 - \frac{3}{\cos^2 Z'} \right) \quad \text{(xL)}$$

– où la signification des points de suspension dans les variables a été donnée au début du sous-paragraphe 2.2. Pour  $\psi'$  au voisinage de 0 on a<sup>20</sup>

$$\Delta_\infty^L \sim -3\eta_S H_{1S} H_{BS} / (r_S \psi'^4) < 0. \quad \text{(xLi)}$$

Par le terme correctif  $\delta_{1\infty}$ , l'expression (xL) fait intervenir la rotondité de la Terre. Chronologiquement, cette approximation analytique a été donnée d'abord par [2, Eq. (50)] – moyennant les hypothèses (a)-(e) et une approximation [25] utilisée par Jean KOVALEVSKY (1929-2018) *et al.* – puis par [1, Eq. (29)] (via l'exploitation (26) de la quadrature (13) à l'ordre 1 par rapport à  $\eta$ ) ;

$$\bullet \quad \Delta_\infty^D(Z', T_S, P_S, \dots, \lambda_0) := \Delta_\infty^R(Z', P_S, \lambda_0) \left\{ 1 + \left( 1 - \frac{3}{\cos^2 Z'} \right) \frac{H_{BS}(T_S, P_S, \dots)}{r_S} \right. \\ \left. + \frac{\eta_S(T_S, P_S, \lambda_0)}{\cos^2 Z'} \left[ \left( 1 + \sin^2 Z' \right) + \frac{(\sin^2 Z') - 2 - 12 \tan^2 Z'}{2} \frac{h_{2,0}^2(T_S, P_S, \dots)}{h_{1,0}(T_S)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\tan^2 Z'}{2} \left( \sqrt{h_{1,0}(T_S)} - \frac{3 - \cos^2 Z'}{2 \cos^2 Z'} \frac{h_{2,0}^2(T_S, P_S, \dots)}{\sqrt{h_{1,0}(T_S)}} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \left( 2 + \sin^2 Z' \right) \frac{h_{1,1}(T_S, P_S, \dots)}{h_{1,0}(T_S)} + \left( \frac{15}{\cos^2 Z'} - 11 - \sin^2 Z' \right) \frac{h_{2,1}^2(T_S, P_S, \dots)}{2 h_{1,0}(T_S)} \right] \right\}$$

**(xLii)**

que nous avons introduit pour ce séminaire. Pour  $\psi'$  au voisinage de 0 on a le résultat<sup>21</sup>

$$\Delta_\infty^D \sim 9\eta_S^2 h_{2,0}^4 r_S / (8\psi'^{10}) > 0 \quad \text{(xLiii)}$$

<sup>19</sup> proportionnel à  $\eta_S$  car cette approximation provient d'un développement d'ordre 1 (en  $\eta$ ) dont le terme d'ordre 0 (qui correspond à la propagation rectiligne dans le vide) est nul

<sup>20</sup> (avec le même commentaire que dans la note 19)

<sup>21</sup> proportionnel à  $\eta_S^2$ , ce qui est possible car  $\Delta_\infty^D$  provient d'un développement d'ordre 2 (en  $\eta$ ) ; on voit ainsi que la divergence correspondante (la plus sévère des trois) est due au terme d'ordre 2 (celui de  $\Delta_\infty^D - \Delta_\infty^L$ ) qui est censé, sauf pour  $\psi'$  au voisinage de 0, améliorer l'approximation. Des faits similaires existent avec les développements classiques de  $\chi_S$  [23].



On voit que  $\Delta_\infty^L$  et  $\Delta_\infty^D$  sont des approximations par défaut meilleures que  $\Delta_\infty^R$  (qui est par excès) depuis  $0^\circ$  jusqu'à environ  $86^\circ$ , mais cela change brutalement au voisinage cette dernière valeur, qui n'apparaît pas sur les trois Figures suivantes plus consacrées à la comparaison entre  $\Delta_\infty^L$  et  $\Delta_\infty^D$ . Sur la Figure 7, seule la courbe bleue (Série 1) ne diverge pas en  $Z' = 90^\circ$  ; par contre,  $\Delta_\infty^R$  et  $\Delta_\infty^D$  tendent vers l'infini (et le second bien plus vite que le premier) conformément aux équivalents (xxxix) et (xLiii), tandis que  $\Delta_\infty^L$  tend vers  $(-\infty)$  – conformément à l'équivalent (xLi) – mais cela ne peut pas se voir sur son logarithme (cf. la courbe verte, i.e. la Série 3).

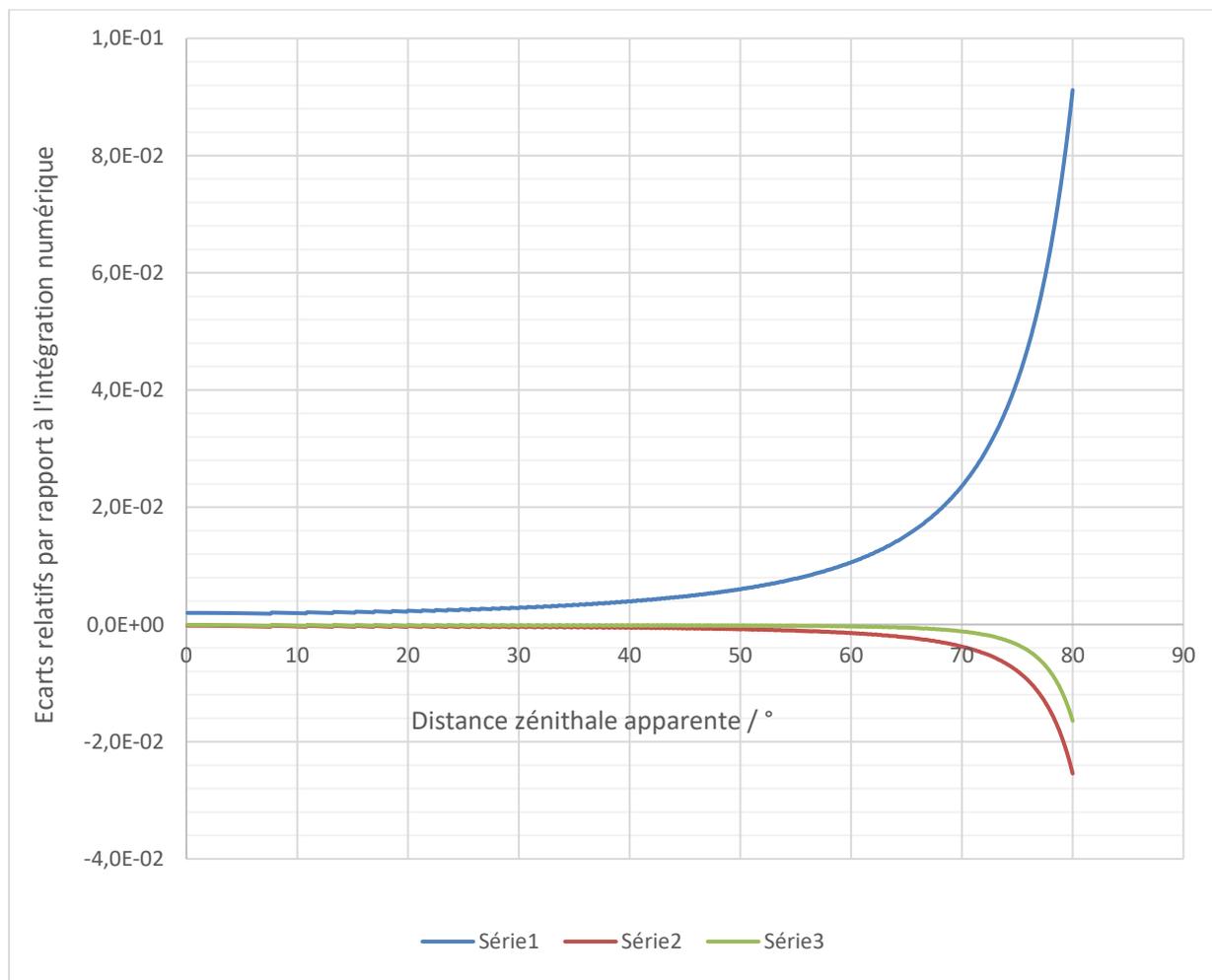


Figure 8 – Dans l'ordre des séries,  $(\Delta_\infty^R/\Delta_\infty^{IN})-1$ ,  $(\Delta_\infty^L/\Delta_\infty^{IN})-1$  et  $(\Delta_\infty^D/\Delta_\infty^{IN})-1$

[Valeurs numériques des  $\Delta_\infty^{IN}$  fournies par H. LABRIJ, O. HERSCOVICI-SCHILLER, F. CASSAING – idem pour les Figures 9-11]

La Figure 8 corrobore le fait que, sur au moins tout le domaine qu'elle montre,  $|\Delta_\infty^D - \Delta_\infty^{IN}| < |\Delta_\infty^L - \Delta_\infty^{IN}|$ , et que  $\Delta_\infty^R$  majore  $\Delta_\infty^{IN}$  de moins de 1 % pour  $Z' \in [0^\circ, 59.2^\circ]$ , tandis que  $\Delta_\infty^L$  (resp.  $\Delta_\infty^D$ ) minore  $\Delta_\infty^{IN}$  de moins de 1 % pour  $Z' \in [0^\circ, 76.3^\circ]$  (resp.  $[0^\circ, 78.7^\circ]$ ). Sur la Figure 9, nous zoomons pour tenter de lever l'ambiguïté due à l'indiscernabilité des courbes verte et rouge en dessous de  $30^\circ$  dans la Figure ci-dessus.

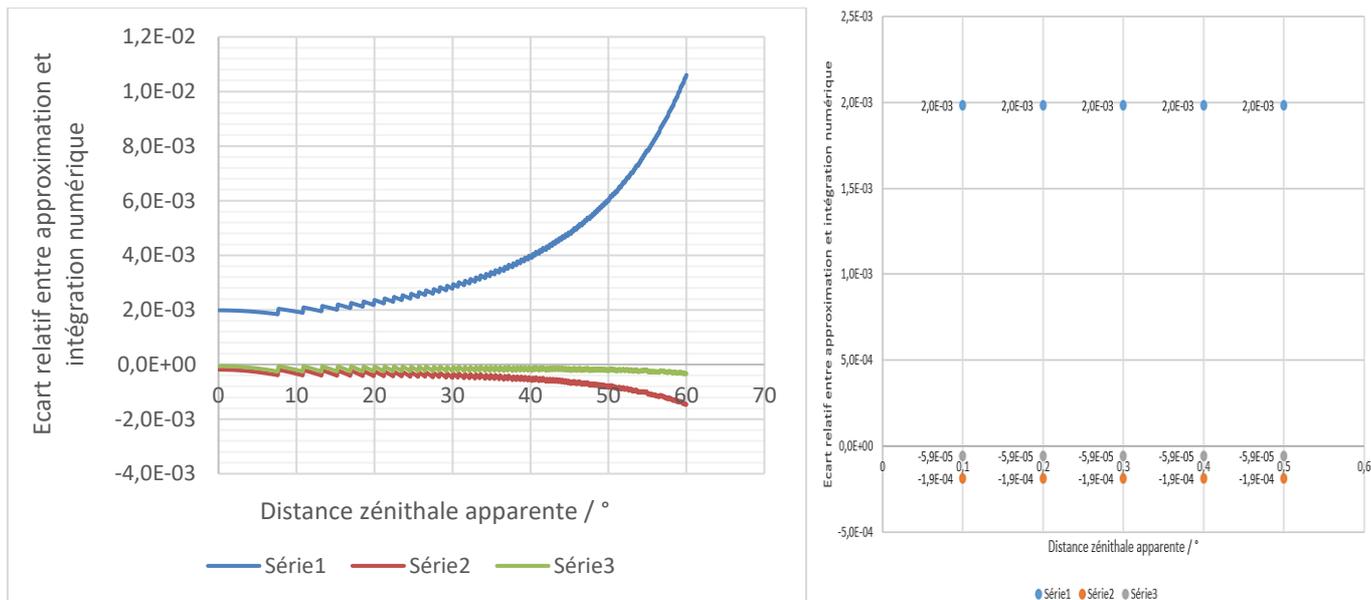


Figure 9 – Zooms de la Figure précédente, montrant le domaine d'erreur  $< 1\%$  pour l'approximation la plus grossière :  $\Delta_{\infty}^R$  (Série 1). Pour toutes les Figures 7-14 on a  $(T_s, P_s, \lambda_0) = (273.15 \text{ K}, 1000 \text{ hPa}, 550 \text{ nm})$ . Les calculs numériques sont menés en double précision concernant  $\Delta_{\infty}^{IN}$ ,  $\Delta_{\infty}^R$ ,  $\Delta_{\infty}^L$  et  $\Delta_{\infty}^D$ , donc on a pour chacun d'eux 15 chiffres significatifs. À  $Z' = 0.1^\circ$ , les 4 premiers chiffres significatifs sont communs entre  $\Delta_{\infty}^{IN}$  et  $\Delta_{\infty}^D$  – ils sont tous deux dans la fourchette  $(4.036 \pm 0.0005) \cdot 10^{-3} \text{ m}$  – donc il reste 11 chiffres significatifs pour  $\Delta_{\infty}^{IN} - \Delta_{\infty}^D$ , ce qui exclut que les artefacts donnant des dents de scie, bien visibles aux petites valeurs de  $Z'$  sur certains graphes, soient dus à des basculements de dernier bit ; ils sont donc vraisemblablement dus aux défauts mathématiques de l'algorithme RK4.

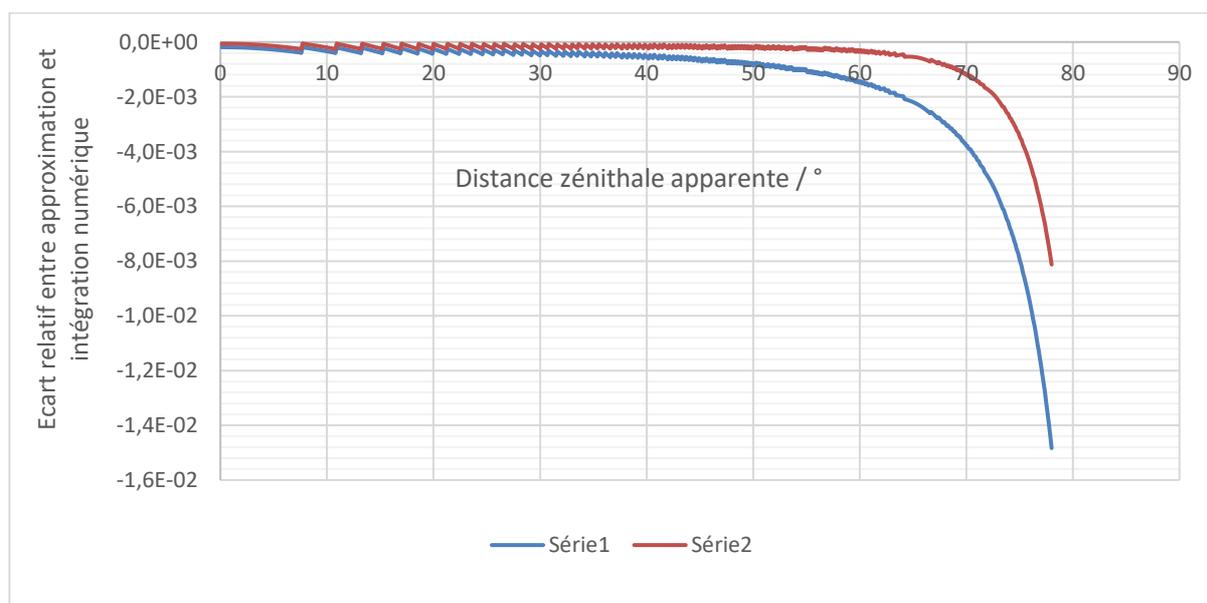


Figure 10 – Zoom de la Figure 8, en ne conservant que les deux meilleures approximations – dans l'ordre des séries,  $\Delta_{\infty}^L$  (Série 1) et  $\Delta_{\infty}^D$  (Série 2).

Les Figures 9 et 10 corroborent toujours le fait que de  $0^\circ$  à  $80^\circ$  au moins, l'approximation fournie par  $\Delta_\infty^D$  est meilleure que celle fournie par  $\Delta_\infty^L$ .

On note aussi que les courbes des Figures 8-10 ne tendent pas exactement vers l'origine quand  $Z'$  tend vers zéro. Cela vient de la légère différence de valeur entre les quatre dérivées mises juste ci-dessous (*et dont le nombre réduit de variables est lié, comme on l'a dit à la fin du sous-paragraphe 2.2, à l'adoption des hypothèses (a)-(e) et d'un type donné de modèles atmosphériques – par ex., ici, RGO à gradient thermique imposé*) :

$$\frac{\partial \Delta_\infty^{IN}}{\partial Z'}(0, T_s, P_s, \lambda_0) \cong 40.3620 \text{ mm}/^\circ \text{ d'après la Figure 11 (où les 4 séries sont quasi coïncidentes),}$$

$$\frac{\partial \Delta_\infty^R}{\partial Z'}(0, P_s, \lambda_0) = (\eta_s H_{1s})(P_s, \lambda_0) \cong 2.31716 \text{ m/rad} \cong 40.4420 \text{ mm}/^\circ \text{ (d'après la théorie, ainsi que}$$

pour les 2 dérivées suivantes),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_\infty^L}{\partial Z'}(0, T_s, P_s, \lambda_0) &= (\eta_s H_{1s})(P_s, \lambda_0) \left[ 1 - \frac{2H_{Bs}(T_s)}{r_s} \right] \\ &\cong (\eta_s H_{1s})(P_s, \lambda_0) (1 - 2.170 \cdot 10^{-3}) \cong 40.3542 \text{ mm}/^\circ \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_\infty^D}{\partial Z'}(0, T_s, P_s, \lambda_0) &= (\eta_s H_{1s})(P_s, \lambda_0) \left\{ 1 - \frac{2H_{Bs}(T_s)}{r_s} + \eta(T_s, P_s, \lambda_0) \left[ 1 - \frac{h_{2,0}^2(T_s) + 2h_{1,1}(T_s) - 2h_{2,1}^2(T_s)}{h_{1,0}(T_s)} \right] \right\} \\ &\cong (\eta_s H_{1s})(P_s, \lambda_0) (1 - 2.170 \cdot 10^{-3} + 1.299 \cdot 10^{-4}) \cong 40.3595 \text{ mm}/^\circ. \end{aligned}$$

L'ordonnée à l'origine de la courbe bleue – resp. rouge puis verte – sur la Figure 9 est théoriquement égale au rapport

$$\left[ \frac{\partial \Delta_\infty^R}{\partial Z'}(0, P_s, \lambda_0) / \frac{\partial \Delta_\infty^{IN}}{\partial Z'}(0, T_s, P_s, \lambda_0) \right] - 1 \cong 1.98 \cdot 10^{-3} \text{ (la valeur lue sur la Figure 9 est } 2.0 \cdot 10^{-3} \text{)}$$

– resp.

$$\left[ \frac{\partial \Delta_\infty^L}{\partial Z'}(0, P_s, \lambda_0) / \frac{\partial \Delta_\infty^{IN}}{\partial Z'}(0, T_s, P_s, \lambda_0) \right] - 1 \cong -1.91 \cdot 10^{-4} \text{ (la valeur lue sur la Figure 9 est } -1.9 \cdot 10^{-4} \text{)}$$

puis

$$\left[ \frac{\partial \Delta_\infty^D}{\partial Z'}(0, P_s, \lambda_0) / \frac{\partial \Delta_\infty^{IN}}{\partial Z'}(0, T_s, P_s, \lambda_0) \right] - 1 \cong -6.11 \cdot 10^{-5} \text{ (la valeur lue sur la Figure 9 est } -5.9 \cdot 10^{-5} \text{)} \dots$$

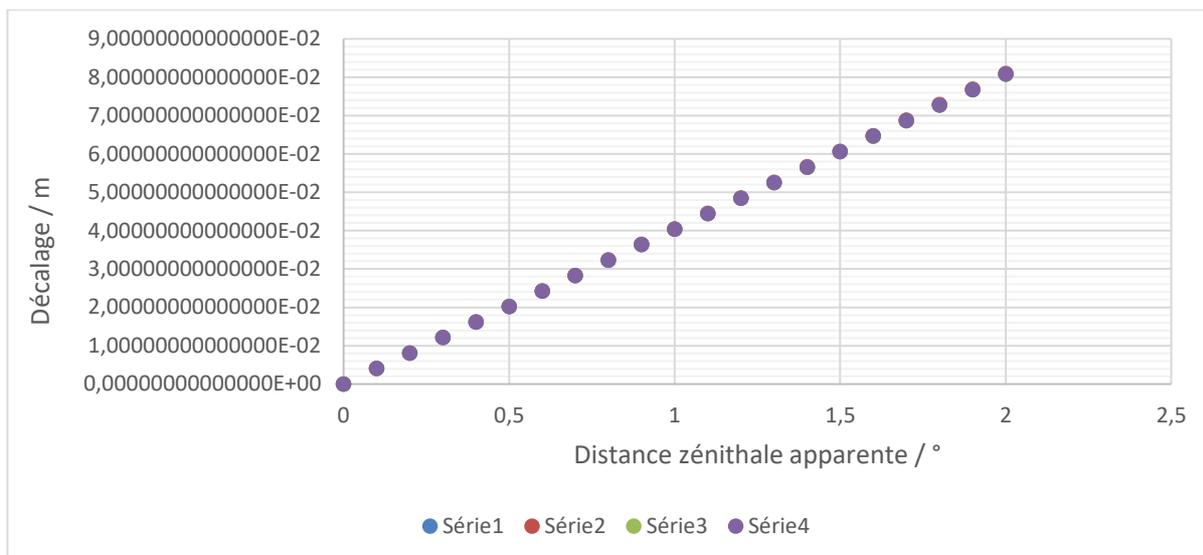


Figure 11 – Au voisinage de l'origine, et dans l'ordre des séries :  $\Delta_{\infty}^{IN}$ ,  $\Delta_{\infty}^R$ ,  $\Delta_{\infty}^L$  et  $\Delta_{\infty}^D$  (tous indiscernables) – [valeurs numériques des  $\Delta_{\infty}^{IN}$  fournies par H. LABRIJI, O. HERSCOVICI-SCHILLER, F. CASSAING – idem pour les Figures 12-14]

Une comparaison plus précise de  $\Delta_{\infty}^L$  et  $\Delta_{\infty}^D$  est possible sur la Figure 12, qui montre que l'approximation par  $\Delta_{\infty}^D$  est 4-5 fois plus précise (son optimum) que par  $\Delta_{\infty}^L$  de 55 à 65°, au moins 1.5 fois plus précise sur  $[0^{\circ}, 80^{\circ}]$ , et aussi précise que par  $\Delta_{\infty}^L$  à 85°. De 0 à 89° les erreurs liées à ces approximations sont de même sens – toutes les deux par défaut.

