



**HAL**  
open science

# Modélisation de l'interaction fluide-structure lors d'une explosion sous-marine lointaine par méthode des éléments de frontière accélérée

Damien Mavaleix-Marchessoux, Stéphanie Chaillat, Bruno Leblé, Marc Bonnet

► **To cite this version:**

Damien Mavaleix-Marchessoux, Stéphanie Chaillat, Bruno Leblé, Marc Bonnet. Modélisation de l'interaction fluide-structure lors d'une explosion sous-marine lointaine par méthode des éléments de frontière accélérée. 14ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2019), CSMA, LEM3, MSME, Université de Lorraine, Arts et Métiers, CNRS, May 2019, Hyères, France. hal-04824556

**HAL Id: hal-04824556**

**<https://hal.science/hal-04824556v1>**

Submitted on 7 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation de l'interaction fluide-structure lors d'une explosion sous-marine lointaine par méthode des éléments de frontière accélérée

Damien Mavaleix-Marchessoux<sup>1,2</sup>, Stéphanie Chaillat<sup>1</sup>, Bruno Leblé<sup>2</sup>, Marc Bonnet<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire POEMS, ENSTA ParisTech, {damien.mavaleix-marchessoux,stephanie.chaillat,marc.bonnet}@ensta-paristech.fr

<sup>2</sup> Naval Group Research, {damien.mavaleix-marchessoux,bruno.leble}@naval-group.com

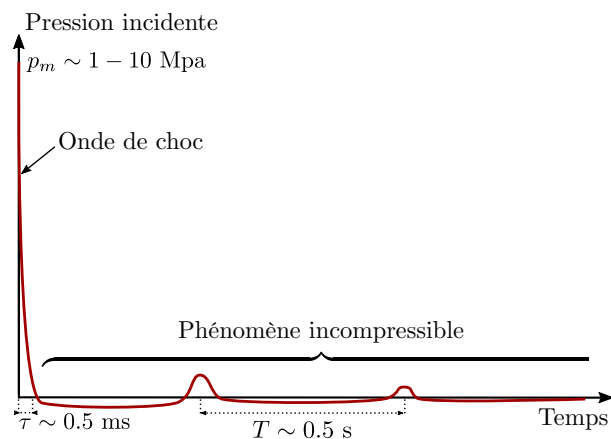
**Résumé** — Cette contribution concerne la modélisation de l'impact de l'onde de choc d'une explosion sous-marine sur une structure située loin de la source, en eau profonde. Pour rendre compte du phénomène, un couplage est mis en place : les équations structures sont résolues en éléments finis, tandis que la partie fluide est traitée en éléments de frontière. La présente contribution met en avant la résolution côté fluide, avec l'extension de la méthode des éléments de frontière, accélérée par la méthode multipôle rapide, au domaine temporel par Convolution Quadrature Method.

**Mots clés** — Méthode des éléments de frontière, méthode multipôle rapide, Convolution Quadrature Method, explosion sous-marine, explosion lointaine, onde de choc, interaction fluide-structure.

## 1 Introduction

Le dimensionnement des navires militaires requiert l'analyse du comportement des structures aux explosions sous-marines lointaines. Des essais fournissent des données expérimentales pour l'étude de ces comportements. Cependant, la mise en oeuvre d'essais à l'échelle réelle ou à l'échelle réduite n'est pas toujours possible pour des raisons de coûts et de contraintes techniques. Les phénomènes en jeu lors de chocs hydrodynamiques peuvent alors être analysés au moyen de la simulation numérique.

Lors d'une explosion sous-marine, les sollicitations transmises par le fluide font typiquement intervenir deux échelles de temps (Figure 1). La première perturbation est une onde acoustique primaire à front raide (excitation dynamique rapide, avec un temps caractéristique de l'ordre de quelques millisecondes, le fluide est considéré comme acoustique linéaire). Elle est suivie par un mouvement d'ensemble plus lent de fluide lourd (traité comme un fluide potentiel incompressible), qui sollicite le navire dans les basses fréquences et sur une durée plus longue (avec une pseudo-période de l'ordre d'une demi-seconde).



**FIGURE 1** – Représentation schématique de l'historique de pression lors d'une explosion sous-marine lointaine.

À terme, l'objectif de nos travaux est de modéliser le couplage fluide-structure pour un solide immergé dans un domaine fluide infini où a eu lieu une explosion sous-marine lointaine, en prenant en compte les deux échelles de temps pour les mouvements du fluide. Le problème complet étant multiphysiques et multi-échelles, on se concentre dans un premier temps sur l'interaction avec l'onde de choc. Plus spécifiquement, cette contribution se focalise sur la partie fluide du problème : on étudie la propagation de l'onde, sa diffraction par un objet immobile, et le rayonnement d'un champ de pression dans le fluide dû à un mouvement de la structure immergée. Cette interaction est loin d'être facile à modéliser, notamment parce que les structures envisagées sont de grande taille et le phénomène d'onde de choc est très rapide. Pour rendre compte du phénomène par simulation numérique, il faut alors mailler

très finement certaines régions (autour du point d'impact sur la structure par exemple). Dans la littérature, de fortes hypothèses simplificatrices ou approximations sont souvent supposées pour rendre le problème plus accessible. Par exemple, Geers et al. [9] ont proposé des approximations asymptotiquement exactes à la limite des basses et des hautes fréquences (*doubly asymptotic approximations*, DAA). Notre objectif est de développer des approches numériques pour traiter sans l'approximation DAA des géométries de structures complexes.

