



**HAL**  
open science

# Simulations numériques via la méthode des éléments finis multiéchelles: Estimations a posteriori et adaptation de maillage

Ludovic Chamoin, Frédéric Legoll

## ► To cite this version:

Ludovic Chamoin, Frédéric Legoll. Simulations numériques via la méthode des éléments finis multiéchelles: Estimations a posteriori et adaptation de maillage. 14ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2019), CSMA, LEM3, MSME, Université de Lorraine, Arts et Métiers, CNRS, May 2019, Hyères, France. hal-04824593

**HAL Id: hal-04824593**

**<https://hal.science/hal-04824593v1>**

Submitted on 7 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Simulations numériques via la méthode des éléments finis multiéchelles: Estimations a posteriori et adaptation de maillage

L. Chamoin<sup>1</sup>, F. Legoll<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LMT (ENS Cachan, CNRS, Université Paris-Saclay), [chamoin@lmt.ens-cachan.fr](mailto:chamoin@lmt.ens-cachan.fr)

<sup>2</sup> Laboratoire Navier (ENPC, Université Paris-Est) et Inria Paris, [equipe-projet MATHERIALS, frederic.legoll@enpc.fr](mailto:equipe-projet MATHERIALS, frederic.legoll@enpc.fr)

**Résumé** — Nous introduisons des outils robustes pour le contrôle de la précision des simulations numériques utilisant la méthode des éléments finis multiéchelles (MsFEM). Nous proposons un estimateur d'erreur a posteriori garanti et entièrement calculable, qui s'appuie sur le concept d'Erreur en Relation de Comportement, et passe par le calcul de flux équilibrés. Cet estimateur est ensuite décomposé en plusieurs indicateurs associés à chacun des paramètres de la MsFEM, puis utilisé pour piloter une stratégie adaptative de discrétisation. Plusieurs exemples démontrent les performances de notre approche.

**Mots clés** — Problèmes multiéchelles, Approche MsFEM, Estimations a posteriori, Adaptivité.

## 1 Introduction

Le développement de méthodes numériques multiéchelles pour des problèmes de mécanique avec des coefficients fortement hétérogènes est une activité de recherche très active. Ces méthodes permettent de prendre en compte plusieurs échelles, et évitent la résolution directe des problèmes à l'échelle fine, ce qui est généralement trop coûteux. Au cours des dernières années, un effort important a été fait pour la construction de telles méthodes multiéchelles pour des problèmes elliptiques. Plusieurs familles de méthodes ont été proposées, inspirées de la méthode des éléments finis (FEM), et partageant l'idée d'adapter l'espace de discrétisation aux propriétés à la petite échelle de la structure. On s'intéresse ici plus particulièrement à la méthode des éléments finis multiéchelles (MsFEM) développée dans [1, 2] (cf. [3] pour une revue complète de l'état de l'art), où les fonctions de base sont obtenues via la résolution de problèmes locaux, posés à la petite échelle.

La méthode MsFEM définit la solution approchée dans un espace de dimension finie, relié à un maillage macroscopique et engendré par des fonctions de base qui encodent les détails fins des hétérogénéités. Les calculs sont faits en deux étapes : (i) une étape *offline*, au cours de laquelle les fonctions de base sont calculées en résolvant des problèmes hétérogènes locaux ; (ii) une étape *online*, qui consiste à faire une approximation de Galerkin (de coût limité) du problème. On renvoie à la Section 3 ci-dessous pour plus de détails. Comme pour toute méthode numérique, une question importante est celle de la certification de la précision de l'approximation obtenue, ainsi que la construction d'algorithmes permettant d'atteindre une précision donnée avec un coût minimal.

Depuis plusieurs années, de nombreux travaux ont permis le développement d'outils efficaces pour l'estimation de l'erreur de discrétisation et l'adaptation des paramètres de discrétisation, essentiellement pour des problèmes mono-échelles résolus par éléments finis (cf. les revues [4, 5, 6, 7]). A la différence des estimations *a priori*, qui permettent d'évaluer l'ordre de convergence (vis à vis des paramètres de discrétisation) d'une méthode numérique, les estimateurs *a posteriori* donnent accès à des informations quantitatives sur l'erreur ainsi que des critères pour adapter le maillage. Plusieurs outils ont été proposés, dont en particulier certains basés sur le concept d'erreur en relation de comportement (CRE), qui ont été utilisés dans la communauté de mécanique computationnelle depuis plusieurs dizaines d'années [6]. Ces outils nécessitent le calcul (par un post-traitement de la solution numérique du problème primal) de flux satisfaisant la relation d'équilibre dans un sens fort [8, 9, 10, 11]. Ceci permet d'obtenir des bornes d'erreur complètement calculables (i.e. sans constante multiplicative inconnue) et garanties sur la solution (erreur mesurée en norme d'énergie), ainsi que sur des quantités d'intérêt (en utilisant un problème adjoint, cf. [12]).

