



**HAL**  
open science

# Interpolation de bases POD par IDW et krigeage sur la variété de Grassmann

Rolando Mosquera, Antoine Falaize, Aziz Hamdouni, Hamidi Abdallah El

► **To cite this version:**

Rolando Mosquera, Antoine Falaize, Aziz Hamdouni, Hamidi Abdallah El. Interpolation de bases POD par IDW et krigeage sur la variété de Grassmann. 14ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2019), CSMA, LEM3, MSME, Université de Lorraine, Arts et Métiers, CNRS, May 2019, Hyères, France. hal-04824551

**HAL Id: hal-04824551**

**<https://hal.science/hal-04824551v1>**

Submitted on 7 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Interpolation de bases POD par IDW et krigeage sur la variété de Grassmann

R. Mosquera<sup>1</sup>, A. Falaize<sup>1</sup>, A. Hamdouni<sup>1</sup>, A. El Hamidi<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Équipe M2N, LaSIE, UMR 7356 - CNRS - Université de la Rochelle  
Avenue Michel Crépeau 17042 La Rochelle cedex 1.*

**Résumé** — Depuis les travaux d'Amsallem et Fahrat (AIAA 2008), on sait que le bon cadre pour interpoler des bases POD est la variété de Grassmann. Cependant, la méthode qu'ils proposent utilise un espace vectoriel de référence auquel les résultats peuvent être sensibles, et l'information de la répartition des données sur la variété est perdue. Dans cette communication, nous proposons deux méthodes d'interpolation sur la variété de Grassmann qui lèvent ces difficultés : (i) une généralisation de la méthode IDW, qui ne nécessite pas de choisir un espace vectoriel de référence et (ii) une généralisation de la méthode de krigeage, qui exploite la répartition des points interpolés sur la variété.

**Mots clés** — *POD, Variété de Grassmann, Krigeage, Inverse Distance Weighting*

## Introduction

De nombreux problèmes de réduction de modèle sont paramétrés. Ils peuvent être traités par des techniques de type PGD, RBM, POD. Cependant, l'obtention d'un modèle réduit pour un paramètre donné à partir d'une interpolation basée sur la connaissance d'un ensemble de bases POD associé à un échantillon de paramètres reste l'approche la plus efficace et la plus utilisée pour de nombreuses applications. Depuis les travaux d'Amsallem et Fahrat [1], on sait que le bon cadre pour réaliser ces interpolations est la variété de Grassmann. De nombreuses applications ont montré la pertinence de cette approche par rapport à une interpolation "naïve" dans un espace vectoriel. Un premier point faible de la méthode proposée par Amsallem et Fahrat est l'utilisation d'un point de référence auquel les résultats peuvent être sensibles. Un second point faible est que l'information de la répartition des données sur la variété est perdue lors de l'interpolation sur l'espace tangent.

Dans cette communication, nous proposons d'autres méthodes d'interpolation qui peuvent soit s'affranchir du choix d'un point de référence, soit utiliser la structure intrinsèque des variétés de Grassmann (qui ne sera pas rappelée ici, voir [2]). Plus précisément, nous présentons §2 une généralisation, à la variété de Grassmann, de la méthode de *pondération par distance inverse* (Inverse Distance Weighting, IDW). Cette généralisation ramène la méthode IDW à une fonctionnelle s'écrivant comme une somme pondérée de distances sur la variété, pour laquelle on garantit un minimum par un théorème qui donne la convergence d'une suite. Cette méthode ne nécessite pas de choisir un point de référence, mais est itérative. Ensuite, nous présentons §3 une méthode adaptée de l'interpolation par *krigeage* dans un espace vectoriel à la variété de Grassmann. Cette dernière méthode dépend d'un point de référence mais préserve et exploite l'information de la répartition des bases de l'échantillon sur la variété. Finalement, les performances des deux méthodes proposées sont illustrées §4 sur un cas d'interpolation de bases POD en mécanique des fluides.

