



Analyse duale des structures en contact par une méthode de point intérieur

Boustani Chadi El, Jérémy Bleyer, Karam Sab, Mohammed Khalil Ferradi, Mathieu Arquier

► To cite this version:

Boustani Chadi El, Jérémy Bleyer, Karam Sab, Mohammed Khalil Ferradi, Mathieu Arquier. Analyse duale des structures en contact par une méthode de point intérieur. 14ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2019), CSMA, LEM3, MSME, Université de Lorraine, Arts et Métiers, CNRS, May 2019, Hyères, France. <hal-04824656>

HAL Id: hal-04824656

<https://hal.science/hal-04824656v1>

Submitted on 7 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Analyse duale des structures en contact par une méthode de point intérieur

C. El Boustani^{1,2}, J. Bleyer¹, K. Sab¹,
M. Arquier², M-K. Ferradi²

¹ Laboratoire Navier UMR 8205 (ENPC-IFSTTAR-CNRS), Université Paris-Est {chadi.el-boustani, jeremy.bleyer, karam.sab}@enpc.fr

² Strains {chadi.el-boustani, mathieu.arquier, mohammed-khalil.ferradi}@strains.fr

Résumé — La modélisation par éléments finis d'un système mécanique en présence de contact est étudiée dans le cadre d'une approche duale, combinant éléments finis formulés en déplacement et en contraintes, et résolue par une méthode de point intérieur. L'approche duale permet un encadrement des grandeurs d'intérêt ainsi que le calcul d'une erreur de relation de comportement qui peut être utilisée dans une procédure de remaillage automatique. Le problème discret est formulé comme un problème d'optimisation conique tandis que l'implémentation d'un algorithme de point intérieur permet de résoudre ce type de problème de manière très efficace, par comparaison à des méthodes plus classiques (pénalisation, Lagrangien Augmenté).

Mots clés — approche duale, méthode de point intérieur, contact

1 Introduction

L'introduction de non-linéarités matérielles, en particulier le contact, complexifie grandement la résolution de calculs de structures discrétisés par éléments finis et nécessitent bien souvent des compétences avancées de la part de l'utilisateur. Cet article présente une alternative robuste et efficace pour le traitement des problèmes élastiques avec contact dans l'optique d'une utilisation non-experte par des ingénieurs. On s'attachera notamment à comparer l'approche proposée à des techniques de résolution plus classiques telles que les approches par pénalisation ou par Lagrangien augmenté, dont la qualité des résultats peut parfois être mise en défaut pour la première ou dont la convergence peut parfois poser problème pour la deuxième. En s'inspirant des approches classiques de calcul à la rupture et d'analyse limite [1, 2, 3, 4], l'approche duale repose sur un encadrement de l'énergie du système dans un cadre variationnel incluant la prise en compte d'une loi de contact frottant associée. Les deux approches peuvent en particulier se formuler comme des problèmes d'optimisation conique en formulant la loi de contact sous la forme de contrainte de complémentarité sur des cônes auto-duaux. L'approche peut également se généraliser à la prise en compte d'un comportement élasto-plastique. La résolution robuste de ces systèmes repose sur l'utilisation d'algorithmes particulièrement efficaces pour ce type de problèmes : les algorithmes primaux-duaux de point intérieur (IPM).

L'efficacité de la résolution des problèmes coniques présentés dans la section 2 est discutée et illustrée dans les sections 4 et 5 sur des systèmes d'assemblages métalliques du génie civil. Le procédé entier de résolution, calcul d'erreur et de remaillage a été implémenté dans le logiciel de calcul spécialisé pour les assemblages métalliques *DS-Steel* de la société Strains (<https://strains.fr/>). L'exemple numérique utilisé dans cet article a été comparé aux résultats donnés par le logiciel d'éléments finis Abaqus. Plus de détails ainsi que les résultats des exemples peuvent être trouvés dans un article à paraître [15].

2 Méthode de point intérieur pour la programmation conique

2.1 Programmation quadratique conique

La programmation quadratique conique (QCP) consiste à minimiser une fonction objectif quadratique convexe sur l'intersection de cônes convexes et de sous-espaces affines. Un tel problème peut

s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}, \mathbf{x}_I} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{c}_I^T \mathbf{x}_I \\
\text{s.t.} \quad & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{A}_I \mathbf{x} - \mathbf{x}_I = \mathbf{b}_I \\
& \mathbf{x}_I \in K_I
\end{aligned} \tag{1}$$

avec \mathbf{P} une matrice semi-définie positive, \mathbf{A} la matrice des contraintes linéaires et K_I est un cône auto-dual tels que le cône quadratique de Lorentz : $\{\mathbf{x} = (x_0, \bar{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|\bar{\mathbf{x}}\| \leq x_0\}$