Dans le cadre multiéchelle, et plus particulièrement pour les méthodes MsFEM, l'état de l'art est très différent. D'un côté, les questions d'estimation *a priori* de l'erreur ont été étudiées dans le détail, permettant de déterminer les taux de convergence des méthodes par rapport à la taille du maillage macroscopique et à la petite taille des hétérogénéités [2, 13, 14, 3, 15]. D'un autre côté, peu d'outils ont été introduits pour l'estimation *a posteriori* de l'erreur, en dépit de l'importance pratique de cette question. Un travail dans ce sens que nous souhaitons mentionner est [16], où la méthode des résidus est utilisée. Cette méthode, dans laquelle l'estimateur d'erreur est décomposé en différentes sources associées chacune à un paramètre de discrétisation, permet de construire des méthodes efficaces d'adaptation de maillage. Cependant, elle ne permet pas de certifier quantitativement l'erreur (celle-ci n'est estimée qu'à une constante multiplicative inconnue près), ce qui est un souci pour certaines applications. Nous mentionnons aussi l'approche [17], proposée pour la méthode des éléments finis multiéchelles généralisés (GMsFEM), une variante de MsFEM.

Le texte ci-dessous est une version résumée de l'article [18], dans lequel nous avons développé un estimateur *a posteriori* robuste, ainsi qu'une stratégie adaptative associée, pour des calculs MsFEM. Pour ce faire, le concept CRE est étendu au cadre multiéchelle. Il s'agit, à notre connaissance, des premiers estimateurs de ce type pour MsFEM.

La suite de ce texte est organisée comme suit. Le problème considéré est décrit dans la Section 2. Des éléments de base sur la MsFEM sont rappelés dans la Section 3. L'estimateur *a posteriori*, s'appuyant sur le concept CRE, est construit dans la Section 4 (la stratégie adaptative, associée à des indicateurs d'erreur pour chaque paramètre de discrétisation, est brièvement décrite en Section 4.3). Nous expliquons dans cette section comment calculer des flux équilibrés, étendant en cela la méthode introduite dans [6, 11] pour des calculs FEM. Ceci permet d'obtenir un estimateur d'erreur garanti et complètement calculable. Des résultats numériques illustrant la performance de notre approche sont présentés dans la Section 5. Enfin, nous rassemblons quelques conclusions dans la Section 6.

## 2 Problème modèle

On considère un problème elliptique hétérogène, correspondant typiquement à un problème de thermique dans des matériaux composites, ou bien à un problème de Darcy dans un milieu poreux. La taille caractéristique de variation des propriétés (thermiques, mécaniques, ...), notée  $\varepsilon$ , est donc petite. Le problème s'écrit typiquement comme

$$-\nabla \cdot [\mathbb{A}^\varepsilon \nabla u^\varepsilon] = f \text{ dans } \Omega, \quad u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (1)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ . On suppose que le chargement  $f \in L^2(\Omega)$  est donné et qu'il varie lentement (il est donc supposé être indépendant de  $\varepsilon$ ). La quantité  $\mathbf{q}^\varepsilon = \mathbb{A}^\varepsilon \nabla u^\varepsilon$  est le flux associé à  $u^\varepsilon$ .

Le tenseur  $\mathbb{A}^\varepsilon \in (L^\infty(\Omega))^{d \times d}$  varie à la petite échelle  $\varepsilon$ . On suppose que  $\mathbb{A}^\varepsilon$  est symétrique et uniformément (vis à vis de  $x$  et  $\varepsilon$ ) borné et isolé de 0. La formulation faible de (1) s'écrit : trouver  $u^\varepsilon \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$  tel que

$$\forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad B^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = F(v), \quad (2)$$

où

$$B^\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega} [\mathbb{A}^\varepsilon \nabla u] \cdot \nabla v, \quad F(v) = \int_{\Omega} f v.$$

La forme bilinéaire symétrique  $B^\varepsilon$  induit la norme d'énergie  $\|v\| = \sqrt{B^\varepsilon(v, v)}$  sur  $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ .

Soit  $\mathcal{T}_H$  une partition de  $\Omega$ . On introduit l'espace de discrétisation  $V_H^0$  des éléments finis P1. L'approximation éléments finis de (1) s'écrit alors :

$$\text{Trouver } u_H \in V_H^0 \text{ tel que, pour tout } v \in V_H^0, \quad B^\varepsilon(u_H, v) = F(v).$$

En supposant typiquement que  $\mathbb{A}^\varepsilon$  varie à l'échelle  $\varepsilon$ , il est bien connu que, pour obtenir une approximation  $u_H$  précise, il est nécessaire de choisir  $H \ll \varepsilon$ . Le nombre de degrés de liberté est alors très grand, ce qui conduit à un coût calcul très important.

