



HAL
open science

Un modèle isogéométrique aux discrétisations non-conformes pour la conception optimale des structures raidies

Thibaut Hirschler, Robin Bouclier, Arnaud Duval, Thomas Elguedj, Joseph Morlier

► To cite this version:

Thibaut Hirschler, Robin Bouclier, Arnaud Duval, Thomas Elguedj, Joseph Morlier. Un modèle isogéométrique aux discrétisations non-conformes pour la conception optimale des structures raidies. 14ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2019), CSMA, LEM3, MSME, Université de Lorraine, Arts et Métiers, CNRS, May 2019, Hyères, France. 7 p. hal-04824662

HAL Id: hal-04824662

<https://hal.science/hal-04824662v1>

Submitted on 7 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un modèle isogéométrique aux discrétisations non-conformes pour la conception optimale des structures raidies

T. Hirschler¹, R. Bouclier^{2,3}, A. Duval¹, T. Elguedj¹, J. Morlier³

¹ Université de Lyon, INSA-Lyon, CNRS UMR5259, LaMCoS, France | {thibaut.hirschler, thomas.elguedj, arnaud.duval}@insa-lyon.fr

² Université de Toulouse, INSA-Toulouse, CNRS UMR5219, IMT, France | bouclier@insa-toulouse.fr

³ Université de Toulouse, ISAE Supaero-INSa-Mines Albi-UPS, CNRS UMR5312, Institut Clément Ader (ICA), France
joseph.morlier@isae-supero.fr

Résumé — Un modèle isogéométrique unifiant description géométrique et analyse est construit pour l'optimisation de forme des structures raidies. L'utilisation de compositions de NURBS où des surfaces sont immergées dans des volumes permet de paramétrer tant la forme globale de la structure que la forme des raidisseurs. L'analyse est effectuée à l'aide d'une nouvelle formulation coque compatible avec la composition de NURBS et une méthode par multiplicateur de Lagrange est adoptée pour coupler les paramétrisations non-conformes. Un exemple témoigne du potentiel de l'approche.

Mots clés — Analyse Isogéométrique, Optimisation de Forme, Couplage non-conforme, Aérostructures.

1 Introduction

L'optimisation de forme des structures requière une combinaison harmonieuse entre une description géométrique précise et un modèle d'analyse performant d'un même objet. Plus encore, un lien étroit entre les modèles géométrique et d'analyse est nécessaire puisqu'ils communiquent simultanément durant la résolution du problème d'optimisation. Ainsi, l'optimisation de forme est une application intéressante de l'Analyse IsoGéométrique (IGA) [1] car cette méthode s'appuie sur les fonctions NURBS pour représenter d'une part la géométrie et, d'autre part pour effectuer l'analyse. Cet atout a été démontré et l'optimisation isogéométrique de forme suscite un intérêt grandissant depuis 10 ans, et cela pour différents champs d'application [2, 3, 4].

Cependant, il apparaît que l'optimisation isogéométrique de forme a été principalement appliquée pour des structures simples modélisées à l'aide d'un seul patch NURBS. Or, la modélisation de structures plus compliquées, avec des discontinuités géométriques par exemple, nécessite d'introduire plusieurs patches NURBS. Dans ce travail, on s'intéresse aux aérostructures et plus particulièrement aux structures raidies [5]. Ces structures sont obtenues par l'assemblage d'une pièce principale (appelée la peau ou le panneau) et d'une sous-structure (un réseau de raidisseurs par exemple). De par leur nature, les structures raidies nécessitent une modélisation multi-patches. Finalement du point de vue de la géométrie, il est plus commode dans le cas présent d'introduire des paramétrisations non-conformes. Cela permet par exemple de garder une même discrétisation du panneau lorsqu'on modifie la position d'un raidisseur. La génération de maillages NURBS conformes est une procédure difficile à mettre en place, et viendrait ici alourdir le processus d'optimisation. L'objectif de ce travail est donc le suivant : construire une approche isogéométrique pour l'optimisation de forme de structures modélisées par plusieurs patches non-conformes.