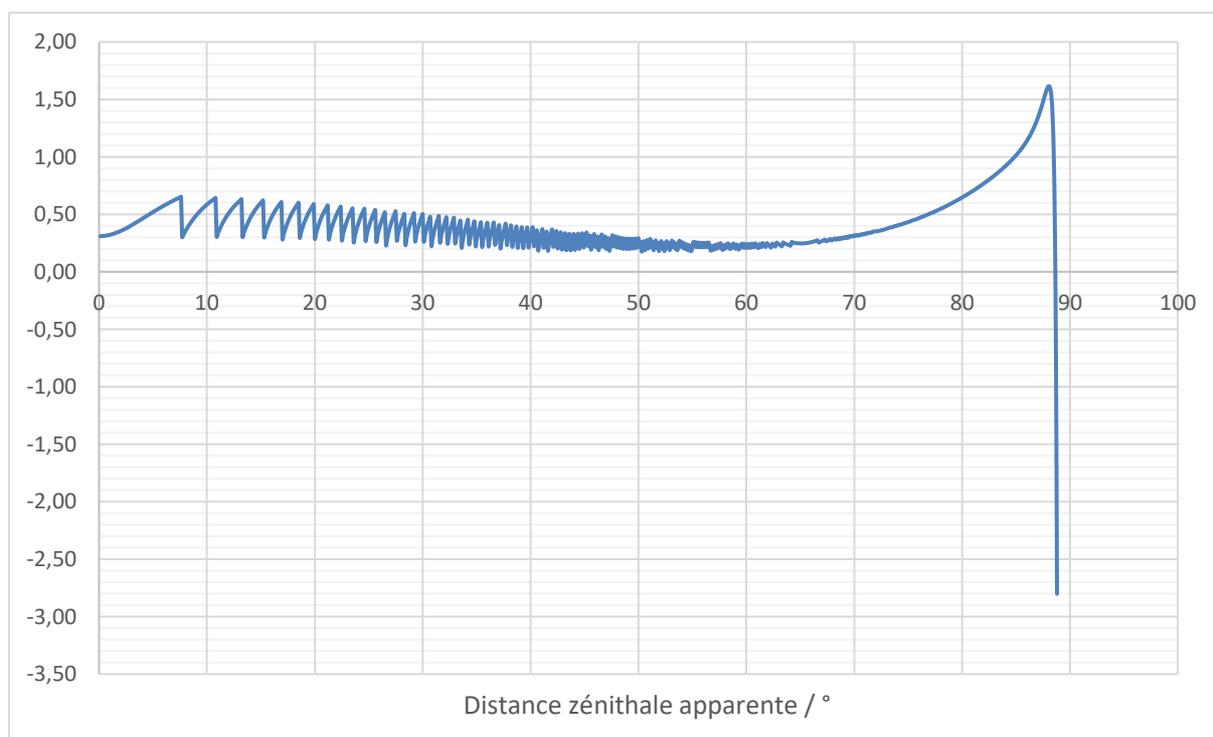


Figure 12 – Rapport  $(\Delta_{\infty}^D - \Delta_{\infty}^{IN}) / (\Delta_{\infty}^L - \Delta_{\infty}^{IN})$  en fonction de  $Z'$

Les Figures 13 et 14 zooment sur les énormes défauts galopants des trois approximations, de 85 à 89.9°.

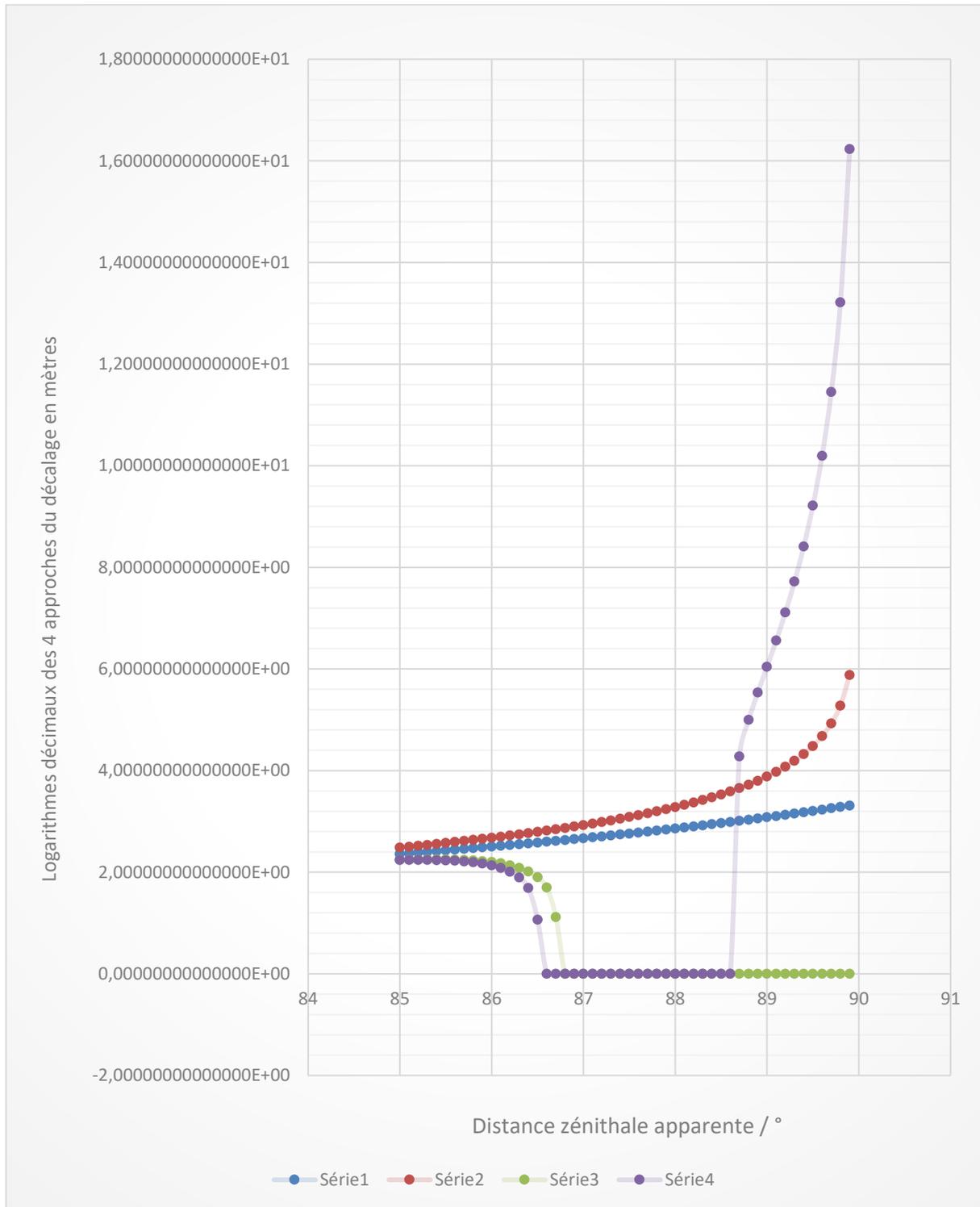


Figure 13 – Zoom de la Figure 7 montrant, dans l'ordre des séries, les logarithmes décimaux de  $\Delta_{\infty}^{IN}$ ,  $\Delta_{\infty}^R$ ,  $\Delta_{\infty}^L$  et  $\Delta_{\infty}^D$  en mètres, depuis 85° (sachant que les courbes de  $\Delta_{\infty}^L$  et  $\Delta_{\infty}^D$  viennent de se croiser entre 84.8 et 84.9°) jusqu'à 89.9° – les points sur l'axe sont dans un domaine où au moins l'un des décalages calculés est négatif (à partir de  $90^{\circ} - 3.3^{\circ} = 86.7^{\circ}$  comme attendu pour  $\Delta_{\infty}^L$ )

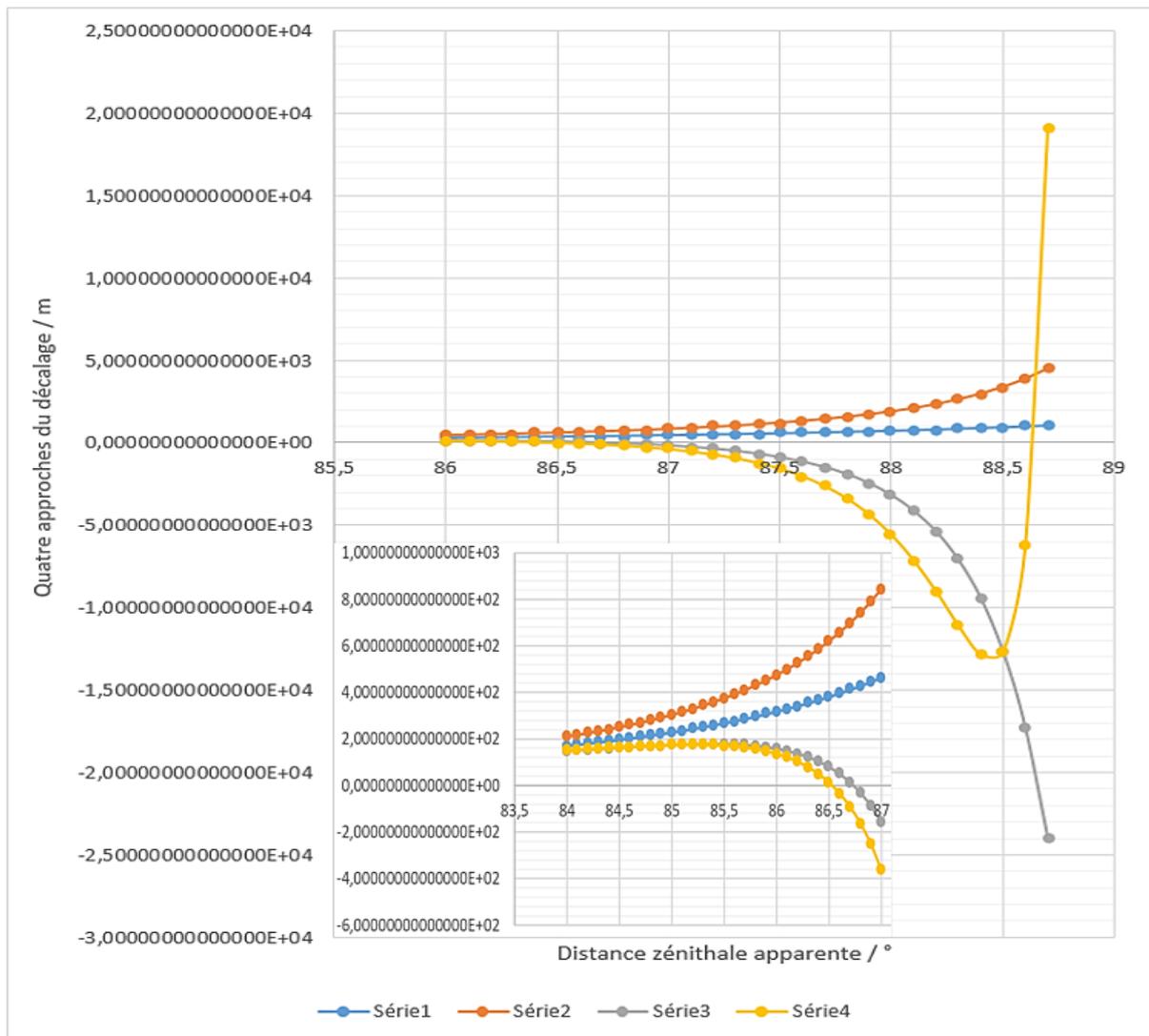


Figure 14 – Dans l'ordre des séries,  $\Delta_{\infty}^{IN}$ ,  $\Delta_{\infty}^R$ ,  $\Delta_{\infty}^L$  et  $\Delta_{\infty}^D$  – avec des échelles linéaires, mais en zoomant sur un domaine où ces deux derniers présentent des changements de signe – seulement de 84 à 88,7°, mais malgré cela ces courbes corroborent bien les trois divergences différentes en  $Z' = 90^{\circ}$  – celles de  $\Delta_{\infty}^R$  (courbe orange, Série 2), de  $\Delta_{\infty}^L$  (courbe grise, Série 3) et de  $\Delta_{\infty}^D$  (courbe jaune, Série 4) – conformément aux équivalents (XXXIX), (XLI) et (XLIII).

## 2.5. Variation de $\Delta_{\infty}$ avec la structure troposphérique à $T_S$ et $P_S$ fixés

Considérons qu'à  $(Z', T_S, P_S, \lambda_0)$  et donc  $H_{1S}$  fixés, la structure de la troposphère change (mais pas sa hauteur  $H_t$ ), et qu'au lieu d'être restée polytropique comme dans le modèle RGO (où la température de la tropopause est  $T_t$ ), elle a laissé se mettre en place une couche d'inversion caractérisée par trois paramètres indépendants : par exemple, la température  $T_{ib}$  de sa base – son altitude  $H_{ib}$  par rapport à celle de  $S$  est donc  $(T_S - T_{ib})/\sigma$  – son gradient thermique

$dT/dr = -\sigma_i > 0$ , et son épaisseur  $e_i$ , par exemple. D'après la loi de SIMPSON (voir la fin du sous-paragraphe 1.1.1), la mise en place de l'inversion ne change pas  $\Delta_\infty$ . En utilisant l'approximation suivante LHSCD, donc typiquement pour  $Z' < 80^\circ$ , on voit que cette mise en place s'accompagne d'un changement

$$\left(\delta\Delta_\infty^L\right)_{Z',T_s,P_s,\lambda_0} = \Delta_\infty^R(Z',P_s,\lambda_0) \left(1 - \frac{3}{\cos^2 Z'}\right) \left(\delta H_{BS}\right)_{T_s} / r_s$$

de  $\Delta_\infty$  à cause du changement  $\left(\delta H_{BS}\right)_{T_s}$  – de  $H_{BS}$  – dû à l'inversion considérée (où  $T_s$ , redisons-le, reste fixé). C'est pourquoi, à la fin de l'Appendice D, nous calculons  $\left(\delta H_{BS}\right)_{T_s}$ ; nous trouvons une expression un peu compliquée (D9), dont nous proposons une approximation simplifiante (d'ordre 1 en  $e_i$ ):

$$\left(\delta H_{BS}\right)_{T_s} \cong \left( \frac{j+1}{j+2} \frac{T_{ib}^{j+2} - T_i^{j+2}}{T_{ib}} + T_i^{j+1} \right) \frac{(\sigma - \sigma_i) e_i}{T_s^{j+2}} H_{1S}. \quad (\text{xLiv})$$

Dans les Tables 1-2 ci-dessous, nous donnons des applications numériques illustrant ce phénomène, avec  $t_s$  fixé à  $0^\circ\text{C}$ ), pour quatre inversions :

- une de  $0.8^\circ\text{C}$  de 30 à 50 m au-dessus de  $S$ , dite « faible » ;
- une de  $1.16^\circ\text{C}$  de 50 à 60 m au-dessus de  $S$ , dite « critique fine » ;
- une de  $2^\circ\text{C}$  de 50 à 60 m au-dessus de  $S$ , dite « raide » ;
- une de  $15^\circ\text{C}$  de 200 à 250 m au-dessus de  $S$ , dite « raide épaisse ».

	Inversion faible	Inversion critique fine	Inversion raide	Inversion raide épaisse
(D9)	$3.904 \cdot 10^{-6}$	$5.134 \cdot 10^{-6}$	$8.656 \cdot 10^{-6}$	$6.313 \cdot 10^{-5}$
(xLiv)	$3.908 \cdot 10^{-6}$	$5.136 \cdot 10^{-6}$	$8.658 \cdot 10^{-6}$	$6.313 \cdot 10^{-5}$

Table 1 – Valeurs de  $\left(\delta H_{BS}\right)_{T_s} / r_s$  selon les formules (D9) et (XLIV) pour 4 inversions

Pour avoir la variation relative  $\left(\delta\Delta_\infty^L\right)_{Z',T_s,P_s,\lambda_0} / \Delta_\infty^R(Z',P_s,\lambda_0)$ , il faut multiplier le résultat de la Table 1 par le facteur angulaire correctif  $1 - (3/\cos^2 Z')$ , donné dans la Table 2.

$Z' / ^\circ$	Facteur angulaire correctif	$Z' / ^\circ$	Facteur angulaire correctif
10	-2,09	50	-6,26
20	-2,40	60	-11,00
30	-3,00	70	-24,65
40	-4,11	80	-98,49

Table 2 – Valeurs du facteur angulaire correctif  $1 - (3/\cos^2 Z')$

Il n'y a pas d'effet de seuil pour  $(\delta H_{BS})_{T_S}/r_S$  et  $(\delta \Delta_\infty^L)_{Z', T_S, P_S, \lambda_0}$ , ni pour les variations correspondantes de  $\Delta_\infty^R$  et  $\Delta_\infty^D$ , quand  $\sigma_i$  dépasse la valeur critique  $\sigma_{i,c} \cong 0.116 \text{ K/m}$  ; en effet, ces effets ne sont visibles qu'auprès de l'horizon astronomique, où aucune des approximations fournissant  $\Delta_\infty^R$ ,  $\Delta_\infty^L$  et  $\Delta_\infty^D$  ne fonctionne ; pour modéliser un tel seuil (qui d'ailleurs s'avère critique quand il existe), il faut avoir recours à d'autres approximations – une des plus simples est montrée dans l'Appendice G.

## Conclusion

Comme d'habitude, l'étude analytique (notamment avec les séries) n'a pas la prétention de rivaliser en précision numérique avec les intégrations numériques, même si ces dernières souffrent aussi de limitations qui leur sont propres. Mais si l'on se satisfait de la précision atteignable avec les diverses formules approximatives que l'on a pu trouver, celles-ci gardent toujours l'appréciable avantage de fournir un raccourci théorique et de ne pas nécessiter d'ordinateur. En plus – et c'est à nos yeux le point le plus intéressant, souligné par la citation de HAMMING mise en épigraphe –, l'étude analytique peut déboucher sur une pénétration intellectuelle qui augmente notre compréhension : elle permet d'appliquer aux observations une grille d'analyse susceptible de faire mieux connaître le réel, y compris en révélant d'éventuels écarts significatifs entre les prédictions du modèle et la réalité – ce qui conduit à se concentrer ensuite sur la recherche des causes élucidant ces résidus inexplicables (que l'on classera temporairement dans les irrégularités, les anomalies, etc.). L'intérêt de l'explication rendue ainsi nécessaire trouve son origine dans l'éternelle imperfection de la compréhension, qui lui confère un caractère intrinsèquement dynamique : René THOM souligne bien que prédire n'est pas expliquer [26]. Dans notre présent travail, nous avons relevé quelques exemples de ce processus intellectuel.

Un autre point intéressant provient d'une vertu stimulante des mathématiques : leur capacité à révéler des liens cachés entre des notions ou des faits qui semblaient *a priori* déconnectés. Par exemple, nous avons déjà pu mettre en lumière une connexion quantitative [1, Eq. (8)] entre trois notions : la variation de  $\Delta_\infty$  avec  $\psi'$  à l'ordre 1 au voisinage de  $0^\circ$  d'une part, l'accourcissement (i.e. l'aplatissement de l'image atmosphérique du Soleil ou de la Lune – etc. – pour  $S$  quand elle est vue proche de l'horizon astronomique de celui-ci) d'autre part, et finalement un doublet de grandeurs utiles (le gradient vertical de réfractivité en  $S$  et la réfraction horizontale pour  $S$ ) ; dans le présent travail, nous approfondissons la connaissance de ce lien en révélant une connexion entre la variation de  $\Delta_\infty$  avec  $\psi'$  à l'ordre 2 au voisinage de  $0^\circ$  d'une part, la distorsion responsable d'une asymétrie de cette image proche de l'horizon astronomique d'autre part, et un triplet de grandeurs utiles : les deux précédentes, plus  $(\partial \chi_h / \partial r)_{S, \lambda_0}$  – qui donne la variation de réfraction horizontale pour  $S$  avec l'altitude, au voisinage de celle de  $S$ .

La connexion ici nouvellement mise à jour nous permet de lever l'interrogation sur des estimations discordantes du coefficient de distorsion angulaire verticale locale  $(\partial^2 \psi' / \partial \psi^2)_{h, \lambda_0}$  :  $0.06/^\circ$  d'après un calcul sur une table due à François MIGNARD [15, Table 1, p. 398], et  $(0.24 \pm 0.08)/^\circ$  d'après des mesures effectuées sur une photo de soleil couchant [15, Fig. 5] prise par lui et reproduite sur notre p. 17. En effet, à partir de la valeur  $(\partial \chi_h / \partial r)_{S, \lambda_0} \cong -3.43'/\text{km}$  (pour  $S$  au niveau de la mer) nouvellement tirée des données

numériques fournies par H. LABRIJ, O. HERSCOVICI-SCHILLER et F. CASSAING dans le cadre d'un modèle RGO, notre relation (xv) [7, p. 97] corrobore plutôt la première valeur de  $(\partial^2 \psi' / \partial \psi^2)_{h_{\lambda_0}}$ , donc nous fait diagnostiquer, par ce que l'on voit dans des détails de la photo en [15, Fig. 5], que vraisemblablement la valeur de  $(d^2 T / dr^2)_s$  correspondant à celle-ci est nettement différente de sa valeur standard.

Un progrès dans la compréhension grâce à l'étude analytique concerne la variation de  $\Delta_\infty$  avec  $P_s$ , montrée par [2, Fig. 6] mais alors inexplicée ; en établissant pour la première fois une expression de  $\Delta_\infty$  à l'ordre 2 en  $\eta$ , notre étude montre (dans le domaine de distances zénithales  $[0^\circ, 80^\circ]$  où nos expressions approchées de  $\Delta_{2\infty}$  sont acceptables), que ce phénomène est une manifestation de la non-linéarité ordinaire de  $\Delta_\infty$  en fonction de  $\eta$ , car  $\Delta_{2\infty}$  en rend très bien compte pour  $Z' \in [0^\circ, 80^\circ]$ . Nous avons donc gagné ici du terrain sur l'inexpliqué.

Une autre conquête, en partie similaire, concerne la variation de  $\Delta_\infty$  avec  $T_s$ , montrée par [2, Fig. 7] mais inexplicée aussi. Notre étude montre que l'expression de  $\Delta_\infty$  à l'ordre 1 en  $\eta$  ne l'explique qu'à 60 % environ à  $Z' = 5^\circ$ , et 78 % à  $45^\circ$ , mais surtout, que le résidu inexplicé n'est quasiment pas résorbé par l'étude à l'ordre 2 ; comme celle-ci ne change donc guère les résultats de l'étude d'ordre 1 sur ce point, on conjecture qu'il en sera de même avec l'étude à l'ordre 3. On conclut ici sur le fait que ce résidu est une anomalie persistante, pour ne pas dire une énigme stimulante en vue d'études ultérieures.

