



**HAL**  
open science

## Écoulements capillaires dans une microstructure fibreuse

Loïc Chevalier, Julien Bruchon, Pierre-Jacques Liotier, Nicolas Moulin,  
Sylvain Drapier, Cécile Mattrand, Chafaa Benhacine

► **To cite this version:**

Loïc Chevalier, Julien Bruchon, Pierre-Jacques Liotier, Nicolas Moulin, Sylvain Drapier, et al.. Écoulements capillaires dans une microstructure fibreuse. 14ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2019), CSMA, LEM3, MSME, Université de Lorraine, Arts et Métiers, CNRS, May 2019, Hyères, France. hal-04824595

**HAL Id: hal-04824595**

**<https://hal.science/hal-04824595v1>**

Submitted on 7 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Écoulements capillaires dans une microstructure fibreuse

L. Chevalier<sup>1</sup>, J. Bruchon<sup>1</sup>, P.-J. Liotier<sup>1</sup>, N. Moulin<sup>1</sup>, S. Drapier<sup>1</sup>, C. Mattrand<sup>2</sup>, C. Benhacine<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Mines Saint-Étienne, Chaire Industrielle Hexcel, Univ Lyon, CNRS, UMR 5307 LGF, Centre SMS, F - 42023 Saint-Étienne France, {chevalier,bruchon,liotier,nmoulin,drapier}@emse.fr

<sup>2</sup>Université Clermont Auvergne, CNRS, SIGMA Clermont, Institut Pascal, F-63000 Clermont-Ferrand, France, cecile.mattrand@sigma-clermont.fr, chafaa.benhacine@gmail.com

**Résumé** — Ce travail décrit d’abord une stratégie numérique, basée sur une méthode éléments finis stabilisée, pour simuler un écoulement bi-fluide avec effets capillaires dans une microstructure fibreuse. Dans ce cadre, l’équilibre au point triple est imposé comme condition naturelle dans la formulation faible du problème de Stokes. Deux types de microstructures 2D sont ensuite envisagés, hexagonal et aléatoire, et étudiés en terme de perméabilité et de pression capillaire numériques.

**Mots clés** — jonction triple, perméabilité, pression capillaire.

## 1 Introduction

La capillarité peut se définir comme la capacité d’un fluide à maintenir le contact avec un substrat solide sans l’aide d’une force extérieure. Les effets capillaires, qui se produisent lorsque trois phases (liquide, gaz, solide) sont en présence, interviennent dans de nombreux secteurs de l’ingénierie. Par exemple, leur rôle a été mis en évidence durant l’élaboration de matériaux composites structuraux par infusion de résine [1]. Ce travail se situe dans ce contexte, et a pour objectif de simuler par éléments finis des écoulements par capillarité à l’échelle des fibres. La section 2 de cet article présente le modèle mathématique utilisé : les équations de Stokes ainsi que les conditions aux bords. La formulation faible utilisée est donnée dans la section 3, ainsi que la stratégie numérique développée. Enfin, deux types de microstructures, hexagonal et aléatoire, sont étudiées dans la section 4. Des grandeurs d’intérêt, la perméabilité et la pression capillaire, sont alors calculées numériquement et comparées à des mesures ou des valeurs de référence.

## 2 Description mathématique

Soit  $\Omega$  le domaine de calcul, une région bornée de  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d = 2, 3$  la dimension spatiale, décrivant une microstructure fibreuse dans laquelle s’écoule un liquide supposé newtonien. Les fibres sont rigides et donc représentées par des “trous” dans  $\Omega$ . Cette configuration est schématisée par la Figure 1. Le domaine contient également un “milieu environnant”, ou phase gazeuse, de sorte que  $\Omega = \Omega_l \cup \Omega_g$ , avec  $\Omega_l$  et  $\Omega_g$  les parties occupées, respectivement, par le liquide et le gaz. L’interface liquide - gaz est notée  $\Gamma_{lg}$ , tandis que  $\Gamma_{ls}$  et  $\Gamma_{gs}$  représentent les interfaces liquide - solide et gaz - solide. Enfin, les jonctions triples (lettre  $P$  sur la figure) sont définies comme les intersection des trois interfaces précédemment introduites. La description 2D faite ici est étendue au 3D dans Bruchon *et al* [2].

### 2.1 Équilibre mécanique en volume

Le liquide et le milieu environnant sont considérés comme deux fluides newtoniens et incompressibles de viscosités respectives  $\eta_l$  et  $\eta_g$  avec  $\eta_g \ll \eta_l$ , et de masses volumiques  $\rho_l$  et  $\rho_g$ . Il ne s’agit en effet pas de décrire précisément la dynamique du gaz, mais, dans une approche eulérienne, de prolonger les champs vitesse et pression  $v$  et  $p$  dans tout le domaine de calcul sans perturber l’écoulement du liquide.