Pour l'analyse, il se pose alors la question du couplage entre les paramétrisations non-conformes. Plusieurs approches ont été proposées et peuvent être appliquées. Dans ce travail, nous modélisons le comportement des structures à l'aide de coques de type Kirchhoff-Love [6]. Le traitement du couplage des coques isogéométriques Kirchhoff-Love a été traité à l'aide de méthodes par pénalisation [7], par multiplicateur de Lagrange [8], et les méthodes de Nitsche [9]. A la connaissance des auteurs, seules les méthodes de couplage par pénalisation proposées jusqu'à présent permettent de coupler des coques non-conformes qui s'intersectent avec un angle quelconque. Souvent, le cas particulier d'interface avec continuité géométrique G^1 entre les surfaces est considéré. On propose dans ce travail un couplage par multiplicateur de Lagrange pour les coques isogéométriques Kirchhoff-Love pouvant s'intersecter avec

des angles quelconques. L'intérêt majeur des approches par multiplicateur de Lagrange est leur lien direct avec les méthodes de décomposition de domaine [10]. Cet aspect n'est pas traité ici mais a orienté le choix de l'approche.

Nous introduisons l'approche développée de la manière suivante. Premièrement, la section 2 traite de l'imposition de la variation de forme pour les géométrie mutli-patches. Le principe de surface immergée et de composition de NURBS est présenté. Cette représentation géométrique particulière nécessite une nouvelle formulation coque Kirchhoff-Love, adaptation de la formulation isogéométrique existante. La section 3 présente cette formulation ainsi que la méthode de couplage non-conforme. Finalement, l'exemple d'un toit raidi présenté en section 4 démontre l'efficacité et le potentiel de l'approche.

2 Modèle géométrique versatile

On cherche ici à construire un modèle paramétrique de structures complexes généralement obtenues par assemblage des plusieurs pièces. Afin de s'inscrire dans un processus d'optimisation de forme, il est nécessaire d'éviter toutes étapes d'approximation géométrique, de reparamétrisation, et autres règles géométriques sophistiquées. L'objectif est de pouvoir piloter simplement la forme de la structure.

2.1 Forme paramétrique d'objets complexes

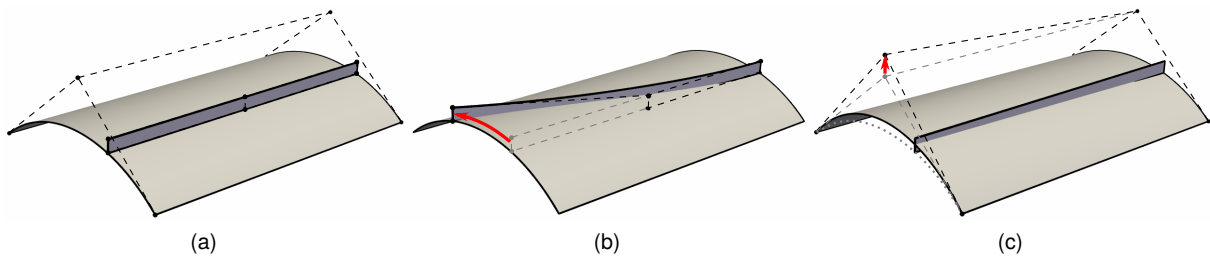


FIGURE 1 – Portion de cylindre avec un raidisseur : (a) deux surfaces NURBS permettent de décrire cette géométrie. Cependant le paramétrage de la forme est délicat : (b) modifier la position des points de contrôle du raidisseur ou (c) ceux du cylindre déconnecte les deux pièces.