## Références

- [1] L. DETTWILLER, « Study of the lateral shift due to atmospheric refraction: alternative analytical methods, and new results », *J. Opt. Soc. Am. A* **41**, 1310-1318 (2024)
- [2] H. LABRIJ, O. HERSCOVICI-SCHILLER et F. CASSAING, « Computation of the lateral shift due to atmospheric refraction », *Astron. Astrophys.* **662**, A61 (2022)
- [3] Lord RAYLEIGH, « On the theory of stellar scintillation », *Phil. Mag.* **36**, 129-142 (1893)
- [4] T. NAKAJIMA, « Zenith-distance dependence of chromatic shear effect: a limiting factor for an extreme adaptive optics system », *Astrophys. J.* **652**, 1782–1786 (2006)
- [5] R. E. MCCROSKY et A. POSEN, « Special data-reduction procedures for prairie network meteor photographs », *SAO Special Report 273* (1968)
- [6] A. T. YOUNG, « Sunset Science. IV. Low-Altitude Refraction », *A. J.* **127**, 3622-3637 (2004)
- [7] L. DETTWILLER, « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique », *C. R. Phys.* **23**, 63-102 (2022)
- [8] J.-B. BIOT, « Sur les réfractions astronomiques », *Additions à la Connaissance des Temps* **1839** (1836), p. 3-114
- [9] A. BEMPORAD, « La teoria della refrazione astronomica direttamente fondata sui risultati della fisica dell'atmosfera », in *Atti della Accademia gioenia di scienze naturali in Catania, Ser. 5, Vol. 3, Mem. V* (1910)
- [10] L. ESSEN et K. D. FROOME, « The Refractive Indices and Dielectric Constants of Air and its Principal Constituents at 24,000 Mc/s », *Proc. Phys. Soc. B* **64**, 862-875 (1951)
- [11] Symposium - International Astronomical Union, Refractional Influences in Astrometry And Geodesy, *Proceedings of the International Astronomical Union* **89** (1979)

- [12] L. KOEHLIN et L. DETTWILLER, « Correction de la dispersion atmosphérique dans l'imagerie par les grands télescopes et les interféromètres astronomiques », *C. R. Phys.* **23**, 345-364 (2022)
- [13] L. DETTWILLER, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique – Une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie », *C. R. Phys.* **23**, 13-62 (2022)
- [14] L. DETTWILLER, « Le théorème de Biot et le changement de variable de Biot–Auer–Standish : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23**, 483-501 (2022)
- [15] F. MIGNARD, « Images du Soleil et de la Lune à l'horizon, depuis le sol ou la Station spatiale internationale », *C. R. Phys.* **23**, 391-414 (2022)
- [16] F. LINK, « Théorie photométrique des éclipses de Lune », *Bull. Astron.* **8**, 77-108 (1933)
- [17] F. LINK, *Eclipse Phenomena in Astronomy*, Springer (New York, 1969)
- [18] L. DETTWILLER, « La photométrie des éclipses de Lune, vue par František Link : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23**, 537-555 (2022)
- [19] B. SICARDY, « Study of atmospheres in the solar system, from stellar occultation or planetary transit », *C. R. Phys.* **23**, 213-241 (2022)
- [20] R. COUTY et J. EZRA, *Analyse*, t. 2, 4<sup>e</sup> éd., A. Colin (Paris, 1967)
- [21] S. NEWCOMB, *A Compendium of Spherical Astronomy*, Macmillan (New York, 1906)
- [22] E. W. WEISSTEIN, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, 2<sup>e</sup> éd., Chapman & Hall/CRC Press (Boca Raton, 2003)
- [23] L. DETTWILLER, « Les développements de Radau et leur divergence : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23**, 527-536 (2022)
- [24] L. DETTWILLER, « Short review on the refractive index of air as a function of temperature, pressure, humidity and ionization », *preprint* (2022), <https://arxiv.org/abs/2204.02603>
- [25] J. KOVALEVSKY et P. K. SEIDELMANN, *Fundamentals of Astrometry*, Cambridge University Press (Cambridge, 2004)
- [26] R. THOM, *Prédire n'est pas expliquer – Entretiens avec Émile Noël*, coll. Champs Sciences, Flammarion (Paris, 1993)
- [27] J. H. LAMBERT, *Les propriétés remarquables de la route de la lumière*, H. Scheurleer F. Z. & Compagnie (La Haye, 1758)
- [28] L. DETTWILLER, « Les développements de Lambert : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23**, 453-465 (2022)
- [29] B. TAYLOR, *Methodus incrementorum directa & inversa*, Gul. Innys (Londres, 1715)
- [30] T. WUNDERLICH, *Die voraussetzungsfree Bestimmung von Refraktionswinkeln*, *Geowiss. Mitt.*, vol. 26, Tech. Univ. Wien (Vienne, 1985)
- [31] G. BAHNERT, « Zur Bestimmung lokaler Refraktionskoeffizienten », *Vermessungstechnik.* **35**, 14-17 (1987)
- [32] R. JOECKEL, M. STOBER et W. HUEP, *Elektronische Entfernung und Richtungsmessung und ihre Integraion in aktuelle Positionierungsverfahren*, Wichmann Verlag (Heidelberg, 2008)
- [33] C. HIRT, S. GUILLAUME, A. WISBAR, B. BÜRKI et H. STERNBERG, « Monitoring the refraction coefficient in the lower atmosphere using a controlled setup of simultaneous reciprocal vertical angle measurements », *J. Geophys. Res.* **115**, D21102 (2010)
- [34] R. D. SAMPSON, E. P. LOZOWSKI et A. E. PETERSON, « Comparison of modelled and observed astronomical refraction of the setting Sun », *Appl. Opt.* **42**, 342-353 (2003)
- [35] M. E. TSCHUDIN, « Refraction near the horizon – An empirical approach. Part 2: variability of astronomical refraction at low positive altitude (LPAAR) », *Observatory* **139**, 29-68 (2019)
- [36] C. Y. HOHENKERK et A. T. SINCLAIR, « The computation of angular atmospheric refraction at large zenith angles », 1985, Nautical Almanac Office Tech. Note 63, H. M. Nautical Almanac Office, Royal Greenwich Observatory, Londres, p. 1–12.
- [37] B. GARFINKEL, « Astronomical refraction in a polytropic atmosphere », *Astron. J.* **72**, 235-254 (1967)

- [38] J. SAASTAMOINEN, « Contributions to the theory of atmospheric refraction. Part II. Refraction corrections in satellite geodesy », *Bull. Geod.* **47**, 13-34 (1973)
- [39] H. A. LORENTZ, « Concerning the relation between the velocity of propagation of light and the density and composition of media », *Verh. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam* **18** (1878), p. 1-119, in *Collected papers*, t. 2, Nijhoff (La Hague, 1936)
- [40] M. BERTIN, J.-P. FAROUX et J. RENAULT, *Électromagnétisme 4 – milieux diélectriques et milieux aimantés*, Dunod Université (Paris, 1984)
- [41] K. P. BIRCH, « Precise determination of refractometric parameters for atmospheric gases », *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 647-651 (1991)
- [42] P. E. CIDDOR, « Refractive index of air: new equations for the visible and near infrared », *Appl. Opt.* **35**, 1566-1573 (1996)
- [43] G. BÖNSCH et E. POTULSKI, « Measurement of the refractive index of air and comparison with modified Edlén's formulae », *Metrologia* **35**, 133-139 (1998).
- [44] H. A. LORENTZ, « Concerning the relation between the velocity of propagation of light and the density and composition of media », *Verh. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam* **18** (1878), p. 1-119, in *Collected papers*, t. 2, Nijhoff, La Hague, 1936.
- [45] H. BARRELL et J. E. SEARS, « The refraction and dispersion of air for the visible spectrum », *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A* **238**, 1-64 (1939)
- [46] B. EDLÉN, « The refractive index of air », *Metrologia* **2**, 71-80 (1966)
- [47] J. C. OWENS, « Optical refractive index of air: dependence on pressure, temperature and composition », *Appl. Opt.* **6**, 51-59 (1967)
- [48] B. EDLÉN, « The dispersion of standard air », *J. Opt. Soc. Am.* **43**, 339-344 (1953)
- [49] P. BOUGUER, *De la Méthode d'Observer Exactly sur Mer la Hauteur des Astres*, Claude Jombert (Paris, 1729)
- [50] L. DETTWILLER, « L'invariant de Bouguer et ses conséquences : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23**, 415-452 (2022)
- [51] T. SIMPSON, *Mathematical Dissertations on a Variety of Physical and Analytical Subjects*, T. Woodward (Londres, 1743)
- [52] P. BOUGUER, « Second mémoire sur les réfractions astronomiques, observées dans la Zone Torride ; avec diverses remarques sur la manière d'en construire les Tables », *Mem. Acad. Roy. Sci. année 1749*, 75-112 (1753)
- [53] A. WEGENER, « Elementare Theorie der atmosphärischen Spiegelungen », *Ann. Phys.* **57**, 203-230 (1918)
- [54] H. L. SAWATZKY et W. H. LEHN, « The Arctic mirage and the early North Atlantic », *Science* **192**, 1300-1305 (1976)
- [55] L. DETTWILLER, « Some theorems on "arctic mirages" : *hillingar* effect and superior mirages », *J. Opt. Soc. Am. A* **36**, 1997-2004 (2019)
- [56] L. DETTWILLER, « La discussion par Kummer d'une quadrature sur la réfraction astronomique : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23**, 503-525 (2022)
- [57] F.-A. FOREL, *Le Léman – Monographie limnologique*, t. 2, F. Rouge (Lausanne, 1895)
- [58] A. T. YOUNG, « Relations among atmospheric structure, refraction, and extinction », *C. R. Phys.* **23**, 179-212 (2022)
- [59] L. DETTWILLER, « Properties of optical ducts, their chromatism and its effects on astronomical refraction », *preprint* (2022), <https://arxiv.org/abs/2204.02605>

## Appendice A : définition, expression et valeurs numériques du coefficient de réfraction

Le coefficient de réfraction en  $S$ , très utile dans l'étude des réfractions astronomique et atmosphérique, est défini par

$$\kappa_S(\lambda_0) := C_{Sh}(\lambda_0) r_S \quad (\text{A1})$$

où  $C_{Sh}(\lambda_0)$  désigne la courbure en  $S$  (comptée positivement vers le bas) d'un rayon lumineux associé à  $\lambda_0$  et horizontal en  $S$  – voir [7, § 7.1.4] par exemple. Compte tenu de l'expression de la courbure d'un rayon lumineux, il est bien connu, depuis le travail Johann Heinrich LAMBERT (1728-1777) en 1758 [27,28], que

$$\kappa_S(\lambda_0) = -\frac{r_S}{n_S(\lambda_0)} \left( \frac{\partial n}{\partial r} \right)_{\lambda_0} (r_S, \lambda_0) \quad (\text{A2})$$

Dans le domaine visible, l'essentiel du coefficient de réfraction  $\kappa_S$  au niveau de l'observateur  $S$  est dû au gradient vertical de pression, qui change peu ; mais, à cause de la grande variabilité du gradient thermique  $-\sigma_S$  au niveau de l'observateur, on observe fréquemment de grands écarts à la moyenne de  $\kappa_S(\lambda_0)$ . Sa première détermination remonte à Brook TAYLOR en 1715, qui trouve  $\kappa_S \cong 1/5$  environ [13, p. 29] [29] ; une quarantaine d'années après, à partir d'une mesure de la dépression de l'horizon effectuée par Jean-Dominique et Jacques CASSINI en 1701 depuis un sommet du Roussillon, LAMBERT obtient  $\kappa_S \cong 1/7.06$  [27, p. 70-71] [28, p. 456]...

Moyennant les hypothèses (a)-(d), et l'approximation d'ordre 1 en  $\eta_S(\lambda_0)$  qui donne

$$\kappa_S(\lambda_0) \cong -r_S \left( \frac{\partial n}{\partial r} \right)_{\lambda_0} (r_S, \lambda_0),$$

on montre facilement (voir [7, p. 78] par exemple) que

$$\kappa_S(\lambda_0) = \frac{a_S - \sigma_S}{b_S(\lambda_0)}. \quad (\text{A3})$$

Le dénominateur  $b_S(\lambda_0)$  varie<sup>22</sup> avec les conditions thermodynamiques en  $S$ , ainsi qu'avec la longueur d'onde (il est dispersif mais *en sens inverse* de l'indice de l'air) ; on sait que pour la

<sup>22</sup> On a  $b_S(\lambda_0) = RT_S^2 / [M_a P_S C(\lambda_0)]$ . Ainsi, plusieurs auteurs [30-33] donnent la formule

$$\kappa_S(\lambda_0) \cong 503 \frac{0.0343 - [\sigma_S / (\text{K} \cdot \text{m}^{-1})]}{(T_S^2 / \text{K}^2) / (P_S / \text{hPa})} \quad \text{dans le visible ; le coefficient}$$

raie d (alias D3) de l'hélium (588 nm),  $b_s \cong 150 \text{ K/km}$  à  $3.1 \text{ °C}$  et  $1 \text{ atm}$  [7, p. 78]. Quant à  $a_s$ , c'est une constante<sup>23</sup> voisine de  $34 \text{ K/km}$ .

Si  $S$  est au niveau de la mer, avec l'atmosphère standard US1976, on a  $\kappa_s(588 \text{ nm}) \cong 1/5.9$  ; pour le même niveau, et encore avec  $\sigma_s \cong 6.5 \text{ K/km}$  comme dans l'atmosphère standard, le *Nautical Almanac* donne  $\kappa_s \cong 1/5.7$  qui correspond environ à  $50 \text{ ° F} = 10 \text{ °C}$  et  $1 \text{ 010 hPa}$  en  $S$ . L'effet du gradient thermique  $-\sigma_s < 0$  contrecarre seulement un peu celui du gradient de pression vertical. Dans des conditions stables  $\sigma_s < 9.8 \text{ K/km}$ , donc  $\kappa_s(588 \text{ nm}) > 1/6.7 > 0$  à  $15 \text{ °C}$  et  $1 \text{ atm}$ . Noter que  $\sigma_s$  présente des variations diurnes, et que la valeur standard  $6.5 \text{ K/km}$  est la mieux approchée au coucher du Soleil [35]. La valeur moyenne de  $\kappa_s$  adoptée par les géodésiens est environ  $1/7$ , car les points géodésiques sont plutôt sur des lieux élevés où  $P_s < 1 \text{ 010 hPa}$ , et les mesures souvent sont effectuées lors de journées ensoleillées propices aux opérations de triangulation ; pour la raie d,  $\kappa_s \cong 1/7$  correspond par exemple à  $t_s \cong 20 \text{ °C}$  et  $P_s \cong 888 \text{ hPa}$  (pression standard à  $1,1 \text{ km}$  au-dessus du niveau de la mer).

---


$$252 \frac{0.0342 - [\sigma_s / (\text{K} \cdot \text{m}^{-1})]}{(T_s^2 / \text{K}^2) / (P_s / \text{hPa})} \text{ donné par [34, Eq. (3)] est théoriquement la moitié. Les variations}$$

de 0 à 100 % du taux d'humidité, ainsi que celles de 0 à 1 000 ppmv de  $\text{CO}_2$ , ne sont pas perceptibles sur le 3<sup>e</sup> chiffre significatif de  $b_s(\lambda_0)$ . Mais les variations usuelles de  $T_s$  et  $P_s$  le sont : dans les mesures géodésiques, on prend plutôt  $\kappa_s(588 \text{ nm}) \cong 0.14$  en moyenne, car ces mesures se font souvent par de belles après-midi chaudes et ensoleillées en des lieux relativement élevés – ce qui rend  $T_s^2/P_s$  (et donc  $b_s$ ) supérieur à sa valeur standard.

<sup>23</sup> de type A, égale à  $M_a g_s / R$ . Elle ne peut guère varier qu'avec  $g_s$ , qui décroît au taux de  $0.03086 \text{ \% / km}$  en fonction de l'altitude de  $S$ , et croît avec la valeur absolue de sa latitude (de  $0.53024 \text{ \%}$  de l'équateur aux pôles, mais ceci entraîne une légère brisure de symétrie sphérique) ; dans la pratique, ceci ne change pas les deux premiers chiffres significatifs de cette constante  $a_s$  – et celle-ci fait ultimement intervenir la constante des gaz parfaits, mais c'est une constante fondamentale de type D. Il y a ensuite la masse molaire  $M_a$  de l'air ; si l'on considère l'air sec, elle est quasiment invariable – la croissance du titre molaire normal en  $\text{CO}_2$ , de 330 ppmv à 450 ppmv, fait passer  $M_a$  de  $28.962659 \text{ g/mol}$  à  $28.964101 \text{ g/mol}$ , mais cela ne change pas le 4<sup>e</sup> chiffre significatif de  $a_s$ . Pour  $S$  au niveau de la mer à l'équateur, on a  $g_s \cong 9.780327 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  d'où  $a_s \cong 34.07 \text{ K/km}$  ; avec la pesanteur normale  $g_s \cong 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  on a  $a_s \cong 34.16 \text{ K/km}$  ; et pour  $S$  au niveau de la mer, aux pôles où  $g_s \cong 9.832186 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , il vient  $a_s \cong 34.25 \text{ K/km}$ . C'est pour cette raison que nous n'annonçons que deux chiffres significatifs pour  $a_s$ .

**Appendice B : démonstration moderne d'une expression de**  
 $\left(\frac{\partial \psi'}{\partial \psi}\right)_{\lambda_0} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right)$  (théorème de BIOT, 1836) ; expression de  $\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \psi'^2}\right)_{\lambda_0} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0\right)$ ,  
**et du coefficient de distorsion  $\left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial \psi^2}\right)_{h, \lambda_0}$  ([7], 2022)**



INSTITUT DE FRANCE  
 Académie des sciences

# *Comptes Rendus*

---

## *Physique*

Luc Dettwiller

**Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique**

Volume 23, Special Issue S1 (2022), p. 63-102

Published online: 8 March 2023

Issue date: 11 August 2023

<https://doi.org/10.5802/crphys.113>

**Part of Special Issue:** Astronomie, atmosphères et réfraction

**Guest editors:** Pierre Léna (Professeur émérite, Observatoire de Paris et Université Paris Cité, membre de l'Académie des sciences) and Luc Dettwiller (Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France)

 This article is licensed under the  
 CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION 4.0 INTERNATIONAL LICENSE.  
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Les Comptes Rendus. Physique sont membres du  
 Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte  
[www.centre-mersenne.org](http://www.centre-mersenne.org)  
 e-ISSN : 1878-1535

Adaptation de [7, p. 95 ss] (licence CC BY 4.0), DOI : <https://doi.org/10.5802/crphys.113>

### Annexe B. Coefficient de distorsion angulaire verticale locale

On considère l'expression  $\chi(r(\theta), \psi'(\theta))$  de la réfraction en  $M$  pour le rayon lumineux  $(R_{Sh})$  arrivant horizontal en  $S$ , et dont la direction de la tangente en  $M$  fait, avec la direction orthoradiale, l'angle  $\psi'(\theta) = \theta - u(\theta)$ . On voit que (Figure B1)

$$\chi(r(\theta), \psi'(\theta)) = \chi(r_S, 0) - u(\theta). \quad (B1)$$

96

Luc Dettwiler

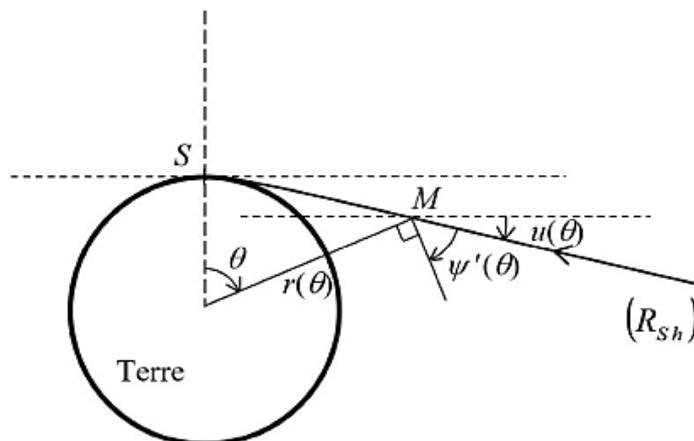


FIGURE B1. Notations utiles pour la deuxième démonstration du théorème de Biot, et son prolongement au second ordre; le sens positif pour les angles définis ici est le sens indirect, et sur cette figure  $\psi'(\theta)$  et  $\psi(\theta)$  sont positifs — ce signe étant cohérent avec ce qui précède dans le présent article.

Comme cette relation est vraie pour tout  $\theta$ , dans un premier temps on en déduit l'égalité des dérivées premières

$$\frac{d\chi}{d\theta} = \frac{\partial\chi}{\partial r} \frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial\chi}{\partial\psi'} \left(1 - \frac{du}{d\theta}\right) = -\frac{du}{d\theta} \quad (B2)$$

et on va voir que cela nous fait retrouver le théorème de Biot. En effet, au point  $S$  tel que  $\theta := 0$  et  $r = r_S$ , on a  $dr/d\theta = 0$  (c'est la symétrie essentielle pour cette démonstration, qui découle de la symétrie de la loi de Bouguer exprimée avec la fonction cosinus); de plus, en  $S$  on a  $ds/d\theta = r_S$ , donc

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{ds} \frac{ds}{d\theta} = C_S r_S = \kappa_S \quad (B3)$$

et alors

$$(1 - \kappa_S) \left( \frac{\partial\chi}{\partial\psi'} \right)_{Sh} = -\kappa_S. \quad (B4)$$

Comme ici  $\kappa$  est de signe quelconque, ainsi que  $u$ , le résultat est valable aussi bien pour  $\psi' \rightarrow 0_+$  que pour  $\psi' \rightarrow 0_-$ ; cela montre que  $\chi$  et donc  $\psi$  sont dérivables par rapport à  $\psi'$  en  $\psi' = 0$ . On utilise encore  $\psi' = \psi + \chi$ , et par dérivation par rapport à  $\psi'$  il vient

$$1 = \frac{\partial\psi}{\partial\psi'} + \frac{\partial\chi}{\partial\psi'}; \quad (B5)$$

donc sur l'horizon de  $S$  on a

$$\left( \frac{\partial\psi}{\partial\psi'} \right)_{Sh} = 1 - \left( \frac{\partial\chi}{\partial\psi'} \right)_{Sh} = 1 - \frac{-\kappa_S}{1 - \kappa_S} \quad (B6)$$

et finalement on retrouve le résultat

$$\gamma_{Sh} = \left( \frac{\partial\psi}{\partial\psi'} \right)_{Sh}^{-1} = 1 - \kappa_S. \quad (B7)$$

Dans un second temps, on déduit de (B1) l'égalité des dérivées secondes :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\chi}{d\theta^2} &= \left( \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} \frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial^2\chi}{\partial\psi'\partial r} \frac{d\psi'}{d\theta} \right) \frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial\chi}{\partial r} \frac{d^2r}{d\theta^2} \\ &+ \left( \frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial\psi'} \frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial^2\chi}{\partial\psi'^2} \frac{d\psi'}{d\theta} \right) \frac{d\psi'}{d\theta} + \frac{\partial\chi}{\partial\psi'} \frac{d^2\psi'}{d\theta^2} = -\frac{d^2u}{d\theta^2} \end{aligned} \quad (B8)$$

où

$$\frac{d\psi'}{d\theta} = 1 - \frac{du}{d\theta} \text{ et } \frac{d^2\psi'}{d\theta^2} = -\frac{d^2u}{d\theta^2}. \quad (B9)$$

Au point S, beaucoup de termes disparaissent car on a, en plus de ce qui a été dit au début de cette Annexe,  $d^2u/d\theta^2 = 0$  car la fonction  $u$  de la variable  $\theta$  est impaire. Donc

$$\frac{\partial\chi}{\partial r}(r_S, 0) \frac{d^2r}{d\theta^2}(0) + \frac{\partial^2\chi}{\partial\psi'^2}(r_S, 0) \left[ 1 - \frac{du}{d\theta}(0) \right]^2 = 0. \quad (B10)$$

De l'expression de la courbure de  $(R_{Sh})$  en coordonnées polaires,

$$C = \left[ r^2 + 2 \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r \frac{d^2r}{d\theta^2} \right] / \left[ r^2 + \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{3/2}, \quad (B11)$$

dont on considère la valeur  $C_{Sh}$  en S, on tire

$$\frac{d^2r}{d\theta^2}(0) = r_S(1 - C_{Sh} r_S) = r_S(1 - \kappa_S). \quad (B12)$$

Et comme, d'après le théorème de Biot et (B2), on a

$$\frac{du}{d\theta}(0) = \kappa_S \quad (B13)$$

— voir (B3) — il vient

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial\psi'^2}(r_S, 0) = -\frac{r_S}{1 - \kappa_S} \frac{\partial\chi}{\partial r}(r_S, 0) \text{ noté } \left( \frac{\partial^2\chi}{\partial\psi'^2} \right)_{Sh} = -\frac{r_S}{1 - \kappa_S} \left( \frac{\partial\chi}{\partial r} \right)_{Sh}, \quad (B14)$$

donc

$$\left( \frac{\partial^2\psi'}{\partial\psi'^2} \right)_{Sh} = \frac{r_S}{1 - \kappa_S} \left( \frac{\partial\chi}{\partial r} \right)_{Sh} \quad (B15)$$

car

$$\chi(r, \psi') = \psi' - \psi(r, \psi'). \quad (B16)$$

Enfin,

$$\left( \frac{\partial^2\psi'}{\partial\psi'^2} \right)_{Sh} = - \left( \frac{\partial^2\psi}{\partial\psi'^2} \right)_{Sh} / \left( \frac{\partial\psi}{\partial\psi'} \right)_{Sh}^3 = -\gamma_{Sh} \Delta_{Sh} = -r_S(1 - \kappa_S)^2 \left( \frac{\partial\chi}{\partial r} \right)_{Sh} > 0 \quad (B17)$$

où  $\Delta_{Sh}$  désigne la valeur en S, pour  $\psi' = 0$ , du coefficient d'asymétrie  $\Delta$  défini au sous-paragraphe 2.2.2 de l'article [91] dans ce numéro spécial; nous avons ainsi obtenu plusieurs expressions de  $(\partial^2\psi'/\partial\psi'^2)_{Sh}$  que nous appelons le « coefficient de distorsion angulaire verticale locale » sur l'horizon. Il dépend de tout le profil d'indice de l'atmosphère, contrairement à  $\gamma_{Sh}$  qui ne dépend que de  $n_S$  et  $(dn/dr)_S$ . La grandeur  $(\partial\chi/\partial r)_{Sh}$  à laquelle il est relié joue un grand rôle dans la théorie des éclipses et des occultations par les planètes [66, p. 92], [67, 68]; c'est celle que Link noterait  $(1/2)(d\omega/dh_0)$  (voir le paragraphe 3 de [68]). Sur la Figure 4 de l'article [91] de ce numéro spécial, la mesure de la différence des positions relatives des points haut et bas de l'image du Soleil couchant (par rapport aux points haut et bas du cercle pointillé respectivement) permet d'estimer, pour la hauteur angulaire vraie du centre du Soleil, la valeur du coefficient de distorsion angulaire verticale locale,  $\partial^2\psi'/\partial\psi'^2 \cong (0,24 \pm 0,08)^\circ$  alors que d'après la Table 1 de ce même article il devrait valoir  $0,06^\circ$ ...