## 1 Formulation du problème et notations

Une procédure maintenant standard pour construire des modèles réduits consiste à projeter en un certain sens les équations du modèle continu sur une base réduite (voir figure 1). Une telle base est classiquement déterminée à partir de la résolution d'un problème discret de grande dimension. Dans le cas d'une étude paramétrique, il apparaît intéressant de ne pas résoudre le problème discret complet,

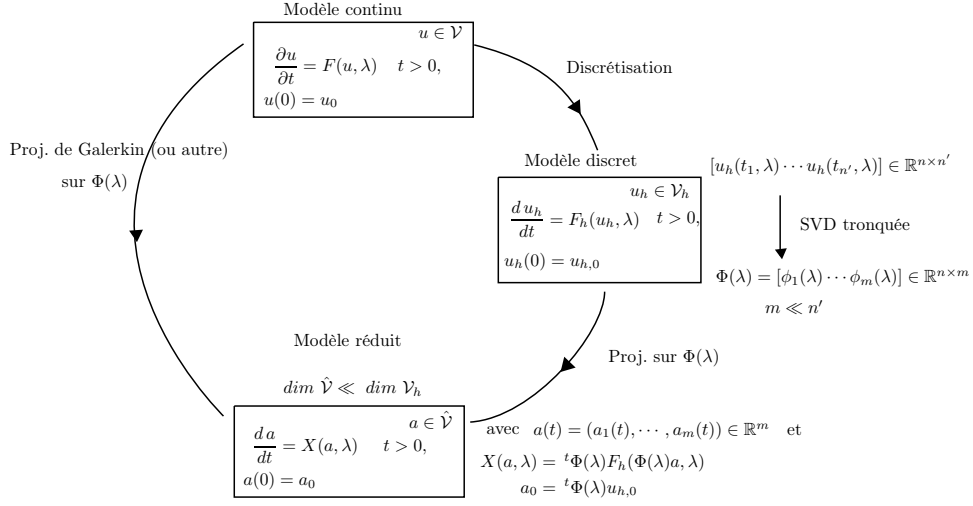


FIGURE 1 – Représentation schématique de construction d’un modèle réduit par projection sur une base POD  $\Phi(\lambda)$  du modèle continu de paramètre  $\lambda$  (schéma non commutatif).

et de construire une base réduite directement par une interpolation de bases précalculées. Plus précisément, étant donné un ensemble  $(\Phi(\lambda_i))_{1 \leq i \leq N}$  de bases POD (orthogonales) associées aux  $N$  paramètres  $\Lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq N}$  avec  $\lambda_i \in \mathbb{R}^p$ ,  $\forall i \in \{1 \dots N\}$  et  $\Phi(\lambda_i) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\forall i \in \{1 \dots N\}$  et  $m < n$ , on souhaite construire la base  $\Phi(\lambda^*)$  pour un nouveau paramètre  $\lambda^* \notin \Lambda$  par interpolation des  $(\Phi(\lambda_i))_{1 \leq i \leq N}$ .

On sait depuis les travaux d’Amsallem et Farhat [1] que le modèle réduit ainsi construit dépend du sous-espace  $\overline{\Phi(\lambda)} = \text{span}(\Phi(\lambda))$  engendré par la base, et non du représentant particulier  $\Phi(\lambda)$  de ce sous-espace. Ainsi, l’interpolation doit s’effectuer sur l’ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^n$ . Cet ensemble n’est pas un espace vectoriel mais a une structure de variété différentielle : c’est la variété de Grassmann  $G_m(\mathbb{R}^n)$ . Le problème d’interpolation de bases réduites peut donc être formulé comme suit :

Étant donnés  $N$  points  $(\overline{\Phi(\lambda_i)})_{1 \leq i \leq N}$  de  $G_m(\mathbb{R}^n)$  associés aux paramètres  $\Lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq N}$ , estimer le point  $\overline{\Phi(\lambda^*)} \in G_m(\mathbb{R}^n)$  associé au nouveau paramètre  $\lambda^* \notin \Lambda$ .

La méthode proposée dans [1] consiste (i) à choisir un point de référence  $\overline{\Phi(\lambda_r)}$ , (ii) à associer aux points les vecteurs tangents  $\xi(\lambda_i)$  dans  $T_{\overline{\Phi(\lambda_r)}}G_m(\mathbb{R}^n)$  via l’application dite *logarithme géodésique*, (iii) à réaliser une interpolation classique pour obtenir le vecteur tangent interpolé  $\xi(\lambda^*) \in G_m(\mathbb{R}^n)$  et (iv) à associer à  $\xi(\lambda^*)$  le point  $\overline{\Phi(\lambda^*)} \in G_m(\mathbb{R}^n)$  via l’application dite *exponentielle géodésique*. Les limites de cette procédure sont (i) la dépendance au choix de la valeur de référence  $\lambda_r$  et (ii) la perte de l’information intrinsèque sur la répartition des points de l’échantillon sur la variété. Les deux méthodes proposées dans ce travail permettent de lever ces difficultés et sont décrites dans les deux sections suivantes. Dans la suite, la base associée au paramètre  $\lambda_i$  sera notée  $\Phi_i$  et le sous-espace engendré sera noté  $\overline{\Phi}_i$ .