Les fonctions NURBS, largement utilisées dans les logiciels de Conception Assistée par Ordinateur (CAO), permettent de représenter des géométries complexes, présentant des courbures par exemple. Considérons le cas d'une portion de cylindre sur laquelle est défini un raidisseur comme représenté en figure 1. Chacun de ces deux objets peut être construit à l'aide d'une surface NURBS. Maintenant, imaginons que nous voulons modifier la forme de ces deux objets afin d'améliorer le comportement mécanique de la structure. Pour cela, il est communément adopté de modifier la position des points de contrôle. La difficulté ici est illustrée en figure 1. Lorsqu'on modifie le raidisseur, le lien à l'interface avec la portion de cylindre est perdu. Aussi, lorsqu'on modifie la portion de cylindre, le raidisseur ne suit pas les changements de géométrie. La raison est qu'il n'existe pas de lien explicite entre la géométrie du raidisseur et celle du cylindre. Dans des cas simples, on peut imaginer des relations entre les points de contrôle des différentes pièces, mais dans le cas général ce n'est pas envisageable.

2.2 Techniques avancées issues de l'infographie 3D

Pour remédier à la difficulté de paramétrage des structures complexes, nous introduisons le principe de surface immergée. Dans le cas précédent de la portion de cylindre raidie (voir figure 1), l'idée est de construire le raidisseur par composition d'une surface et d'un volume. Pour cela, une surface NURBS est immergée dans l'espace paramétrique d'un volume NURBS. C'est la composition de ces deux transformations qui va décrire la surface finale du raidisseur. Le volume NURBS est défini de manière à garantir que la surface finale repose sur le cylindre. Pour cela, le volume peut être généré par extrusion de la portion de cylindre. Cette idée est illustrée en figure 2. En infographie 3D, ces techniques de paramétrisations de forme emboîtées sont connues sous le terme Free-Form Deformation (FFD).

Maintenant, la forme est paramétrée et l'on peut la piloter simplement. Bouger les points de contrôle de la surface immergée va modifier le raidisseur tout en garantissant la contrainte géométrique de contact

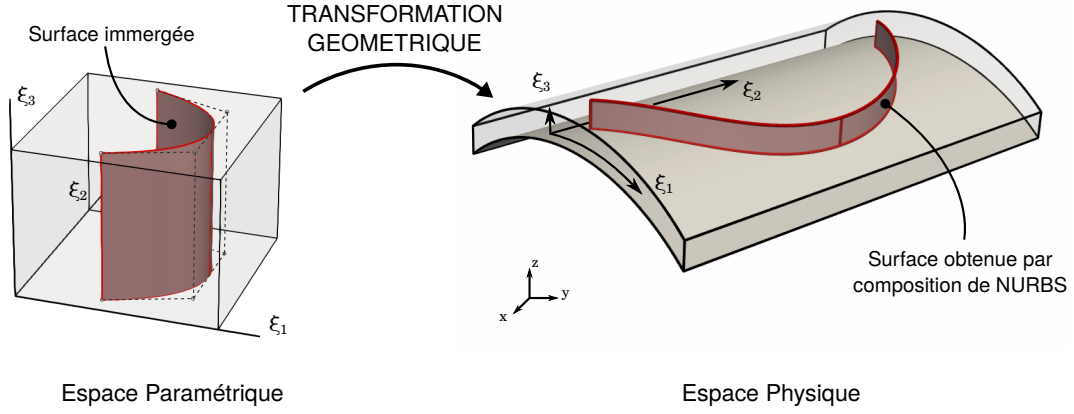


FIGURE 2 – Construction d'une structure raidie en utilisant les surfaces immergées. La surface finale décrivant le raidisseur est obtenu pour la composition d'une surface NURBS et d'un volume NURBS. Cette construction garantit que le raidisseur repose parfaitement sur la portion de cylindre.

à l'interface. Aussi, il est possible de modifier la position des points de contrôle associés au volume afin d'optimiser la forme globale de la structure. Les exemples de la section 4 illustrent ces possibilités et montrent la généralisation du principe de construction présenté ici pour le cylindre avec un raidisseur.