Nous négligeons ici les effets d’inertie, si bien que la conservation de la quantité de mouvement et

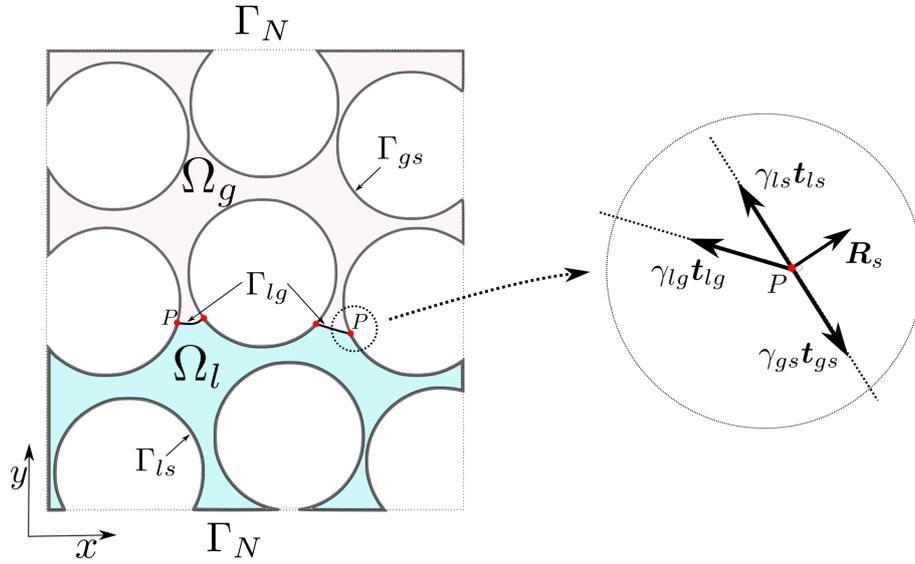


FIGURE 1 – Domaine de calcul  $\Omega$  et zoom sur un point triple

de la masse conduisent au système de Stokes suivant

$$-\nabla \cdot (2\eta \dot{\epsilon}(\mathbf{v})) + \nabla p = \rho \mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2)$$

avec  $\dot{\epsilon}(\mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v})/2$  la partie symétrique du gradient de vitesse,  $\mathbf{g}$  la gravité,  $\eta$  valant  $\eta_l$  dans  $\Omega_l$ ,  $\eta_g$  dans  $\Omega_g$ , et  $\rho$ ,  $\rho_l$  dans  $\Omega_l$ ,  $\rho_g$  dans  $\Omega_g$ .

Le système de Stokes est fermé par les conditions aux bords données dans la suite et caractérisant les écoulements capillaires.

## 2.2 Équilibre mécanique des interfaces

**Interface liquide - gaz.** L'interface  $\Gamma_{lg}$  est soumise à l'action de la contrainte du milieu liquide  $-\sigma_l \cdot \mathbf{n}$ , à celle du milieu gazeux  $\sigma_g \cdot \mathbf{n}$ , avec  $\sigma_{l/g} = 2\eta_{l/g} \dot{\epsilon}(\mathbf{v}) - p\mathbf{I}$  le tenseur des contraintes de Cauchy du liquide ou du gaz, et  $\mathbf{n}$  la normale à  $\Gamma_{lg}$ , extérieure au liquide. Nous considérons de plus une distribution surfacique de contraintes exprimée par un champ de vecteurs  $\mathbf{T}$ . La conservation du moment cinétique impose à  $\mathbf{T}$  d'être tangent à l'interface. Ainsi, il existe un scalaire  $\gamma_{lg}$ , la tension superficielle, tel que  $\mathbf{T} = \gamma_{lg} \mathbf{t}_{lg}$ , avec  $\mathbf{t}_{lg}$  la tangente unitaire à l'interface, dérivée du vecteur position par rapport à l'abscisse curviligne  $s$ . L'équilibre des forces sur l'interface  $\Gamma_{lg}$  conduit à [2, 3] :

$$[\sigma \cdot \mathbf{n}]_{\Gamma_{lg}} = -\frac{d}{ds}(\gamma_{lg} \mathbf{t}_{lg}) \quad (3)$$

où  $[\sigma \cdot \mathbf{n}]_{\Gamma_{lg}}$  désigne le saut du vecteur contrainte à l'interface. Remarquons qu'en développant le membre de droite de cette expression, et en utilisant la formule de Frenet  $d\mathbf{t}_{lg}/ds = \kappa \mathbf{n}$ , avec  $\kappa$  la courbure moyenne, on retrouve d'une part le fait que le saut de contrainte normale est dû à la courbure de l'interface (loi de Laplace), et d'autre part que le saut de contrainte tangentielle est lié à la variation de  $\gamma_{lg}$  le long de l'interface (effet Marangoni).

**Interfaces fluides - solide.** Le solide étant supposé rigide et représenté par un bord du domaine de calcul, les considérations précédentes permettent d'écrire, avec des notations consistantes :

$$\sigma_l \cdot \mathbf{n} = \frac{d}{ds}(\gamma_{lg} \mathbf{t}_{ls}) \quad \text{sur } \Gamma_{ls} \quad \text{et} \quad \sigma_l \cdot \mathbf{n} = \frac{d}{ds}(\gamma_{lg} \mathbf{t}_{gs}) \quad \text{sur } \Gamma_{gs} \quad (4)$$

Une condition de frottement, de type Navier, peut également être ajoutée à (4) [2].