2.2 Méthode de point intérieur primal-dual

Depuis les années 60, les méthodes de résolution des problèmes d'optimisation convexe ont été largement améliorées. Aujourd'hui, ces algorithmes présentent aux ingénieurs des technologies efficaces et performantes pour la résolution des problèmes convexes. Nous nous intéresserons à l'algorithme de point intérieur primal-dual (IPM) qui présente la meilleure performance pour lors de la résolution des QCP. La philosophie du IPM repose sur la résolution des systèmes formés par les conditions d'optimalité ou de Karush-Kuhn-Tucker :

Trouver : $(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}_I, \mathbf{s}_I)$ tel que :

$$\mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{c} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{A}_I^T \boldsymbol{\nu}_I = 0 \tag{2a}$$

$$\mathbf{c}_I - \boldsymbol{\nu}_I - \mathbf{s}_I = 0 \tag{2b}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} = 0 \tag{2c}$$

$$\mathbf{A}_I \mathbf{x} - \mathbf{x}_I - \mathbf{b}_I = 0 \tag{2d}$$

$$\mathbf{x}_I \cdot \mathbf{s}_I = 0 \tag{2e}$$

$$\mathbf{x}_I \in K, \mathbf{s}_I \in K^* \tag{2f}$$

Plus précisément, ces algorithmes reposent sur l'introduction d'un paramètre $\eta \geq 0$ dit *paramètre de barrière*, pénalisant la contrainte non-linéaire de complémentarité (2e) [5, 6, 7].

L'idée est alors de retrouver une série d'itérations $(\mathbf{x}(\eta), \mathbf{x}_I(\eta), \boldsymbol{\lambda}(\eta), \boldsymbol{\nu}_I(\eta), \mathbf{s}_I(\eta))$ en suivant un *chemin central* qui permet d'obtenir des incréments centrés et loin des frontières de la région admissible. La solution optimale est obtenue pour $\eta \rightarrow 0$.

L'application de la méthode de Newton sur le système des conditions KKT permet d'obtenir un système linéaire à résoudre à chaque itération. Compte-tenu des propriétés particulières des cônes auto-duaux [8] et de la structure du problème, l'itération de Newton peut être calculée en résolvant un système condensé et symétrique suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} + \mathbf{A}_I^T \mathbf{F}_I^2 \mathbf{A}_I & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = -\mathbf{R} \tag{3}$$

où \mathbf{R} constitue un vecteur de résidus et \mathbf{F} une matrice dépendant des variables \mathbf{x}_I et \mathbf{s}_I .

Une des propriétés intéressantes de cet algorithme est que les contraintes coniques sont strictement vérifiées à chaque itération. La forme du système (3) s'apparente fortement à une procédure de Newton-Raphson avec matrice tangente et système augmenté. Sur le plan pratique, la méthode de point intérieur converge généralement avec un nombre d'itérations assez faible et peu sensible vis-à-vis de la taille du système (entre 15 et 30 itérations en moyenne) et indépendamment des valeurs d'initialisations, ce qui présente un avantage majeur comparé à l'algorithme de Newton-Raphson classique.

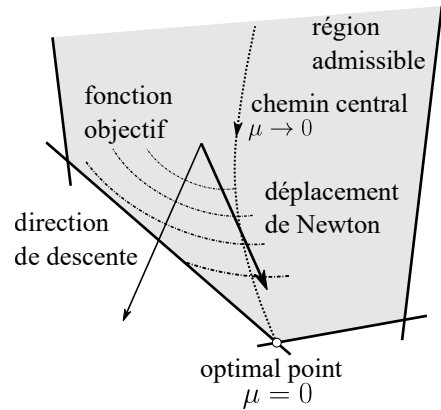


FIGURE 1 – Idée générale d'un IPM

3 Approche duale des problèmes mécaniques

3.1 Formulation conique des contraintes de contact

Les conditions classiques de contact frottant sont données par les conditions de Signorini couplées aux conditions de frottement de Coulomb. En considérant une loi de contact associée, ces conditions s'expriment en utilisant des variables cinématiques (g_N, \underline{g}_T) et statiques $(\sigma_N, \underline{\sigma}_T)$, exprimées dans le repère local de la surface de contact Γ_c comme le montre la figure 2, comme suit :

$$\begin{cases} \text{si } \|\underline{\sigma}_T\| < -\mu\sigma_N \text{ alors } \underline{g}_T = \lambda \frac{\underline{\sigma}_T}{\|\underline{\sigma}_T\|} \text{ avec } 0 \leq \lambda \leq \frac{g_N}{\mu} \\ \text{si } \|\underline{\sigma}_T\| = -\mu\sigma_N \text{ alors } \underline{g}_T = \lambda \frac{\underline{\sigma}_T}{\|\underline{\sigma}_T\|} \text{ avec } \lambda = \frac{g_N}{\mu} \end{cases} \quad (4a)$$