La Section 2 présente la formulation du problème fluide et une brève analyse de la perturbation acoustique. On fournit le profil de la pression incidente  $p^{inc}$ , issu d'expérimentations, en fonction des caractéristiques de l'explosion (type et masse d'explosif  $W$ , distance à la source  $d_0$ ). La Section 3 présente les méthodes numériques utilisées dans ce travail. La méthode des éléments de frontière (*boundary element method*, BEM) est introduite Section 3.1. Une version accélérée de la BEM, la BEM multipôle rapide (*fast multipole BEM*, FM-BEM) est utilisée pour améliorer les performances de la BEM (Section 3.2), et la méthode de quadrature de convolution (*convolution quadrature method*, CQM) permet de faire le passage du domaine fréquentiel vers le domaine temporel (Section 3.3). Enfin, dans la Section 4, la procédure totale, notée CQM-based-FM-BEM, est validée numériquement dans le cas d'une sphère pulsante en eau.

## 2 Formulation du problème fluide

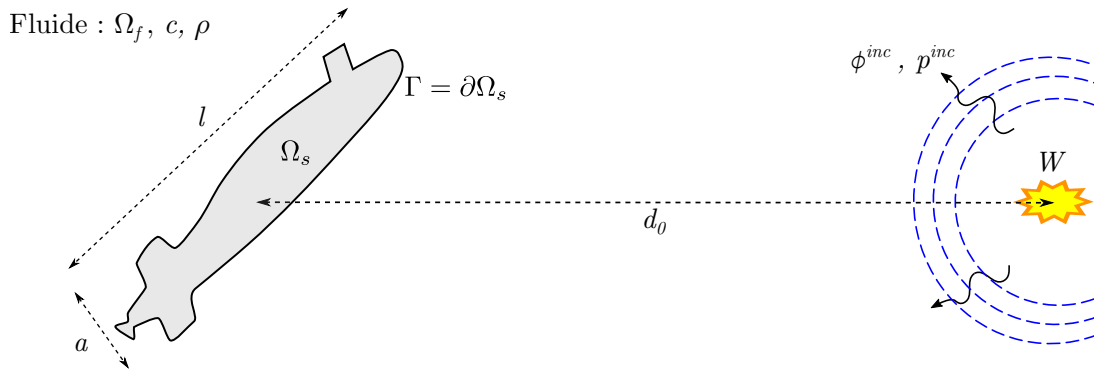


FIGURE 2 – Structure immergée soumise à une explosion sous-marine lointaine : notations.

On considère une structure  $\Omega_s$  de surface  $\Gamma$  immergée dans un domaine fluide acoustique infini  $\Omega_f = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_s}$  caractérisé par la masse volumique  $\rho$  et la vitesse du son  $c$  (voir Figure 2). Le fluide et la structure sont tous les deux au repos initial. À l'instant  $t = 0$ , un point source émet une onde sphérique de profil connu, qui se propage selon l'équation des ondes. En particulier, la pression incidente (en l'absence de l'obstacle)  $p^{inc}(\underline{x}, t)$  est connue en tout point  $\underline{x}$  de  $\Omega_f$ , à chaque instant  $t \geq 0$ . L'écoulement dans le fluide est supposé potentiel, et est alors décrit par le potentiel des vitesses  $\phi$ , qui est tel que

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{\nabla}\phi(\underline{x}, t), \quad p = -\rho \frac{\partial\phi}{\partial t}, \quad (1)$$

et vérifie l'équation des ondes

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Pour traiter efficacement ce problème d'interaction fluide-structure, il est utile de décomposer les variables selon trois composantes [13] : une partie *incidente*, une partie *réfléchi* et une partie *rayonné* :

$$\phi^{tot} = \phi^{inc} + \phi^{ref} + \phi^{ray}.$$

Le champ incident  $\phi^{inc}$  traduit l'état qu'aurait le fluide en l'absence de la structure, c'est une donnée du problème. Le champ réfléchi  $\phi^{ref}$  correspond à la perturbation qui serait observée dans le fluide si la structure était immobile. Enfin, le champ rayonné  $\phi^{ray}$  correspond à la modification de l'état du fluide due au mouvement de la structure qui rayonne alors une onde acoustique dans le fluide. En interprétant

les rôles des différentes contributions, on déduit les conditions aux limites à la surface extérieure  $\Gamma$  pour les composantes réfléchie et rayonnée :

$$(a) \quad \underline{\nabla}(\phi^{ref}) \cdot \underline{n} = -\underline{\nabla}(\phi^{inc}) \cdot \underline{n}, \quad (b) \quad \underline{\nabla}(\phi^{ray}) \cdot \underline{n} = \underline{v}_s \cdot \underline{n} \quad \text{sur } \Gamma \quad (3)$$

où  $\underline{v}_s(\underline{x})$  est la vitesse du point  $\underline{x}$  de  $\Gamma$  associé à la structure, et  $\underline{n}$  est la normale extérieure à la structure.