### 2.3 Équilibre mécanique aux jonctions triples

Les jonctions triples sont définies comme les intersections des interfaces  $\Gamma_{lg}$ ,  $\Gamma_{ls}$  et  $\Gamma_{gs}$ . Dans le cas 2D de la Figure 1, ce sont l'ensemble des points  $P$  représentés. En ces points l'équilibre des forces s'écrit (voir Figure 1) :

$$\gamma_{lg}\mathbf{t}_{lg} + \gamma_{ls}\mathbf{t}_{ls} + \gamma_{gs}\mathbf{t}_{gs} = -\mathbf{R}_s \quad (5)$$

où  $\mathbf{R}_s$  est la réaction du solide, ici orthogonale à la surface du solide car celui-ci est rigide. Ce vecteur ne jouera donc pas de rôle dans la suite.

### 2.4 Conditions aux bords

Les conditions d'interface énumérées ci-dessus sont complétées comme suit. Nous définissons d'abord  $\Gamma_N$  comme les bords "inférieur" et supérieur" du domaine de calcul (voir Figure 1). Alors :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p_{ext}\mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_N \quad (6)$$

où  $p_{ext}$  est une pression "extérieure". De plus, en définissant  $\Gamma_D = \partial\Omega \setminus \Gamma_N$ ,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_D \quad (7)$$

Enfin,

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} = 0 \text{ sur } \Gamma_D \setminus (\Gamma_{ls} \cup \Gamma_{gs}) \quad (8)$$

Ainsi, les équations à résoudre pour décrire un écoulement dans une microstructure avec effets capillaires, sont les équations de Stokes (1)-(2) complétées par les conditions (3)-(8).

## 3 Stratégie numérique

Nous utilisons une méthode de type éléments finis stabilisée pour résoudre le système précédent, combinée à une approche *level-set* pour décrire l'évolution de l'interface liquide - gaz. Avant de détailler cette stratégie, nous donnons la formulation faible du problème.

### 3.1 Formulation faible

Le point clef ici est que les conditions d'interface (3)-(4), ainsi que l'équilibre sur les jonctions triples (5) sont vus comme des conditions de Neumann et donc imposés faiblement. La formulation faible du problème découle directement des relations suivantes. Soit  $\mathbf{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction test en vitesse telle que  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_D$ . Tout d'abord, en sommant les contributions de  $\Omega_l$  et  $\Omega_g$  :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dv &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w} \, dv + \int_{\Gamma_N} p_{ext} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &\quad - \int_{\Gamma_{lg}} \mathbf{w} \cdot \frac{d}{ds} (\gamma_{lg} \mathbf{t}_{lg}) \, ds - \int_{\Gamma_{ls}} \mathbf{w} \cdot \frac{d}{ds} (\gamma_{ls} \mathbf{t}_{ls}) \, ds - \int_{\Gamma_{gs}} \mathbf{w} \cdot \frac{d}{ds} (\gamma_{gs} \mathbf{t}_{gs}) \, ds \end{aligned} \quad (9)$$

Ensuite, par intégration par parties, sur chaque interface :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot \frac{d}{ds} (\gamma \mathbf{t}) \, ds = - \int_{\Gamma} \gamma \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{w}}{ds} + \int_{\partial\Gamma} \gamma \mathbf{w} \cdot \mathbf{t} \, ds \quad (10)$$

Plusieurs commentaires sont à faire ici. Premièrement,  $\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{w}}{ds}$  est la divergence surfacique de  $\mathbf{w}$ , que l'on peut réécrire en notation tensorielle [2]  $(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \nabla \mathbf{w}$ . Deuxièmement, en 2D, l'extrémité  $\partial\Gamma$  de la courbe  $\Gamma$  est réduite à deux points. La dernière intégrale de (10) est donc en 2D simplement la somme des valeurs de  $\gamma \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}$  en ces points.  $v$  vaut  $+1$  ou  $-1$  en chaque extrémité de  $\Gamma$  selon l'orientation choisie (en 3D il s'agit du vecteur unitaire tangent à la surface et normale à la courbe  $\partial\Gamma$ ). De plus, si l'une des extrémités de  $\Gamma$  correspond à un point triple, alors l'équation (9) montre qu'il est possible d'imposer faiblement la condition (5). Le terme  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{R}$  qui apparaît est nul, puisque la réaction  $\mathbf{R}$  est dirigée selon la normale  $\mathbf{n}$  au solide et que  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Enfin, si l'une des extrémités de  $\Gamma$  n'est pas un point triple, on supposera ici que le terme de bord  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{t}$  est nul. Sinon, il faut l'inclure dans la formulation faible.