## 2 Pondération par distance inverse sur la variété de Grassmann (IDW-G)

Dans la méthode classique de pondération par distance inverse (Inverse Distance Weighting, ou IDW [9, 7]), un vecteur interpolé  $v^*$  est obtenu comme un barycentre pondéré de  $N$  vecteurs :  $v^* = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda^*) v_i$ ,

où  $\alpha_i(\lambda^*) = \frac{1}{S(\lambda^*) \|\lambda_i - \lambda^*\|^q}$ , avec  $S(\lambda^*) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\|\lambda_i - \lambda^*\|^q}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  un paramètre<sup>1</sup> de la méthode.

La généralisation de cette construction à la variété de Grassmann peut se faire comme décrit ci-après.

1. Ce paramètre est à renseigner par l’utilisateur, et peut être automatiquement déterminé dans les versions adaptatives de la méthode IDW (voir e.g. [8]).

Dans le cas de la variété de Grassmann  $G_m(\mathbb{R}^n)$ , une notion de barycentre peut être définie à partir du barycentre de Karcher [5]. Plus précisément, nous considérons le problème de minimisation suivant :

$$(\mathcal{P}_{\text{IDW}}) \quad \begin{cases} \text{Étant donné } \lambda^* \in \mathbb{R}^P, \text{ trouver } \bar{\Phi}_{\text{IDW}}^* \in G_m(\mathbb{R}^n) \text{ tel que :} \\ \bar{\Phi}_{\text{IDW}}^* = \underset{\bar{\Phi} \in G_m(\mathbb{R}^n)}{\text{arg min}} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda^*) d^2(\bar{\Phi}, \bar{\Phi}_i) \right) \end{cases}$$

où  $d$  est la distance géodésique sur  $G_m(\mathbb{R}^n)$  (dont une définition est donnée dans *e.g.* [3, théorème 2.3.34]).

Le théorème énoncé ci-après garantit que ce problème est bien posé et donne une procédure itérative pour approcher la solution. Une preuve de ce théorème est disponible dans [3, 4].

**Théorème 2.1** (Solution du problème  $(\mathcal{P}_{\text{IDW}})$ ). *Si les points  $(\bar{\Phi}_i)_{1 \leq i \leq N}$  sont contenus dans une boule  $B(\bar{\Phi}_C, r)$  de centre  $\bar{\Phi}_C \in G_m(\mathbb{R}^n)$  et de rayon  $r < \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ , alors le problème  $(\mathcal{P}_{\text{IDW}})$  admet une unique solution  $\bar{\Phi}_{\text{IDW}}^*$  dans  $B(\bar{\Phi}_C, r)$ . De plus, pour toute initialisation  $\bar{\Phi}_0 \in B(\bar{\Phi}_C, r)$ , la suite  $\{\bar{\Phi}_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}$  définie par*

$$\bar{\Phi}_{\ell+1} = \exp_{\bar{\Phi}_\ell} \left( \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) \exp_{\bar{\Phi}_\ell}^{-1}(\bar{\Phi}_i) \right),$$

converge vers  $\bar{\Phi}_{\text{IDW}}^*$ .

Les expressions des applications exponentielle ( $\exp$ ) et logarithme ( $\exp^{-1}$ ) géodésiques sont données *e.g.* dans [3, proposition 2.3.19] et [3, proposition 2.3.22], respectivement. En pratique, on supposera que la séquence a convergé lorsque la norme du gradient de la fonctionnelle associée au problème  $(\mathcal{P}_{\text{IDW}})$  est sous un seuil de tolérance prédéfini [4]. Cette séquence donne lieu à l'algorithme 1 qui prend en entrée les matrices  $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq N}$  et retourne la matrice  $\Phi^*$ , et utilise la représentation en termes de matrices des applications exponentielle et logarithme géodésiques. Afin de discerner  $\exp_{\bar{\Phi}_r}(\xi)$  et  $\log_{\bar{\Phi}_r}(\bar{\Phi})$  de leur représentation en termes de matrices, nous noterons ces dernières  $\widehat{\exp}_{\bar{\Phi}_r}(\xi)$  et  $\widehat{\log}_{\bar{\Phi}_r}(\bar{\Phi})$ . La représentation en termes de matrices de l'application exponentielle géodésique est :

$$\begin{aligned} \widehat{\exp}_{\bar{\Phi}_r}(\xi) &= \left( \Phi_r \cdot (\tau \Phi_r \cdot \Phi_r)^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{V} \cdot \cos(\mathbf{S}) + \mathbf{U} \cdot \sin(\mathbf{S}) \right) \cdot \tau \mathbf{V} \cdot (\tau \Phi_r \cdot \Phi_r)^{\frac{1}{2}}, \\ \text{avec } \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \tau \mathbf{V} &= \text{SVD} \left( \xi \cdot (\tau \Phi_r \cdot \Phi_r)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