En champ lointain, l'onde de choc libérée par une explosion sous-marine peut être assimilée à une onde acoustique à front raide. La pression incidente due à cette onde de choc en un point  $P$  du fluide est modélisée par une loi empirique, obtenue à partir d'essais [7] :

$$p^{inc}(r, t) = p_m(r) \exp\left(-\frac{t_r(r, t)}{\tau(r)}\right) H(t_r(r, t)),$$

où

- $p_m(r) = K_1 \left(\frac{W^{1/3}}{r}\right)^{a_1}$  est le pic de pression, dépendent de l'explosif considéré,
- $\tau(r) = K_2 W^{1/3} \left(\frac{W^{1/3}}{r}\right)^{a_2}$  caractérise la décroissance exponentielle de la pression, •  $H$  est la fonction échelon de Heaviside,
- $K_1, K_2, a_1$  et  $a_2$  sont des paramètres qui •  $t_r(r, t)$  est le temps retardé,  $t_r := t - r/c$ , il traduit la causalité,
- $r$  est la distance entre le point  $P \in \Omega_f$  et l'explosion.

Pour résoudre la partie fluide du problème d'interaction, il est possible de réécrire l'équation des ondes (2) sous la forme d'une équation intégrale de frontière.

### 3 Une Méthode des éléments de frontière efficace pour modéliser le comportement du fluide

La BEM permet de traiter le problème acoustique 3D en maillant uniquement la surface  $\Gamma$  de l'obstacle  $\Omega_s$ . Elle se pose alors comme alternative à la méthode des éléments finis (*finite element method*, FEM) [12], qui nécessite de tronquer de manière artificielle le domaine de calcul et de mailler un grand volume fluide, tout en respectant les conditions classiques de discrétisation qui rendent difficile l'étude de problèmes hautes fréquences.

La BEM peut être formulée de manières temporelle ou fréquentielle. Les BEM temporelles sont directement adaptées aux problèmes transitoires. Les BEM fréquentielles permettent de traiter efficacement des problèmes harmoniques, et peuvent aussi traiter des problèmes transitoires par synthèse de Fourier ou de Laplace. Les BEM temporelles classiques reposent sur la notion de potentiel retardé, dont la programmation est délicate. Plus récemment, la *convolution quadrature method* (CQM) [2, 16, 17, 19] a émergé comme une méthodologie efficace, permettant la résolution de problèmes transitoires par combinaison de formulations BEM fréquentielles, tout en s'appuyant (contrairement aux synthèses de Laplace et Fourier classiques) sur des schémas d'intégration temporelle par pas de temps. Notre étude met en place une approche CQM.

L'inconvénient majeur de la BEM est qu'elle conduit à des matrices denses. La BEM standard est alors vite limitée en termes de taille de problèmes, et il est nécessaire d'avoir recours à des BEM accélérées. La FM-BEM est une BEM accélérée couramment utilisée [18, 6], c'est la solution retenue dans cette étude.

#### 3.1 Principe de la Méthode des éléments de frontière

La BEM découle de la discrétisation d'équations intégrales de frontière. En acoustique, celles-ci résultent du théorème de réciprocité pour l'équation des ondes (2) appliqué à  $\phi$  et à la solution fondamentale impulsionnelle [4, 8, 1]. Un exemple d'équation intégrale de frontière est l'équation du potentiel retardé de Kirchhoff [4] :

$$4\pi\epsilon(P)\phi(P, t) = - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n}(Q, t_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \phi(Q, t_r) + \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial t}(Q, t_r) \right\} dS_Q, \quad (4)$$

où  $r = \|Q - P\|$ ,  $t_r := t - r/c$  est le temps retardé,  $\underline{n}$  est la normale extérieure à  $\Gamma$  (pointant donc vers  $\Omega_f$ ); de plus  $\varepsilon(P) = 1$  si  $P \in \Omega_f$ ,  $\varepsilon(P) = 1/2$  si  $P \in \Gamma$  et  $\varepsilon(P) = 0$  si  $P \in \Omega_s$ . L'équation (4) est bien une équation *intégrale de frontière* : elle exprime le potentiel  $\phi$  en fonction de quantités évaluées uniquement sur la surface  $\Gamma$ .