En définitive, la forme faible du problème s'écrit : trouver  $(\mathbf{v}, p) \in H^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_D$ , tels que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} \, dv - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w} \, dv = & \\ \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, dv - \int_{\Gamma_N} p_{ext} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, ds - \int_{\Gamma_{lg} \cup \Gamma_{ls} \cup \Gamma_{gs}} \gamma (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \nabla \mathbf{w} \, ds & \quad (11) \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, dv = 0 & \end{aligned}$$

pour toutes fonctions test  $(\mathbf{w}, q) \in H^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)$ , avec  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_D$ . De plus,  $\gamma$  est égal à  $\gamma_{lg}$ ,  $\gamma_{ls}$ ,  $\gamma_{gs}$  sur les interfaces correspondantes.

### 3.2 Approximation par éléments finis

Le domaine de calcul est discrétisé en utilisant un maillage non structuré, composé de triangles en 2D ou de tétraèdres en 3D. Les champs de vitesse et de pression sont approchés, dans un cadre éléments finis (EF), par  $\mathbf{v}_h$  et  $p_h$  continus et linéaires par élément. Un tel élément fini mixte, dit  $P1/P1$ , ne conduit pas à une forme discrète bien posée du problème de Stokes. C'est pourquoi nous utilisons une méthode de stabilisation de type *Variationnelle Multi-Échelle* (VMS), consistant à décomposer les inconnues en la somme d'un terme résolvable, la solution éléments finis, et d'un terme non résolvable, *i.e.* ne pouvant être capté par le maillage EF :  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h + \tilde{\mathbf{v}}$  et  $p = p_h + \tilde{p}$ . Nous employons plus spécifiquement la méthode *Algebraic SubGrid Scale* (ASGS) développée par Badia et Codina [4] qui approche les termes sous-grilles  $\tilde{\mathbf{v}}$  et  $\tilde{p}$  par des quantités proportionnelles aux résidus EF des équations de Stokes. Ceci permet de rajouter de manière consistante des termes de stabilisation dans la formulation EF. De plus, le champ de pression solution du problème de Stokes est discontinu à l'interface liquide - gaz du fait de la courbure. Cependant l'approximation linéaire de la pression faite ici ne permet pas de capter correctement cette discontinuité. C'est pourquoi nous enrichissons l'espace d'approximation de la pression dans les éléments traversés par l'interface, par deux fonctions de forme discontinues. Cette approche, proposée par Ausas dans [5], n'augmente pas la taille du système linéaire à résoudre puisque les degrés de liberté associés à cet enrichissement sont locaux aux éléments et peuvent être donc condensés avant l'assemblage dans la matrice globale. Une technique d'enrichissement analogue, développée par Coppola-Owen et Codina peut également être utilisée, pour décrire la discontinuité du gradient de pression engendrée par les sauts de viscosité et de densité à l'interface liquide - gaz.

### 3.3 Semi-implication du terme de tension superficielle

La discrétisation du problème de Stokes induit des vitesses non physiques, ou courants parasites, au voisinage de l'interface liquide - gaz. Dans notre cas, ces perturbations sont dues à l'approximation de la pression, même si l'enrichissement discuté ci-dessus atténue largement cette source, ainsi qu'à l'approximation continue et linéaire par morceaux de l'interface, pouvant générer les courbures parasites. Ces vitesses non physiques induisent de petites oscillations de l'interface : c'est le phénomène d'ondes capillaires avec une longueur d'onde de l'ordre de la taille de maille. Denner et van Wachem montrent dans [6] que quel que soit le degré de couplage (temporel) fait entre la résolution mécanique et le transport de l'interface, ces erreurs d'approximation sont amplifiées au cours du temps si le pas de temps ne respecte pas certaines restrictions le rendant en pratique trop petit pour mener à bien des simulations.

Pour palier à cela, une méthode dite de semi-implication du terme de tension superficielle  $\int_{\Gamma_{lg}} \gamma_{lg} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \nabla \mathbf{w} \, ds$  est classiquement utilisée. Elle consiste à évaluer cette intégrale en utilisant une prédiction de la position de l'interface à l'incrément de temps suivant. Il en résulte un terme supplémentaire dans la formulation du problème :

$$\Delta t \int_{\Gamma_{lg}} \gamma_{lg} (\nabla \mathbf{v} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})) : \nabla \mathbf{w} \, ds \quad (12)$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps. Cette contrainte de cisaillement interfaciale dissipe l'énergie de surface, particulièrement aux petites longueurs d'ondes, évitant ainsi la propagation d'ondes capillaires.

### 3.4 Transport de l'interface

L'interface  $\Gamma_{lg}$  est décrite par une fonction *level-set*  $\phi_h$ , continue sur le domaine de calcul, linéaire par élément, positive dans le gaz et négative dans le liquide. L'interface est donc décrite implicitement par l'isovaleur zéro de  $\phi_h$ . À l'instant initiale,  $\phi_h$  est choisie comme une fonction distance signée à l'interface, filtrée par une tangente hyperbolique [2, 3]. À chaque instant  $t_n$ , la vitesse  $\mathbf{v}_h(t_n)$  et la pression  $p_h(t_n)$  sont calculées sur la configuration donnée par  $\phi_h(t_n)$ , puis  $\phi_h(t_{n+1})$  est calculée en résolvant l'équation de transport

$$\frac{\partial \phi_h}{\partial t}(t_{n+1}) + \mathbf{v}_h(t_n) \cdot \nabla \phi_h(t_{n+1}) = 0 \quad (13)$$

par une méthode de type SUPG. Soulignons que ce couplage incrémentale ou faible entre la mécanique et la géométrie peut être amélioré par un algorithme itératif consistant à résoudre plusieurs fois au sein d'un même incrément de temps la mécanique et le transport de la *level-set*, jusqu'à converger vers la solution  $(\mathbf{v}_h, p_h, \phi_h)(t_{n+1})$  globale à  $t_{n+1}$ . Ce couplage fort permet une meilleure description [8] de l'angle de contact du liquide sur le solide à chaque instant. Cependant, il engendre également un coût de calcul plus élevé. Ici, nous utiliserons un couplage faible.