3 Analyse et couplage de domaines

Pour répondre à des exigences du point de vue géométrique, nous avons introduit le principe de surfaces immergées et de composition de fonctions NURBS. Désormais, il s'agit d'effectuer l'analyse des structures ainsi construites. Le but est d'appliquer le concept de l'analyse isogéométrique, c'est à dire d'utiliser directement le modèle géométrique pour effectuer l'analyse. Pour cela deux ingrédients sont nécessaires : une formulation coque adaptée au composition de NURBS, et une méthode de couplage pour des paramétrisations non-conformes.

3.1 Formulation coque pour les surfaces immergées

L'introduction de la composition de fonctions NURBS ne permet pas d'utiliser directement les formulations coques connues. Une surface \mathbf{S} obtenue par composition de NURBS n'est pas une surface NURBS. Son expression est un peu plus compliquée, et est donnée par :

$$\mathbf{S}(\theta_1, \theta_2) = \mathbf{V}(\bar{\mathbf{S}}(\theta_1, \theta_2)) \quad \text{où :} \quad \begin{cases} \mathbf{V}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{ijk} R_{ijk}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mathbf{P}_{ijk}, & [\text{volume NURBS}] \\ \bar{\mathbf{S}}(\theta_1, \theta_2) = \sum_{ab} \bar{R}_{ab}(\theta_1, \theta_2) \mathbf{Q}_{ab}. & [\text{surface immergée}] \end{cases} \quad (1)$$

Le volume NURBS \mathbf{V} est construit à l'aide de fonctions de bases NURBS à 3 variables R_{ijk} et des points de contrôle \mathbf{P}_{ijk} . De manière similaire, la surface immergée $\bar{\mathbf{S}}$ est définie par des fonctions de bases NURBS à 2 variables \bar{R}_{ab} et des points de contrôle \mathbf{Q}_{ab} .

Nous proposons une formulation de type Kirchhoff-Love [6], particulièrement intéressante pour l'optimisation de forme de structures coques. Les hypothèses cinématiques conduisent à décrire le champ de déplacement \mathbf{U} de la coque uniquement à partir du champ de déplacement \mathbf{u} de sa surface moyenne. Ainsi, peu de degrés de liberté sont introduits et il en résulte des systèmes linéaires de tailles minimales. Le champ des déplacements est donné par :

$$\mathbf{U}(\theta_1, \theta_2, \zeta) = \mathbf{u}(\theta_1, \theta_2) + \zeta [\Phi \times \mathbf{a}_3](\theta_1, \theta_2), \quad (2)$$

où $\zeta \in [-\frac{t}{2}; \frac{t}{2}]$, t étant l'épaisseur de la coque. Le vecteur unitaire normal à la surface moyenne \mathbf{a}_3 est défini à l'aide des vecteurs covariants \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 associés à la surface paramétrée \mathbf{S} . Ces vecteurs sont déterminés par les relations suivantes :

$$\mathbf{a}_1 = \sum_{k=1,3} [\bar{\mathbf{S}}_{,\theta_1} \cdot \mathbf{e}_k] \mathbf{v}_{,\xi_k}(\bar{\mathbf{S}}), \quad \mathbf{a}_2 = \sum_{k=1,3} [\bar{\mathbf{S}}_{,\theta_2} \cdot \mathbf{e}_k] \mathbf{v}_{,\xi_k}(\bar{\mathbf{S}}), \quad \mathbf{a}_3 = \frac{1}{J} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2, \quad (3)$$