### 3 Rappels sur la méthode MsFEM

L'idée principale de l'approche MsFEM est de construire un ensemble  $\{\phi_i^\varepsilon\}_{1 \leq i \leq I}$  de fonctions multi-échelles locales qui encodent l'information microscopique dans chaque élément d'un maillage  $\mathcal{T}_H$  grossier ( $H \gg \varepsilon$ ). Les fonctions de base  $\phi_i^\varepsilon$ , associées à chaque noeud  $i$  du maillage grossier  $\mathcal{T}_H$ , sont adaptées aux propriétés locales de l'opérateur. Ces fonctions sont pré-calculées dans une étape *offline*, sur chaque élément  $K$  du maillage grossier (cf. la figure 1). Pour être bref, nous ne décrivons ici que la variante Linear-MsFEM, donnant lieu à une discrétisation numérique conforme. Dans cette variante, les fonctions de base MsFEM sont définies comme les solutions des problèmes locaux

$$\nabla \cdot [\mathbb{A}^\varepsilon \nabla \phi_i^\varepsilon] = 0 \quad \text{dans } K, \quad \phi_i^\varepsilon = \phi_i^0 \quad \text{sur } \partial K, \quad (3)$$

où on rappelle que les  $\phi_i^0$ ,  $1 \leq i \leq I$ , sont les fonctions (usuelles) éléments finis affines par morceaux sur le maillage grossier  $\mathcal{T}_H$ . On note que le support de  $\phi_i^\varepsilon$  est identique à celui de  $\phi_i^0$ . Les fonctions de base multi-échelles  $\phi_i^\varepsilon$  définies par (3) vérifient la propriété de partition de l'unité.

On note aussi que les fonctions de base  $\phi_i^\varepsilon$  sont indépendantes du chargement  $f$  apparaissant dans le membre de droite de (2). De plus, les problèmes (3) sont indépendants les uns des autres. L'approche MsFEM est ainsi bien adaptée aux calculateurs parallèles. C'est une propriété essentielle de l'approche.

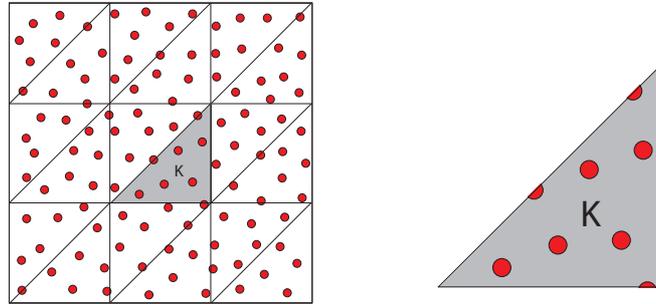


FIGURE 1 – Gauche : maillage grossier du domaine  $\Omega$ , avec des éléments de diamètre  $H$  bien plus grands que la petite échelle caractéristique  $\varepsilon$  des hétérogénéités (ici le diamètre des inclusions rouges). Droite : sur chaque élément grossier, on résout un problème local, utilisant en pratique une discrétisation à une échelle  $h$  adaptée aux hétérogénéités.

Une fois que les fonctions de base multi-échelles sont calculées, l'approche MsFEM est identique à une approche FEM usuelle. Elle consiste à faire une approximation de Galerkin de (2) sur l'espace de dimension finie

$$V_H^\varepsilon = \text{Vect}\{\phi_i^\varepsilon, 1 \leq i \leq I\}.$$

Dans l'étape *online*, on cherche ainsi la solution approchée  $u_H^\varepsilon \in V_H^\varepsilon$  telle que

$$\forall v \in V_H^\varepsilon, \quad B^\varepsilon(u_H^\varepsilon, v) = F(v).$$

En pratique, il est fréquent de résoudre plusieurs fois le problème pour le même matériau, avec dans (1) des conditions aux limites ou des chargements  $f$  différents. Puisque les problèmes locaux (3) sont indépendants de ceux-ci, l'étape *offline* de MsFEM n'est réalisée qu'une seule fois dans un tel contexte. Le gain en terme de coût de calcul (vs le calcul fin de tous les problèmes) est donc encore plus important.

La méthode MsFEM, dans laquelle des équations à l'échelle fine sont résolues dans chaque élément grossier et sont ainsi totalement découplées les unes des autres, est proche des méthodes VMS (cf. [19]) et GFEM (cf. [20]). Cependant, ces trois familles de méthodes diffèrent sur plusieurs points, en particulier quant à la définition des problèmes locaux.