$$\quad \quad \quad \begin{cases} \text{si } \|\underline{\sigma}_T\| = -\mu\sigma_N \text{ alors } \underline{g}_T = \lambda \frac{\underline{\sigma}_T}{\|\underline{\sigma}_T\|} \text{ avec } \lambda = \frac{g_N}{\mu} \end{cases} \quad (4b)$$

cette condition assure la condition de contact unilatéral $\sigma_N \leq 0$, $g_N \geq 0$ et couple également les écarts normal g_N et tangentiel \underline{g}_T . Les conditions précédentes peuvent s'exprimer comme une paire de cônes duaux (figure 3) :

$$(\sigma_N, \underline{\sigma}_T) \in K_\mu \quad \text{et} \quad (g_N, \underline{g}_T) \in K_{-1/\mu} \quad (5)$$

$$\text{où } K_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mid \|y\| + \alpha x \leq 0\} \quad (6)$$

Notons que dans ce qui précède $K_{-1/\mu} = (K_\mu)^\circ = K_\mu^\circ$ où K_μ° est le cône polaire de K_μ . Les paires de variables $(\sigma_N, \underline{\sigma}_T)$ et (g_N, \underline{g}_T) vérifient alors une la condition de complémentarité sur les cônes duaux du second ordre.

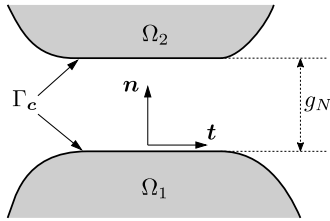


FIGURE 2 – Repère local

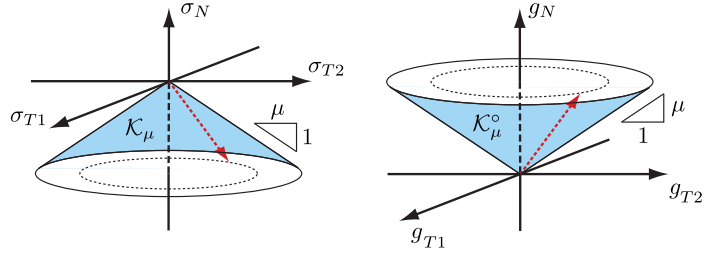


FIGURE 3 – Cônes de frottement duaux

3.2 Principes de minimisation énergétique

Afin de pouvoir utiliser la technologie d'optimisation convexe, les problèmes classiques d'éléments finis doivent avoir la même formulation que le programme (1). Pour cela, nous utilisons les principes du minimum d'énergie potentielle en complémentaire étendus à la prise en compte du contact et éventuellement d'autres non-linéarités matérielles telles que la plasticité (c.f. partie 4.2). Un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{S}$ est dit statiquement admissible avec les forces de volume \underline{b} dans Ω et les tractions surfaciques \underline{t}_d sur Γ_t s'il satisfait les conditions d'équilibre suivantes :

$$SA = \left\{ \underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{S} \mid \begin{cases} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{b} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \llbracket \underline{\underline{\sigma}} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 & \text{à travers } \Sigma_\sigma \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{t}_d & \text{sur } \Gamma_t \end{cases} \right\} \quad (7)$$

Un champ de déplacement $\underline{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ est dit cinématiquement admissible (CA) avec les déplacements imposés \underline{u}_d sur Γ_u s'il est continu par morceaux, dérivable, et vérifie $\underline{u} = \underline{u}_d$ sur Γ_u :

$$CA = \{\underline{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{u} = \underline{u}_d \text{ on } \Gamma_u\} \quad (8)$$

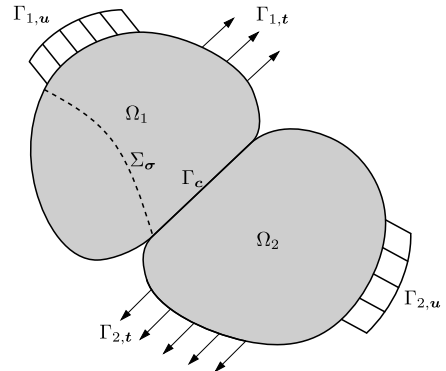


FIGURE 4 – Modèle de référence

Dans le cas d'un comportement élastique du matériau avec une interface de contact entre les deux solides Ω_1 et Ω_2 , la fonctionnelle d'énergie potentielle $\Pi_p(\underline{u})$ s'écrit :

$$\Pi_p(\underline{u}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) d\Omega + \int_{\Gamma_c} \mathbb{1}_{K_{\mu}^{\circ}}(\underline{g}(\underline{u})) d\Gamma - \int_{\Omega} \underline{b} \cdot \underline{u} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \underline{t}_d \cdot \underline{u} d\Gamma \quad (9)$$

La fonctionnelle d'énergie complémentaire s'écrit également :

$$\Pi_c(\underline{\underline{\sigma}}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{C}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}} d\Omega + \int_{\Gamma_c} \mathbb{1}_{K_{\mu}}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}_d d\Gamma - \int_{\Gamma_c} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot (\underline{g}_0 \underline{n}) d\Gamma \quad (10)$$

avec $\mathbb{1}_{K_{\mu}^{\circ}}(\underline{g})$ et $\mathbb{1}_{K_{\mu}}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})$ étant les fonctions indicatrices des cônes de contact définis dans le paragraphe 3.1.