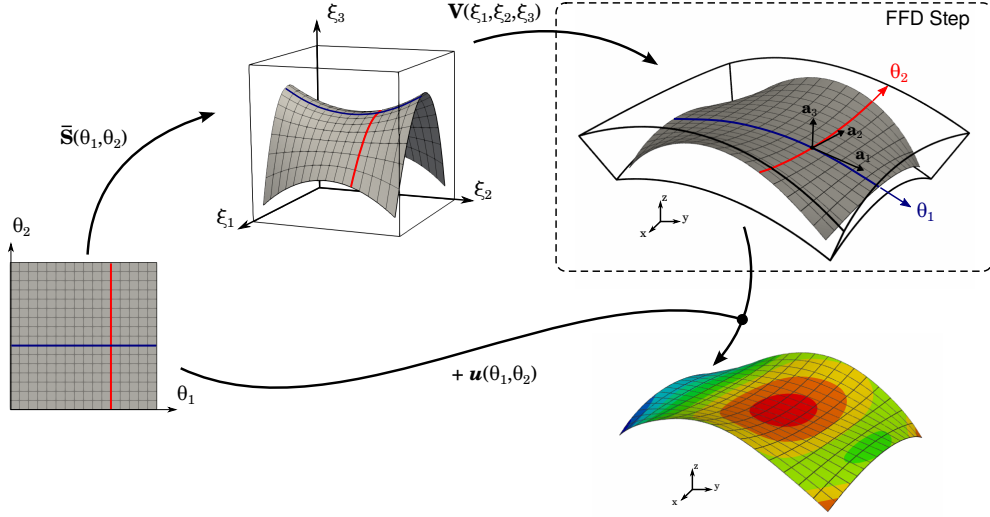


FIGURE 3 – Formulation Kirchhoff-Love immergée. Le champ des déplacements est approché par la même paramétrisation que la surface immergée $\bar{\mathbf{S}}$. Cependant cette surface ne décrit pas la géométrie de la coque mais une transformation volumique supplémentaire est appliquée. La configuration déformée est obtenue en additionnant le champ des déplacements à la composition de NURBS.

où $J = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|$. Le taux de rotation Φ de la normale à la surface est donné par :

$$\Phi = \varphi_1 \mathbf{a}_1 + \varphi_2 \mathbf{a}_2, \quad \text{avec} \quad \varphi_1 = \frac{1}{J} \mathbf{u}_{,\theta_2} \cdot \mathbf{a}_3 \quad \text{et} \quad \varphi_2 = -\frac{1}{J} \mathbf{u}_{,\theta_1} \cdot \mathbf{a}_3. \quad (4)$$

Il reste à décrire le champ de déplacement de la surface moyenne \mathbf{u} . L'application de la méthode de Galerkin pose la question de l'espace d'approximation \mathcal{V}^h du déplacement. Le principe isoparamétrique n'est pas applicable pour les compositions de NURBS. Pour construire cet espace d'approximation, deux choix apparaissent envisageables :

1. utiliser les fonctions de base associées à la transformation volumique :

$$\mathbf{u}^h(\theta_1, \theta_2) = \sum_{ijk} R_{ijk}(\bar{\mathbf{S}}(\theta_1, \theta_2)) \mathbf{U}_{ijk}, \quad (5)$$

2. utiliser les fonctions de base associées à la surface immergée :

$$\mathbf{u}^h(\theta_1, \theta_2) = \sum_{ab} \bar{R}_{ab}(\theta_1, \theta_2) \mathbf{U}_{ab}. \quad (6)$$

Le premier choix constitue une approche immergée. Les degrés de liberté sont imposés sur les points de contrôle du volume dans lequel est immergée la surface. Ces approches nécessitent une attention particulière pour ne pas obtenir un système mal-conditionné. Cela est dû aux supports compacts des fonctions de base. Dans l'équation (5), il se peut que l'image de la surface immergée $\bar{\mathbf{S}}$ n'intersecte pas le support de certaines fonctions de base R_{ijk} . Ainsi, les degrés de liberté associés à ces fonctions sont inactifs et doivent être retirés du système d'équations. Ici nous adoptons la seconde approche où le déplacement est approché à l'aide de la paramétrisation de la surface immergée. Cette approche a l'avantage de conduire à des systèmes de petite taille car les fonctions de base sont celles d'une surface (et non d'un volume comme dans le premier cas). Avec ce choix d'approximation des déplacements (6) et les quantités définies dans les équations (1) à (4), il est désormais possible de construire un élément coque de type Kirchhoff-Love où la surface moyenne est décrite par composition de NURBS. Les expressions du champ des déformations, des contraintes et la matrice élémentaire ne sont pas données ici. Le lecteur intéressé pourra se référer à la formulation coque Kirchhoff-Love initiale [6] et remplacer les quantités évoquées par les expressions données ici. Un aperçu global de l'approche est décrit en figure 3.