### Remarque

Si  $\kappa_S \rightarrow 1_-$ , alors  $\chi_{Sh} \rightarrow +\infty$ ,  $\left(\frac{\partial Z}{\partial Z'}\right)_{h\lambda_0} \rightarrow +\infty$ , et  $\left(\frac{\partial \Delta_\infty}{\partial Z'}\right)_{h\lambda_0}$  ainsi que  $\left(\frac{\partial^2 \Delta_\infty}{\partial Z'^2}\right)_{h\lambda_0}$  divergent.

## Appendice C : obtention de l'expression finale du terme d'ordre 2 (par rapport au profil de réfractivité en $\eta$ ) pour le décalage latéral $\Delta_\infty$

Nous commençons par le terme d'ordre 2, donné par la relation (xxii), du développement de l'intégrale  $I(r)$  :

$$I_2(r) = \int_r^\infty \left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 \left\{ 3[\eta(r') - \eta_S]^2 \left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 - \left[\left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 - 1\right] [\eta^2(r') - 4\eta(r')\eta_S + 3\eta_S^2] \right\} \left[\left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 - 1\right]^{-5/2} \frac{dr'}{2r'}.$$

On l'ordonne selon les puissances croissantes de  $\eta_S$  :

$$\begin{aligned} I_2(r) &= \int_r^\infty \left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 \left\{ 3\eta^2(r') \left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 - \left[\left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 - 1\right] \eta^2(r') \right\} \left[\left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 - 1\right]^{-5/2} \frac{dr'}{2r'} \\ &\quad - 2\eta_S \int_r^\infty \left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 \left\{ 3\eta(r') \left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 - 2 \left[\left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 - 1\right] \eta(r') \right\} \left[\left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 - 1\right]^{-5/2} \frac{dr'}{2r'} \\ &\quad + 3\eta_S^2 \int_r^\infty \left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 \left\{ \left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 - \left[\left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 - 1\right] \right\} \left[\left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 - 1\right]^{-5/2} \frac{dr'}{2r'} \\ &= \int_r^\infty \left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 \eta^2(r') \left[\left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] \left[\left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 - 1\right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'} \\ &\quad - \eta_S \int_r^\infty \left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 \eta(r') \left[\left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 + 2\right] \left[\left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 - 1\right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'} \\ &\quad + \frac{3\eta_S^2}{2} \int_r^\infty \left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 \left[\left(\frac{r'}{r_S \sin Z'}\right)^2 - 1\right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'}. \end{aligned}$$

Or l'intégrale qui multiplie le terme  $3\eta_S^2/2$  s'écrit aussi

$$\int_{\arcsin \frac{r_S \sin Z'}{r}}^0 \left(\frac{1}{\sin \beta'}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{\sin \beta'}\right)^2 - 1\right]^{-5/2} \left(-\frac{\cos \beta'}{\sin \beta'}\right) d\beta' = \int_0^{\arcsin \frac{r_S \sin Z'}{r}} \frac{\sin^2 \beta'}{\cos^4 \beta'} d\beta' = \int_0^{\arcsin \frac{r_S \sin Z'}{r}} \tan^2 \beta' \frac{d\beta'}{\cos^2 \beta'} ;$$

nous la calculons par le changement de variable  $u' := \tan \beta'$ , qui donne

$$\int_0^{\arcsin \frac{r_s \sin Z'}{r}} \tan^2 \beta' \frac{d\beta'}{\cos^2 \beta'} = \int_0^{\tan\left(\arcsin \frac{r_s \sin Z'}{r}\right)} u'^2 du' = \left[ \frac{u'^3}{3} \right]_0^{\frac{r_s \sin Z'}{\sqrt{r^2 - (r_s \sin Z')^2}}} = \frac{1}{3} \left[ \frac{r_s \sin Z'}{\sqrt{r^2 - (r_s \sin Z')^2}} \right]^3,$$

et ceci nous permet d'obtenir l'expression (xxiii) annoncée.

La relation (xxv)

$$\Delta_2(r) = r \left\{ I_2(r) \cos [I_0(r)] - \frac{I_1^2(r)}{2} \sin [I_0(r)] \right\} - r_s \left( I_{2s} \cos I_{0s} - \frac{I_{1s}^2}{2} \sin I_{0s} \right)$$

devient, compte tenu de  $I_0(r) = \arcsin \frac{r_s \sin Z'}{r}$  et  $I_{0s} = Z'$  (cf. le début du sous-paragraphe 2.2, par exemple),

$$\begin{aligned} \Delta_2(r) &= r \left\{ I_2(r) \cos \left( \arcsin \frac{r_s \sin Z'}{r} \right) - \frac{I_1^2(r)}{2} \sin \left( \arcsin \frac{r_s \sin Z'}{r} \right) \right\} - r_s \left( I_{2s} \cos Z' - \frac{I_{1s}^2}{2} \sin Z' \right) \\ &= \left[ \sqrt{r^2 - (r_s \sin Z')^2} I_2(r) - r_s I_{2s} \cos Z' \right] - \frac{r_s \sin Z'}{2} [I_1(r) + I_{1s}] [I_1(r) - I_{1s}] \end{aligned}$$

dont nous déduisons facilement l'expression (xxvi) annoncée.

Dans la relation (xxix)

$$\begin{aligned} \Delta_2(\infty) &= (\eta_s r_s \cos Z') \int_{r_s}^{\infty} \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 \eta(r') \left[ \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 + 2 \right] \left[ \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'} \\ &\quad - (r_s \cos Z') \int_{r_s}^{\infty} \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 \eta^2(r') \left[ \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] \left[ \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'} - \frac{\eta_s^2 r_s \sin^3 Z'}{2 \cos^2 Z'} \\ &\quad + \frac{r_s \sin Z'}{2} \left\{ (\eta_s \tan Z') - \int_{r_s}^{\infty} \eta(r') \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 \left[ \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-3/2} \frac{dr'}{r'} \right\}^2, \end{aligned}$$

on développe l'expression de l'accolade au carré, puis l'on voit que le premier terme de ce carré s'élimine avec le dernier terme de la ligne précédente, tandis que le double produit donne un terme en  $\eta_s$  que l'on groupe avec celui de la première ligne, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \Delta_2(\infty) &= (\eta_s r_s \cos Z') \int_{r_s}^{\infty} \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 \eta(r') \left\{ \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 + 2 - (\tan Z')^2 \left[ \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 - 1 \right] \right\} \left[ \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'} \\ &\quad - (r_s \cos Z') \int_{r_s}^{\infty} \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 \eta^2(r') \left[ \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] \left[ \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-5/2} \frac{dr'}{r'} \\ &\quad + \frac{r_s \sin Z'}{2} \left\{ \int_{r_s}^{\infty} \eta(r') \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 \left[ \left( \frac{r'}{r_s \sin Z'} \right)^2 - 1 \right]^{-3/2} \frac{dr'}{r'} \right\}^2 \end{aligned}$$

et, en utilisant  $1 + \tan^2 Z' = 1/\cos^2 Z'$ , on obtient l'expression (xxx) annoncée.

Dans l'expression (xxxi)

$$\begin{aligned} \Delta_{2\infty} &= (\cos Z')(\sin Z') \eta_s \int_0^{\infty} \left( 1 + \frac{z'}{r_s} \right) \left[ (1 - \tan^2 Z') \left( 1 + \frac{z'}{r_s} \right)^2 + \sin^2 Z' + \tan^2 Z' \right] \left[ \left( 1 + \frac{z'}{r_s} \right)^2 - \sin^2 Z' \right]^{-5/2} \eta dz' \\ &\quad - (\cos Z')(\sin Z') \int_0^{\infty} \left( 1 + \frac{z'}{r_s} \right) \left[ \left( 1 + \frac{z'}{r_s} \right)^2 + \frac{\sin^2 Z'}{2} \right] \left[ \left( 1 + \frac{z'}{r_s} \right)^2 - \sin^2 Z' \right]^{-5/2} \eta^2 dz' \\ &\quad + \frac{\sin^3 Z'}{2r_s} \left\{ \int_0^{\infty} \left( 1 + \frac{z'}{r_s} \right) \left[ \left( 1 + \frac{z'}{r_s} \right)^2 - \sin^2 Z' \right]^{-3/2} \eta dz' \right\}^2 \end{aligned}$$

on n'effectue plus aucune approximation concernant  $\eta$ , mais pour le reste des intégrandes on les approxime classiquement par leurs développements limités à l'ordre 1 en  $v' := z'/r_s$ ; cela donne

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{2\infty}}{r_s} &\cong (\cos Z')(\sin Z') \eta_s \int_0^{\infty} (1+v') \left[ (1 + \sin^2 Z') + 2(1 - \tan^2 Z')v' \right] \left[ (\cos Z')^2 + 2v' \right]^{-5/2} \eta dv' \\ &\quad - (\cos Z')(\sin Z') \int_0^{\infty} (1+v') \left( 1 + \frac{\sin^2 Z'}{2} + 2v' \right) \left[ (\cos Z')^2 + 2v' \right]^{-5/2} \eta^2 dv' \\ &\quad + \frac{\sin^3 Z'}{2} \left\{ \int_0^{\infty} (1+v') \left[ (\cos Z')^2 + 2v' \right]^{-3/2} \eta dv' \right\}^2 \end{aligned}$$

et, en multipliant membre à membre par  $(\cos Z')^4/\sin Z'$ , il vient (toujours à l'ordre 1 en  $v'$ )

$$\begin{aligned} \frac{\cos^4 Z'}{\sin Z'} \frac{\Delta_{2\infty}}{r_s} &\cong (1 + \sin^2 Z') \eta_s \int_0^{\infty} \left[ 1 + \left( 1 + 2 \frac{1 - \tan^2 Z'}{1 + \sin^2 Z'} - \frac{5}{\cos^2 Z'} \right) v' \right] \eta dv' \\ &\quad - \left( 1 + \frac{\sin^2 Z'}{2} \right) \int_0^{\infty} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{4}{2 + \sin^2 Z'} - \frac{5}{\cos^2 Z'} \right) v' \right] \eta^2 dv' \\ &\quad + \frac{\tan^2 Z'}{2} \left\{ \int_0^{\infty} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{3}{\cos^2 Z'} \right) v' \right] \eta dv' \right\}^2. \end{aligned}$$

Pour préciser notre expression ci-dessus  $\Delta_2(\infty)$ , nous utilisons maintenant

$$\eta_s h_{1,0} := \int_0^\infty \eta \, dv', \quad \frac{\eta_s h_{2,0}^2}{2} := \int_0^\infty v' \eta \, dv', \quad 2\eta_s^2 h_{1,1} = \int_0^\infty \eta^2 \, dv' \quad \text{et} \quad (\eta_s h_{2,1})^2 = \int_0^\infty v' \eta^2 \, dv' ;$$

nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\cos^4 Z'}{\sin Z'} \frac{\Delta_{2\infty}}{r_s} &= (1 + \sin^2 Z') \left[ \eta_s h_{1,0} + \left( 1 + 2 \frac{1 - \tan^2 Z'}{1 + \sin^2 Z'} - \frac{5}{\cos^2 Z'} \right) \frac{\eta_s h_{2,0}^2}{2} \right] \eta_s \\ &\quad - \left( 1 + \frac{\sin^2 Z'}{2} \right) \left[ 2\eta_s^2 h_{1,1} + \left( 1 + \frac{4}{2 + \sin^2 Z'} - \frac{5}{\cos^2 Z'} \right) (\eta_s h_{2,1})^2 \right] \\ &\quad + \frac{\tan^2 Z'}{2} \left[ \eta_s h_{1,0} + \left( 1 - \frac{3}{\cos^2 Z'} \right) \frac{\eta_s h_{2,0}^2}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\cos^4 Z'}{\sin Z'} \frac{\Delta_{2\infty}}{\eta_s^2 r_s} &= (1 + \sin^2 Z') h_{1,0} + \left( 1 + \sin^2 Z' + 2 - 2 \tan^2 Z' - \frac{5}{\cos^2 Z'} - 5 \tan^2 Z' \right) \frac{h_{2,0}^2}{2} \\ &\quad + \frac{\tan^2 Z'}{2} \left[ h_{1,0} + \left( 1 - \frac{3}{\cos^2 Z'} \right) \frac{h_{2,0}^2}{2} \right]^2 \\ &\quad - (2 + \sin^2 Z') h_{1,1} - \left( \frac{2 + \sin^2 Z'}{2} + 2 - \frac{5}{2} \frac{2 + \sin^2 Z'}{\cos^2 Z'} \right) h_{2,1}^2 \end{aligned}$$

d'où, moyennant un peu d'algèbre et en utilisant  $\sin^2 Z' = 1 - \cos^2 Z'$ , les expressions (xxxiv)-(xxxv) annoncées.

## Appendice D : propriétés de quelques hauteurs caractéristiques relatives, pour certains modèles d'atmosphère

### Modèles du *Royal Greenwich Observatory* (RGO)

Les modèles d'atmosphère RGO consistent en une troposphère de hauteur  $H_t$ , dans laquelle la température à l'altitude absolue  $H$  est  $T_0 - \sigma H$  (avec  $\sigma = 6.50$  K/km), surmontée d'une stratosphère isotherme de température  $T_s := T_0 - \sigma H_t$  jusqu'à  $H$  infini. Ils ont été utilisés par un département de l'Observatoire de Greenwich pour implémenter  $\chi_s$ , selon le code de HOHENKERK-SINCLAIR [36] qui utilise le changement de variable de BIOT-AUER-STANDISH

[8,14] avec un certain modèle d'atmosphère suffisant pour ce propos – celui proposé par GARFINKEL [37] puis SAASTAMOINEN [38].

L'équation différentielle (xxvii) régissant  $P$  – qui requiert l'hypothèse (c) – donne, dans la troposphère,

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dz'} = - \frac{M_a g}{R(T_s - \sigma z')}$$

et s'intègre facilement moyennant les hypothèses (d)-(e) ; la troposphère est alors polytropique d'indice  $j := \frac{M_{aS} g_S}{R \sigma} - 1 \cong 4.25$  (si  $g \cong g_S \cong 9.79 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  comme pour l'article [2]), tel que

$$P(z') = \left( \frac{T_s - \sigma z'}{T_s} \right)^{j+1} P_S \quad \text{pour } z' \leq H_t - H_S, \quad (\text{D1})$$

où  $H_S$  désigne l'altitude absolue de l'observateur situé dans la troposphère ; alors, en posant

$$\rho_S := T_t/T_S = (T_0 - \sigma H_t)/T_S \quad \text{et} \quad \zeta := \frac{RT_t}{M_{aS} g_S r_S}, \quad \text{on a}$$

$$P(z') = P_S \rho_S^{j+1} \exp\left( \frac{H_t - H_S - z'}{r_S \zeta} \right) \quad \text{pour } z' \geq H_t - H_S \quad (\text{D2})$$

dans le cadre des modèles de type RGO.

Remarquons que, dans la détermination théorique des profils de pression et de masse volumique, il est facile de prendre en compte la non-uniformité de  $g$  supposé à symétrie sphérique – et donc de se passer de l'hypothèse (e) – si l'on se contente des approximations

$$\frac{T(r)}{g(r)} \cong \frac{T_s - \sigma z'}{g_S} \left( \frac{r_s + z'}{r_s} \right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{T}{g} \cong \frac{T_s}{g_S} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma}{T_s} - \frac{2}{r_s} \right) z' \right] \quad \text{à l'ordre 1 en } z' \text{ dans la troposphère,}$$

ce qui donne – en posant  $\sigma' := \sigma - (2T_s/r_s) \cong 6.41 \text{ K/km}$  et  $j' := \frac{M_{aS} g_S}{R \sigma'} - 1 \cong 4.32$  –,

$$P(z') = \left( \frac{T_s - \sigma' z'}{T_s} \right)^{j'+1} P_S \quad \text{pour } z' \leq H_t - H_S ;$$

puis, dans la stratosphère isotherme,

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dz'} = - \frac{M_a g_S}{RT_t'} \left( 1 + \frac{z'}{r_s} \right)^{-2}$$

donc

$$P(z') = P_S \rho_S'^{j'+1} \exp\left[ \frac{r_s}{\zeta'} \left( \frac{1}{r_s + z'} - \frac{1}{r_s + H_t - H_S} \right) \right] \quad \text{pour } z' \geq H_t - H_S,$$

avec  $\xi' := \frac{RT'_t}{M_{aS} g_S r_S} \cong \frac{RT_t}{M_{aS} g(r_S + H_t - H_S) r_S}$  sans dimension,  $T'_t := T_S - \sigma'(H_t - H_S)$  et  $\rho'_S := T'_t/T_S$ .

Dans le but de confronter nos résultats théoriques aux valeurs données par l'intégration numérique [2] où  $g$  est supposé uniforme, nous revenons définitivement à l'hypothèse (e), et aux expressions (D1)-(D2); elles correspondent aux approximations où  $-\sigma'' := 2T_S/r_S \cong 0.086 \text{ K/km} \ll \sigma$ , et  $-j'' := -\left(\frac{M_{aS} g_S}{R \sigma''} - 1\right) \cong 399 \gg 1$ . L'erreur associée est négligeable, compte tenu de la petitesse de  $\delta\Delta_\infty/\Delta_\infty \cong 3.3 \cdot 10^{-7}$  (calculé au sous-paragraphe 1.1.1) conforme à la loi de SIMPSON pour  $\Delta_\infty$ .

En plus, grâce aux hypothèses (c) et (d) – donc indépendamment de l'hypothèse (e) – il vient respectivement les équations différentielles

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dz'} = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz'} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dz'} - \frac{1}{M_a} \frac{dM_a}{dz'} \text{ et } \frac{dM_a}{dz'} = 0 ;$$

or, dans la troposphère, à cause de l'expression (D1),

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dz'} = (j+1) \frac{1}{T} \frac{dT}{dz'} \text{ d'où } \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz'} = \frac{1}{P} \frac{dP}{dz'} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dz'} = (j+1) \frac{1}{T} \frac{dT}{dz'} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dz'} = j \frac{1}{T} \frac{dT}{dz'}$$

qui donne – en posant  $v' := z'/r_S = (H - H_S)/r_S$  –

$$\mu(z') = \left(\frac{T_S - \sigma z'}{T_S}\right)^j \mu_S = \left(1 - \frac{\sigma r_S}{T_S} v'\right)^j \mu_S \text{ pour } z' \leq H_t - H_S,$$

tandis que, dans la stratosphère,

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz'} = \frac{1}{P} \frac{dP}{dz'} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dz'} \text{ et } \frac{dT}{dz'} = 0$$

d'où, en posant  $v'_t := (H_t - H_S)/r_S = (1 - \rho_S)T_S/(\sigma r_S)$ ,

$$\mu = \mu_S \rho_S^j \exp\left(\frac{v'_t - v'}{\xi}\right) \text{ pour } z' \geq H_t - H_S$$

à cause de l'expression (D2).

## Expression de quelques hauteurs caractéristiques

Grâce à l'hypothèse (a) – en plus des hypothèses (b)-(e) – on trouve

$$\begin{aligned}
h_{1,0} &= \frac{1}{\mu_s} \int_0^\infty \mu dv' = \int_0^{v'_t} \left(1 - \frac{\sigma r_s}{T_s} v'\right)^j dv' + \int_{v'_t}^\infty \rho_s^j \exp\left(\frac{v'_t - v'}{\xi}\right) dv' \\
&= \frac{T_s}{\sigma r_s} \frac{1 - \rho_s^{j+1}}{j+1} + \rho_s^j \xi = \frac{T_s}{\sigma r_s} \frac{R \sigma}{M_{a,s} g_s} - \frac{T_s \rho_s}{\sigma r_s} \frac{R \sigma}{M_{a,s} g_s} \rho_s^j + \rho_s^j \frac{R T_t}{M_{a,s} g_s r_s}
\end{aligned}$$

donc

$$h_{1,0} = \frac{R T_s}{M_{a,s} g_s r_s} \quad (\text{D3})$$

comme attendu d'après la première partie du résultat (ii), et qui s'écrit aussi

$$h_{1,0} = \frac{\xi}{\rho_s} = \frac{1}{j+1} \frac{T_s}{\sigma r_s} = \frac{v'_t}{(j+1)(1-\rho_s)} ;$$

puis

$$\begin{aligned}
\frac{h_{2,0}^2}{2} &= \frac{1}{\mu_s} \int_0^\infty v' \mu dv' = \int_0^{v'_t} \left(1 - \frac{\sigma r_s}{T_s} v'\right)^j v' dv' + \int_{v'_t}^\infty v' \rho_s^j \exp\left(\frac{v'_t - v'}{\xi}\right) dv' \\
&= \left\{ \left[ -\frac{T_s}{\sigma r_s} \frac{1}{j+1} \left(1 - \frac{\sigma r_s}{T_s} v'\right)^{j+1} v' \right]_0^{v'_t} - \int_0^{v'_t} -\frac{T_s}{\sigma r_s} \frac{1}{j+1} \left(1 - \frac{\sigma r_s}{T_s} v'\right)^{j+1} dv' \right\} \\
&\quad + \left\{ \left[ -v' \xi \exp\left(\frac{v'_t - v'}{\xi}\right) \right]_{v'_t}^\infty - \int_{v'_t}^\infty -\xi \exp\left(\frac{v'_t - v'}{\xi}\right) dv' \right\} \rho_s^j \\
&= \frac{1}{j+1} \frac{T_s}{\sigma r_s} \left( -v'_t \rho_s^{j+1} + \frac{T_s}{\sigma r_s} \frac{1 - \rho_s^{j+2}}{j+2} \right) + (v'_t + \xi) \xi \rho_s^j \\
&= \left\{ (j+1) \left[ -(1-\rho_s) \rho_s^{j+1} + \frac{1 - \rho_s^{j+2}}{j+2} \right] + [(j+1)(1-\rho_s) + \rho_s] \rho_s^{j+1} \right\} h_{1,0}^2 \\
&= \left[ (j+1) \frac{1 - \rho_s^{j+2}}{j+2} + \rho_s^{j+2} \right] h_{1,0}^2
\end{aligned}$$

$$h_{2,0}^2 = 2 \frac{j+1 + \rho_s^{j+2}}{j+2} h_{1,0}^2 \quad (\text{D4})$$

(qui est responsable de la sévérité de la divergence, en  $\psi' = 0$ , de  $\Delta_{2\infty}$ ) où

$$T_s = T_0 - \sigma H_s, \quad \xi = \frac{R [T_s - \sigma (H_t - H_s)]}{M_{a,s} g_s r_s}$$

et  $\rho_s = 1 - \frac{\sigma}{T_s} (H_t - H_s)$ , (D5)

$$\begin{aligned}
h_{1,1} &= \frac{1}{2\mu_s^2} \int_0^\infty \mu^2 dv' = \frac{1}{2} \left[ \int_0^{v'_t} \left(1 - \frac{\sigma r_s}{T_s} v'\right)^{2j} dv' + \int_{v'_t}^\infty \rho_s^{2j} \exp\left(2 \frac{v'_t - v'}{\xi}\right) dv' \right] \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{T_s}{\sigma r_s} \frac{1 - \rho_s^{2j+1}}{2j+1} + \frac{\rho_s^{2j} \xi}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[ (j+1) \frac{1 - \rho_s^{2j+1}}{2j+1} + \frac{\rho_s^{2j+1}}{2} \right] h_{1,0} \\
&= \frac{2(j+1)(1 - \rho_s^{2j+1}) + (2j+1)\rho_s^{2j+1}}{2(2j+1)} \frac{h_{1,0}}{2}
\end{aligned}$$

$$h_{1,1} = \frac{2(j+1) - \rho_s^{2j+1}}{2j+1} \frac{h_{1,0}}{4}, \quad (\text{D6})$$

et, pour finir,

$$\begin{aligned}
h_{2,1}^2 &= \frac{1}{\mu_s^2} \int_0^\infty v' \mu^2 dv' = \int_0^{v'_t} \left(1 - \frac{\sigma r_s}{T_s} v'\right)^{2j} v' dv' + \int_{v'_t}^\infty v' \rho_s^{2j} \exp\left(2 \frac{v'_t - v'}{\xi}\right) dv' \\
&= \left\{ \left[ -\frac{T_s}{\sigma r_s} \frac{1}{2j+1} \left(1 - \frac{\sigma r_s}{T_s} v'\right)^{2j+1} v' \right]_0^{v'_t} - \int_0^{v'_t} -\frac{T_s}{\sigma r_s} \frac{1}{2j+1} \left(1 - \frac{\sigma r_s}{T_s} v'\right)^{2j+1} dv' \right\} \\
&\quad + \left\{ \left[ -v' \frac{\xi}{2} \exp\left(2 \frac{v'_t - v'}{\xi}\right) \right]_{v'_t}^\infty - \int_{v'_t}^\infty -\frac{\tau}{2} \exp\left(2 \frac{v'_t - v'}{\xi}\right) dv' \right\} \rho_s^{2j} \\
&= -\frac{T_s}{\sigma r_s} \frac{\rho_s^{2j+1}}{2j+1} v'_t + \left(\frac{T_s}{\sigma r_s}\right)^2 \frac{1 - \rho_s^{2j+2}}{(2j+2)(2j+1)} + \left(v'_t + \frac{\xi}{2}\right) \frac{\xi}{2} \rho_s^{2j} \\
&= (j+1) \left\{ -\frac{\rho_s^{2j+1}}{2j+1} (j+1)(1 - \rho_s) + \frac{1 - \rho_s^{2(j+1)}}{2(2j+1)} + \left[1 - \rho_s + \frac{\rho_s}{2(j+1)}\right] \frac{\rho_s^{2j+1}}{2} \right\} h_{1,0}^2 \\
&= (j+1) \frac{4(j+1)^2 [\rho_s^{2(j+1)} - \rho_s^{2j+1}] + 2(j+1) [1 - \rho_s^{2(j+1)}] + (2j+1) \{2(j+1)\rho_s^{2j+1} - [2(j+1) - (2j+1)]\rho_s^{2(j+1)}\}}{4(2j+1)(j+1)} h_{1,0}^2
\end{aligned}$$

qu'en ordonnant suivant les puissances croissantes de  $\rho_s$ , on met sous la forme

$$\begin{aligned}
h_{2,1}^2 &= \frac{2(j+1) + 2(j+1)[2j+1 - 2(j+1)]\rho_s^{2j+1} + [(4j^2 + 8j + 4) - (2j+2) - (2j+2)]\rho_s^{2(j+1)}}{2j+1} \frac{h_{1,0}^2}{4} \\
&= \frac{2(j+1) - 2(j+1)\rho_s^{2j+1} + 4j(j+1)\rho_s^{2(j+1)}}{2j+1} \frac{h_{1,0}^2}{4}
\end{aligned}$$

d'où finalement

$$h_{2,1}^2 = \frac{(j+1) [1 - \rho_s^{2j+1} + 2j\rho_s^{2(j+1)}]}{2j+1} \frac{h_{1,0}^2}{2}. \quad (\text{D7})$$