Notons que les intégrales surfaciques de l'équation (11) sont calculées en approchant l'interface par un segment (ou un plan en 3D) dans les éléments coupés par l'interface. Dans ces mêmes éléments, la règle d'intégration en volume est enrichie, afin de prendre en compte la discontinuité de la viscosité et de la masse volumique à l'interface.

## 4 Résultats numériques

La stratégie numérique exposée ci-dessus a été implantée dans le logiciel éléments finis *Z-Set*. Sa pertinence est évaluée dans les références [3, 2, 8] sur des cas d'étalement de goutte et de montées capillaires. En particulier, l'angle de contact déduit de l'équilibre au point triple (5) par la loi de Young - Laplace est bien retrouvé. Dans ce travail, nous présentons des simulations de montées capillaires dans deux microstructures différentes, et ébauchons un premier calcul de pression capillaire. Les deux structures considérées sont un arrangement hexagonal de (demi)-fibres circulaires disposées en quinconce (structure 1) présentant un taux volumique de fibres (TVF) de 52%, et une microstructure aléatoire (structure 2) constituée de fibres circulaires identiques avec un TVF de 45 % [9]. Dans ces structures, le rayon des fibres est de  $5 \mu\text{m}$ . Les tensions et énergies de surface sont  $\gamma_{lg} = 37.03 \times 10^{-3} \text{ N/m}$ ,  $\gamma_{ls} = 30.03 \times 10^{-3} \text{ N/m}$  et  $\gamma_{gs} = 60.93 \times 10^{-3} \text{ N/m}$ . De plus, la viscosité du liquide est  $\eta_l = 10^{-3} \text{ Pa.s}$ , celle du milieu environnant  $\eta_g = 1.71 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$ , et la gravité est négligée. Les Figures 2a et 2b montrent à un instant donné le front fluide en vert, la vitesse, la pression, et les lignes de courant lors d'une montée dans les structures 1 et 2.

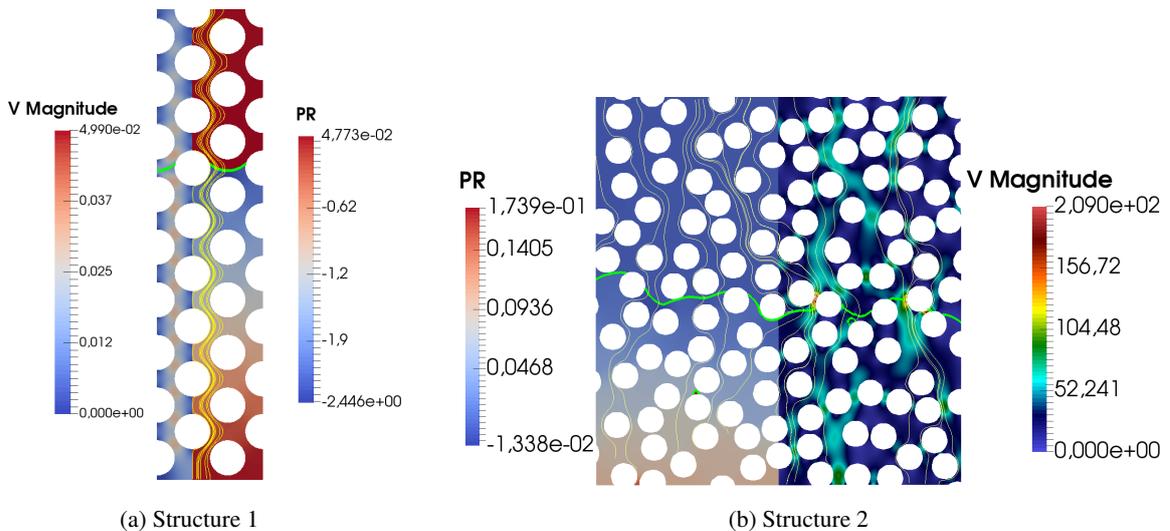


FIGURE 2 – Montée capillaire dans une structure hexagonal (structure 1) et une structure aléatoire (structure 2) : front fluide, pression, norme de la vitesse et lignes de courant.