Une transformée de Laplace (ou de Fourier) de (4) permet d'obtenir l'équation intégrale dans le domaine fréquentiel, en utilisant (1), et en notant  $s$  la variable de Laplace :

$$4\pi\varepsilon(P)\bar{p}(P,s) = \int_{\Gamma} \left\{ \rho \frac{s}{r} \bar{u}(Q,s) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \bar{p}(Q,s) - \frac{s}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \bar{p}(Q,s) \right\} e^{-rs/c} dS_Q, \quad (5)$$

où  $u := \partial\phi/\partial n$  et  $\bar{f}$  désigne la transformée de Laplace de  $f$ . En notant  $a$  une longueur caractéristique du problème, l'équation (5) peut s'écrire sous forme adimensionnelle ( $p \leftrightarrow p/(pc^2)$ ,  $u \leftrightarrow u/c$ ,  $r \leftrightarrow r/a$ ,  $s \leftrightarrow sa/c$ ,  $\partial/\partial n \leftrightarrow a\partial/\partial n$ ). Ensuite, en introduisant les opérateurs intégraux, on peut réécrire (5) sous la forme

$$H\{\bar{p}\}(P,s) = G\{\bar{u}\}(P,s), \quad \begin{cases} G\{\bar{u}\}(P,s) = \int_{\Gamma} \frac{s}{r} \bar{u}(Q,s) e^{-sr} dS_Q, \\ H\{\bar{p}\}(P,s) = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{s}{r} \right) e^{-sr} \right\} \bar{p}(Q,s) dS_Q + 4\pi\varepsilon(P)\bar{p}(P,s). \end{cases} \quad (6)$$

Les principaux outils de discrétisation de la BEM sont une transposition de ceux de la FEM. Ils permettent de discrétiser l'équation (6) pour obtenir :

$$[\mathbf{H}]\{\bar{\mathbf{p}}\} = [\mathbf{G}]\{\bar{\mathbf{u}}\}, \quad (7)$$

où  $\{\bar{\mathbf{p}}\}$  et  $\{\mathbf{u}\}$  sont des vecteurs de taille  $N$  et  $[\mathbf{G}]$ ,  $[\mathbf{H}]$  sont des matrices  $N \times N$  ( $N$  étant le nombre de degrés de liberté (DDL) du problème, soit, pour notre cas, le nombre de nœuds de la surface discrétisée par éléments de frontière).

### 3.2 Méthode des éléments de frontière accélérée par méthode multipôle rapide

Les matrices  $[\mathbf{G}]$  et  $[\mathbf{H}]$  de (7) sont pleines et non symétriques. La méthode BEM standard a une complexité de l'ordre de  $O(N^2)$  en temps et en mémoire si un solveur itératif est utilisé. Des BEM accélérées ont été développées pour réduire cette complexité quadratique et permettre des modèles de taille  $N$  élevée. La FM-BEM est une BEM accélérée qui s'appuie sur la méthode multipôle rapide (*fast multipole method*, FMM). Initialement créée pour les problèmes à  $N$  corps [10, 11, 21], celle-ci s'appuie sur l'idée suivante : si des particules interagissent suivant une force de potentiel en  $(1/r)$ , l'interaction entre une particule  $A$  et une particule  $B$  éloignée est similaire à l'interaction entre  $A$  et  $C$  si  $C$  est *suffisamment* proche de  $B$ . Ainsi, au lieu de calculer les interactions  $(A \leftrightarrow B)$  et  $(A \leftrightarrow C)$ , il pourrait être suffisamment précis de calculer  $(A \leftrightarrow D)$ , où  $D$  désigne le milieu du segment  $[BC]$ , et ensuite considérer que  $(A \leftrightarrow B) \approx (A \leftrightarrow C) \approx (A \leftrightarrow D)$ . On peut généraliser le concept à un ensemble de particules (voir l'illustration Figure 3). La pertinence pour les méthodes intégrales vient du fait que les expressions des solutions fondamentales sont identiques ou analogues à celles décrivant des interactions à distance de particules placées dans des champs.

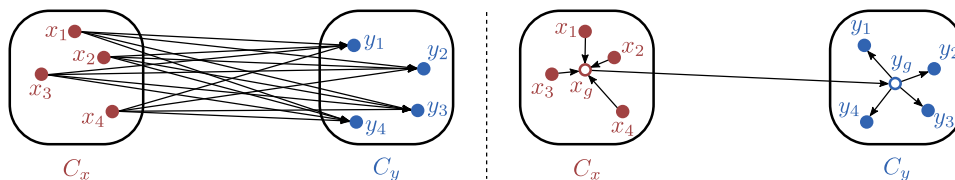


FIGURE 3 – Illustration de la FMM, actions des particules d'une cellule  $C_x$  (de centre  $x_g$ ) sur les particules d'une cellule  $C_y$  (de centre  $y_g$ ). Gauche : BEM standard, droite : FM-BEM.

La présence du terme  $e^{-sr}/r$  dans l'équation (6) (terme provenant de la fonction de Green de l'espace libre) permet d'appliquer un développement en ondes planes et ainsi de séparer la variable  $\mathbf{x}$  (point  $P$ ) et la variable d'intégration  $\mathbf{y}$  (point  $Q$ ). Il est alors possible de réutiliser les intégrations selon  $\mathbf{y}$  pour

plusieurs valeurs de  $\mathbf{x}$  (calculs par paquets de points, comme sur la Figure 3), ce que la BEM classique ne permet pas. De plus, pour diminuer le coût mémoire et accélérer le produit matrice-vecteur d'un solveur itératif, les matrices  $[\mathbf{G}]$  et  $[\mathbf{H}]$  ne sont jamais explicitement assemblées/stockées (contrairement à la BEM classique). La FMM existe sous deux formes : mono-niveau et multi-niveaux. La première, plus simple, s'appuie sur un découpage en boîtes cubiques de la région de l'espace contenant la frontière de la structure, et permet de calculer le produit matrice-vecteur en  $O(N^{3/2})$  opérations. Dans la seconde, le découpage en boîtes cubiques est récursif, et la complexité du produit matrice-vecteur est réduite à  $O(N \log N)$ . Une FMM multi-niveaux, développée par le laboratoire POEMS, est utilisée comme base de travail dans cette contribution [5].