Enfin, grâce à la 2<sup>e</sup> partie du résultat (ii), nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{H_{BS}}{r_S} &= \frac{1}{r_S} \int_0^\infty \frac{P}{P_S} dz' = \int_0^{H_t-H_S} \left( \frac{T_S - \sigma z'}{T_S} \right)^{j+1} \frac{dz'}{r_S} + \int_{H_t-H_S}^\infty \rho_S^{j+1} \exp\left( \frac{H_t - H_S - z'}{r_S \zeta} \right) \frac{dz'}{r_S} \\ &= \frac{T_S}{\sigma r_S} \frac{1 - \rho_S^{j+2}}{j+2} + \frac{H_{1S}}{r_S} \rho_S^{j+2} = \left[ (j+1) \frac{1 - \rho_S^{j+2}}{j+2} + \rho_S^{j+2} \right] h_{1,0} \end{aligned}$$

$$\frac{H_{BS}}{r_S} = \frac{j+1 + \rho_S^{j+2}}{j+2} h_{1,0} = \frac{h_{2,0}^2}{2 h_{1,0}}. \quad (\text{D8})$$

### Dérivées de ces hauteurs caractéristiques, fonctions de la seule variable $T_S$

Rappelons qu'au paragraphe 2 notamment (où ces dérivées sont requises), nous considérons que non seulement  $r_S$  et  $H_S$ , mais aussi  $R$ ,  $M_{as}$ ,  $g_S$ ,  $\sigma$  et  $H_t$  (qui sont associés aux modèles de type RGO), constituent des paramètres invariables ; donc  $j$ , qui se déduit de ces paramètres, est invariable aussi. Mais nous considérons  $T_S$  et  $P_S$  comme des variables – donc  $T_0 = T_S + \sigma H_S$  est *a priori* variable aussi.

De l'expression (D3) très simple et très connue, on tire immédiatement

$$dh_{1,0}/dT_S = h_{1,0}/T_S.$$

Pour les dérivées suivantes, nous devons disposer de  $d\rho_S/dT_S$ , que l'on déduit de l'expression (D5) :

$$\frac{d\rho_S}{dT_S} = \frac{\sigma}{T_S^2} (H_t - H_S).$$

En dérivant logarithmiquement les expressions (D4) et (D6)-(D8), on trouve

$$\frac{dh_{2,0}^2}{dT_S} = \left[ \frac{(j+2) \rho_S^{j+1}}{j+1 + \rho_S^{j+2}} \frac{d\rho_S}{dT_S} + \frac{2}{T_S} \right] h_{2,0}^2,$$

$$\frac{dh_{1,1}}{dT_S} = \left[ -\frac{(2j+1) \rho_S^{2j}}{2(j+1) - \rho_S^{2j+1}} \frac{d\rho_S}{dT_S} + \frac{1}{T_S} \right] h_{1,1},$$

$$\frac{dh_{2,1}^2}{dT_S} = \left[ \frac{-(2j+1) + 4j(j+1)\rho_S}{1 - \rho_S^{2j+1} + 2j\rho_S^{2(j+1)}} \rho_S^{2j} \frac{d\rho_S}{dT_S} + \frac{2}{T_S} \right] h_{2,1}^2,$$

et

$$\frac{dH_{BS}}{dT_S} = \left[ \frac{(j+2) \rho_S^{j+1}}{j+1 + \rho_S^{j+2}} \frac{d\rho_S}{dT_S} + \frac{1}{T_S} \right] H_{BS}.$$

## Expression de $H_{BS}$ pour une atmosphère RGO modifiée par une couche d'inversion au-dessus de $S$

Pour étudier l'effet, sur  $\Delta_\infty$ , d'une couche d'inversion, calculons la variation  $(\delta H_{BS})_{T_S}$  de  $H_{BS}$  entre le modèle RGO avec  $(T_S, P_S)$  [2], et le modèle modifié ayant fait place à une couche d'inversion dans la troposphère au-dessus de  $S$ , mais conservant les altitudes absolues  $H_t$  et  $H_S$  de la tropopause et de  $S$ , ainsi que  $T_S$  – donc ne modifiant pas  $H_{1S}$ .

$$T(z') = \begin{cases} T_S - [(T_S - T_{ib})z'/H_{ib}] & \text{avec } T_{ib} := T_S - H_{ib}\sigma & \text{pour } z' \in [0, H_{ib}] \\ T_{ib} - (z' - H_{ib})\sigma_i & \text{avec } \sigma_i < 0 & \text{pour } z' \in [H_{ib}, H_{ib} + e_i] \\ T_{iH} - [z' - (H_{ib} + e_i)]\sigma & \text{avec } T_{iH} := T_{ib} + (-\sigma_i)e_i & \text{pour } z' \in [H_{ib} + e_i, H_t - H_S] \\ T_{iH} - [(H_t - H_S) - (H_{ib} + e_i)]\sigma & & \text{pour } z' \in [H_t - H_S, \infty[ \end{cases}$$

L'indice polytropique dans la couche d'inversion est  $j_i := \frac{M_{aS} g_S}{R \sigma_i} - 1 < 0$ . Dorénavant, nous

mettons un « prime » aux symboles des autres *paramètres* qui peuvent être modifiés par la présence de l'inversion, comme par exemple la température de la tropopause

$$\begin{aligned} T_{it} &= T_{iH} - [(H_t - H_S) - (H_{ib} + e_i)]\sigma = T_S - (H_t - H_S)\sigma + (\sigma - \sigma_i)e_i \\ &= T_t + (\sigma - \sigma_i)e_i > T_t. \end{aligned}$$

Munis de ces notations, il nous est facile d'écrire la solution de l'équation différentielle (xxvii) ; elle est telle que

$$\frac{P(z')}{P'_S} = \begin{cases} [(T_S - \sigma z')/T_S]^{j+1} & \text{pour } z' \in [0, H_{ib}] \\ \left(\frac{T_{ib}}{T_S}\right)^{j+1} \left[\frac{T_{ib} - (z' - H_{ib})\sigma_i}{T_{ib}}\right]^{j+1} & \text{pour } z' \in [H_{ib}, H_{ib} + e_i] \\ \left(\frac{T_{ib}}{T_{iH}}\right)^{j-j_i} \left\{ \frac{T_{iH} - [z' - (H_{ib} + e_i)]\sigma}{T_S} \right\}^{j+1} & \text{pour } z' \in [H_{ib} + e_i, H_t - H_S] \\ \left(\frac{T_{ib}}{T_{iH}}\right)^{j-j_i} \rho'_S{}^{j+1} \exp\left(-\frac{z'}{\rho_S H_{1S}}\right) & \text{avec } \rho_{iS} := \frac{T_{it}}{T_S} \text{ pour } z' \in [H_t - H_S, \infty[. \end{cases}$$

En utilisant une fois de plus la 2<sup>e</sup> partie du résultat (ii) – adaptée aux nouvelles notations, i.e.  $H'_{BS} = \int_0^\infty P dz'/P'_S$  – nous obtenons immédiatement

$$H'_{BS} = \frac{T_S}{(j+2)\sigma} \left\{ 1 - \left( \frac{T_{ib}}{T_S} \right)^{j+2} + \frac{(j+2)\sigma}{(j_i+2)\sigma_i} \left( \frac{T_{ib}}{T_S} \right)^{j+2} \left[ 1 - \left( \frac{T_{iH}}{T_{ib}} \right)^{j_i+2} \right] + \left( \frac{T_{iH}}{T_{ib}} \right)^{j_i-j} \left[ \left( \frac{T_{iH}}{T_S} \right)^{j+2} - \rho_S^{j+2} \right] \right\} \\ + \left( \frac{T_{iH}}{T_{ib}} \right)^{j_i-j} \rho_{iS}^{j+2} H_{1S}$$

donc, en utilisant  $\frac{T_S}{\sigma} = (j+1)H_{1S}$ , nous trouvons

$$\frac{H'_{BS}}{H_{1S}} = \frac{j+1}{j+2} \left\{ 1 + \frac{(j+2)\sigma}{(j_i+2)\sigma_i} \left( \frac{T_{ib}}{T_S} \right)^{j+2} \left[ 1 - \left( \frac{T_{iH}}{T_{ib}} \right)^{j_i+2} - \frac{(j_i+2)\sigma_i}{(j+2)\sigma} \right] + \left( \frac{T_{iH}}{T_{ib}} \right)^{j_i-j} \left[ \left( \frac{T_{iH}}{T_S} \right)^{j+2} - \rho_S^{j+2} \right] \right\} \\ + \left( \frac{T_{iH}}{T_{ib}} \right)^{j_i-j} \rho_{iS}^{j+2} ;$$

et, en retranchant la valeur correspondante de ce rapport sans la couche d'inversion, nous obtenons rigoureusement

$$\frac{(\delta H_{BS})_{T_S}}{H_{1S}} = \frac{j+1}{j+2} \left\{ 1 + \frac{j+2}{j_i+2} \frac{\sigma}{\sigma_i} \left( \frac{T_{ib}}{T_S} \right)^{j+2} \left[ 1 - \left( \frac{T_{iH}}{T_{ib}} \right)^{j_i+2} - \frac{j_i+2}{j+2} \frac{\sigma_i}{\sigma} \right] + \left( \frac{T_{iH}}{T_{ib}} \right)^{j_i-j} \left[ \left( \frac{T_{iH}}{T_S} \right)^{j+2} - \rho_{iS}^{j+2} \right] \right\} \\ + \left( \frac{T_{iH}}{T_{ib}} \right)^{j_i-j} \rho_{iS}^{j+2} - \frac{j+1+\rho_S^{j+2}}{j+2}$$

$$\frac{(\delta H_{BS})_{T_S}}{H_{1S}} = \frac{j+1}{j+2} \left( \frac{T_{ib}}{T_S} \right)^{j+2} \left\{ \frac{j+2}{j_i+2} \frac{\sigma}{\sigma_i} \left[ 1 - \left( \frac{T_{iH}}{T_{ib}} \right)^{j_i+2} \right] - 1 \right\} + \frac{j+1}{j+2} \left( \frac{T_{iH}}{T_{ib}} \right)^{j_i-j} \left( \frac{T_{iH}}{T_S} \right)^{j+2} \\ + \frac{(j+2)-(j+1)}{j+2} \left( \frac{T_{iH}}{T_{ib}} \right)^{j_i-j} \rho_{iS}^{j+2} - \frac{\rho_S^{j+2}}{j+2}$$

$$= \frac{j+1}{j+2} \left( \frac{T_{ib}}{T_S} \right)^{j+2} \left\{ -\frac{j+2}{j_i+2} \frac{\sigma}{\sigma_i} \left[ \left( \frac{T_{iH}}{T_{ib}} \right)^{j_i+2} - 1 \right] - 1 + \left( \frac{T_{iH}}{T_{ib}} \right)^{j_i+2} \right\} + \frac{1}{j+2} \left( \frac{T_{iH}}{T_{ib}} \right)^{j_i-j} \rho_{iS}^{j+2} - \frac{\rho_S^{j+2}}{j+2},$$

d'où l'expression finale un peu compliquée :

$$\frac{(\delta H_{BS})_{T_S}}{H_{1S}} = \frac{1}{j+2} \left\{ (j+1) \left( \frac{T_{ib}}{T_S} \right)^{j+2} \left[ \left( \frac{T_{iH}}{T_{ib}} \right)^{j_i+2} - 1 \right] \left( 1 - \frac{j+2}{j_i+2} \frac{\sigma}{\sigma_i} \right) + \left( \frac{T_{iH}}{T_{ib}} \right)^{j_i-j} \left( \frac{T_{iH}}{T_S} \right)^{j+2} - \left( \frac{T_S}{T_S} \right)^{j+2} \right\}. \quad (D9)$$

En introduisant la hausse de température  $\delta T_i := T_{iH} - T_{iB} = (-\sigma_i)e_i \ll T_{iB}$  dans l'inversion, ainsi que celle  $\delta T_t := T'_t - T_t = (\sigma - \sigma_i)e_i = \sigma e_i + \delta T_i \ll T_{iB}$  de la tropopause due à la mise en

place de l'inversion, nous cherchons à simplifier en nous contentant de l'approximation d'ordre 1 en  $e_i$  :

$$\frac{(\delta H_{BS})_{T_S}}{H_{1S}} \cong (j+1) \left( \frac{T_{ib}}{T_S} \right)^{j+2} \left( \frac{j_i+2}{j+2} - \frac{\sigma}{\sigma_i} \right) \frac{\delta T_i}{T_{ib}} + \frac{1}{j+2} \left\{ \left[ 1 + (j_i-j) \frac{\delta T_i}{T_{ib}} + (j+2) \frac{\delta T_t}{T_t} \right] - 1 \right\} \left( \frac{T_t}{T_S} \right)^{j+2}.$$

En regroupant les termes en  $\delta T_i/T_{ib}$ , nous obtenons

$$\frac{(\delta H_{BS})_{T_S}}{H_{1S}} = \left[ (j+1) \left( \frac{T_{ib}}{T_S} \right)^{j+2} \left( \frac{j_i+2}{j+2} - \frac{\sigma}{\sigma_i} \right) + \frac{j_i-j}{j+2} \left( \frac{T_t}{T_S} \right)^{j+2} \right] \frac{\delta T_i}{T_{ib}} + \left( \frac{T_t}{T_S} \right)^{j+2} \frac{\delta T_t}{T_t};$$

puis, en profitant de la proportionnalité entre  $(\delta T_i, \delta T_t)$  et  $e_i$ , nous écrivons

$$\frac{(\delta H_{BS})_{T_S}}{H_{1S}} = \left\{ \left[ (j+1) T_{ib}^{j+2} \left( \frac{j_i+2}{j+2} - \frac{\sigma}{\sigma_i} \right) + \frac{j_i-j}{j+2} T_t^{j+2} \right] \frac{(-\sigma_i)}{T_{ib}} + T_t^{j+2} \frac{\sigma - \sigma_i}{T_t} \right\} \frac{e_i}{T_S^{j+2}}.$$

Cherchons maintenant à n'exprimer ce résultat qu'en fonction d'un triplet de paramètres libres qui caractérisent l'inversion, comme  $(T_{ib}, -\sigma_i, e_i)$  par exemple. Dans ce but, éliminons  $j_i$  en profitant de la relation

$$-(j_i+1) = \frac{M_{as} g_S}{-\sigma_i R} = \frac{T_S}{-\sigma_i} \frac{M_{as} g_S}{RT_S} = \frac{T_S}{-\sigma_i H_{1S}} = (j+1) \frac{\sigma}{-\sigma_i} > 0 \text{ (usuellement petit devant } j+1);$$

avec celle-ci nous trouvons, sans nouvelle approximation,

$$\begin{aligned} \frac{(\delta H_{BS})_{T_S}}{H_{1S}} \bigg/ \frac{e_i}{T_S^{j+2}} &= \frac{j+1}{j+2} \left\{ T_{ib}^{j+2} \left[ 1 + (j+1-j-2) \frac{\sigma}{\sigma_i} \right] - \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_i} \right) T_t^{j+2} \right\} \frac{(-\sigma_i)}{T_{ib}} + T_t^{j+2} \frac{\sigma - \sigma_i}{T_t} \\ &= \frac{j+1}{j+2} (T_{ib}^{j+2} - T_t^{j+2}) \frac{\sigma - \sigma_i}{T_{ib}} + T_t^{j+2} \frac{\sigma - \sigma_i}{T_t}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{(\delta H_{BS})_{T_S}}{H_{1S}} = \left( \frac{j+1}{j+2} \frac{T_{ib}^{j+2} - T_t^{j+2}}{T_S^{j+2}} \frac{1}{T_{ib}} + \frac{T_t^{j+1}}{T_S^{j+2}} \right) (\sigma - \sigma_i) e_i$$

d'où l'on tire facilement l'expression (xLiv).

## N. B. : intégrales pour décrire le décalage latéral dû à l'ionosphère

Pour l'étude du décalage total produit pour les ondes radio lors de leur traversée de l'ionosphère, dans les équations de base il faut remplacer  $\mu$  par la population  $N_e$  d'électrons libres, et on voit bien s'appréhender des intégrales du type

$$\int_0^\infty \left( \frac{z'}{r_s} \right)^m \frac{d}{dz'} \frac{N_e^{q+1}}{q+1} dz' = \frac{m}{q+1} \int_0^\infty v'^{m-1} N_e^{q+1} dv'.$$

N. B. : avec  $(m, q) = (1, 0)$  l'intégrale est égale à  $\tau_{ec0}/r_s$ , i.e. le *zenithal Total Electronic Content* divisé par  $r_s$ .

Par rapport aux intégrales correspondantes avec  $\mu$ , utiles pour traiter des domaines UV, visible et IR, nous voyons deux différences :

- on écrit les résultats des intégrales ci-dessus sans se servir des hauteurs caractéristiques relatives, parce que sinon il faudrait diviser ces intégrales par  $N_{eS}$ , or  $N_{eS} \cong 0$  pour  $S$  sous l'ionosphère ;
- les profils de  $N_e$  et  $\mu$  ne sont pas proportionnels, donc le précieux renseignement donné sur  $\mu$  par l'hypothèse (b) d'équilibre hydrostatique ne se retrouve pas pour  $N_{eS}$ , et  $\tau_{ec0}$  ne se prête pas à une expression générale et simple ne dépendant que des conditions en  $S$  – contrairement à l'intégrale correspondante pour  $\mu$  qui, moyennant les hypothèses (b) et (e), donne  $\mu_S H_{1S}/r_s = P_S/(g_S r_s)$ .

## Appendice E : effets des écarts à la loi des gaz parfaits et à celle de GLADSTONE-DALE

Le titre de cet Appendice mentionne ces deux phénomènes supplémentaires en ordre décroissant quant à l'importance de leurs atteintes à la loi de proportionnalité entre  $\eta$  et  $P/T$ . Après les avoir présentés à tour de rôle dans les deux premières parties, nous précisons, dans une troisième partie, la résultante de ces effets sur la loi de variation de  $\eta$  avec  $(T, P)$ . Et nous serons alors en mesure, dans une quatrième partie, de démontrer une expression de  $\Delta_{1\infty}(Z', T_S, P_S, \lambda_0)$  actualisée, dans laquelle la modification *essentielle* est due à l'effet *mineur*, à cause d'une élimination de  $\mu_S$  !

### E1. Les écarts à l'idéalité du gaz

Pour un gaz réel, il est bien connu que la loi donnant, à  $T$  fixé,  $\mu$  en fonction de  $P$ , n'est pas linéaire. On l'exprime volontiers par le développement du viriel, qui donne la grandeur sans

dimension  $z := M_a \frac{P/\mu}{RT}$  – appelée « (facteur de) compressibilité » – sous la forme d’une série entière (paramétrée par  $T$ ) de la variable  $P$ . Si l’on se limite à l’ordre 1, on a

$$z(T, P) \cong 1 - (a - bt)P \quad (\text{E1})$$

quand en plus le coefficient de  $P$  est approximé par son développement d’ordre 1 en fonction de la température Celsius  $t$  ; ce coefficient s’annule par définition à la température de Mariotte  $t_M$  (ou température métacritique), qui vaut  $56,40$  °C pour l’air sec d’après les valeurs de  $a$  et  $b$  données pour lui :  $a \cong 0,547\,05 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$  et  $b \cong 0,009\,699 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$ .

Afin de comparer avec l’écart maximal  $9.20 \cdot 10^{-4}$  de variations relatives que montre la Fig. 6 de [2], notons qu’à  $0$  °C, de  $1\,000 \text{ hPa}$  à  $1\,030 \text{ hPa}$ , il y a un écart de variations relatives d’environ  $1.64 \cdot 10^{-5}$  entre celles de  $P_s$  et de  $\mu_s$ .