où  $\text{SVD}(\mathbf{M})$  dénote la décomposition en valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{M}$ . La représentation en termes de matrices de l'application logarithme géodésique est :

$$\begin{aligned} \widehat{\log}_{\bar{\Phi}_r}(\bar{\Phi}) &= \mathbf{U} \cdot \arctan(\mathbf{S}) \cdot \tau \mathbf{V} \cdot (\tau \bar{\Phi} \cdot \bar{\Phi})^{\frac{1}{2}}, \\ \text{avec } \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \tau \mathbf{V} &= \text{SVD} \left( (\bar{\Phi} \cdot (\tau \bar{\Phi}_r \cdot \bar{\Phi})^{-1} - \bar{\Phi}_r) \cdot (\tau \bar{\Phi}_r \cdot \bar{\Phi}_r)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Ces expressions générales se simplifient pour des matrices orthogonales  $\tau \Phi \cdot \Phi = \text{Id}$ .

### 3 Méthode de Krigeage sur la variété de Grassmann

La méthode d'interpolation par krigeage [10, 11, 12, 13] est une technique d'interpolation stochastique initialement développée pour la géostatistique [14, 15] pour prédire la valeur d'un phénomène naturel en des sites non échantillonnés par une combinaison linéaire sans biais et à variance minimale des observations du phénomène en des sites voisins. La généralisation de cette méthode à la variété de Grassmann, dénommée krigeage grassmannien, est décrite ci-après. Le modèle probabiliste sur lequel se base la méthode de krigeage grassmannien repose sur le théorème suivant, dont une démonstration est disponible dans [3, chapitre 5].

**Data:**

- $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N}$  Ensemble de paramètres ,
- $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq N}$  Ensemble de bases POD associées aux paramètres,
- $\lambda^*$  Paramètre cible,
- $q$  Paramètre de la méthode,
- $\varepsilon_{\text{tol}}$  Tolérance.

**Result:** Base interpolée  $\Phi_{\text{IDW}}^* \simeq \Phi^*$ .

- 1  $r = \underset{i \in [1, N]}{\operatorname{argmin}} \|\lambda^* - \lambda_i\|$  // Sélection de la valeur initiale ;
- 2  $\Phi_\ell = \Phi_r$  ;
- 3  $S = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\|\lambda^* - \lambda_i\|^q}$  // Coefficient de normalisation;
- 4 **for**  $i \in [1, N]$  **do**
- 5      $w_i = \frac{1}{S \|\lambda^* - \lambda_i\|^q}$  // Poids IDW;
- 6 **end**
- 7  $\varepsilon = \infty$  ;
- 8  $\ell = 0$  ;
- 9 **while**  $\varepsilon > \varepsilon_{\text{tol}}$  **do**
- 10      $\ell = \ell + 1$  ;
- 11     **for**  $i \in [1, N]$  **do**
- 12          $\xi_i = \widehat{\log}_{\Phi_{\ell-1}}(\Phi_i)$  // Vecteurs de  $T_{\Phi_r} G_m(\mathbb{R}^n)$  ;
- 13     **end**
- 14      $\xi_\ell = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N w_i \xi_i$  // Barycentre pondéré;
- 15      $\Phi_\ell = \widehat{\exp}_{\Phi_{\ell-1}}(\xi_\ell)$  // Point sur  $G_m(\mathbb{R}^n)$ ;
- 16      $\varepsilon = \|\xi_\ell\|_F$  // Vérification du résidu ;
- 17 **end**
- 18  $\Phi_{\text{IDW}}^* = \Phi_\ell$  // Résultat;

**Algorithm 1:** Algorithme IDW-G pour l'interpolation de bases POD, où  $\|\bullet\|$  représente la norme euclidienne et  $\|\bullet\|_F$  représente la norme de Frobenius. Les expressions des représentations en termes de matrices des applications exponentielle  $\widehat{\exp}$  et logarithme  $\widehat{\log}$  géodésiques sont données dans les expressions (1) et (2), respectivement.