3.2 Couplage de discrétisations non-conformes

Les structures raidies sont naturellement modélisées par plusieurs patches : plusieurs surfaces NURBS et/ou compositions de NURBS. Pour pouvoir analyser la structure complète il faut donc coupler ces

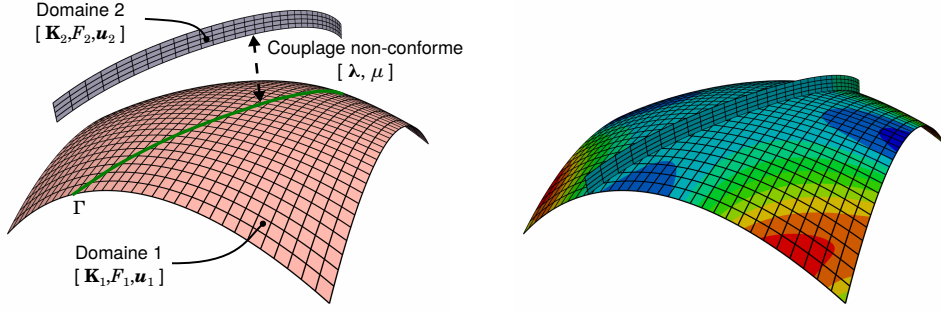


FIGURE 4 – Couplage par multiplicateurs de Lagrange de deux domaines non-conformes à l'interface.

patches. Les discrétisations sont généralement non-conformes aux interfaces (voir figure 4), et les conditions de raccords sont alors nécessairement imposées faiblement. Considérons le cas de deux domaines Ω_1 et Ω_2 modélisés par des coques dont l'intersection Γ décrit une courbe (cas sans recouvrement). Les conditions cinématiques de raccord s'écrivent ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 & \text{sur } \Gamma, \quad [3 \text{ déplacements}] \\ \Phi_1 \cdot \mathbf{t} = \Phi_2 \cdot \mathbf{t} & \text{sur } \Gamma. \quad [1 \text{ rotation}] \end{array} \right. \quad (7)$$

A l'interface, on impose la continuité des déplacements. De plus, on impose la continuité de la rotation par rapport à la tangente à l'interface \mathbf{t} . Il existe différentes méthodes pour imposer faiblement ces conditions cinématiques. On peut citer les approches de couplage par pénalisation, par multiplicateur de Lagrange ou encore les méthodes de Nitsche. Dans ces travaux, nous adoptons une méthode de couplage par multiplicateurs de Lagrange. On introduit deux multiplicateurs de Lagrange $\lambda \in \mathcal{L}_d$ et $\mu \in \mathcal{L}_r$ (\mathcal{L}_d et \mathcal{L}_r étant des espaces *Ad hoc* pour les déplacements et la rotation respectivement). Le principe variationnel écrit sous forme discrète donne le système linéaire à résoudre :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & 0 & \mathbf{C}_1^T & \mathbf{Z}_1^T \\ 0 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{C}_2^T & \mathbf{Z}_2^T \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & 0 & 0 \\ \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

où les vecteurs \mathbf{U}_1 , \mathbf{U}_2 , $\mathbf{\Lambda}$ et \mathbf{M} collectent les degrés de liberté des discrétisations de \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , λ et μ respectivement. Les opérateurs de couplage pour les déplacements \mathbf{C}_s et les rotations \mathbf{Z}_s sont des matrices rectangulaires creuses. Comme les matrices de rigidité \mathbf{K}_s , elles sont obtenues par assemblage de matrices locales et traduisent les conditions données dans l'équation (7). Finalement, les méthodes de décomposition [10] de domaine peuvent être utilisées pour résoudre efficacement le système (8).