### 3.3 Extension de la FM-BEM au domaine temporel par Convolution Quadrature Method

La CQM, initialement proposée par Lubich [14, 15], vise à évaluer un produit de convolution temporel par une quadrature dont les poids sont calculés dans le domaine de Laplace. Appliquée à la BEM, la CQM permet une reformulation de l'équation intégrale (4) (dont chaque terme est une convolution temporelle, par exemple  $\phi(Q, t_r) = \phi(Q, t) \star \delta(t - r/c)$ ), de façon à ce qu'elle soit résolue en utilisant une procédure d'intégration temporelle stable reposant uniquement sur la résolution d'équations dans le domaine de Laplace, du type (5). Pour cette raison, la CQM est souvent utilisée pour mettre en place des procédures BEM temporelles [2, 16, 17, 19, 3].

Le résultat final de la CQM (dont nous ne détaillerons pas tous les aspects) est l'expression d'un produit de convolution temporel par quadrature : à un instant discret  $t_n = n\Delta t, n > 0$ , le produit de convolution  $(G \star f)(t_n)$  peut être approximé par

$$(G \star f)(t_n) \approx \sum_{m=0}^n \omega_m(\Delta t; \bar{G}) f(t_{n-m}), \quad (8)$$

où les poids  $(\omega)_n$  sont identifiés à partir du développement en série entière

$$\bar{G}\left(\frac{1-\xi}{\Delta t}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(\Delta t) \xi^k,$$

et dépendent seulement de  $\Delta t$  et de la transformée de Laplace de  $G$ . En appliquant la CQM (8) à l'équation de Kirchhoff (4), on obtient

$$\varepsilon(P)\phi(P, t_n) \approx - \sum_{m=0}^n \int_{\Gamma} \left\{ \omega_m(\Delta t; \bar{G}(r, \cdot)) \frac{\partial \phi}{\partial n}(Q, t_{n-m}) - \omega_m\left(\Delta t; \frac{\partial \bar{G}}{\partial n}(r, \cdot)\right) \phi(Q, t_{n-m}) \right\} dS_Q, \quad (9)$$

où  $G$  est la fonction de Green impulsionnelle de l'espace libre :

$$G(r, t) = \frac{\delta(t - r/c)}{4\pi r}, \quad \bar{G}(r, s) = \frac{e^{-sr/c}}{4\pi r}.$$

Il y a plusieurs façons de résoudre (9). Celle utilisée dans ce travail, expliquée dans [16], repose sur la transformée en  $\mathcal{Z}$ . L'idée est de transformer (9) en un ensemble d'équations intégrales fréquentielles découplées. Pour ce faire, on considère un intervalle de temps discret  $\{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T = N\Delta t\}$ . Pour un signal temporel discret  $(\phi)_N = \{\phi_p := \phi(t_p), \forall p \in \llbracket 0, N \rrbracket\}$ , on définit la transformée en  $\mathcal{Z}$  tronquée au rang  $p \in \llbracket 0, N \rrbracket$  par

$$\mathcal{Z}_p : (\phi)_N = \{\phi_0, \phi_1, \dots\} \mapsto \mathcal{Z}_p[(\phi)_N](\xi) = \sum_{n=0}^p \phi_n \xi^n := \Phi_p(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{C}. \quad (10)$$

En utilisant (10), on montre que (9) conduit à un système de  $L = 2N$  équations du type

$$\varepsilon(P)\bar{\varphi}_k(P; s_k) = - \int_{\Gamma} \bar{G}(r; s_k) \times \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial n}(Q; s_k) - \frac{\partial \bar{G}}{\partial n}(r; s_k) \times \bar{\varphi}_k(Q; s_k) dS_Q, \quad (11)$$

évaluées pour des fréquences  $s_k = p(\xi_k)/\Delta t$ , et des données  $\bar{\varphi}_k = \Phi_N(\xi_k)$ , avec  $\xi_k = \rho_{CQM} e^{2i\pi k/L}$  décrivant le cercle de rayon  $\rho_{CQM}$  dans le plan complexe, et  $k \in \llbracket 0, L-1 \rrbracket$ .  $\rho_{CQM} \approx 1$  est un paramètre réel

de la CQM, et  $p$  est défini comme un ratio de polynômes dont les coefficients dépendent de la méthode de progression temporelle multistep choisie pour la CQM. Une explication et une comparaison entre les différentes méthodes d'intégration utilisées conjointement avec la CQM peuvent être trouvées dans [20]. Dans la Section 4, la *backward differentiation formula* d'ordre 2 (bdf2) est utilisée.