Les deux principes de minimum se présentent alors comme deux approches duales :

- une approche cinématique (EP) dans laquelle un champ de déplacement cinématiquement admissible est obtenu en minimisant Π_p , les conditions d'équilibre étant vérifiées au sens faible ;
- une approche statique (EC) dans laquelle un champ de contraintes statiquement admissible est obtenu en minimisant Π_c , les conditions de compatibilité cinématique étant vérifiées au sens faible.

$$\begin{aligned} \text{(EP)} \quad \min_{\underline{u}} \quad & \Pi_p(\underline{u}) & \text{(EC)} \quad \min_{\underline{\underline{\sigma}}} \quad & \Pi_c(\underline{\underline{\sigma}}) \\ \text{s.t.} \quad & \underline{u} \in CA_h & \text{s.t.} \quad & \underline{\underline{\sigma}} \in SA_h \end{aligned} \quad (11) \quad (12)$$

Notons que les fonctions indicatrices peuvent être enlevées de l'objectif et considérées comme contraintes coniques, obtenant ainsi des problèmes similaires à ceux du paragraphe 2.1. Les problèmes de minimisation (11) et (12) fournissent un encadrement de l'énergie potentielle réelle du système

$$-\Pi_c(\underline{\underline{\sigma}}_h) \leq -\Pi_c(\underline{\underline{\sigma}}^*) = \Pi_p(\underline{u}^*) \leq \Pi_p(\underline{u}_h) \quad (13)$$

Ces bornes permettent à l'ingénieur de quantifier la qualité de la solution approchée, l'écart relatif entre les deux approches servant alors d'excellent indicateur de convergence :

$$\Delta E = \frac{\Pi_p(\underline{u}_h) + \Pi_c(\underline{\underline{\sigma}}_h)}{\Pi_c(\underline{\underline{\sigma}}_h)} = \frac{e^2(\underline{u}_h, \underline{\underline{\sigma}}_h)}{\Pi_c(\underline{\underline{\sigma}}_h)} \quad (14)$$

où la valeur de l'énergie complémentaire a été choisie arbitrairement pour la normalisation.

3.3 Discrétisation par éléments finis

Alors que pour l'approche cinématique des éléments tétraédriques classiques avec une interpolation quadratique des déplacements sont utilisés, l'approche statique utilise des éléments d'équilibre améliorés. Sur un maillage tétraédrique, un champs de contraintes généralisées à divergence nulle est interpolé linéairement. Ceci réduit le nombre de degrés de liberté (ddl) du système (de $6 \times 4 = 24$ ddl à $24 - 3 = 21$ ddl par tétraèdre). Une attention particulière doit être donnée à l'équilibre des vecteurs de contraintes sur les interfaces entre les tétraèdres, ces derniers étant considérés déconnectés. L'écriture de cette condition d'équilibre sur toutes les interfaces conduit à des redondances linéaires dans le système et le rend mal-conditionné. Ces redondances sont éliminées en utilisant la méthode des super-éléments introduite dans [9, 10], qui consiste à diviser chaque tétraèdre en 4 et à condenser les ddl des faces internes.

4 Avantages et extensions aux non-linéarités matérielles

4.1 Estimateur d'erreur et remaillage adaptatif

L'approche duale fournit un couple de solutions admissibles $(\underline{u}_h, \underline{\underline{\sigma}}_h) \in CA_h \times SA_h$ ce qui permet de calculer un estimateur d'erreur basé sur la dualité. Nous utilisons un estimateur de type erreur en relation de comportement [11] en introduisant un terme pour tenir compte des surfaces en contact :

$$e^2(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) = e_{\Omega}^2(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) + e_{\Gamma_c}^2(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) = \Pi_p(\underline{u}) + \Pi_c(\underline{\underline{\sigma}}) \geq 0 \quad \forall (\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) \quad (15)$$

$$e^2(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) = \int_{\Omega} \left(\varphi(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) + \varphi^*(\underline{\underline{\sigma}}) - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \right) d\Omega + \int_{\Gamma_c} \left(\mathbb{1}_{K_{\mu}^{\circ}}(\underline{g}(\underline{u})) + \mathbb{1}_{K_{\mu}}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) - (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{g}(\underline{u}) \right) d\Gamma \quad (16)$$