4 Application pour l'optimisation de forme

4.1 Généralités

Dans les sections précédentes, nous avons construit un modèle permettant de paramétrer la forme et d'analyser des structures multi-patches. L'utilisation de ce modèle est particulièrement intéressant pour résoudre des problème d'optimisation de forme. Ici, nous étudions le problème de minimisation de la compliance sous contrainte de masse maximale. Ce problème prend la forme mathématique suivante :

$$\begin{aligned} \text{minimiser } f(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{s}) \quad \text{soumis à } \quad & \mathbf{s}_l \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_u, \\ & V(\mathbf{s}) \leq V_0, \end{aligned} \quad (9)$$

où $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur collectant les n variables de *design* (ou de conception). Ces variables modifient la position des points de contrôle associés aux NURBS, paramétrant ainsi la forme de la structure. Les

bornes inférieures s_l et supérieures s_u délimitent l'espace de conception. Le volume de la structure V est inférieur à un volume donné V_0 (souvent celui de la configuration initiale). A masse volumique constante, cela revient à limiter la masse de la structure.

Le problème d'optimisation (9) est résolu dans ces travaux à l'aide d'un algorithme basé sur le gradient. Le fait d'avoir combiné la modélisation géométrique et l'analyse dans un seul modèle permet de calculer les gradients analytiques (discrets dans notre cas) de la compliance et du volume par rapport aux variables de *design* [2]. Dans ces travaux, l'algorithme d'approximations quadratiques successives SLSQP, disponible dans la librairie scientifique `scipy`, est utilisé.

4.2 Optimisation globale d'une structure raidie

On s'intéresse ici au cas d'un toit auquel est fixé deux raidisseurs curvilignes. Initialement, le toit est représenté par une plaque carrée. Ses quatre coins sont fixés et la structure est soumise à une pression uniforme verticale. Les raidisseurs sont construits par composition de NURBS où la transformation volumique est générée par extrusion de la surface NURBS définissant la plaque carrée.

L'intérêt de cette construction est la possibilité de modifier la forme du toit tout en garantissant que les raidisseurs suivent ces modifications de forme. Durant l'optimisation les raidisseurs reposent constamment et parfaitement sur la surface représentant le toit. Pour cela, les variations de forme sont imposées au travers des points de contrôle de la transformation volumique. Les surfaces immergées sont contenues dans le volume et subissent automatiquement la variation de forme globale (voir figure 5). C'est le concept de Free-From Deformation largement utilisé en optimisation aérodynamique par exemple.

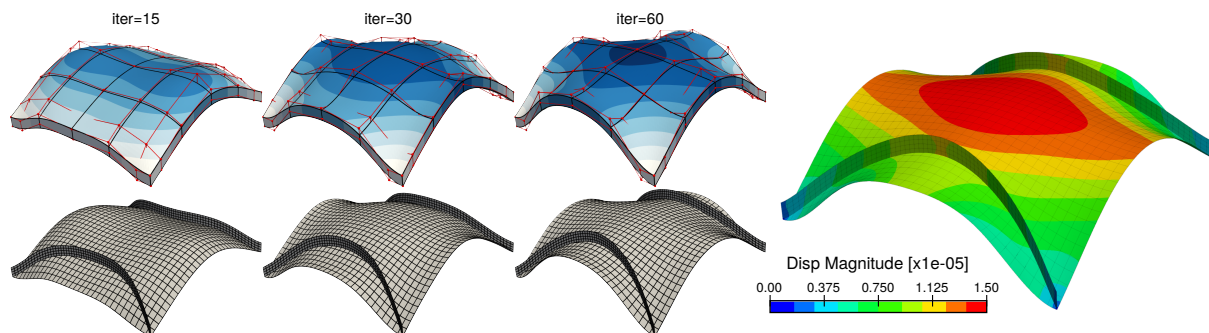


FIGURE 5 – Résultats pour le problème du toit muni de deux raidisseurs. A gauche, modification de la forme imposée par le mouvement vertical des points de contrôle du volume (points rouges). Le champ de couleurs quantifie cette variation de forme. A droite, le modèle d'analyse de la géométrie finale.