Les  $L$  équations du type (11) sont résolues en utilisant une procédure BEM, et chaque résolution fournit un coefficient de la transformée en  $\mathcal{Z}$  de la solution de l'équation de départ (9). Cette solution est ensuite reconstruite en utilisant la transformée en  $\mathcal{Z}$  inverse. Ainsi, la CQM, formulée par transformée en  $\mathcal{Z}$ , permet bien de résoudre une équation intégrale temporelle, pour un intervalle de temps discret  $\{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T = N\Delta t\}$ , en résolvant  $L = 2N$  équations intégrales fréquentielles. En pratique, seules  $N + 1$  équations doivent être résolues, car les  $N - 1$  solutions restantes sont déduites par conjugué complexe des solutions déjà obtenues. Dans notre cas, ces équations intégrales fréquentielles sont résolues en utilisant une procédure FM-BEM multi-niveaux (voir Section 3.2). Des résultats numériques de notre procédure globale sont commentés dans la Section 4 pour un problème de sphère pulsante en eau.

## 4 Validation numérique de la procédure BEM rapide pour le cas d'une sphère pulsante en eau

Dans le cas d'un couplage fluide-structure itératif, la rétro-action de la structure sur le fluide, c'est-à-dire le rayonnement d'un champ de pression  $p^{ray}$  dû au mouvement de l'objet immergé, aboutit à un problème acoustique de type Neumann (3b). Le calcul de  $p^{ray}$  pour un déplacement de structure donné est donc une étape cruciale du traitement du couplage fluide-structure. Dans cette section, les performances de notre procédure, notée CQM-based-FM-BEM, pour le calcul de  $p^{ray}$  sont étudiées dans le cas d'une sphère pulsante immergée dans un domaine fluide (eau) infini.

La surface  $\Gamma$  de la sphère est soumise à partir de l'instant  $t = 0$  à un mouvement oscillatoire dont la vitesse normale est fixée à

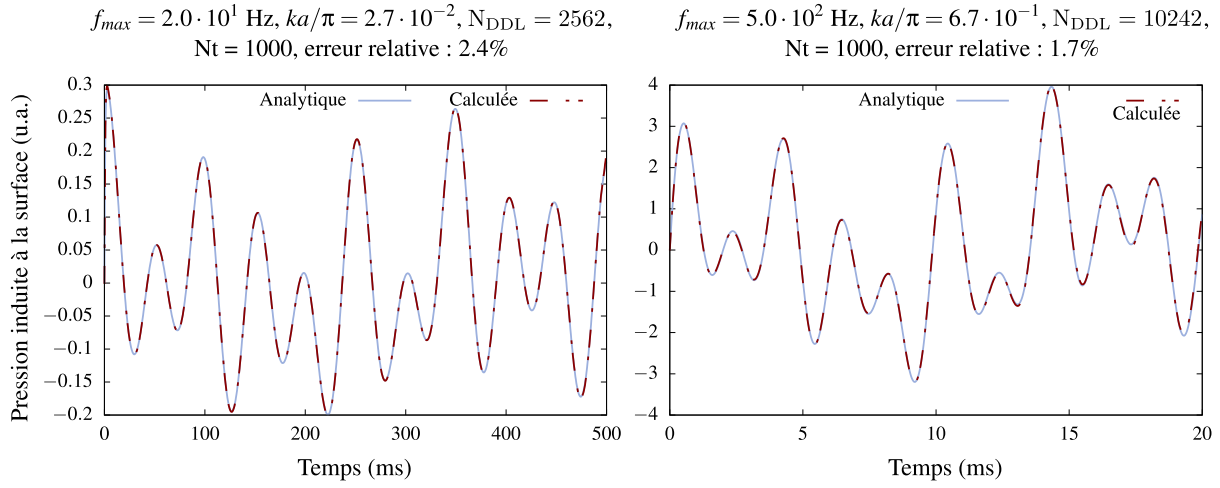
$$u(t; \omega) = \sum_{i=1}^5 u_i \sin(\omega_i t) = \sum_{i=1}^5 u_i \sin(2\pi f_i t),$$

avec  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 1.2$ ,  $u_3 = 0.7$ ,  $u_4 = 2.8$ ,  $u_5 = 1.4$ , et les fréquences sont fixées à  $f_1 := 2\pi\omega = f_{max}$  (cette valeur sera spécifiée sur chaque figure),  $f_2 = f_1/1.7$ ,  $f_3 = f_1/2.4$ ,  $f_4 = f_1/7.6$ ,  $f_5 = f_1/25.4$ . Sauf mention contraire, les fréquences sont des quantités dimensionnelles (rayon de la sphère  $a = 1$  m, célérité des ondes dans l'eau  $c = 1500$  m/s) et les quantités adimensionnelles correspondantes sont exprimées en termes de nombres d'onde  $ka/\pi = 2fa/c$ .