On peut facilement démontrer que la solution exacte $(\underline{u}^*, \underline{\sigma}^*)$ vérifie :

$$(\underline{u}^*, \underline{\sigma}^*) \in KA \times SA \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}^* = \underline{C} : \underline{\varepsilon}_{(\underline{u}^*)} \\ (g_{(\underline{u}^*)}, \underline{\sigma}^* \cdot \underline{n}) \in (K_\mu \times \mathcal{K}_\mu^o) \end{array} \right. \Leftrightarrow e^2(\underline{u}^*, \underline{\sigma}^*) = 0 \quad (17)$$

En utilisant ce terme d'erreur élémentaire, une stratégie de remaillage adaptatif peut être mise en œuvre :

1. un premier calcul cinématique et statique est réalisé sur un premier maillage grossier $\Omega_h^{(0)}$;
2. sur ce maillage, un calcul d'erreur duale locale et globale est réalisé, ainsi que l'écart entre les deux énergies ;
3. une erreur nodale est calculée en moyennant les contributions élémentaires et une nouvelle carte de taille de maille est obtenue ;
4. un nouveau maillage $\Omega_h^{(1)}$ est généré et deux nouvelles analyses statique et cinématique sont réalisées.

Ce processus est répété jusqu'à l'obtention de l'écart voulu entre les objectifs.

4.2 Prise en compte des non-linéarités matérielles

L'utilisation de la programmation conique est intéressante pour les problèmes mécaniques non-linéaires, surtout l'analyse limite qui ne peut être résolue avec un algorithme de Newton-Raphson. L'utilisation de cette technique est assez récente [1, 2, 3, 4] et peut s'appliquer également à d'autres situations telles que celles des fluides viscoplastiques (fluides à seuil) [12].

En effet, la prise en compte des non linéarités matérielles est assez directe dès que l'étape de formulation de la loi de comportement sous la forme d'un cône du second ordre (comme pour le critère de Von Mises [13]) ou d'un cône de matrice semi-définie positive (comme pour le critère de Rankine [14]) est possible. Les objectifs des deux approches seront alors adaptés pour inclure les termes correspondant d'énergie libre et/ou de dissipation. L'avantage majeur des approches par point intérieur est qu'elles ne nécessitent pas d'algorithme de projection sur le critère de plasticité.

5 Résultats

Afin d'illustrer l'ensemble de la procédure de calcul et de remaillage et également de qualifier ses performances, un exemple typique d'assemblage métallique poutre-poteau est traité et comparée à une résolution par le logiciel d'éléments finis Abaqus. Afin de réduire les différences entre les modèles et de comparer les performances des solveurs, la même série de 5 maillages est utilisée dans les études. La figure 5 donne une description générale de l'assemblage : deux poutres IPE360 sont attachées à un poteau central en HEB200 à l'aide de platines d'about et de 6 boulons M18. Des raidisseurs d'âme sont disposés pour éliminer la possibilité de voilement. Une charge de 45MPa est appliquée sur le poteau alors que les poutres sont supposées articulées au niveau de ses raidisseurs d'âme. Les conditions de contact sont à exprimer entre les platines d'about et les semelles du poteau ainsi qu'entre les boulons et les platines correspondantes. Comme Abaqus n'utilise qu'une approche cinématique, la comparaison avec l'approche statique sera inutile. Des éléments cinématiques tétraédriques à 10 nœuds seront utilisés pour la discrétisation. La seule différence réside alors dans la méthode d'application des conditions de contact : à travers des cônes du second ordre ou à travers la méthode de pénalisation (PEN) ou de Lagrangien augmenté (LA) dans Abaqus. Les calculs sont menés sur la même machine afin de pouvoir comparer les performances.

Le tableau 1 montre le temps de résolution des différentes études. On remarque que la méthode utilisée s'avère aussi rapide que l'approche par pénalisation, mais présente un facteur d'accélération de 2 à 4 comparé aux approches par LA qui fournissent de meilleurs résultats. En terme de nombre d'itérations, ce dernier est stable (entre 18 et 20 itérations) malgré la taille du problème qui augmente alors qu'avec l'approche par LA, le nombre d'itérations augmente (de 20 à 30).

Afin de qualifier la convergence globale, l'écart entre les deux approches statique et cinématique est illustré dans les figures 6 et 7. Celui-ci est déjà inférieur à 5% dès le premier remaillage et égal à 1.68% après le quatrième remaillage.