## 4.1 Expression de la pression capillaire

Le calcul de la pression capillaire "équivalente"  $p_{cap}$  se fait en considérant un écoulement unidirectionnel dans un milieu homogène équivalent aux structures 1 ou 2. Dans ce milieu, l'écoulement est décrit par la loi de Darcy

$$\mathbf{v}_d = -\frac{K}{\eta} \nabla p_d \quad (14)$$

où  $K$  est la perméabilité du milieu poreux, supposée ici isotrope,  $\mathbf{v}_d$  et  $p_d$  les vitesse et pression de Darcy, définies formellement comme des moyennes des vitesse et pression de Stokes sur un volume élémentaire de la microstructure. Dans ce cadre, l'action des forces capillaires est traduit par un saut de pression au front fluide égal à  $p_{cap}$ . On montre (voir référence [1]) que dans ces conditions, la hauteur  $h(t)$  du front fluide s'exprime, en supposant que  $h(t=0) = 0$ , par

$$h(t) = \frac{1}{\eta_l - \eta_g} \left( \sqrt{2(\eta_l - \eta_g)K(p_{cap} - \Delta p)t + h_{max}^2 \eta_g^2} - h_{max} \eta_g \right) \quad (15)$$

où  $\Delta p$  est le différentiel de pression imposé aux bords du domaine, *i.e.* la différence entre la pression sur la face de sortie du liquide et celle imposée sur la face d'entrée;  $h_{max}$  est la hauteur maximale du front fluide, typiquement la taille du domaine de calcul. En négligeant la viscosité du domaine environnant, *i.e.*  $\eta_g \ll \eta_l$ , nous obtenons l'expression suivante de la pression capillaire :

$$p_{cap}(t) = \frac{\eta_l h^2(t)}{2Kt} + \Delta p \quad (16)$$

Remarquons que si  $h^2$  dépend linéairement du temps, comme pour l'écoulement 1D de Darcy,  $p_{cap}$  est indépendante de  $t$ . C'est d'ailleurs l'hypothèse faite pour établir cette relation. Dans la suite, nous utiliserons cette expression comme définition de  $p_{cap}$  pour des écoulements de Stokes dans les structures 1 et 2. Auparavant, la perméabilité de ces structures doit être déterminée.

## 4.2 Calculs de perméabilités

La perméabilité est calculée numériquement en régime saturé. Les effets capillaires n'interviennent donc pas ici. Deux approches peuvent être utilisées :

— La première approche consiste à revenir à la formulation en débit de la loi de Darcy

$$Q = -\frac{K}{\eta_l} |S| \frac{\Delta p_K}{h_{max}} \quad (17)$$

où,  $\Delta p_K$  est le différentiel de pression imposé qui crée l'écoulement,  $h_{max}$  la hauteur du domaine de Stokes, et  $|S|$  est l'aire de la surface  $S$  perpendiculaire à l'écoulement à travers laquelle le débit  $Q$  est calculé. De plus,  $Q = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$ , ce qui permet, une fois les équations de Stokes résolues, de calculer  $K$ .

— La seconde approche résulte du calcul établissant les équations de Darcy par homogénéisation des équations de Stokes sur un volume élémentaire [7] :

$$\mathbf{v}_d = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_l} \mathbf{v} dv \quad \text{et} \quad p_d = \frac{1}{|\Omega_l|} \int_{\Omega_l} p dv \quad (18)$$

Encore une fois, les équations de Stokes résolues, la perméabilité peut être calculée en injectant les valeurs obtenues de  $\mathbf{v}_d$  et  $p_d$  dans la loi de Darcy (14) considérée dans la direction de l'écoulement.

La perméabilité calculée de l'empilement hexagonal est  $K = 2,25 \times 10^{-13} \text{ m}^2$  avec la première méthode, et  $K = 5,5 \times 10^{-13} \text{ m}^2$  avec la seconde. Ces valeurs sont obtenues à convergence pour une taille de volume élémentaire supérieure ou égale à 40 fibres. Notons que ces valeurs sont proches de celle donnée par le modèle de Gebart,  $K_G = 3,4 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ , correspondant également à une configuration hexagonale et un écoulement de Stokes. Le modèle de Kozeny-Carman prédit une valeur du même ordre,  $K_{KC} = 2,3 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ , pour un TVF 52% et un rayon de fibres de  $5 \mu\text{m}$ . Concernant la structure aléatoire, 15 exemplaires de cette microstructure ont été utilisés pour une taille de volume élémentaire allant de

200 à 1000 fibres. La convergence sur la perméabilité est atteinte pour 600 fibres, avec des perméabilités moyennes  $K = 5 \times 10^{-13} \text{ m}^2$  et  $K = 1,4 \times 10^{-12} \text{ m}^2$  et des écarts-types de  $3 \times 10^{-14} \text{ m}^2$  et  $4 \times 10^{-14} \text{ m}^2$ , obtenus avec les méthodes 1 et 2 respectivement. Notons que, comme analysé dans [8], la méthode 2 fournit une borne supérieure pour la perméabilité.