## E2. Les écarts à la loi de GLADSTONE-DALE

Une loi plus générale que celle de GLADSTONE-DALE est celle de LORENTZ-LORENZ ([39, chap. 4], [40]) selon laquelle  $\mu$  est proportionnel à  $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$  ; la constante de proportionnalité est  $3/[2C(\lambda_0)]$ , où  $C(\lambda_0) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \eta/\mu$ , et elle ne varie qu’avec  $\lambda_0$ , mais pas avec l’état physique. Il est facile [41] d’inverser cette relation, et d’en déduire une expression de  $(n-1)$  en fonction de  $\mu$ , non-linéaire (quoique les deux s’annulent en même temps) ; c’est la seconde méthode de CIDDOR [42] pour exprimer l’indice de l’air humide, en fonction de son degré hygrométrique. Mais pour l’air sec, au lieu de cela on trouve plus souvent dans la littérature [43-44] une approximation basée sur une approche itérative. Elle commence par un développement du premier membre de la relation de LORENTZ-LORENZ à l’ordre 2 en  $\eta$ , donc on part de

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cong \frac{2(n-1)}{3} \left(1 - \frac{n-1}{6}\right) ;$$

on corrige alors la loi de GLADSTONE-DALE – qui assimile, pour une composition donnée du gaz,  $\eta(T, P, \lambda_0)$  à  $C(\lambda_0) \mu(T, P)$  – en écrivant la réfractivité sous la forme

$$\eta(T, P, \lambda_0) \cong \left[1 - \frac{\eta(T, P, \lambda_0)}{6}\right]^{-1} C(\lambda_0) \mu(T, P), \quad (\text{E2})$$

et pour expliciter le terme entre crochets de la relation (E2), on se contente de l’approximation (E3), i.e. celle de GLADSTONE-DALE et des gaz parfaits, en négligeant en plus la dispersion de l’air sur le visible car la variation relative de  $C \cong 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  n’y est que de l’ordre de  $10^{-2}$  (et cela laissera séparées les variables  $\lambda_0$  et  $(T, P)$  dans l’expression de  $\eta$ ) :

$$\eta(T, P, \lambda_0) \cong C\mu \cong C \frac{M_a}{R} \frac{P}{T_0} \frac{T_0}{T} = \frac{M_a C}{RT_0} \frac{P}{1 + (t/T_0)}. \quad (\text{E3})$$

À 0 °C, de 1 000 hPa à 1 030 hPa, il y a un écart de variations relatives d'environ  $1.5 \cdot 10^{-6}$  entre celles de  $\mu_s$  et de  $\eta_s$  – presque 11 fois moins sensible que l'écart de variations relatives entre celles de  $P_s$  et de  $\mu_s$ . Cela explique que, contrairement à BÖNSCH et POTULSKI en 1998 [43], CIDDOR en 1996 [42] puisse négliger les écarts à la loi de GLADSTONE-DALE pour l'air sec (avec 450 ppmv de CO<sub>2</sub>) et pour la vapeur d'eau isolément, mais pas les écarts à la loi des gaz parfaits (décrits par  $1-z \neq 0$ ) ; la prise en compte de la loi de LORENTZ-LORENZ n'apporte pas de changements des 4-5 premiers chiffres significatifs de la réfractivité dans les conditions ordinaires en laboratoire [42, p. 1568].

### E3. Combinaison des deux effets pour la réfractivité

Ces deux écarts se combinent dans les variations de  $\eta$  avec  $P$  et  $T$  à  $\lambda_0$  fixé [40, p. 63-68]. Ainsi, en simplifiant (E3) par un développement d'ordre 1 en  $t/T_0$ , et en utilisant (E1) et (E2), on en déduit une expression de la réfractivité plus précise que (E3) :

$$\begin{aligned} \eta(T, P, \lambda_0) &\cong \left[ 1 + \frac{\eta(T, P, \lambda_0)}{6} \right] \frac{M_a C(\lambda_0)}{RT_0} \frac{P}{1+(t/T_0)} \frac{1}{z(T, P)} \\ &\cong \left\{ 1 + \frac{M_a C}{6RT_0} [1-(t/T_0)] P + (a-bt) P \right\} \frac{M_a C(\lambda_0, M)}{RT_0} \frac{P}{1+(t/T_0)} \end{aligned} \quad (\text{E4})$$

où le terme entre accolades synthétise les corrections relatives et approximatives par rapport aux lois de GLADSTONE-DALE et des gaz parfaits ; numériquement [43]

$$\eta(T, P, \lambda_0) \cong \left[ 1 + \frac{0,5953 - (0,009\,876\, t/^{\circ}\text{C})}{10^8\, \text{Pa}} P \right] \frac{M_a C(\lambda_0, M)}{RT_0} \frac{P}{1+(0,003\,6610\, t/^{\circ}\text{C})}. \quad (\text{E5})$$

On voit que suivant les formules contemporaines précises [42-43,45-47] la réfractivité de l'air sec et sans CO<sub>2</sub> n'est pas proportionnelle à  $P/T$ , ni même à  $\mu$ , mais à un « facteur de densité » (fonction de  $T$  et  $P$  seulement), dont le produit par le « facteur de dispersion » (fonction de  $\lambda_0$  seulement) donne  $\eta$  ; mais on comprend aussi que la séparation des variables  $\lambda_0$  et  $(T, P)$  dans l'expression de  $\eta$  n'est cependant qu'une approximation – qu'EDLÉN adopte consciemment [48].

Si pour tout  $Z'$  on adoptait, à titre d'approximation, la linéarité de la relation entre  $\Delta_\infty$  et le profil de  $\eta$ , mais si l'on utilisait l'expression (E5) qui donne donc une relation non-linéaire entre  $\eta_s$  et  $P_s$  (à  $T_s$  et  $\lambda_0$  fixés), on trouverait  $\frac{d\Delta_\infty}{\Delta_\infty}$  identifié à  $\frac{d\eta_s}{\eta_s}$  et

$$\frac{d\eta_s}{\eta_s} = \frac{dP_s}{P_s} + \left[ 1 + \frac{0,5953 - (0,009\,876\, t_s/^{\circ}\text{C})}{10^8\, \text{Pa}} P_s \right]^{-1} \frac{0,5953 - (0,009\,876\, t_s/^{\circ}\text{C})}{10^8\, \text{Pa}} dP_s.$$

### Application numérique

En assimilant 30 hPa à  $dP_s$ , et en prenant  $t_s = 0$  °C, on trouve

$$\frac{0,5953 - (0,009\,876\, t_s / ^\circ\text{C})}{10^8\, \text{Pa}} dP_s \cong 1,79 \cdot 10^{-5} \cong \frac{d\eta_s}{\eta_s} - \frac{dP_s}{P_s},$$

et on vérifie que ce petit écart de variations relatives est la somme des deux autres écarts de variations relatives,  $1,64 \cdot 10^{-5}$  et  $1,5 \cdot 10^{-6}$ , déjà indiqués précédemment.

Analytiquement, si l'on tient compte de la non-linéarité de la relation entre  $\Delta_\infty$  et le profil de  $\eta$

– qui donne  $\frac{d\Delta_\infty}{\Delta_\infty} - \frac{d\eta_s}{\eta_s}$  non nul<sup>24</sup> et variant avec  $Z'$  –, grâce à

$\frac{0,5953 - (0,009\,876\, t_s / ^\circ\text{C})}{10^8\, \text{Pa}} P_s \ll 1$  on trouve

$$\left( \frac{d\Delta_\infty}{\Delta_\infty} - \frac{dP_s}{P_s} \right) (Z', t_s) \cong \frac{0,5953 - (0,009\,876\, t_s / ^\circ\text{C})}{10^8\, \text{Pa}} dP_s + \left[ \frac{1}{\Delta_\infty} \left( \frac{\partial \Delta_\infty}{\partial P_s} \right)_{Z', t_s, \lambda_0}^{(a),(e)} - \frac{1}{P_s} \right] dP_s$$

en faisant l'approximation de l'additivité de ces *petits effets séparés*. Est-il possible de s'en passer ?

### E4. Effet, sur l'expression de $\Delta_{1\infty}$ , d'une violation de la loi de GLADSTONE-DALE

Ni cette loi empirique (a), ni celle des gaz uniformément parfaits (c) – ni les 3 hypothèses supplémentaires (b), (d)-(e) – n'interviennent pas dans le cheminement de tout le sous-paragraphe 2.2, qui se termine par

$$\Delta_{1\infty} = (1 + \delta_{1\infty}) \Delta_\infty^R \quad \text{où} \quad \Delta_\infty^R = \eta_s H_{1S} \frac{\tan Z'}{\cos Z'} \quad \text{et} \quad -\delta_{1\infty} = \left( \frac{3}{\cos^2 Z'} - 1 \right) \frac{H_{BS}}{r_s} \ll 1,$$

moyennant les bonnes définitions des deux hauteurs (cf. la p. 6 de ce document) :

$$H_{1S}(T_s, P_s, \dots, \lambda_0) := \frac{1}{\eta(T_s, P_s, \lambda_0)} \int_0^\infty \eta dz' \quad \text{et} \quad H_{BS}(T_s, P_s, \dots, \lambda_0) := \int_0^\infty z' \eta dz' \Big/ \int_0^\infty \eta dz'.$$

C'est à ce stade, où l'on souhaite préciser les variations de  $H_{1S}$  et  $H_{BS}$  avec  $(T_s, P_s, \lambda_0, \dots)$ , que les hypothèses (a)-(e) sont utiles.

Or pour exprimer le terme principal (i.e.  $\Delta_\infty^R$ ) de  $\Delta_\infty$  et  $\Delta_{1\infty}$ , il ne s'agit pas d'écrire  $H_{1S}(T_s, P_s, \dots, \lambda_0)$  isolément, mais le préfacteur  $\eta_s H_{1S}$  ; nous avons déjà vu, dans le résultat (xxviii), que  $\mu_s$  s'élimine dans ce préfacteur, qui se met – moyennant les hypothèses (a)-(b) et

<sup>24</sup> dont l'estimation numérique par un *modèle utilisant les hypothèses (a)-(e)* est montrée sur la Fig. 6 de [2]

(d)-(e) – sous la forme  $C(\lambda_0) \frac{P_S \tan Z'}{g_S \cos Z'}$  sans faire intervenir l'hypothèse (c). Donc les écarts à l'idéalité de l'air en  $S$  – spécifiés notamment par le facteur de compressibilité  $z(T_S, P_S)$  – n'affectent pas le terme principal de  $\Delta_\infty$  et  $\Delta_{1\infty}$  ; par contre, ce terme  $\Delta_\infty^R$  est altéré par les écarts à la loi empirique de GLADSTONE-DALE – i.e. l'hypothèse (a) – qui sont plus petits que les écarts précédents, d'environ un ordre de grandeur. En ce qui concerne la violation des hypothèses (a) et (c) et le changement produit dans l'expression de  $\Delta_\infty(Z', T_S, P_S, \lambda_0)$  **pour un modèle d'atmosphère de type RGO**, nous profitons de ces heureuses circonstances pour le chercher, sous une forme approximative la plus simple possible, en adoptant la stratégie suivante : d'abord, en remplaçant l'hypothèse grossière (a) par une hypothèse plus fine (a'), regarder quel changement est induit dans l'expression de  $H_{1S}$  puis de  $\eta_S H_{1S}$ , et qui va corriger le terme principal<sup>25</sup>  $\Delta_\infty^R$  en multipliant  $C(\lambda_0) \frac{P_S \tan Z'}{g_S \cos Z'}$  par le facteur correcteur  $1 + c_{1\infty}$  (où  $c_{1\infty}$  est petit, de l'ordre de  $\eta_S \ll 1$ ) ; ensuite, compte tenu de cette petitesse, ainsi que de celle de  $\delta_{1\infty}$  (de l'ordre d'une hauteur caractéristique relative  $h \ll 1$ ) et de  $\Delta_{2\infty}$ , réadmettre l'utilisation de (a) et (c) pour estimer plus simplement  $c_{1\infty}(T_S, P_S, \lambda_0)$ ,  $\delta_{1\infty}(Z', T_S)$  et  $\Delta_{2\infty}(Z', T_S, P_S, \lambda_0)$ .

On commence donc par renoncer à l'hypothèse (a), et – à l'instar de beaucoup d'études précises sur l'indice de l'air, dont celle de BÖNSCH et POTULSKI [43] notamment – on la remplace par l'hypothèse (a') consistant à admettre l'approximation plus raffinée selon laquelle variation de  $\eta$  avec  $\mu$  est donnée par

$$\eta(T, P, \lambda_0) \cong \left[ 1 + \frac{C(\lambda_0) \mu(T, P)}{6} \right] C(\lambda_0) \mu(T, P) ;$$

cette expression est aisément compréhensible si l'on s'inspire des relations (E2)-(E3). Alors pour notre  $H_{1S}$ , dont la définition est rappelée ci-dessus, en utilisant les hypothèses (d)-(e) on trouve

$$\begin{aligned} H_{1S}(T_S, P_S, \dots, \lambda_0) &= \int_0^\infty \left[ C(\lambda_0) \mu + \frac{C^2(\lambda_0) \mu^2}{6} \right] dz' / \left\{ C(\lambda_0) \mu_S \left[ 1 + \frac{C(\lambda_0) \mu_S}{6} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\mu_S} \int_0^\infty \left[ \frac{\mu g}{g_S} + \frac{C(\lambda_0) \mu^2}{6} \right] dz' / \left[ 1 + \frac{C(\lambda_0) \mu_S}{6} \right] ; \end{aligned}$$

donc

---

<sup>25</sup> Le fait que l'expression de ce terme soit affectée par la violation de la loi de GLADSTONE-DALE renforce l'intérêt *a priori* de la discussion présente. Par contre, en ce qui concerne l'effet de cette violation sur l'expression de la réfraction  $\chi_S$  d'après la formule de LAPLACE, il est moins important en valeur relative car il ne modifie pas l'expression de son terme principal, qui reste  $\eta_S \tan Z'$  ; pour celui-ci, la violation de la loi des gaz parfaits (et de celle de Gladstone-Dale, dans une moindre mesure) influe seulement sur la façon dont ce terme varie en fonction de  $T_S$ ,  $P_S$  (et  $\lambda_0$ ) – cf. le paragraphe E.3 du présent Appendice.

$$\begin{aligned}
\left[1 + \frac{C(\lambda_0) \mu_s}{6}\right] H_{1S}(T_S, P_S, \dots, \lambda_0) &\cong \frac{1}{\mu_s} \left[ \frac{1}{g_s} \int_0^\infty -\frac{dP}{dz'} dz' + \frac{C(\lambda_0)}{6} \int_0^\infty \mu^2 dz' \right] \\
&= \left[ \frac{P_s}{\mu_s g_s} + \frac{C(\lambda_0) \mu_s r_s}{6} \int_0^\infty \left(\frac{\mu}{\mu_s}\right)^2 \frac{dz'}{r_s} \right] \\
&\cong \left[ \frac{P_s}{\mu_s g_s} + \frac{\eta_s(\lambda_0) r_s}{6} 2h_{1,1} \right]
\end{aligned}$$

grâce à (b) et moyennant un développement à l'ordre 1 en  $\eta_s$  ; au passage, on note qu'un des effets de la violation de la loi de Gladstone-Dale est de rendre  $H_{1S}$  dépendant de  $P_s$  et de  $\lambda_0$ , car  $2r_s h_{1,1} \neq P_s / (\mu_s g_s)$ . On obtient finalement l'expression modifiée du préfacteur

$$\begin{aligned}
(\eta_s H_{1S})(T_S, P_S, \dots, \lambda_0) &= C(\lambda_0) \mu(T_S, P_S) \left[ \frac{P_s}{\mu(T_S, P_S) g_s} + \frac{\eta(T_S, P_S, \dots, \lambda_0) r_s}{3} h_{1,1} \right] \\
&= \left[ 1 + c_{1\infty}(T_S, P_S, \dots, \lambda_0) \right] \frac{C(\lambda_0) P_s}{g_s} > \frac{C(\lambda_0) P_s}{g_s}
\end{aligned}$$

avec

$$c_{1\infty}(T_S, P_S, \dots, \lambda_0) \cong \frac{C(\lambda_0) \mu^2(T_S, P_S)}{3} g_s r_s \frac{h_{1,1}(T_S, P_S, \dots)}{P_s} \text{ de l'ordre de } \eta_s \ll 1,$$

d'où une petite variation de  $\eta_s H_{1S}$  avec  $T_s$  et une non-linéarité par rapport à  $P_s$  – à cause de  $c_{1\infty}$  qui dépend de  $T_s$ ,  $P_s$ , etc.

Afin de préciser, *pour un type donné de profils atmosphériques*,  $\Delta_{1\infty}(Z', T_S, P_S, \lambda_0)$  conformément à notre stratégie annoncée ci-dessus, nous exprimons maintenant  $\delta_{1\infty}(Z', T_S)$ , et pour cela  $H_{BS}(T_S)/r_s$ , *moyennant la réadmission de l'hypothèse (c), ainsi que de (a)* (donc en négligeant un terme de l'ordre de  $\eta_s h$  mais en conservant celui qui est de l'ordre de  $h$ ) :

$$\frac{H_{BS}(T_S)}{r_s} = \frac{h_{2,0}^2}{2 h_{1,0}} \cong \frac{1}{r_s} \int_0^\infty z' \mu dz' / \int_0^\infty \mu dz' \cong \frac{h_{2,0}^2}{2} \frac{M_{as} g_s r_s}{R T_S}.$$

En outre, pour un *modèle RGO* (cf. Appendice D),

$$\frac{H_{BS}}{r_s} \cong \frac{j+1+\rho_s^{j+2}}{j+2} \frac{R T_S}{M_{as} g_s r_s} \text{ et } h_{1,1} \cong \frac{2(j+1)-\rho_s^{2j+1}}{2j+1} \frac{R T_S}{4M_{as} g_s r_s}, \text{ où } \rho_s := (T_0 - \sigma H_t)/T_s.$$

On synthétise les résultats de cette investigation en écrivant, *pour un type donné de profils atmosphériques*,

$$\begin{aligned}
\Delta_{1\infty}(Z', T_S, P_S, \lambda_0) &= \left[ 1 + \delta_{1\infty}(Z', T_S) \right] \left[ 1 + c_{1\infty}(T_S, P_S, \lambda_0) \right] C(\lambda_0) \frac{P_s \tan Z'}{g_s \cos Z'} \\
&\cong \left[ 1 + \delta_{1\infty}(Z', T_S) + c_{1\infty}(T_S, P_S, \lambda_0) \right] C(\lambda_0) \frac{P_s \tan Z'}{g_s \cos Z'}
\end{aligned}$$

et finalement, *pour les modèles RGO*,

$$\Delta_{1\infty}(Z', T_S, P_S, \lambda_0) \cong \frac{C(\lambda_0)}{g_S} P_S \left[ 1 - \left( \frac{3}{\cos^2 Z'} - 1 \right) \frac{j+1+\rho_S^{j+2}}{j+2} \frac{R T_S}{M_{aS} g_S r_S} + \frac{C(\lambda_0) M_{aS}}{12 R} \frac{2(j+1) - \rho_S^{2j+1}}{2j+1} \frac{P_S}{T_S} \right] \frac{\tan Z'}{\cos Z'} \quad (\text{E6})$$

auquel il faut ajouter  $\Delta_{2\infty}(Z', T_S, P_S, \lambda_0) = \Gamma_2(Z', T_S) \eta^2(T_S, P_S, \lambda_0)$ ,  $\Delta_{3\infty}$ , etc., mais dont la petitesse – relativement à  $\Delta_{1\infty}$  – nous autorise à utiliser les hypothèses (a)-(e) pour donner leurs expressions en fonction de  $(Z', T_S, P_S, \lambda_0)$  ; avec l'approximation classique qui fait apparaître les hauteurs caractéristiques indépendantes de  $P_S$ , on voit que  $\Delta_{2\infty}$  varie avec  $P_S$  proportionnellement à  $\eta_S^2$ .

### Application numérique

Dans les conditions de [2, Fig. 6], donc à  $T_S$  fixé, on trouve que la variation relative de  $\Delta_{1\infty}$ , associée à  $dP_S$  (assimilé à 30 hPa qui correspond à l'extrémité droite de toutes les courbes de [2, Fig. 6]), est indépendante de  $Z'$  et telle que

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_{1\infty}}{\Delta_{1\infty}} - \frac{dP_S}{P_S} &= \frac{1}{1 + \delta_{1\infty} + c_{1\infty}} \frac{C(\lambda_0) M_{aS}}{12 R} \frac{2(j+1) - \rho_S^{2j+1}}{2j+1} \frac{dP_S}{T_S} \\ &\cong \frac{C(\lambda_0) M_{aS}}{12 R} \frac{2(j+1) - \rho_S^{2j+1}}{2j+1} \frac{dP_S}{T_S} \cong 7.95 \cdot 10^{-7} ; \end{aligned}$$

donc son effet, qui n'est pas pris en compte par [2, Fig. 6], est absolument imperceptible à son échelle. Quant à la variation relative de  $\Delta_{2\infty}$ , nous l'écrivons approximativement

$$\frac{d\Delta_{2\infty}}{\Delta_{2\infty}} = 2 \frac{d\eta_S}{\eta_S} = 2 \frac{dP_S}{P_S}.$$

Donc celle de  $\Delta_\infty \cong \Delta_{1\infty} + \Delta_{2\infty}$  est telle que

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_\infty}{\Delta_\infty} - \frac{dP_S}{P_S} &= \frac{d\Delta_{1\infty}}{\Delta_\infty} - \frac{dP_S}{P_S} + \frac{d\Delta_{2\infty}}{\Delta_\infty} = \left( 1 + \frac{\Delta_{2\infty}}{\Delta_{1\infty}} \right)^{-1} \frac{d\Delta_{1\infty}}{\Delta_{1\infty}} - \frac{dP_S}{P_S} + \frac{\Delta_{2\infty}}{\Delta_\infty} \frac{d\Delta_{2\infty}}{\Delta_{2\infty}} \\ &\cong \left( \frac{d\Delta_{1\infty}}{\Delta_{1\infty}} - \frac{dP_S}{P_S} \right) - \frac{\Delta_{2\infty}}{\Delta_{1\infty}} \frac{d\Delta_{1\infty}}{\Delta_{1\infty}} + 2 \frac{\Delta_{2\infty}}{\Delta_\infty} \frac{dP_S}{P_S} \cong \left( \frac{d\Delta_{1\infty}}{\Delta_{1\infty}} - \frac{dP_S}{P_S} \right) + \frac{\Delta_{2\infty}}{\Delta_{1\infty}} \frac{dP_S}{P_S} \end{aligned}$$

avec, dans les conditions correspondant à celles de l'extrémité droite la courbe de [2, Fig. 6] pour  $Z' = 75^\circ$  (une valeur grande mais pour laquelle on a quand même constaté un accord majeur entre notre théorie et les observations numériques liées à [2, Fig. 6]),

$$\Delta_{1\infty} \cong 31.82 \text{ m}, \quad \Delta_{1\infty} \cong 0.14 \text{ m},$$

$$\frac{d\Delta_\infty}{\Delta_\infty} - \frac{dP_S}{P_S} \cong 7.96 \cdot 10^{-7} + \frac{0.14 \text{ m}}{31.82 \text{ m}} \frac{30 \text{ hPa}}{1\,000 \text{ hPa}} \cong 1.32 \cdot 10^{-4}$$

alors que [2, Fig. 6] donne  $1.42 \cdot 10^{-4}$ . Cette dernière application numérique confirme encore, si besoin était, que les défauts de linéarité de  $\Delta_\infty$  par rapport à  $P_S$  sont très peu liés aux écarts, négligés par [2], à la loi de GLADSTONE-DALE et à celle des gaz parfaits.

## Appendice F : pour une atmosphère stratifiée, calcul du décalage latéral par l'artifice des pellicules dioptriques infiniment minces ; développement en série

Le décalage latéral  $\Delta_e$  subi par le rayon lumineux (R) traversant, sous l'incidence  $i$ , une lame homogène à faces planes parallèles – d'épaisseur  $e$ , d'indice (relatif)  $n = 1 + \eta$  – et baignée de chaque côté par un milieu d'indice (relatif) 1, est égal à

$$\begin{aligned} \Delta_e &= \frac{\sin(i-i')}{\cos i'} e = [(\sin i) - (\tan i') \cos i] e = \left(1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}\right) (\sin i) e \\ &= \left[1 - \frac{\cos i}{\sqrt{(\cos^2 i) + (2+\eta)\eta}}\right] (\sin i) e = \left[1 - \left(1 + \frac{2+\eta}{\cos^2 i} \eta\right)^{-1/2}\right] (\sin i) e \end{aligned}$$

où  $i'$  est l'angle de réfraction dans la lame, donc tel que  $\sin i = n \sin i'$ . Comme attendu,  $\Delta_e$  tend vers  $e$  quand  $i$  tend vers  $90^\circ$ .