**Remarque 1** La précision de la variante Linear-MsFEM décrite ci-dessus n'est pas très bonne. En effet, au voisinage de  $\partial K$ , la solution exacte  $u^\varepsilon$  oscille (comme elle le fait partout sur  $\Omega$ ), tandis que les fonctions de base  $\phi_i^\varepsilon$  (et donc l'approximation numérique  $u_H^\varepsilon$ ) n'oscillent pas, à cause de la condition

aux limites non-oscillante (3) sur  $\partial K$ . Ceci introduit donc une erreur au voisinage des arêtes du maillage grossier. Une possibilité pour remédier à ce problème est d'imposer des conditions aux limites (à nouveau incorrectes) de Dirichlet non pas sur  $\partial K$ , mais un peu plus loin, sur la frontière d'un domaine  $S_K$  un peu plus grand que  $K$ , et de n'utiliser que l'information intérieure, sur  $K$ , pour construire les fonctions de base. Il s'agit de la variante Oversampling.

Des estimateurs d'erreur *a priori* ont été obtenus pour les variantes Linear-MsFEM et Oversampling (cf. [2, 13]). Ces résultats théoriques, ainsi que de nombreux résultats numériques, montrent l'intérêt de la variante Oversampling vs la variante Linear-MsFEM : à coût calcul (online) fixe, la précision est meilleure.

## 4 Estimation d'erreur *a posteriori* utilisant le concept CRE et stratégie adaptative

Dans cette section, nous construisons une borne garantie sur l'erreur  $\|u^\varepsilon - u_H^\varepsilon\|$  mesurée en norme d'énergie. Par souci de simplicité, on se restreint ici au cas d'une discrétisation conforme (i.e.  $V_H^\varepsilon \subset \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ ). On souligne néanmoins que l'approche s'étend aux discrétisations non conformes. La méthode s'appuie sur le concept d'erreur en relation de comportement, utilisé depuis longtemps pour construire des estimateurs efficaces et robustes pour les calculs FEM [21, 22, 6, 7].

### 4.1 Rappels sur CRE

On introduit l'espace des flux équilibrés

$$W = \left\{ \mathbf{p} \in [L^2(\Omega)]^d, \quad \nabla \cdot \mathbf{p} \in L^2(\Omega), \quad \nabla \cdot \mathbf{p} + f = 0 \text{ dans } \Omega \right\}.$$

Tout flux  $\hat{\mathbf{p}} \in W$  est dit statiquement admissible et vérifie la relation

$$\forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \hat{\mathbf{p}} \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v. \quad (4)$$

Pour toute approximation  $\hat{u}^\varepsilon \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$  de  $u^\varepsilon$  et pour tout flux  $\hat{\mathbf{p}} \in W$ , on définit la fonctionnelle  $E_{CRE}$  par

$$(E_{CRE}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\mathbf{p}}))^2 = \int_{\Omega} (\mathbb{A}^\varepsilon)^{-1} (\hat{\mathbf{p}} - \mathbb{A}^\varepsilon \nabla \hat{u}^\varepsilon) \cdot (\hat{\mathbf{p}} - \mathbb{A}^\varepsilon \nabla \hat{u}^\varepsilon).$$

Puisque  $V_H^\varepsilon \subset \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ , on peut choisir  $\hat{u}^\varepsilon = u_H^\varepsilon$ . Il est facile de voir que

$$\forall \hat{\mathbf{p}} \in W, \quad \|u^\varepsilon - u_H^\varepsilon\| \leq E_{CRE}(u_H^\varepsilon, \hat{\mathbf{p}}). \quad (5)$$

Par conséquent, une borne garantie sur l'erreur  $\|u^\varepsilon - u_H^\varepsilon\|$  est obtenue à partir de n'importe quel flux  $\hat{\mathbf{p}} \in W$ . Sa qualité dépend du choix particulier de  $\hat{\mathbf{p}}$ .

### 4.2 Construction d'un flux équilibré

Le point technique dans la méthode CRE est la construction d'un flux  $\hat{\mathbf{p}} \in W$  pertinent. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées. Nous suivons ici l'approche connue dans la littérature sous le nom de "Hybrid-Flux Technique" ou "Element Equilibration Technique (EET)" (cf. [11]). Cette technique permet la construction d'un flux vérifiant (4), noté  $\hat{\mathbf{q}}_H^\varepsilon$  dans la suite, en post-traitant le flux numérique MsFEM  $\mathbf{q}_H^\varepsilon = \mathbb{A}^\varepsilon \nabla u_H^\varepsilon$  obtenu lors de la résolution du problème primal, et en résolvant quelques problèmes élémentaires. Cette méthode, qui est une extension au cas MsFEM de celle exposée dans [21, 23, 6] pour des calculs FEM, comporte deux étapes :