Des résultats du problème d'optimisation sont présentés en figure 5. L'évolution de la forme du toit est donnée pour différentes itérations de la résolution. On note que le modèle d'analyse (maillage fin représenté en figure 5) est obtenu par raffinement du modèle d'optimisation sur lequel sont définies les variables de *design*. Le niveau de raffinement est choisi de manière à garantir une bonne qualité de résolution. Les fonctions NURBS jouissent de procédures de raffinement simples à mettre en place et peu coûteuses (applications linéaires) [1]. Finalement, le comportement de la géométrie optimale est bien meilleur au regard du problème considéré (9). La compliance relative de la géométrie finale est de $C_{opt}/C_0 = 2.217e-3$ pour les paramètres utilisés ici.

5 Conclusions et Perspectives

L'approche développée dans ce travail permet d'appliquer le principe d'optimisation isogéométrique de forme sur des structures complexes, composées par exemple de plusieurs pièces. L'intérêt pour le concepteur est réel : un lien étroit entre le modèle géométrique et celui d'analyse permet indéniablement d'accélérer la phase de prototypage par exemple. Cela peut être un outil intéressant dans un contexte d'optimisation multidisciplinaire. La communication entre les différentes disciplines est facilitée lorsque le modèle utilisé par chacune d'elles est identique. La composition de NURBS donne accès à des paramètres globaux associés à la forme globale de la structure, mais également des paramètres locaux permettant de modifier des pièces spécifiques tout en garantissant automatiquement le respect de contraintes

géométriques imposées par les pièces environnantes.

Références

- [1] J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes, Y. Bazilevs. *Isogeometric analysis : Toward Integration of CAD and FEA*, Wiley, 2009.
- [2] W.A. Wall, M.A. Frenzel, C. Cyron. *Isogeometric structural shape optimization*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, pages 2976-2988, 2008.
- [3] J. Kiendl, R. Schmidt, R. Wüchner, K.-U. Bletzinger. *Isogeometric shape optimization of shells using semi-analytical sensitivity analysis and sensitivity weighting*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, pages 148-167, 2014.
- [4] T. Hirschler, R. Bouclier, A. Duval, T. Elguedj, J. Morlier. *Isogeometric sizing and shape optimization of thin structures with a solid-shell approach*, Structural and Multidisciplinary Optimization, 2018.
- [5] S. Shroff, E. Acar, C. Kassapoglou. *Design, analysis, fabrication, and testing of composite grid-stiffened panels for aircraft structures*, Thin-Walled Structures, pages 235-246, 2017.
- [6] J. Kiendl, K.-U. Bletzinger, J. Linhard, R. Wüchner. *Isogeometric shell analysis with Kirchhoff–Love elements*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, pages 3902-3914, 2009.
- [7] A. J. Herrema, E. L. Johnson, D. Proserpio, M. C. Wu, J. Kiendl, M.-C. Hsu. *Penalty coupling of non-matching isogeometric Kirchhoff-Love shell patches with application to composite wind turbine blades*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018.
- [8] A. Apostolatos, M. Breitenberger, R. Wüchner, K.-U. Bletzinger. *Domain decomposition methods and kirchhoff-love shell multipatch coupling in isogeometric analysis*, Isogeometric Analysis and Applications 2014, pages 73-101, 2015.
- [9] Y. Guo, M. Ruess, D. Schillinger. *A parameter-free variational coupling approach for trimmed isogeometric thin shells*, Computational Mechanics, pages 693-715, 2017.
- [10] P. Gosselet, C. Rey. *Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics*, Archives of Computational Methods in Engineering, pages 515-572, 2006.