### 4.3 Résultats et discussion

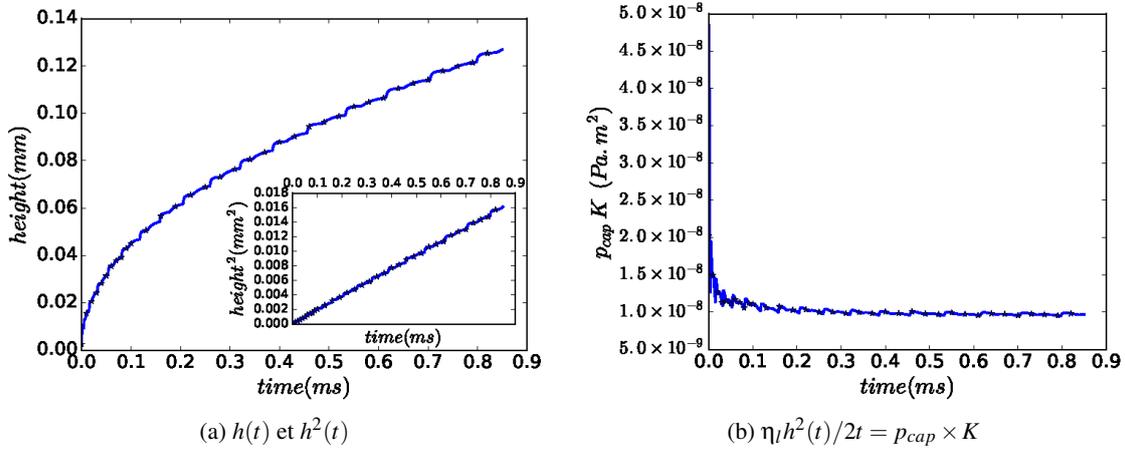


FIGURE 3 – Montée capillaire dans une structure hexagonal : position moyenne du front fluide (a) et valeurs de  $p_{cap}K$  correspondantes.

Nous présentons d’abord le cas d’une montée capillaire dans l’empilement hexagonal. Le différentiel de pression considéré ici est nul :  $p_{ext} = 0$ ,  $\Delta p = 0$ . La Figure 3 montre la hauteur moyenne du front fluide  $h(t)$ , ainsi que  $\frac{\eta_l h^2(t)}{2t}$ , correspondant d’après (16) à  $p_{cap}K$ , *i.e.* le produit de la pression capillaire et de la perméabilité. En dehors des premiers instants de la montée (l’équation (16) n’est pas valable à  $t = 0$ ),  $p_{cap}K$  fluctue autour d’une valeur stationnaire de  $1,0 \times 10^{-8} \text{ Pa.m}^2$ , ce qui correspond à une pression capillaire  $p_{cap} \approx 0,44 \text{ bar}$  ou  $p_{cap} \approx 0,18 \text{ bar}$ , selon que la perméabilité considérée soit calculée avec la méthode 1 ou la méthode 2. Ces valeurs de pression capillaire sont en cohérence avec celles mesurées expérimentalement [1]. Ces résultats signifient également que la position moyenne du front fluide,  $h(t)$ , donnée ici par un écoulement de Stokes avec la capillarité comme seule force motrice, est fonction de la racine carrée du temps, comme le montre le médaillon de la figure 3a où est tracé  $h^2(t)$ , ou encore que la vitesse moyenne de ce front décroît en  $1/h(t)$ .

Considérons à présent un écoulement dans une structure aléatoire à 48% de fibres (Figure 2b). Dans cette structure, une montée capillaire spontanée n’a pu être réalisée. En effet, entre certaines fibres voisines suffisamment espacées, le front fluide atteint un état stationnaire - courbure nulle et angles de contact vérifiés. Notons également que le caractère 3D d’une microstructure réelle augmente le nombre de contacts entre fibres, favorisant la capillarité. Ici, une force motrice supplémentaire, engendrée par un différentiel de pression, est ajoutée pour forcer l’écoulement :  $p_{ext} = 2 \text{ kPa}$  est imposé sur le bord entrant,  $p_{ext} = 0$  sur le bord sortant, si bien que  $\Delta p = -2 \text{ kPa}$ . La Figure 4a présente comme précédemment la hauteur moyenne  $h(t)$  du front fluide durant la montée ainsi que  $h^2(t)$ , tandis que la quantité  $\eta_l h^2(t)/2t$ , ici égale à  $(p_{cap} - \Delta p)K$ , est tracée sur la Figure 4b. Bien que le caractère aléatoire de la structure, *i.e.* la variation de l’espacement des fibres, affecte la montée, on constate que  $h$  dépend encore de la racine carrée du temps. En dehors des premiers instants où l’expression (16) n’est pas valide, la valeur de  $(p_{cap} - \Delta p)K$  est constante, égale à  $7,3 \times 10^{-9} \text{ Pa.m}^2$ , ce qui correspond à une pression capillaire  $p_{cap} \approx 0,15 \text{ bar}$  ou  $p_{cap} \approx 5,2 \text{ kPa}$ , selon que la perméabilité considérée soit calculée avec la méthode 1 ou la méthode 2. Remarquons que la méthode 2 fournissant un majorant de la perméabilité, la pression capillaire associée est minorée. Les valeurs de pression capillaire trouvées ici, inférieures à celles obtenues dans la structure hexagonale, traduisent le fait que cette microstructure aléatoire est moins favorable au phénomène de capillarité. Cependant, une étude plus détaillée est nécessaire, notamment pour connaître l’influence sur ces valeurs du différentiel de pression imposé et pouvoir ainsi conclure sur leur pertinence.