- **Etape 1** : construction de tractions  $\hat{g}_K$  le long des arêtes de chaque élément  $K \in \mathcal{T}_H$ . Ces tractions doivent vérifier l'équilibre au niveau de chaque élément :

$$\forall K, \quad \int_K f + \int_{\partial K} \hat{g}_K = 0.$$

Afin que les flux normaux soient continus à la traversée des arêtes, les tractions sont définies par  $\hat{g}_{K|\Gamma} = \eta_K^\Gamma \hat{g}_{|\Gamma}$  sur chaque arête  $\Gamma$  de  $\partial K$ , où  $\eta_K^\Gamma = \pm 1$  et où  $\hat{g}_{|\Gamma}$  a une valeur bien définie sur  $\Gamma$ .

- **Etape 2** : construction locale de  $\widehat{\mathbf{q}}_{H|K}^\varepsilon$ , sur chaque élément  $K \in \mathcal{T}_H$ , tel que

$$-\nabla \cdot \widehat{\mathbf{q}}_{H|K}^\varepsilon = f \text{ dans } K, \quad \widehat{\mathbf{q}}_{H|K}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_K = \widehat{g}_K \text{ sur } \partial K,$$

où  $\widehat{g}_K$  sont les tractions construites à l'étape 1, et où  $\mathbf{n}_K$  est la normale sortante à  $\partial K$ . En pratique, on résout

$$-\nabla \cdot [\mathbb{A}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon] = f \text{ dans } K, \quad [\mathbb{A}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon] \cdot \mathbf{n}_K = \widehat{g}_K \text{ sur } \partial K, \quad (6)$$

et on pose  $\widehat{\mathbf{q}}_{H|K}^\varepsilon = \mathbb{A}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon$ .

Remarquons que la méthode de reconstruction que nous utilisons s'appuie sur des calculs fins (à l'étape 2) faits à l'échelle de l'élément (et non pas à l'échelle d'un ensemble d'éléments, comme c'est le cas pour d'autres méthodes de reconstruction). Cette méthode est ainsi particulièrement bien adaptée au cadre MsFEM, dans lequel la résolution de (6) peut être chère car  $\varepsilon$  est petit.

Lorsque le chargement  $f$  est régulier dans chaque élément, la résolution de (6) peut essentiellement être faite dans la phase *offline* de la MsFEM, ce qui évite ainsi d'avoir à faire des calculs fins dans la phase *online*. Le paradigme de la MsFEM est alors bien respecté. On renvoie à [18] pour plus de détails.

### 4.3 Discrétisation adaptative

Nous avons construit ci-dessus une estimation  $\Delta_{\text{MsFEM}} := E_{\text{CRE}}(u_H^\varepsilon, \widehat{\mathbf{q}}_H^\varepsilon)$  de l'erreur (où  $\widehat{\mathbf{q}}_H^\varepsilon$  est le flux reconstruit dans la Section 4.2). Au vu de (5), nous avons donc obtenu une estimation par excès de l'erreur globale (en norme d'énergie). Comme expliqué dans [18], il est possible, sur la base de cet estimateur, de développer empiriquement des indicateurs d'erreur associés à chaque source d'erreur, et permettant une adaptation automatique des paramètres de la MsFEM (taille  $H$  du maillage grossier, taille  $h$  des maillages fins, taille de l'oversampling). Ceci permet d'obtenir une solution numérique avec une erreur inférieure à une tolérance souhaitée, et ce pour un coût de calcul minimal. Par souci de simplicité, ces indicateurs ne sont pas détaillés ici.

## 5 Résultats numériques

On s'intéresse ici aux performances de l'approche proposée ci-dessus. On considère un problème bi-dimensionnel avec une fissure (on renvoie à [18] pour d'autres exemples). On s'intéresse donc au problème (1) posé dans le domaine  $\Omega = (0, 1)^2 \setminus \{(x_1, 0), 0.5 \leq x_1 \leq 1\}$ , et soumis à un chargement nul :  $f = 0$ . Ce problème est identique (à la valeur de  $\varepsilon$  près) à celui discuté dans [24]. On impose la condition de Dirichlet  $u(r, \theta) = r^{1/2} \sin(\theta/2)$  (où  $(r, \theta)$  sont les coordonnées polaires par rapport à la pointe de fissure), qui correspond à la solution homogénéisée exacte, sur le bord  $\partial\Omega$  (y compris sur les lèvres de la fissure). Le tenseur de diffusion (cf. la figure 2) est

$$\mathbb{A}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{64}{9\sqrt{17}} \left[ \sin\left(\frac{2\pi(x_1 - 0.5)}{\varepsilon}\right) + \frac{9}{8} \right] \left[ \cos\left(\frac{2\pi(x_2 - 0.5)}{\varepsilon}\right) + \frac{9}{8} \right] \mathbb{I}_2 = A^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbb{I}_2,$$

avec  $\varepsilon = 0.04$ . Il est périodique, et le tenseur homogénéisé  $\mathbb{A}^0$  est égal au tenseur identité :  $\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}_2$ .