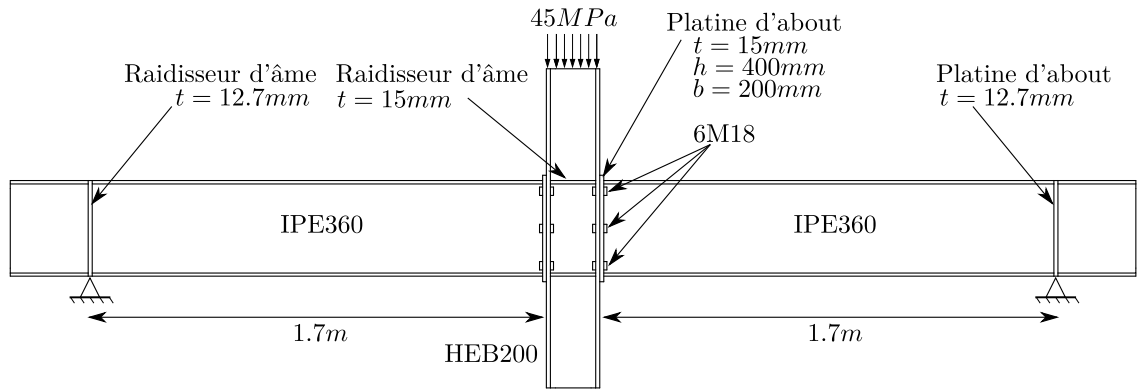


FIGURE 5 – Description de l'exemple

TABLE 1 – Temps CPU et facteur d'accélération comparé aux approches d'Abaqus

Itération de remaillage	Nombre de mailles	IPM approche cinématique (s)(N_{iter})	Abaqus approche LA (s)(N_{iter})	Facteur d'accélération	Abaqus approche PEN (s)(N_{iter})	Facteur d'accélération
0	$N_e = 9150$	10.2 (17)	25.0 (21)	2.5	9.0 (8)	0.9
1	$N_e = 33051$	28.3 (18)	69.0 (22)	2.4	30.0 (9)	1.1
2	$N_e = 42696$	35.0 (17)	97.0 (24)	2.8	38.0 (9)	1.1
3	$N_e = 85187$	78.8 (17)	278.0 (25)	3.5	98.0 (9)	1.2
4	$N_e = 222082$	320.6 (18)	1368.0 (30)	4.3	435.0 (10)	1.4

Il est également intéressant de comparer des grandeurs locales, notamment le déplacement vertical maximal et l'ouverture au niveau de la platine d'about. L'intérêt de l'approche duale est directement apparent à travers l'encadrement de la solution que fournissent les approches statique et cinématique. L'approche par LA d'Abaqus fournit des résultats semblables à notre approche cinématique, mais cela au prix d'un temps de calcul plus important, alors que l'approche par pénalisation tend à surestimer les déplacements (c.f. figures 8 et 9). Une différence majeure se présente en comparant les cartes d'iso-valeurs de contact présentées dans la figure 10. La solution obtenue par point intérieur vérifie exactement les conditions de contact alors que l'approche par pénalisation permet l'interpénétration des surfaces en contact. Une pénétration d'environ 8% de l'ouverture maximale est observée pour le premier maillage.

L'intérêt de l'approche statique apparaît en observant les cartes d'iso-valeurs des contraintes de contact présentées dans la figure 11. Les valeurs fournies par Abaqus sous-estiment la vraie contrainte. Bien que l'approche par LA donne des résultats comparables à l'approche statique (247 MPa comparé à 268 MPa), l'approche par pénalisation sous-estime largement la contrainte normale (89.2 MPa).

6 Conclusions

L'analyse duale des structures par éléments finis est présentée dans le cadre de la programmation conique. Cette double approche fournit aux ingénieurs des résultats fiables et exploitables ainsi qu'un indicateur de convergence. La méthode de point intérieur permet de gérer des non-linéarités de contact sans problèmes de convergence ni paramètres à choisir par l'utilisateur. L'extension à d'autres types de non-linéarités matérielles exprimées dans ce formalisme est également possible.

D'un point de vue numérique, la méthode s'avère stable avec des temps de calculs améliorés comparés aux approches classiques de résolution de problèmes élastiques avec contact tandis que les résultats obtenus sont de qualité du fait de la vérification exacte des conditions de contact. L'exemple présenté montre clairement des résultats de qualité supérieure à l'approche par pénalisation et cela sans dégradation des performances. Elle fournit un encadrement de grandeurs d'intérêt aux ingénieurs notamment les déplacements à travers l'approche cinématique, et les contraintes à travers l'approche statique.