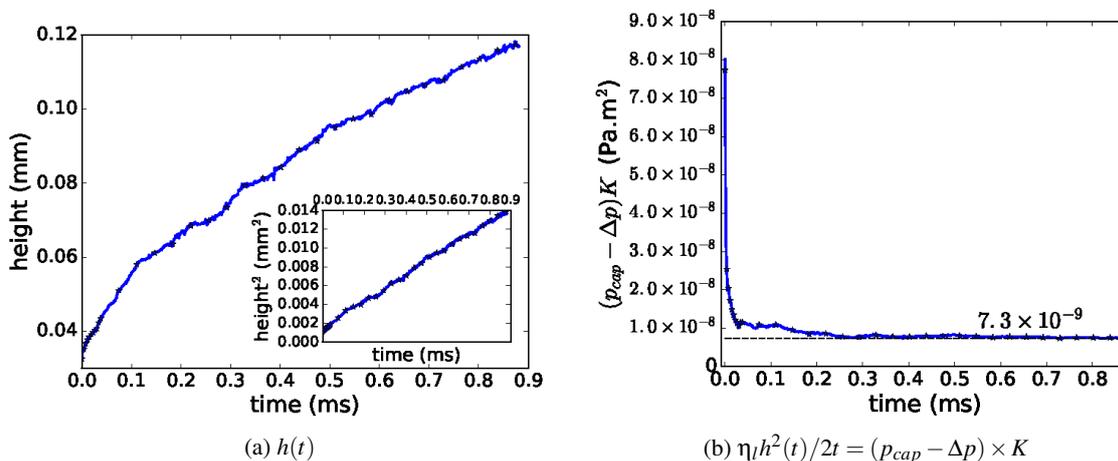


FIGURE 4 – Montée capillaire dans une structure aléatoire : position moyenne du front fluide (a) et valeurs de  $p_{cap}K$  correspondantes.

## 5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons proposé une formulation variationnelle du problème de Stokes incluant naturellement l'équilibre mécanique de la jonction triple. Le système est alors résolu en vitesse - pression par éléments finis stabilisés. Des expériences numériques permettent d'abord de calculer la perméabilité saturée d'une structure fibreuse 2D hexagonale, montrant une bonne concordance avec la littérature, puis d'une structure aléatoire. Ensuite, des simulations de montées capillaires dans ces mêmes structures permettent de calculer une pression capillaire, quantité pouvant être incluse dans un modèle macroscopique. Cependant, si cette montée est spontanée dans la structure hexagonale, un différentiel de pression doit être ajouté pour qu'elle se produise dans la structure aléatoire. Aussi, la suite de ces travaux sera, en premier lieu, la génération de microstructures aléatoires, à porosité donnée comme ici, mais satisfaisant des contraintes supplémentaires sur la morphologie des arrangements, en particulier la distance entre deux fibres, permettant ainsi des montées spontanées.

## Références

- [1] K. Andriamananjara, N. Moulin, J. Bruchon, P.-J. Liotier, S. Drapier. *Numerical modeling of local capillary effects in porous media as a pressure discontinuity acting on the interface of a transient bi-fluid flow*, Int J Mater Form, accepté pour publication, 2018, <https://doi.org/10.1007/s12289-018-1442-3>.
- [2] J. Bruchon, Y. Liu, N. Moulin. *Finite element setting for fluid flow simulations with natural enforcement of the triple junction equilibrium*, Comput. Fluids, 103-121, 2018.
- [3] L. Chevalier, J. Bruchon, N. Moulin, P.-J. Liotier, S. Drapier. *Accounting for local capillary effects in two-phase flows with relaxed surface tension formulation in enriched finite elements*, CR MECANIQUE, 617-633, 2018.
- [4] S. Badia, R. Codina. *Stokes, Maxwell and Darcy : A single finite element approximation for three model problems*, Appl Numer Math, 246-263, 2012.
- [5] R.F. Ausas, G.C. Buscaglia, S.R. Idelsohn. *A new enrichment space for the treatment of discontinuous pressures in multi-fluid flows*. Int J Numer Methods Fluids, 829-850, 2012.
- [6] F. Denner, B.G. van Wachem. *Numerical time-step restrictions as a result of capillary waves*, J Comput Phys, 24-40, 2015.
- [7] K. M. Pillai. *Governing equations for unsaturated flow through woven fiber mats. Part 1. Isothermal flows*, Composites Part A, 1007-1019, 2002.
- [8] L. Chevalier. *Accounting for capillary effects in level-set based Finite Elements modelling of impregnation in fibrous media*, thèse de doctorat, École des Mines de Saint-Étienne, 11 mars 2019.
- [9] C. Mattrand, A Béakou, K. Charlet. *Numerical modeling of the flax fiber morphology variability*, Composites Part A, 10-20, 2014.