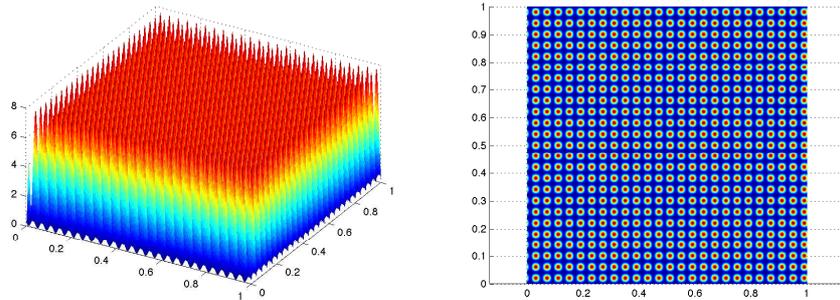


FIGURE 2 – Evolution de  $A^\varepsilon$  dans le domaine  $\Omega$ .

La solution homogénéisée  $u^0$  n'est pas dans  $\mathcal{H}^2(\Omega)$ . Quand on utilise des éléments finis affines par morceaux, l'erreur entre  $u^0$  et son approximation P1 décroît donc avec un taux sous-optimal vis à vis de  $H$ . Une possibilité est alors de raffiner le maillage en pointe de fissure. Avec la méthode MsFEM, on souhaite avoir la même procédure adaptative pour le maillage grossier  $\mathcal{T}_H$ , et ce d'autant plus que l'hypothèse usuelle de séparation des échelles n'est plus forcément vérifiée au voisinage de la pointe de fissure.

On se donne un maillage grossier initial  $\mathcal{T}_H$  constitué de  $8 \times 8$  éléments macroscopiques. En choisissant  $h_K = \varepsilon/3$  pour tout  $K$ , et sans utiliser d'oversampling, la solution approchée MsFEM est comparée à la solution exacte (obtenue par un calcul sur un maillage de référence  $500 \times 500$ ) sur les figures 3 et 4.

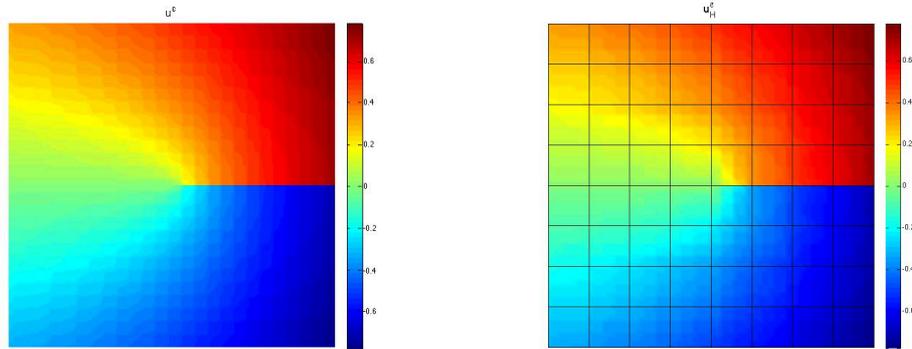


FIGURE 3 – Solution exacte  $u^\varepsilon$  (à gauche) et solution MsFEM  $u_H^\varepsilon$  (à droite) (figure issue de [18]).