De plus, avec une telle lame perpendiculaire à l'axe  $Ox$ , d'une part tout rayon lumineux est dans un plan parallèle à  $Ox$ , mais encore, d'autre part, l'image paraxiale d'un objet se déduit de celui-ci par une translation de vecteur  $\overline{AA'_0} = \overline{AA'_0} \mathbf{u}_x$  où  $\mathbf{u}_x$  (dirigeant  $Ox$ ) est unitaire, dans le sens de la lumière, et la valeur algébrique de la translation s'écrit

$$\overline{AA'_0} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) e ;$$

cette valeur est directement liée à celles du décalage, par l'intermédiaire de la définition du stigmatisme approché du couple  $(A, A'_0)$ , dont on déduit

$$\frac{d\Delta_e}{di}(0) = \overline{AA'_0}. \quad (\mathbf{F1})$$

Dans le cas d'une lame stratifiée, où le profil de réfractivité est  $x \mapsto \eta(x)$  de support  $[x_0, x_0 + e]$ , on la décompose par la pensée en une infinité de lames élémentaires homogènes d'indice  $n(x) = 1 + \eta(x)$  et dont les deux faces sont les plans d'abscisses respectives  $x$  et  $x + dx$ . On ne change pas le système en insérant par la pensée, entre chaque paire de lames élémentaires voisines – d'indice respectif  $n(x)$  et  $n(x + dx)$  – une pellicule de milieu d'indice (relatif) 1 et d'épaisseur  $d^2x$  doublement infinitésimale. L'avantage de cet artifice consiste en ce que les décalages latéraux, dus à chaque lame élémentaire, s'additionnent algébriquement : car dans toutes les pellicules la direction du rayon lumineux est la même, identique à sa direction d'incidence (ainsi qu'à celle d'émergence, par propriété basique des lames à faces planes parallèles) ; et on voit tout de suite que, compte tenu de l'associativité et de la commutativité de l'addition, le décalage est invariant si on permute les lames élémentaires de façon quelconque – ce qui est possible car elles sont planes. En outre, si nous considérons que toutes les pellicules ont pour indice  $n(x_0)$ , on peut même étendre le champ d'application de cette somme (une intégrale) : elle est égale à la valeur, sur  $[x_0, x_0 + e]$ , du décalage complet  $\Delta_e$  de (R), que l'on mesure dans la direction située dans le plan d'incidence et transverse à la direction de (R) en  $x = x_0$ , même si  $n(x_0 + e) \neq n(x_0) \neq 1$ .

Au sens ainsi défini, le décalage transversal dû à la traversée complète de la lame s'écrit

$$\Delta_e = (\sin i) \int_{x_0}^{x_0 + e} \left\{ 1 - [1 + H(x, i)]^{-1/2} \right\} dx \quad (\text{F2})$$

où  $H(x, i) := \left\{ \left[ n^2(x)/n_0^2 \right] - 1 \right\} \sec^2 i$  avec  $n_0 := n(x_0)$

donc  $H(x, i) = [2 + \eta(x)] \eta(x) \sec^2 i$  si  $n_0 = 1$ .

Cette technique de raisonnement, utilisant l'artifice des pellicules dioptriques infiniment minces, est performante, car retrouver l'expression (F2) à partir de l'équation fondamentale (régissant les rayons courbes) s'avère plus laborieux<sup>26</sup> – voir notamment la Figure F1.

<sup>26</sup> L'équation fondamentale permet de justifier immédiatement une méthode d'étude des rayons lumineux (chère à BIOT et à LAPLACE, dont les épreuves de son *Traité de Mécanique Céleste* avaient été relues par le premier) : le trajet de tout rayon dans un milieu continu est la trajectoire d'une particule fictive  $M$ , de vitesse  $v_0 n \mathbf{u}$ , dans un champ d'accélération  $v_0^2 \mathbf{grad} n^2 / 2$  (où  $v_0$  est une vitesse arbitraire constante). Le système d'équations différentielles régissant les coordonnées  $(x(t), y(t), z(t))$  de  $M$  dans un repère orthonormé direct  $Oxyz$  est donc  $\left( \ddot{x}(t) = v_0^2 n \frac{dn}{dx}(x(t)), \ddot{y} = 0, \ddot{z} = 0 \right)$  – où la variable est le temps  $t$ .

On intègre une fois à partir de la date  $t_0$  d'entrée de  $M$  dans la lame à l'abscisse  $x_0$  – mais pour la première équation, après multiplication membre à membre par  $2\dot{x}(t)$  – et, moyennant le choix de  $Oxyz$  tel que  $xOy$  soit le plan d'incidence du rayon (R) étudié, on trouve  $\left( \dot{x}^2 - (v_0 n_0 \cos i)^2 = (n^2 - n_0^2) v_0^2, \dot{y} = -v_0 n_0 \sin i, \dot{z} = 0 \right)$  ; on note que la première relation de ce triplet est encore une quadrature, d'où le lien avec la partie 2 de notre document.

Choisissons  $O$  sur le rayon (R) incident sur la lame stratifiée, et considérons le repère  $OXYz$  obtenu en appliquant à  $Oxyz$  une rotation d'angle  $i$  autour de  $Oz$  dans le sens indirect (voir la Figure F1) ; alors les

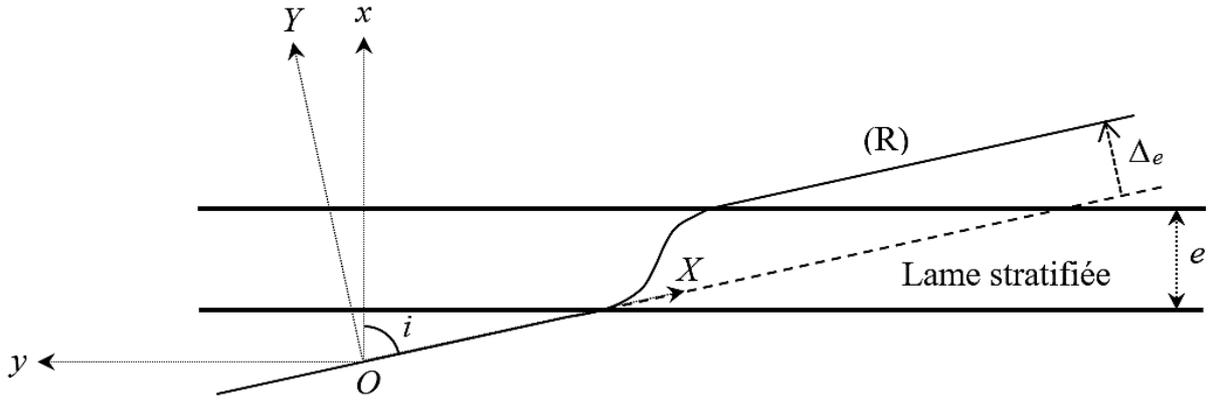


Figure F1 – Axes utiles pour le calcul de  $\Delta_e$  par la méthode de la note 26

L'avantage de cet artifice est renforcé par le fait qu'il permet aussi d'obtenir classiquement la translation algébrique objet-image  $\overline{AA'_0}$  provoquée par cette lame stratifiée entière, car les translations algébriques élémentaires dues à chacune des lames élémentaires s'additionnent, puisqu'elles sont toutes comptées sur le même vecteur unitaire :  $\mathbf{u}_x$  ; ainsi, on trouve que la fonction  $\Delta_e$  jouit de la propriété suivante :

$$\frac{d\Delta_e}{di}(0) = \overline{AA'_0} = \int_{x_0}^{x_0+e} \left(1 - \frac{1}{n}\right) dx = \int_{x_0}^{x_0+e} \frac{\eta}{1+\eta} dx. \quad (\text{F3})$$

Dans le cas où  $|\eta| \ll 1$ , l'avantage de l'expression (F2) de  $\Delta_e$  est double.

coordonnées  $(x(t), y(t), z(t))$  de  $M$  dans ce nouveau repère sont  $(X, Y, 0) = (x \cos i - y \sin i, x \sin i + y \cos i, 0)$ . L'avantage de  $OXYZ$  consiste en le fait que  $Y$  est directement le décalage transversal, car l'axe  $OX$  porte le rayon incident. On s'intéresse donc à  $\dot{Y} = \dot{x} \sin i + \dot{y} \cos i = \left[ \sqrt{n^2 - n_0^2 + (n_0 \cos i)^2} - n_0 \cos i \right] v_0 \sin i$  ; nous en déduisons le décalage par l'intégrale de  $\dot{Y}$ , depuis  $t_0$  jusqu'à la date  $t_s$  de sortie de  $M$  à l'abscisse  $x_0 + e$  :

$$\begin{aligned} \Delta_e &= \int_{t_0}^{t_s} \dot{Y} dt = \int_{x_0}^{x_0+e} \left( \dot{Y} / \dot{x} \right) dx = \int_{x_0}^{x_0+e} \frac{\left[ \sqrt{n^2 - n_0^2 + (n_0 \cos i)^2} - n_0 \cos i \right] \sin i}{\sqrt{n^2 - n_0^2 + (n_0 \cos i)^2}} dx \\ &= (\sin i) \int_{x_0}^{x_0+e} \left\{ 1 - \frac{\cos i}{\sqrt{\cos^2 i + \left[ (n/n_0)^2 - 1 \right]}} \right\} dx = (\sin i) \int_{x_0}^{x_0+e} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + H(x, i)}} \right] dx, \end{aligned}$$

qui redonne bien l'expression (F2).

• En développant à l'ordre 1 en  $\eta$ , on retrouve directement une expression analogue à celle trouvée par RAYLEIGH grâce à la technique de la *straight line approximation* (chère aux astronomes étudiant les éclipses de Lune [18, § 3], ou les occultations stellaires par un corps doté d'une atmosphère [19, Eq. (20)]) :

$$\Delta_e \cong \Delta_{e1} := (\sin i) \int_{x_0}^{x_0+e} \frac{\eta}{\cos^2 i} dx = \frac{\tan i}{\cos i} \int_{x_0}^{x_0+e} \eta dx$$

où cette dernière intégrale est analogue au *zenithal TEC* des ionosphéristes, ainsi qu'à celle trouvée par RAYLEIGH proportionnelle à  $P_s$  moyennant les hypothèses (a)-(b) et (d)-(e). L'approximation ci-dessus conduit à une forme de loi de SIMPSON, car la fonction  $i \mapsto \Delta_{e1}(i)$

n'est paramétrée que par la largeur caractéristique  $L_{1,0} := \int_{x_0}^{x_0+e} \eta dx$ , indépendamment de tout autre détail sur le profil de réfractivité de la lame.

• Par rapport à l'approche de RAYLEIGH, notre expression (F2) présente l'avantage de ne pas avoir recours à la *straight line approximation* ; donc un résultat plus fin se déduit directement de (F2), en développant son intégrande à un ordre supérieur en  $\eta$ . Autant l'idée de pousser le développement de  $\Delta_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} r \sin \int_r^\infty dr' / \sqrt{h(r')} - r_s \sin \int_{r_s}^\infty dr' / \sqrt{h(r')}$  à l'ordre 3 ou plus

en  $\eta$  peut être effrayante, autant celle d'en faire de même pour

$\Delta_e = (\sin i) \int_{x_0}^{x_0+e} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2+\eta}{\cos^2 i} \eta \right)^{-1/2} \right] dx$  semble légère en comparaison ! À titre d'exemple,

nous explicitons numériquement ici les 4 premiers termes de la série entière  $\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{l! 2^l} H^l$  qui est de type binomial (donc convergente pour  $|H| < 1$  [20, p. 242]) car

cette somme vaut  $(1+H)^{-1/2}$  ; il vient

$$(1+H)^{-1/2} = 1 - \frac{H}{2} + \frac{3H^2}{8} - \frac{5H^3}{16} + \frac{35H^4}{128} + \dots$$

On obtient facilement

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{2\eta + \eta^2}{\cos^2 i} \right)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2} \frac{2}{\cos^2 i} \eta + \left[ \frac{3}{8} \left( \frac{2}{\cos^2 i} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 i} \right] \eta^2 + \left[ -\frac{5}{16} \left( \frac{2}{\cos^2 i} \right)^3 + \frac{3}{8} \frac{2 \times 2}{\cos^4 i} \right] \eta^3 \\ &\quad + \left[ \frac{35}{128} \left( \frac{2}{\cos^2 i} \right)^4 - \frac{5}{16} \frac{3 \times 2^2}{\cos^6 i} + \frac{3}{8} \frac{1}{\cos^4 i} \right] \eta^4 + \dots \\ &= 1 - \frac{\eta}{\cos^2 i} + \frac{3 - \cos^2 i}{2 \cos^4 i} \eta^2 - \frac{5 - 3 \cos^2 i}{2 \cos^6 i} \eta^3 + \frac{35 - 30 \cos^2 i + 3 \cos^4 i}{8 \cos^8 i} \eta^4 + \dots \end{aligned}$$

(si l'on se limite à des incidences pas trop rasantes pour que  $\left| \frac{2+\eta}{\cos^2 i} \eta \right| < 1$ ) puis

$$\Delta_e(i) = \sum_{l=1}^{\infty} \Delta_{e_l}(i) \quad (\text{F4})$$

avec  $\Delta_{e_1}(i) = \frac{\sin i}{\cos^2 i} \int_{x_0}^{x_0+e} \eta \, dx$ ,  $\Delta_{e_2}(i) = -\frac{\sin i}{\cos^2 i} \frac{3 - \cos^2 i}{2 \cos^2 i} \int_{x_0}^{x_0+e} \eta^2 \, dx$ ,

$$\Delta_{e_3}(i) = \frac{\sin i}{\cos^2 i} \frac{5 - 3 \cos^2 i}{2 \cos^4 i} \int_{x_0}^{x_0+e} \eta^3 \, dx \quad \text{et} \quad \Delta_{e_4}(i) = -\frac{\sin i}{\cos^2 i} \frac{35 - 30 \cos^2 i + 3 \cos^4 i}{8 \cos^6 i} \int_{x_0}^{x_0+e} \eta^4 \, dx.$$

Par analogie avec l'expressions (xxxii), définissons pour la lame la famille de largeurs caractéristiques  $L_{m,q}$  (avec  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ) telles que

$$L_{m,q}^m := \frac{m}{q+1} \int_{x_0}^{x_0+e} x^{m-1} \eta(x)^{q+1} \, dx ;$$

alors on peut écrire

$$\Delta_{e_2}(i) = -\frac{\sin i}{\cos^2 i} \frac{3 - \cos^2 i}{2 \cos^2 i} \int_{x_0}^{x_0+e} \eta^2 \, dx = -\frac{\sin i}{\cos^2 i} \frac{3 - \cos^2 i}{2 \cos^2 i} 2L_{1,1} = -\frac{\sin i}{\cos^2 i} \frac{2 + \sin^2 i}{1 - \sin^2 i} L_{1,1}$$

qui correspond à l'avant-dernier terme de l'expression (xxxv) ; pour  $i$  au voisinage de  $90^\circ$  il est équivalent à  $-3L_{1,1}/(i-90^\circ)^4$  qui diverge moins rapidement que  $\Delta_{2\infty}$ . En traitant de même les intégrales des termes d'ordre 3 et 4, nous obtenons

$$\Delta_{e_3}(i) = \frac{\sin i}{\cos^2 i} \frac{5 - 3 \cos^2 i}{2 \cos^4 i} 3L_{1,2} = 3 \frac{\sin i}{\cos^2 i} \frac{2 + 3 \sin^2 i}{2(1 - \sin^2 i)^2} L_{1,2}$$

et

$$\Delta_{e_4}(i) = -\frac{\sin i}{\cos^2 i} \frac{35 - 30 \cos^2 i + 3 \cos^4 i}{8 \cos^6 i} 4L_{1,3} = -\frac{\sin i}{\cos^2 i} \frac{8 + 24 \sin^2 i + 3 \sin^4 i}{2(1 - \sin^2 i)^3} L_{1,3}.$$

Cela revient à écrire, sur une famille de fractions rationnelles trigonométriques (de la variable  $i$ ), un début de décomposition de la fonction  $\Delta_e$  – dont les coefficients sont les  $L_{1,q}$  (où  $q$  décrit  $\mathbb{N}$ ). Ceci donne un angle d'attaque pour aborder le problème inverse, consistant à déterminer le profil de réfractivité  $\eta$ , à partir de la fonction  $\Delta_e$  donnée ; mais vu notre remarque – donnée peu avant l'expression (F2) – sur l'invariance de  $\Delta_e$  par permutation des lames élémentaires *planes*, nous savons dès le départ que c'est un problème mal posé<sup>27</sup>. Le mieux que

<sup>27</sup> L'argument de la permutation des lames élémentaires ne fonctionnant plus quand le milieu n'est plus stratifié, i.e. quand ces lames ne sont plus planes, on pourrait se demander si le problème inverse redevient théoriquement bien posé dans un tel cas, et notamment quand le milieu est à symétrie sphérique. Mais pratiquement, pour la Terre, comme les effets de sa rotondité ne se manifestent que par de petits termes correctifs – comme  $\delta_{1\infty}$ , et tous les termes de  $\Delta_{2\infty}$  sauf celui contenant  $h_{1,1}/h_{1,0}$  – sur la majeure partie du domaine d'observation (i.e. quand  $Z'$  est suffisamment inférieur à  $90^\circ$ ) la reconstruction du profil de  $\eta$  à

nous puissions espérer, c'est de déterminer la fonction histogramme cumulé  $\eta_0 \mapsto S(\eta_0)$  – ce dernier nombre étant la mesure du domaine (de  $[x_0, x_0 + e]$ ) où  $\eta(x) \leq \eta_0$ . Plus le nombre de coefficients  $L_{1,q}$  connus est élevé, plus la fonction  $S$  est contrainte.

La convergence de notre série  $\sum_{l=1}^{\infty} \Delta_{el}(i)$  est assurée pour  $\sec i$  assez petit, i.e. tel que

$\sup_{x \in [x_0, x_0 + e]} |H(x, i)| := N(i) < 1$ . Dans ce cas en effet, la série binomiale implicite en (F2) converge normalement [20, p. 211-213], et (F4) aussi, car

$$\sup_{x \in [x_0, x_0 + e]} \left| \frac{(2l-1)!!}{l! 2^l} H(x, i)^l \right| = \frac{(2l-1)!!}{l! 2^l} N(i)^l \sim \frac{N(i)^l}{\sqrt{\pi l}}$$

(où l'équivalent est obtenu grâce à la formule de STIRLING – [22] p. 2868). On peut en déduire, puisque l'intégrale de (F2) est définie (i.e. sur un domaine borné), que la série des fonctions  $\Delta_{el}$  converge absolument et uniformément ([20] p. 212-213). En outre, on voit que pour la série (F4) la convergence n'est plus assurée pour une incidence trop rasante, i.e. quand  $i$  est trop proche de  $90^\circ$ , car dans ce cas  $N(i) \geq 1$ ; la divergence de la série (F4) ne se produit pas pour  $\Delta_e(i)$ , qui tend évidemment vers  $e$  quand  $i$  tend vers  $90^\circ$  – voir (F2) où  $H(x, i)$  tend vers l'infini et  $[1 + H(x, i)]^{-1/2}$  vers 0.

Enfin, si la série des fonctions  $d\Delta_{el}/di$  est uniformément convergente, et si la série numérique des  $\Delta_{el}(i)$  est convergente pour un certain  $i$ , alors la série des fonctions  $\Delta_{el}$  est uniformément convergente, sa somme (i.e., la fonction  $\Delta_e$ ) est différentiable et sa dérivée est la somme de la série des fonctions  $d\Delta_{el}/di$  [20, p. 213-214]; donc  $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{d\Delta_{el}}{di} = \frac{d\Delta_e}{di}$ , ce qui

donne

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{d\Delta_{el}}{di}(0) = \overline{AA'_0} = \int_{x_0}^{x_0+e} \frac{\eta}{1+\eta} dx = \int_{x_0}^{x_0+e} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \eta^l \right] \eta dx = \sum_{l=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x_0+e} (-1)^l \eta^{l+1} dx = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (l+1) L_{1,l}$$

où la série de fonctions qui se trouve sous l'avant-dernière intégrale converge normalement si

$\sup_{x \in [x_0, x_0 + e]} |\eta(x)| < 1$  – et dans ce cas, l'avant-dernière égalité de la chaîne numérique ci-dessus est vraie. Justement, avec nos expressions de  $\Delta_{el}(i)$  on constate trivialement, pour  $l = 1, 2, 3$

et 4, l'égalité numérique  $\frac{d\Delta_{el}}{di}(0) = (-1)^{l-1} \int_{x_0}^{x_0+e} \eta^l dx = (-1)^{l-1} l L_{1,l-1}$ .

partir du donné  $Z' \mapsto \Delta_\infty(Z')$  est sans doute grandement illusoire, de même qu'elle s'est avérée telle à partir de  $Z' \mapsto \chi_S(Z')$  [58] – au grand dam de plusieurs brillants scientifiques du XIX<sup>e</sup> siècle, dont Félix HAUSDORFF [13, p. 54]. De plus, pour un milieu à symétrie sphérique, dans les années 1980 on a compris que le problème inverse partant de  $\chi_S$  n'était bien posé que sous le niveau de l'observateur [58, p. 197-198] supposé ne pas être au-dessus d'un chenal optique – notion définie dans le document [59].

## Appendice G : un modèle historique de guidage dû au dépassement du gradient thermique critique

En 1729 déjà, Pierre BOUGUER (1698-1758) étudiait [49,50] les propriétés des rayons lumineux dans le cadre d'un modèle d'atmosphère de hauteur finie à symétrie sphérique et dans laquelle, en termes actuels, le profil d'indice de réfraction  $n$  est proportionnel à  $1/r^q$  avec  $q > 0$ . Une étude très voisine a été faite par SIMPSON en 1743 [51] ; elle débouche sur la formule de BRADLEY pour la réfraction astronomique [50, p. 443] :

$$\chi_s \cong \left(1 - \frac{\eta_s}{2}\right) \eta_s \tan(Z' - w\chi_s) \quad \text{avec} \quad w = \frac{1-q}{2q}. \quad (\text{G1})$$

BOUGUER a tenté d'ajuster son modèle à l'atmosphère réelle ; l'utilisation de deux valeurs de référence pour  $\chi_s$  lui a donné l'estimation  $q \cong 1/7.805$  – alors que BRADLEY, par une autre méthode, avait trouvé  $q \cong 1/7$ . Dans un mémoire publié en 1753 [52], BOUGUER revient sur cet ajustement avec d'autres critères, et trouve [13, p. 32]  $1/q$  compris entre  $7 + (5/8)$  au moins et  $9 + (1/8)$  au plus<sup>28</sup>.

Il comprend alors que  $q$  supérieur à 1 (causé, dans la pratique, par le dépassement du gradient thermique critique) produirait la suppression d'une bande<sup>29</sup> de l'image usuelle du ciel au-dessus de l'horizon astronomique car l'observateur serait dans un chenal optique.

Par ailleurs, compte tenu de l'expression (A2), on voit immédiatement que, dans le cas du modèle de BOUGUER,  $\kappa_s = q$ . Quand le coefficient de réfraction  $\kappa_s$  augmente et passe par la valeur critique 1, effectivement un phénomène supplémentaire apparaît : l'existence d'un chenal optique contenant  $S$ , qui peut être parcouru et décrit en entier par un ensemble de rayons pas trop inclinés sur l'horizontale. Grâce à l'expression (A3), on voit que la valeur critique  $-\sigma_{c_s}$  de  $(dT/dr)_s$  s'écrit

$$-\sigma_{c_s}(\lambda_0) = b_s(\lambda_0) - a_s > 0. \quad (\text{G2})$$

Nous savons [50, p. 443-444] qu'en prolongeant le raisonnement qui fait passer de l'hypothèse de BOUGUER à la formule de BRADLEY et en exploitant celle-ci, on peut arriver à une expression approximative de  $\chi_s$  en fonction de la petite hauteur apparente  $\psi'$  :

$$\chi_s \cong \frac{q}{1-q} \left( \sqrt{2 \frac{1-q}{q} \eta_s + \psi'^2} - \psi' \right)$$

<sup>28</sup> La dispersion de ces résultats ne doit pas nous surprendre : d'une part il y a les erreurs de mesure, mais d'autre part  $q$  est un paramètre associé à un modèle d'atmosphère très éloigné de la réalité, donc la valeur de  $q$  peut très bien différer selon la propriété du modèle qui est confrontée à la réalité.