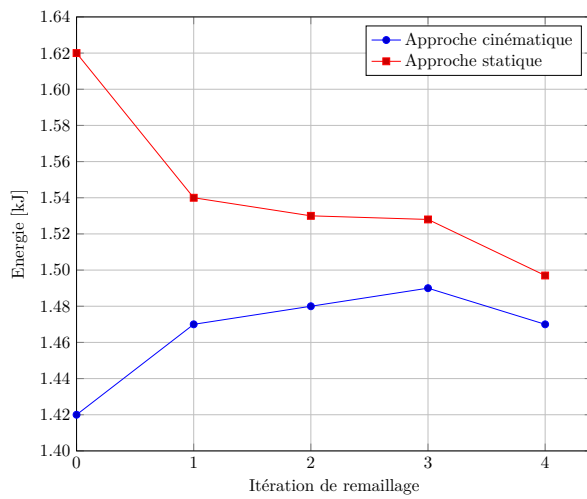


FIGURE 6 – Énergie potentielle et complémentaire

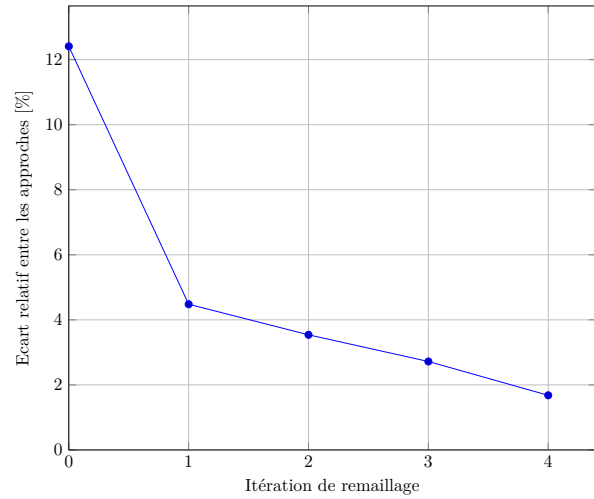


FIGURE 7 – Écart relatif entre les énergies

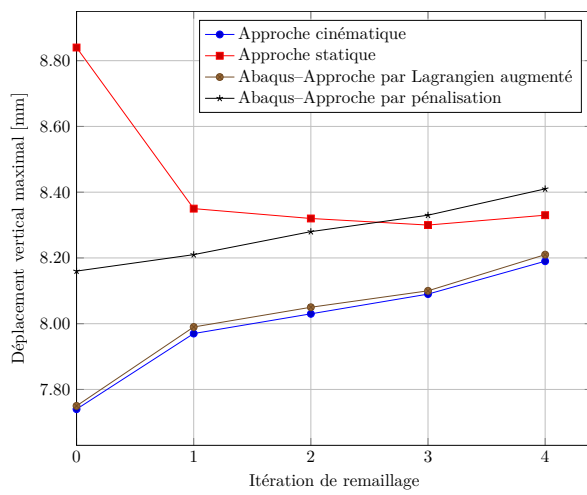


FIGURE 8 – Déplacement vertical maximal

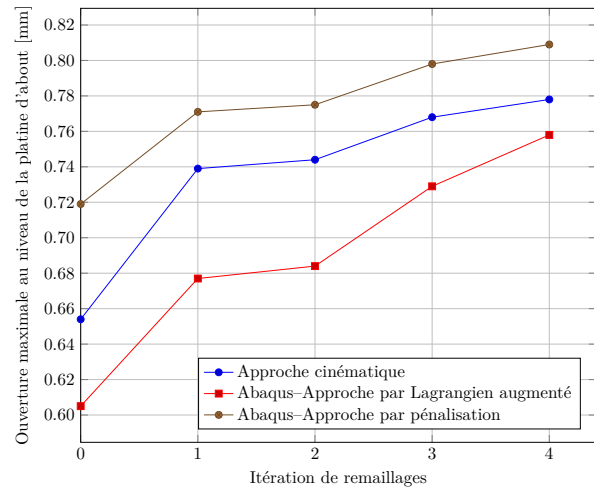


FIGURE 9 – Ouverture maximale au niveau de la platine d'about

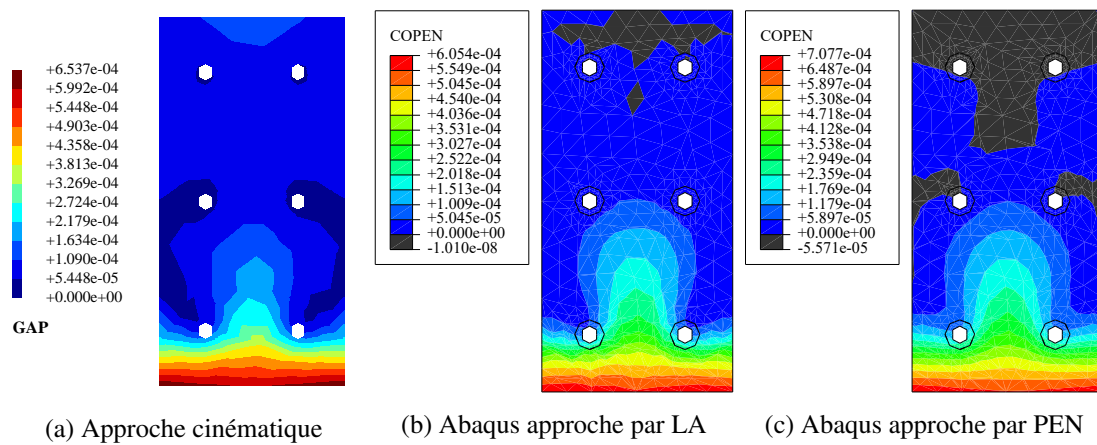


FIGURE 10 – Contact unilatéral, maillage initial, iso valeurs de l'ouverture en (m) au niveau de la platine d'about