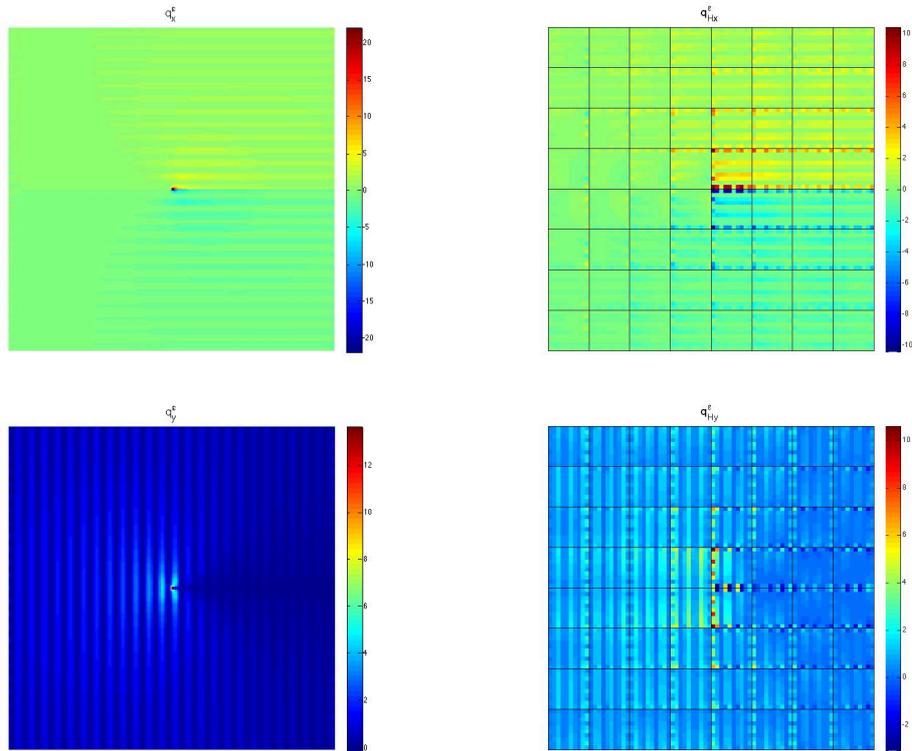


FIGURE 4 – Flux exact  $q^\varepsilon$  (à gauche) et flux MsFEM  $q_H^\varepsilon$  (à droite) (en haut : composantes  $q_1^\varepsilon$  et  $q_{H,1}^\varepsilon$  ; en bas : composantes  $q_2^\varepsilon$  et  $q_{H,2}^\varepsilon$ ) (figure issue de [18]).

La valeur de l'estimateur d'erreur  $\Delta_{MsFEM} / \|u_H^\varepsilon\|$  est de l'ordre de 47%, avec un taux d'effectivité de 1.18 (i.e. l'estimée d'erreur surestime la vraie erreur par uniquement 18%). Les contributions locales de

$(\Delta_{MsFEM})^2$  sur  $\mathcal{T}_H$ , ainsi que les taux locaux d'effectivité, sont donnés sur la figure 5.

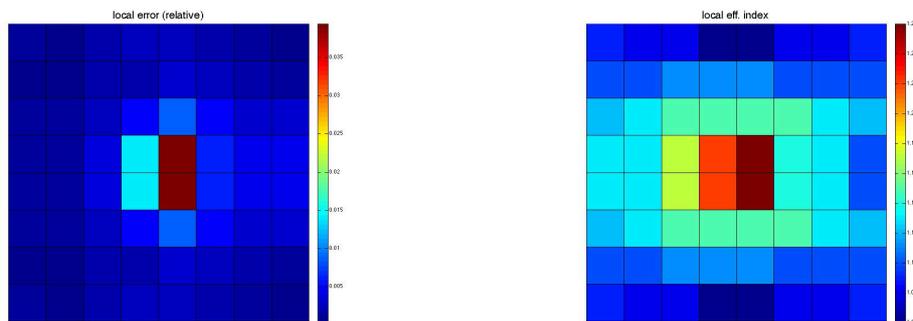


FIGURE 5 – Valeurs de  $(\Delta_{MsFEM}^K)^2$  pour l'approximation MsFEM (à gauche), et taux locaux d'effectivité (à droite) (figure issue de [18]).

En partant de cette approximation MsFEM très grossière, nous utilisons maintenant notre algorithme adaptatif, avec une tolérance sur l'erreur de 5%. Ceci conduit aux paramètres de discrétisation MsFEM montrés sur la figure 6. On observe que le maillage grossier n'a besoin d'être raffiné qu'en pointe de fissure, et pas ailleurs. La taille de l'oversampling n'a jamais besoin d'être plus grande que  $\varepsilon$ .

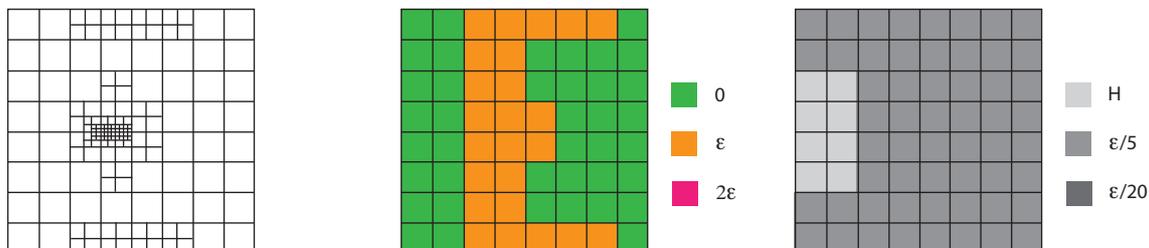


FIGURE 6 – Après adaptation : maillage grossier (à gauche), taille d'oversampling (au centre) et taille  $h_K$  des maillages fins (à droite) (figure issue de [18]).