La solution analytique du problème est obtenue par résolution de l'équation des ondes (2) dans le domaine de Laplace, en tirant profit de la symétrie sphérique, puis par retour dans le domaine temporel par transformée de Laplace inverse. On montre ainsi que la pression sur  $\Gamma$  est donnée, sous forme adimensionnelle ( $p \leftrightarrow p/(\rho c^2)$ ,  $u \leftrightarrow u/c$ ,  $\omega \leftrightarrow \omega a/c$ ,  $r \leftrightarrow r/a$ ,  $t \leftrightarrow tc/a$ ), par

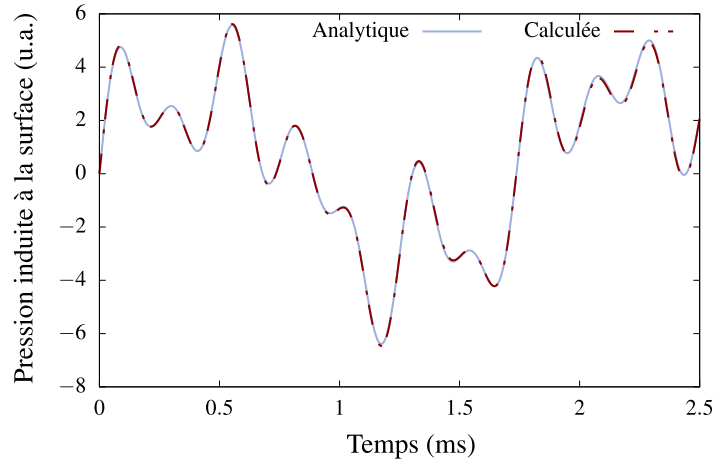
$$p(r = 1, t) = \sum_{i=1}^5 u_i \omega_i \frac{\omega_i \sin(\omega_i t) + \cos(\omega_i t) - e^{-t}}{\omega_i^2 + 1}.$$

Nous comparons maintenant les résultats de la résolution numérique du problème au moyen de l'équation intégrale (6) d'inconnue  $\bar{p} = \bar{p}^{ray}$  ( $\bar{u}$  étant donnée). La Figure 4 présente deux exemples de résultats obtenus pour des fréquences plus faibles que celles considérées pour l'onde de choc d'une explosion sous-marine. Les solutions obtenues par CQM-based-FM-BEM sont en excellent accord avec la solution analytique. Dans le cas d'une onde de choc issue d'une explosion sous-marine, de hautes fréquences sont considérées. La Figure 5 présente les résultats sur des durées typiques d'une explosion lointaine. Pour rendre compte de façon précise de la pression induite par la sphère pulsante à des fréquences de l'ordre de  $f = 4$  kHz, un maillage fin de  $\Gamma$  est nécessaire, pour respecter la condition classique de *10 points par longueur d'onde*. Sur la Figure 5, le maillage utilisé a une taille d'élément adimensionnelle  $h/a \approx 0.025$ . La longueur d'onde minimale que l'on peut considérer est alors  $\lambda_{min}/a = 10 \times h/a \approx 0.25$  et le nombre d'onde correspondant est  $k_{max}a/\pi = 2a/\lambda_{min} = 8$ . Donc, en théorie, le maillage considéré est suffisamment raffiné pour traiter le problème.



**FIGURE 4** – Pression induite à la surface d’une sphère pulsante. Exemples pour des fréquences plus faibles que celles considérées pour l’onde de choc.

$f_{max} = 4.0 \cdot 10^3$  Hz,  $ka/\pi = 5.3$ ,  $N_{DDL} = 20472$ ,  $Nt = 1000$ , erreur relative : 1.6%



**FIGURE 5** – Pression induite à la surface d’une sphère pulsante, hautes fréquences.

Cependant, il est important de souligner que la fréquence maximale considérée pour la CQM est déterminée par la valeur du pas de temps  $\Delta t$ , puisque les paramètres  $s_k$  de l’équation (11) sont inversement proportionnels à  $\Delta t$ . Ainsi, si le nombre de pas de temps est choisi arbitrairement grand, indépendamment de la donnée du problème (vitesse normale imposée), alors la fréquence maximale considérée dans le problème BEM fréquentiel (de la procédure CQM-based-FM-BEM) est trop élevée par rapport au maillage choisi. Pour surmonter cette difficulté, nous avons mis en place une méthode qui utilise une approximation haute fréquence pour traiter les très hautes fréquences intervenant dans la CQM :

- Pour un problème fixé (maillage et discrétisation temporelle fixés, vitesse normale imposée), l’ensemble des fréquences qui émergent de la CQM est séparé en deux groupes, selon leur respect (ou non) du critère des 10 points par longueur d’onde ;
- Pour les fréquences qui satisfont le critère, le problème est résolu par la procédure CQM-based-FM-BEM complète ;
- Pour les fréquences plus élevées, l’approximation haute fréquence classique  $p = u$  ( $p = \rho c u$  en variables dimensionnelles) est utilisée.