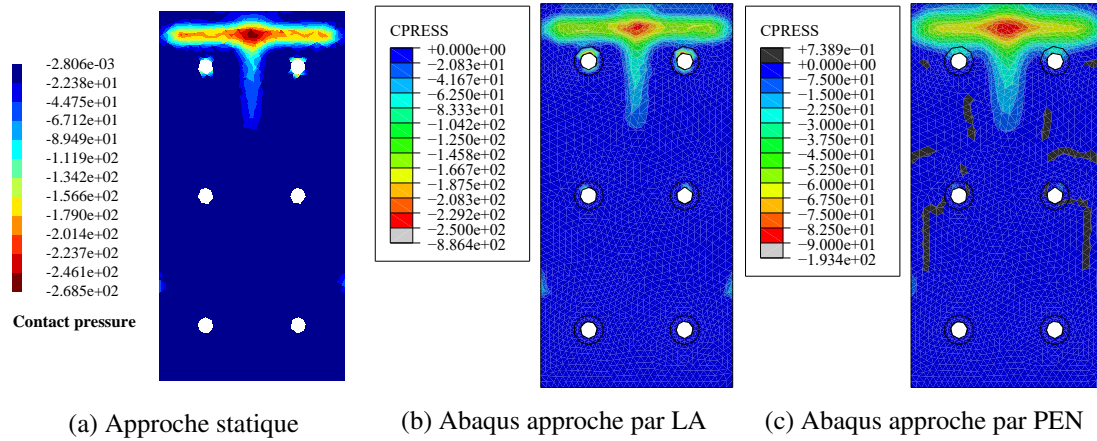


FIGURE 11 – Contact unilatéral, 5^e itération de remaillage, iso valeur de la pression normale en (MPa) au niveau de la platine d’about

Références

- [1] A. V. Lyamin and S. W. Sloan. Lower bound limit analysis using non-linear programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(5) :573–611, 2002.
- [2] A. V. Lyamin and S. W. Sloan. Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26(2) :181–216, 2002.
- [3] A. Makrodimopoulos and C. M. Martin. Upper bound limit analysis using simplex strain elements and second-order cone programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31(6) :835–865, May 2007.
- [4] A. Makrodimopoulos and C. M. Martin. Lower bound limit analysis of cohesive-frictional materials using second-order cone programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(4) :604–634, April 2006.
- [5] F. Alizadeh and D. Goldfarb. Second-order cone programming. *Mathematical Programming*, 95(1) :3–51, January 2003.
- [6] E.D. Andersen, C. Roos, and T. Terlaky. On implementing a primal-dual interior-point method for conic quadratic optimization. *Mathematical Programming*, 95(2) :249–277, February 2003.
- [7] Stephen P. Boyd and Lieven Vandenbergh. *Convex optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, UK ; New York, 2004.
- [8] Yu E. Nesterov and Michael J. Todd. Primal-dual interior-point methods for self-scaled cones. *SIAM Journal on optimization*, 8(2) :324–364, 1998.
- [9] J. P. Moitinho De Almeida and O. J. B. Almeida Pereira. A set of hybrid equilibrium finite elements models for the analysis of three dimensional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(16) :2789–2802, August 1996.
- [10] Martin Kempeneers, Jean-François Debonnie, and Pierre Beckers. Pure equilibrium tetrahedral finite elements for global error estimation by dual analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pages n/a–n/a, 2009.
- [11] Pierre Ladevèze and Jean Pierre Pelle. *Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics*. Mechanical engineering series. Springer Science, New York, 2005. OCLC : ocm55094720.
- [12] Jeremy Bleyer. Advances in the simulation of viscoplastic fluid flows using interior-point methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017.
- [13] Yoshihiro Kanno. *Nonsmooth mechanics and convex optimization*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.
- [14] Hugues Vincent, Mathieu Arquier, Jérémy Bleyer, and Patrick De Buhan. Yield design-based numerical analysis of three-dimensional reinforced concrete structures. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 42(18) :2177–2192, 2018.
- [15] Chadi El Boustani, Jeremy Bleyer, Mathieu Arquier, Mohammed-Khalil Ferradi, and Karam Sab. Dual finite-element analysis using second-order cone programming for structures including contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (submitted)*.