## 6 Conclusions et perspectives

Nous avons introduit des outils numériques pour l'estimation *a posteriori* de l'erreur dans les calculs MsFEM. La borne d'erreur est entièrement explicite (elle ne comporte pas de constante multiplicative inconnue). C'est de plus une borne *garantie* de l'erreur. Sur la base de cette borne, nous avons ensuite développé une stratégie pour choisir de manière adaptative les paramètres de discrétisation numérique, afin d'obtenir une précision fixée. Les caractéristiques fines de la solution sont obtenues progressivement, uniquement dans les zones où cela est nécessaire. Les outils développés sont compatibles avec le paradigme *offline / online* de la MsFEM. Le coût calcul additionnel est donc limité.

Ce travail ouvre la voie à de nombreuses extensions, qui seront étudiées dans des contributions à venir.

## Références

- [1] T. Hou, X.H. Wu. *A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media*, Journal of Computational Physics, 134 :169–189, 1997.
- [2] T. Hou, X.H. Wu, Z. Cai. *Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients*, Mathematics of Computation, 68 :913–943, 1999.
- [3] Y. Efendiev, T. Hou. *Multiscale Finite Element Methods : Theory and Applications*, Springer, 2009.

- [4] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimates and adaptive mesh-refinement techniques*, Wiley-Teubner, 1996.
- [5] M. Ainsworth, J.T. Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis*, Wiley, 2000.
- [6] P. Ladevèze, J.-P. Pelle. *Mastering Calculations in Linear and Nonlinear Mechanics*, Springer, 2004.
- [7] L. Chamoin, P. Díez, *Verifying calculations, forty years on : an overview of classical verification techniques for FEM simulations*, SpringerBriefs, 2015.
- [8] B. Fraeijns de Veubeke, M.A. Hugge. *Dual analysis for heat conduction problems by finite elements*, Inter. J. Numer. Methods Engrg., 5 :65-82, 1972.
- [9] J.T. Oden, J.N. Reddy. *On dual complementary variational principles in mathematical physics*, International Journal of Engineering Science, 12 :1-29, 1974.
- [10] B. Fraeijns de Veubeke. *Displacement and equilibrium models in the finite element method*, Inter. J. Numer. Methods Engrg., 52 :287-342, 2001.
- [11] F. Pled, L. Chamoin, P. Ladevèze. *On the techniques for constructing admissible stress fields in model verification : performances on engineering examples*, Inter. J. Numer. Methods Engrg., 88 :409-441, 2011.
- [12] P. Ladevèze, L. Chamoin. *Calculation of strict error bounds for finite element approximations of nonlinear pointwise quantities of interest*, Inter. J. Numer. Methods Engrg., 84 :1638-1664, 2010.
- [13] Y. Efendiev, T. Hou, X.H. Wu. *Convergence of a nonconforming multiscale finite element method*, SIAM Journal of Numerical Analysis, 37 :888-910, 2000.
- [14] G. Allaire, R. Brizzi. *A multiscale finite element method for numerical homogenization*, SIAM Multiscale Modeling & Simulation, 4 :790-812, 2006.
- [15] J. Hesthaven, S. Zhang, X. Zhu. *High-order multiscale finite element method for elliptic problems*, SIAM Multiscale Modeling & Simulation, 12 :650-666, 2014.
- [16] P. Henning, M. Ohlberger, B. Schweizer. *An adaptive multiscale finite element method*, SIAM Multiscale Modeling & Simulation, 12 :1078-1107, 2014.
- [17] E.T. Chung, Y. Efendiev, G. Li. *An adaptive GMsFEM for high contrast flow problems*, Journal of Computational Physics, 273 :54-76, 2014.
- [18] L. Chamoin, F. Legoll. *A posteriori error estimation and adaptive strategy for the control of MsFEM computations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 336 :1-38, 2018.
- [19] T.J.R. Hughes, G.R. Feijoo, L. Mazzei, J.B. Quincy. *The variational multiscale method – A paradigm for computational mechanics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 166 :3-24, 1998.
- [20] T. Strouboulis, K. Copps, I. Babuska. *The generalized finite element method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 190 :4081-4193, 2001.
- [21] P. Ladevèze, D. Leguillon. *Error estimate procedure in the finite element method and applications*, SIAM Journal of Numerical Analysis, 20 :485-509, 1983.
- [22] P. Destuynder, B. Métivet. *Explicit error bounds in a conforming finite element method*, Mathematics of Computation, 68 :1379-1396, 1999.
- [23] P. Ladevèze, E.A.W. Maunder. *A general method for recovering equilibrating element tractions*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 137 :111-151, 1996.
- [24] A. Abdulle, A. Nonnenmacher. *A posteriori error analysis of the heterogeneous multiscale method for homogenization problems*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, 347 :1081-1086, 2009.