<sup>29</sup> qui est un avatar de la bande vide de WEGENER [53], phénomène englobant l'effet *hillingar* (ou « mirage arctique ») [54,55] – qui donne à la mer éventuellement un aspect concave (ce qui a déjà été observé concrètement [56, § 3], y compris sur le Lac Léman [57, p. 541]).

tant que la formule ci-dessus fournit une valeur positive, ce qui exclut le cas où  $1-q$  et  $\psi'$  sont tous deux négatifs. En nous servant maintenant de la relation (3) de [1], nous en déduisons les expressions approchées

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_\infty}{r_s} &\cong (1+\eta_s) \left(1 - \frac{\psi'^2}{2}\right) - \left[1 - \frac{(\psi' - \chi_s)^2}{2}\right] = \left(1 - \frac{\psi'^2}{2}\right) \eta_s - \psi' \chi_s + \frac{\chi_s^2}{2} \\ &= \left(1 - \frac{\psi'^2}{2}\right) \eta_s - \psi' \frac{q}{1-q} \left(\sqrt{2 \frac{1-q}{q} \eta_s + \psi'^2} - \psi'\right) + \left(\frac{q}{1-q}\right)^2 \left(\frac{1-q}{q} \eta_s + \frac{\psi'^2}{2} - \psi' \sqrt{2 \frac{1-q}{q} \eta_s + \psi'^2} + \frac{\psi'^2}{2}\right) \\ &= \frac{\eta_s}{1-q} - \psi' \frac{q}{(1-q)^2} \sqrt{2 \frac{1-q}{q} \eta_s + \psi'^2} + \left[\frac{q}{(1-q)^2} - \frac{\eta_s}{2}\right] \psi'^2. \end{aligned}$$

La Figure G1 montre, d'après l'expression finale ci-dessus, le graphe de  $\Delta_\infty$  en fonction de  $\psi' > 0$ , dans un cas où  $q > 1$  (donc où il existe une bande vide de WEGENER).

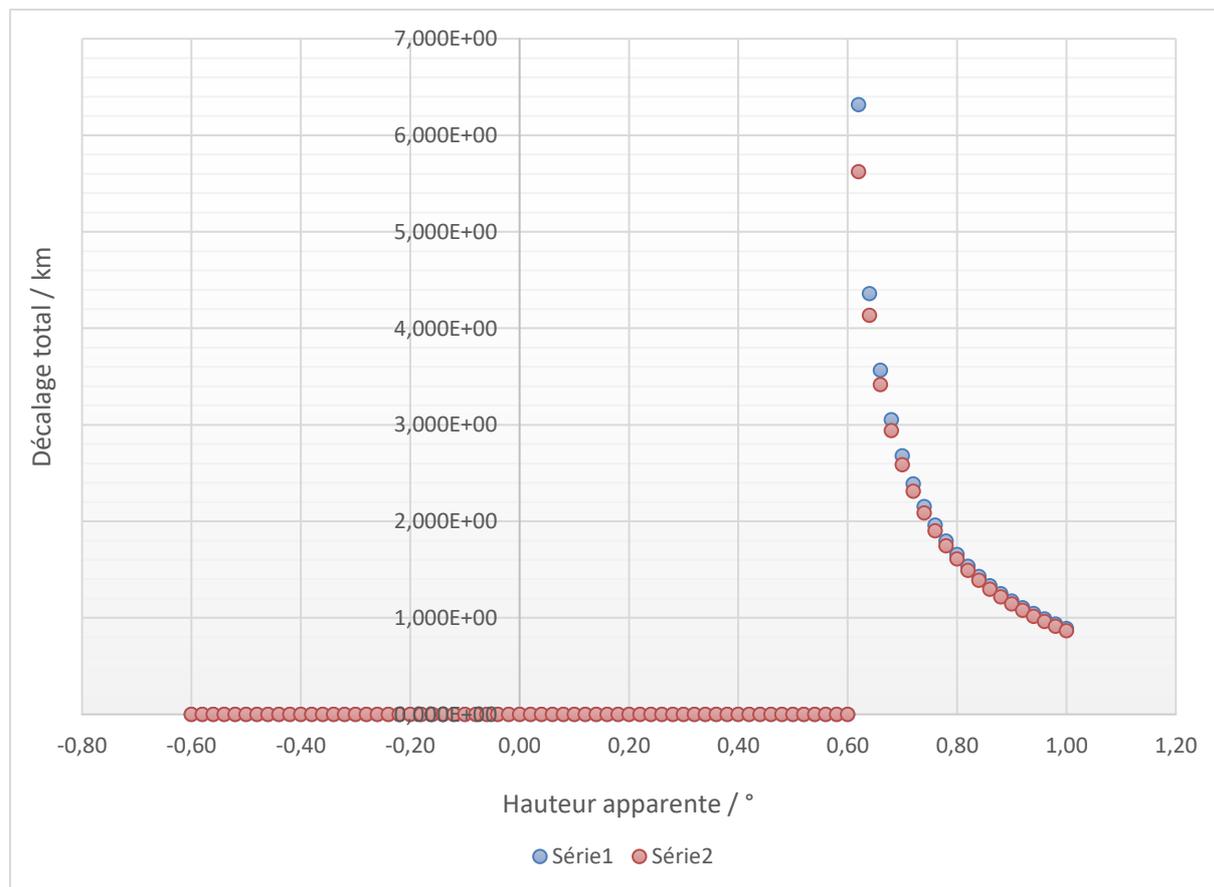


Figure G1 –  $\Delta_\infty$  (en kilomètres) déduit du modèle de BOUGUER-SIMPSON avec  $q = 1/0.80$ ,  $(t_s, P_s) = (0^\circ\text{C}, 1000 \text{ hPa})$ , la raie bleue F à 486 nm (Série 1) et la raie rouge C à 656 nm (Série 2). Le segment sur l'axe des abscisses symbolise la bande vide qui existe, dans le modèle de BOUGUER-SIMPSON, si et seulement si  $q > 1$ . Au voisinage de sa borne montrée par cette figure, noter l'exaltation de la dispersion pour  $\Delta_\infty$ .

### Intérêt du modèle de BOUGUER-SIMPSON

Quoique simpliste quant au profil d'indice choisi (qui est loin de pouvoir s'appliquer sur toute la hauteur de l'atmosphère comme le souhaitait BOUGUER), ce modèle présente l'avantage heuristique de déboucher sur plusieurs idées justes, à retenir, car :

- il montre une condition d'apparition de bande vide ( $\frac{1-q}{q}\eta_s < 0$ , i.e.  $q > 1$ ) et précise, sur le bord externe supérieur de celle-ci, des propriétés de la pseudo-image formée par l'atmosphère : elle est infiniment comprimée verticalement (car toute borne de la bande vide est un point critique pour  $\psi$  en fonction de  $\psi'$  à  $\lambda_0$  fixé), et droite ;
- il permet de comprendre pourquoi la non-linéarité de  $\chi_s$  et donc aussi de  $\Delta$  en fonction de la réfractivité [1, Eq. (15)] est, malgré la petitesse de celle-ci, bien perceptible auprès de l'horizon astronomique (beaucoup plus que ne le montre  $\Delta_{2\infty}$ , donné par (xxxiv)-(xxxv) dans son domaine de validité – i.e. à  $5^\circ$  et plus au-dessus de l'horizon astronomique) : s'il y avait linéarité, la borne supérieure de la bande vide de WEGENER serait indépendante de  $\eta_s$ , alors que dans ce modèle elle vaut  $\sqrt{2\frac{q-1}{q}\eta_s}$  ;
- il illustre l'exaltation de la dispersion, pour  $\chi_s$  aussi bien que pour  $\Delta_\infty$ , au voisinage du « point »  $\psi' = \sqrt{2\frac{q-1}{q}\eta_s}$  (avec  $q > 1$ ) qui constitue une borne de la bande vide : celle-là est due au caractère critique, en fonction de  $\psi'$  à  $\lambda_0$  fixé, du point correspondant du de la courbe de transfert et du graphe la Figure G1 (point dont la position est dispersive puisqu'elle dépend de l'indice de réfraction) ; une exaltation similaire a lieu avec le « rayon vert » pour un observateur situé juste sous un chenal [59, p. 16]. Par exemple, pour  $q = 1/0.80$  fixé (ce qui est discutable), le premier couple de points bleu et rouge de la Figure G1 au-dessus de la bande vide est à l'abscisse  $0.62^\circ$ , et dans ce cas  $\Delta_\infty$  vaut 6.32 km pour  $(t_s, P_s) = (0^\circ\text{C}, 1000\text{ hPa})$  et la raie F (486 nm, d'où  $\eta_s \cong 2.91 \cdot 10^{-4}$ ) – et 5.62 km dans les mêmes conditions de température et de pression pour la raie C (656 nm, d'où  $\eta_s \cong 2.88 \cdot 10^{-4}$ ), soit une variation relative de 12 % de la raie C à la raie F. À titre de comparaison, le pouvoir dispersif de l'air vaut  $1/89.4 \cong 1.1\%$  ; et par rapport à lui la variation relative de  $\Delta_\infty$  pour  $Z' = 90^\circ$  est, à cause de sa non-linéarité vis-à-vis de la réfractivité, multipliée par 1.22 [1, Eq. (50)] pour un modèle d'atmosphère ordinaire comme celui de KRAMP, ce qui porte la variation relative ordinaire de  $\Delta_\infty$  (pour  $Z' = 90^\circ$ ) à 1.4 % – et la variation relative de l'abscisse du point critique reste du même ordre de grandeur.

### Défauts du modèle de BOUGUER-SIMPSON

En plus de l'irréalisme lié au caractère monotone du profil d'indice ainsi qu'à la symétrie sphérique du modèle de BOUGUER, celui-ci présente d'autres défauts importants mais plus subtils quand  $q > 1$  :

- il étend systématiquement vers le bas la bande vide de WEGENER pour l'observateur  $S$ , jusqu'à son horizon (aussi déprimé soit-il) – alors qu'avec un modèle à symétrie sphérique plus réaliste, la bande vide est (sous réserve d'une demi-largeur verticale inférieure à la dépression de l'horizon) symétrique par rapport à l'horizon astronomique ;
- l'atmosphère tout entière de ce modèle est un chenal optique, au lieu d'une couche dont l'étendue verticale typique est de l'ordre de quelques dizaines de mètres ;
- le profil d'indice de ce modèle présente un point anguleux au sommet de l'atmosphère, et quand  $q > 1$  cela fait que  $\chi_s$  est fini sur les bords externes de la bande vide, alors que mathématiquement il y tend vers  $-\infty$  avec un profil d'indice plus réaliste, dérivable au sommet du chenal. Bien sûr, cette divergence forte n'a d'existence qu'académique, puisqu'elle repose sur l'existence de rayons pouvant faire le tour de la Terre un nombre de fois aussi grand que l'on veut ; dans ce cas,  $\Delta_\infty$  diverge aussi pour les bords externes de la bande vide, mais en oscillant entre un maximum et un minimum opposés, dont l'écart est voisin de un diamètre terrestre – et si la largeur de la bande vide tendait vers zéro, ce phénomène tendrait vers une discontinuité de seconde espèce.

Table 3 – Notations utilisées dans ce document

Symbole	Grandeur	Unités usuelles
$S$	Point de l'observateur	
$Z, Z'$	Distances zénithales vraie et apparente pour l'observateur $S$	°, ', ", rad
$\psi, \psi'$	Hauteurs (angulaires) vraie et apparente pour $S$	°, ', ", rad
$\chi_s = \psi' - \psi = Z - Z'$	(Angle de) réfraction (astronomique) pour $S$	°, ', ", rad
$n$	Indice de réfraction de l'air	
$\eta := n - 1$	Réfractivité de l'air	
$r := CM$	Distance entre un point courant $M$ et le centre de symétrie sphérique $C$	km
$\theta$	Angle des coordonnées polaires d'origine $C$ , pour le point courant $M$	°, ', ", rad
(R)	Rayon lumineux provenant de $A$ à l'infini et arrivant en $S$	
$\mathbf{u}$	Vecteur unitaire tangent à (R) et usuellement orienté dans le sens de propagation de la lumière	
$\alpha$	Angle entre $\mathbf{u}$ et le vecteur $\mathbf{CM}$	°, ', ", rad

$\Delta(r)$	Décalage latéral affectant (R) entre $M$ et $A$	m, km
$\Delta_0(r)$ , $\Delta_1(r)$ et $\Delta_2(r)$	Termes d'ordre 0, 1 et 2 du développement de $\Delta(r)$ par rapport à la réfractivité	m, km
$R_3^{(\Delta)}(r)$	Reste d'ordre 3 du développement de $\Delta(r)$	m, km
$\Delta_\infty$	Décalage latéral total de (R) – i.e. entre $S$ et $A$	m, km
$\delta\Delta_\infty$	Erreur sur $\Delta_\infty$ due au remplacement des couches au-dessus de la troposphère par le prolongement polytropique de celle-ci	mm
$\Delta_{1\infty}$ et $\Delta_{2\infty}$	Termes d'ordre 1 et 2 du développement de $\Delta_\infty$ par rapport à la réfractivité	m, km
$\Delta_\infty^R$	Terme de RAYLEIGH (terme principal)	m, km
$\delta_{1\infty}(Z', T_S)$	Correction relative LHSCD, d'ordre 1, pour $\Delta_\infty^R$	
$\Gamma_2(Z', T_S)$	$\Delta_{2\infty}(Z', T_S, P_S, \lambda_0) / \eta^2(T_S, P_S, \lambda_0)$	m, km
$A$	$\frac{\Gamma_1 + 2\Gamma_2 \eta_S \left( \frac{\partial \eta}{\partial P} \right)_{T, \lambda_0}(T_S, P_S, \lambda_0) - \frac{1}{\eta_S} \left( \frac{\partial \eta}{\partial P} \right)_{T, \lambda_0}(T_S, P_S, \lambda_0)}{\Delta_\infty}$	hPa <sup>-1</sup>
$\Delta_\infty^L$	Approximation LHSCD de $\Delta_\infty$	m, km
$\Delta_\infty^D$	Approximation de $\Delta_\infty$ selon DETTWILLER	m, km
$\Delta_\infty^{IN}$	$\Delta_\infty$ selon une intégration numérique (RK4)	m, km
$t$	Température Celsius dans l'air	°C
$T$	Température absolue dans l'air	K
$P$	Pression dans l'air	atm, hPa
$\lambda_0$	Longueur d'onde dans le vide	μm, nm
$\mu$	Masse volumique de l'air	kg·m <sup>-3</sup>
$C(M, \lambda_0)$	Constante (de type A) de la loi empirique de GLADSTONE-DALE	m <sup>3</sup> ·kg <sup>-1</sup>
$c_{1\infty}(T_S, P_S, \dots, \lambda_0)$	Correction relative du terme de RAYLEIGH due à la violation de la loi de GLADSTONE-DALE	
$H$	Altitude absolue (i.e., par rapport au niveau de la mer) pour $M$	m, km
$g$	Norme du champ de pesanteur	m·s <sup>-2</sup>
$M_a$	Masse molaire de l'air	kg·mol <sup>-1</sup>
$r_p, n_p, \alpha_p$	$r, n, \alpha$ en P, sur la tropopause standard	Divers
$n_s, t_s, T_s, P_s, \eta_s, \mu_s, r_s, H_s, g_s, M_{as}, I_s, I_{0s}, I_{1s}$ et $I_{2s}$	$n, t, T, P, \eta, \mu, r, H, g, M_a, I(r), I_0(r), I_1(r)$ et $I_2(r)$ en S	Divers
$z' := r - r_s$	Altitude de $M$ par rapport à S	m, km
$h(r) := r^2 \left\{ \left[ \frac{r n(r)}{n_s r_s \sin Z'} \right]^2 - 1 \right\}$	Fonction pour l'étude de (R) par quadrature	m <sup>2</sup>
$h_{0z'}, h_{1z'}$ et $h_{2z'}$	Termes d'ordre 0, 1 et 2 du développement de $h$ , par rapport à la réfractivité, à $Z'$ fixé	m <sup>2</sup>
$R_{3z'}^{(h)}$	Reste d'ordre 3 du développement de $h$ à $Z'$ fixé	m <sup>2</sup>
$b_{-2}(\eta_s)$	$(1 + \eta_s)^{-2}$	

$R_3^{(b_2)}(\eta_S)$	Reste d'ordre 3 du développement de $b_{-2}$	
$G(\eta(r), \eta_S, r, Z')$	$\frac{r^2}{h_{0Z'}(r)} \left\{ [1 + \eta(r)]^2 b_{-2}(\eta_S) - 1 \right\} \left( \frac{r}{r_S \sin Z'} \right)^2$	
$M(Z') < 1$	$\sup_{r' \in [r, \infty[}  G(\eta(r'), \eta_S, r', Z') $	
$F(r, Z')$	$[1 + G(\eta(r), \eta_S, r, Z')]^{-1/2}$	
$I(r)$	Intégrale donnée par la quadrature entre $M$ et l'infini	
$I_0(r), I_1(r)$ et $I_2(r)$	Termes d'ordre 0, 1 et 2 du développement de $I(r)$ par rapport à la réfractivité	
$\Gamma_1(Z', T_S, P_S, \dots)$	$\Delta_{1\infty}(Z', T_S, P_S, \dots, \lambda_0) / \eta_S(\lambda_0)$	m, km
$H_{1S}$	Hauteur réduite de l'atmosphère au-dessus de $S$	km
$H_{2S}$	$\sqrt{\frac{1}{\eta_S} \int_0^\infty 2z' \eta dz'}$	km
$H_{BS}$	Hauteur du barycentre de l'air au-dessus de $S$ et pondéré par $\eta$	km
$C_{Sh}(\lambda_0)$	Courbure de (R) en $S$ quand il a en ce point une tangente horizontale, pour la longueur d'onde $\lambda_0$	km <sup>-1</sup>
$\kappa_S(\lambda_0) := r_S C_{Sh}(\lambda_0)$	Coefficient de réfraction de l'atmosphère en $S$ pour la longueur d'onde $\lambda_0$	
$a_S$	Constante additive (de type A) au numérateur d'une expression numérique de $\kappa_S(\lambda_0)$	K · m <sup>-1</sup> , K · km <sup>-1</sup>
$b_S(\lambda_0)$	Dénominateur d'une expression numérique de $\kappa_S(\lambda_0)$	K · m <sup>-1</sup> , K · km <sup>-1</sup>
$H_t$	Altitude absolue de la tropopause	km
$H_v$	Hauteur d'échelle de la vapeur d'eau	km
$\gamma_{Sh}(\lambda_0)$	Grandissement angulaire vertical local, pour l'observateur $S$ et sur son horizon astronomique : inverse de $\left( \frac{\partial Z}{\partial Z'} \right)_{\lambda_0} \left( \frac{\pi}{2}, \lambda_0 \right)$ .	
$\chi_{Sh}$	Réfraction horizontale en $S$ , i.e. $\chi_S$ pour $Z' = 90^\circ$	°, ', ", rad
$R$	Constante (de type D) des gaz parfaits	J · K <sup>-1</sup> · mol <sup>-1</sup>
$z := M_a \frac{P/\mu}{RT}$	(facteur de) compressibilité	
$\sigma := -dT/dr$	Opposé du gradient thermique troposphérique vertical	K · m <sup>-1</sup> , K · km <sup>-1</sup>
$j := \frac{M_{aS} g_S}{R \sigma} - 1$	Indice polytropique de la troposphère, $\sigma$ y étant supposé uniforme et positif	
$T_t$	Température absolue sur la tropopause ( $\sigma$ étant supposé uniforme et positif)	K
$\rho_S < 1$	$T_t/T_S$	

$\xi := \frac{RT_t}{M_{aS} g_S r_S}$	Borne d'intégrale	
$\sigma'$	$\sigma - (2T_S/r_S)$	$\text{K} \cdot \text{m}^{-1}$ , $\text{K} \cdot \text{km}^{-1}$
$j'$	$\frac{M_{aS} g_S}{R \sigma'} - 1$	
$T'_t$	$T_S - \sigma'(H_t - H_S)$	K
$\rho'_S$	$T'_t/T_S$	
$\sigma''$	$-2T_S/r_S$	$\text{K} \cdot \text{m}^{-1}$ , $\text{K} \cdot \text{km}^{-1}$
$j''$	$\frac{M_{aS} g_S}{R \sigma''} - 1$	
$v' := z'/r_S = (H - H_S)/r_S$	Variable d'intégration, adimensionnée	
$v'_t$	Valeur de $v'$ sur la tropopause	
$\Delta P_S, \Delta \mu_S$ et $\Delta \eta_S$	Variations de $P_S, \mu_S$ et $\eta_S$ à $T_S$ fixé	Divers
$T_{ib}$	Température absolue du bas (ou de la base) de la couche d'inversion troposphérique considérée	K
$H_{ib}$	Altitude, par rapport à $S$ , du bas de la couche d'inversion	m
$e_i$	Épaisseur de cette couche d'inversion	m
$\sigma_i < 0$	Valeur de $-dT/dr$ dans cette couche d'inversion	$\text{K} \cdot \text{m}^{-1}$ , $\text{K} \cdot \text{km}^{-1}$
$T_{iH} = T_{ib} + \delta T_i$	Température absolue du haut (ou du sommet) de cette couche d'inversion	K
$j_i < 0$	Indice polytropique de cette couche d'inversion	
$T_{it}$	Température sur la tropopause, en présence d'une couche d'inversion dans la troposphère	K
$\rho_{iS}$	$T_{it}/T_S$	
$H'_{BS}$	Hauteur du barycentre d'une colonne élémentaire d'atmosphère, pondérée par $\eta$ , au-dessus de $S$ où elle comporte cette inversion	m, km
$h_{m,q}$ (avec $m \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}$ )	Hauteurs caractéristiques relatives (i.e. proportionnelles à $1/r_S$ ) de l'atmosphère, telles que $\eta_S^{q+1} h_{m,q}^m := \int_0^{\eta_S} \left(\frac{z'}{r_S}\right)^m \eta^q d\eta = \int_0^\infty m \left(\frac{z'}{r_S}\right)^{m-1} \frac{\eta(z')^{q+1}}{q+1} \frac{dz'}{r_S}$	
$(\delta H_{BS})_{T_S}$	Variation, à $T_S$ fixé, de la hauteur du barycentre de l'atmosphère, suite à la mise en place de l'inversion troposphérique considérée, au-dessus de $S$	m, km
$e$	Épaisseur de la lame stratifiée	m, etc.
$i$	Angle d'incidence sur la lame	°, ', ", rad
$\Delta_e(i)$	Décalage latéral total dans une lame stratifiée d'épaisseur $e$ , pour une incidence $i$	m, etc.
$\Delta_{el}(i)$	Terme d'ordre $l$ du développement de $\Delta_e(i)$ par rapport au profil de réfractivité de la lame	m, etc.

$H(x, i)$	$H(x, i) := \left\{ \left[ n^2(x)/n_0^2 \right] - 1 \right\} \sec^2 i$ avec $n_0 := n(x_0)$	
$N(i)$	$\sup_{x \in [x_0, x_0 + e]}  H(x, i) $	
$L_{m, q}$	Largeurs caractéristiques de la lame, telles que $L_{m, q}^m := \frac{m}{q+1} \int_{x_0}^{x_0 + e} x^{m-1} \eta(x)^{q+1} dx$ (avec $m \in \mathbb{N}^*$ , $q \in \mathbb{N}$ )	m, etc.
$S(\eta_0)$	Valeur de la fonction « histogramme cumulé » pour $\eta_0$ – i.e., mesure du domaine (de $[x_0, x_0 + e]$ ) où $\eta(x) \leq \eta_0$ .	m, etc.
$v_0$	Vitesse arbitraire constante	$m \cdot s^{-1}$ , $km \cdot h^{-1}$ , etc.
$t_0$	Date d'entrée du point mobile fictif $M$ , dans la lame stratifiée, à l'abscisse $x_0$	s, h, etc.
$t_s$	Pour $M$ , date de sortie de la lame stratifiée, à l'abscisse $x_0 + e$	s, h, etc.
$n_0$	Indice de réfraction à l'abscisse $x_0$	
$q$	Exposant du modèle de Bouguer	
$N_e$	Population d'électrons libres ionosphériques	$m^{-3}$
$\tau_{ec0} := \int_0^\infty N_e dz'$	zenithal TEC ( <i>Total Electronic Content</i> )	$m^{-2}$