Bien sûr, cette astuce n’est pertinente que si les hautes fréquences (par rapport au maillage choisi) sont suffisamment élevées, donc pour des problèmes de dynamique rapide. Notre cas d’application visé (interaction fluide-structure entre l’onde de choc d’une explosion sous-marine et un sous-marin) entre clairement dans cette catégorie. La procédure CQM-based-FM-BEM présentée Section 3, complétée par une approximation haute fréquence, permet ainsi de calculer avec une très bonne précision la contribution  $p^{ray}$  du problème d’interaction fluide-structure lors d’une explosion sous-marine en champ lointain.



## 5 Conclusion et perspectives

Dans cette contribution, une procédure numérique a été mise en place pour traiter efficacement la partie fluide d'un problème d'interaction fluide-structure lors d'une explosion sous-marine en champ lointain. Cette procédure s'appuie sur des résolutions successives de problèmes acoustiques dans le domaine fréquentiel par FM-BEM, puis la CQM permet l'obtention de résultats dans le domaine temporel. Dans le cas d'un couplage fluide-structure itératif, la rétro-action de la structure sur le fluide, c'est-à-dire le rayonnement d'un champ de pression  $p^{ray}$  dû au mouvement de l'objet immergé, aboutit à un problème acoustique de type Neumann. Les performances de notre procédure CQM-based-FM-BEM pour le calcul de  $p^{ray}$  ont été étudiées dans le cas d'une sphère pulsante en eau. Les bons résultats de la procédure, notamment pour des problèmes de dynamique rapide (cas qui nous intéressent ici), sont encourageants pour la suite de ce travail.

La prochaine étape, en cours d'élaboration, est la validation de la procédure pour le calcul de la contribution  $p^{ref}$ . On pourra par exemple valider la procédure dans le cas de la diffraction de l'onde de choc par un cylindre infini. À moyen terme, l'objectif est de mettre en place un couplage itératif FEM-structure/BEM-fluide pour résoudre le problème global d'interaction fluide-structure pour l'onde de choc. Enfin, à long terme, on étudiera le mouvement de fluide lent qui suit l'onde de choc. L'objectif final est le traitement unifié des deux phénomènes, aux deux échelles de temps.

### Références

- [1] P. K. Banerjee. *The Boundary Element Methods in Engineering*. McGraw-Hill, 2<sup>ème</sup> édition, 1994.
- [2] L. Banjai, M. Messner, et M. Schanz. Runge-Kutta convolution quadrature for the Boundary Element Method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 245/246 :90–101, 2012.
- [3] T. Betcke, N. Salles, et W. Smigaj. Overresolving in the Laplace domain for convolution quadrature methods. *SIAM J. Sci. Comput.*, 39(1) :A188–A213, 2017.
- [4] M. Bonnet. *Boundary integral equation methods in solids and fluids*. John Wiley & sons, 1999.
- [5] S. Chaillat. *Fast Multipole Method for 3-D elastodynamic boundary integral equations. Application to seismic wave propagation*. Thèse, École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France, 2008.
- [6] S. Chaillat, M. Bonnet, et J.-F. Semblat. A multi-level fast multipole BEM for 3-D elastodynamics in the frequency domain. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197(49) :4233–4249, 2008.
- [7] R. H. Cole. *Underwater explosions*. Princeton University Press, 1948.
- [8] J. Dominguez. *Boundary Elements in Dynamics*. Elsevier Applied Science Publishers, 1993.
- [9] T. L. Geers et C. A. Felippa. *Doubly asymptotic approximations for vibration analysis of submerged structures*, *J. Acoust. Soc. Am.* 73, 1983.
- [10] L. Greengard. *The rapid evaluation of potential fields in particle systems*. MIT Press, 1988.
- [11] L. Greengard et V. Rokhlin. A fast algorithm for particle simulations. *J. Comp. Phys.*, 73 :325–348, 1987.
- [12] F. Ihlenburg. *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*, volume 132 de *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [13] M. C. Junger et D. Feit. *Sound, Structures, and Their Interaction*. The MIT Press, 2<sup>ème</sup> édition, 1986.
- [14] C. Lubich. Convolution quadrature and discretized operational calculus I. *Numer. Math.*, 52 :129–145, 1988.
- [15] C. Lubich. Convolution quadrature and discretized operational calculus II. *Numer. Math.*, 52 :413–425, 1988.
- [16] M. Messner et M. Schanz. An accelerated symmetric time-domain boundary element formulation for elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34 :944–955, 2010.
- [17] A. Nieto Ferro. *Nonlinear Dynamic Soil-Structure Interaction in Earthquake Engineering*. Thèse, École Centrale Paris, Paris, France, 2013.
- [18] N. Nishimura. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Appl. Mech. Rev.*, 55 :299–324, 2002.
- [19] F. J. Sayas. *Retarded Potentials and Time Domain Boundary Integral Equations. A Road Map*, volume 50 de *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer International Publishing, 2016.
- [20] M. Schanz. *Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua : A Boundary Element Approach*, volume 2 de *Lecture Notes in Applied Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [21] L. Ying. A pedestrian introduction to fast multipole methods. *Science China Mathematics*, 55(5) :1043–1051, 2012.