**Théorème 3.1.** Soit  $D$  une partie de  $\mathbb{R}^P$  ( $P \geq 1$ ) et  $N$  points  $(\bar{\Phi}_i)_{1 \leq i \leq N}$  sur la variété de Grassmann  $G_m(\mathbb{R}^n)$  associés aux paramètres  $\Lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq N} \subset D$ . On fait les hypothèses suivantes :

1. Il existe  $\bar{\Phi}_r \in G_m(\mathbb{R}^n)$  avec  $d(\bar{\Phi}_r, \bar{\Phi}_i) < \frac{\pi}{2}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ .
2. Il existe un processus aléatoire  $Z$ , indexée par  $D$ , et à valeur dans  $T_{\bar{\Phi}_r} G_m(\mathbb{R}^n)$  de la forme  $Z = \mu + \delta$  tel que :

$$Z_i = \exp_{\bar{\Phi}_r}^{-1}(\bar{\Phi}_i)$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ , où  $\mu$  est constant (espérance),  $\delta$  est un processus aléatoire, indexé par  $D$  et à valeur dans  $T_{\bar{\Phi}_r} G_m(\mathbb{R}^n)$  intrinsèquement stationnaire [11, 12].

Alors, étant donné  $\lambda^* \in D$ , il existe  $(\alpha_i(\lambda^*))_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$  tel que

$$(\alpha_1(\lambda^*), \dots, \alpha_N(\lambda^*)) = \underset{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} \left[ \left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i Z_i - Z^* \right\|^2 \right], \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$$

et  $Z_{\text{KRI}}^* = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda^*) Z_i$  est la valeur estimée de  $Z^* = \exp_{\bar{\Phi}_r}^{-1}(\bar{\Phi}^*)$ .

La détermination des coefficients  $\alpha_i(\lambda^*)$  suppose la connaissance du processus aléatoire  $\delta$  (plus précisément, du semi-variogramme associé au processus), inconnu en pratique. À partir des données disponibles  $(\overline{\Phi}_i)_{1 \leq i \leq N}$  et en utilisant la distance géodésique sur la variété de Grassmann  $d(\bullet, \bullet)$ , nous construisons un semi-variogramme expérimental qui approche le semi-variogramme exact.

**Construction du semi-variogramme expérimental géodésique** On considère les nombres :

$$m(\Lambda) = \min\{\|\lambda_i - \lambda_j\| : 1 \leq i < j \leq N\}, \quad (4)$$

$$M(\Lambda) = \max\{\|\lambda_i - \lambda_j\| : 1 \leq i < j \leq N\}, \quad (5)$$

et  $K \in \mathbb{N}$  tel que  $K \cdot m(\Lambda) < M(\Lambda)$ . Ces nombres permettent de définir les distances  $h_k = k \cdot m(\Lambda)$  pour tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ ,  $h_0 = 0$  et  $h_{K+1} = M(\Lambda)$  que l'on rassemble dans le vecteur  $h = (h_0, \dots, h_{K+1}) \in \mathbb{R}^{K+2}$ . Finalement, on définit pour tout  $k \in \{1, \dots, K+1\}$  les ensembles :

$$N(h_k) = \{(\lambda_p, \lambda_q) \in \Lambda \times \Lambda : 1 \leq p < q \leq N \text{ et } h_{k-1} < \|\lambda_p - \lambda_q\|_{\mathbb{R}^p} \leq h_k\}.$$

Alors, le semi-variogramme expérimental associé aux données  $(\overline{\Phi}_i)_{1 \leq i \leq N}$  est défini comme le vecteur  $v = (v_0, \dots, v_{K+1}) \in \mathbb{R}^{K+2}$ , où

$$v_k = \frac{1}{\text{Card}(N(h_k))} \sum_{(\lambda_p, \lambda_q) \in N(h_k)} d^2(\overline{\Phi}(\lambda_p), \overline{\Phi}(\lambda_q)), \quad k \in \{1, \dots, K+1\}, \quad (6)$$

avec  $v(0) = 0$  et  $d$  la distance géodésique sur la variété de Grassmann. Cette construction du semi-variogramme expérimental est décrite dans l'algorithme 2, où le logarithme géodésiques est exprimé en termes de matrices comme dans (2) et la distance géodésique exprimée en termes de matrice est

$$\begin{aligned} \widehat{d}(\Phi_1, \Phi_2) &= \|\tan^{-1}(\Sigma)\|_F, \\ \text{avec } \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V} &= \text{SVD}\left(\Phi_2 \cdot (\tau\Phi_1 \cdot \Phi_2)^{-1} - \Phi_1\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Une fois le semi-variogramme estimé, un variogramme analytique est défini par ajustement d'une fonction  $\tilde{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  de type négatif conditionnel [11, 12]. Le choix d'une fonction comme modèle se fait selon l'auto-corrélation spatiale des données décrite par les valeurs de portée  $a = h_{d+1}$  et de palier  $c = v(d+1)$ . Dans ce travail, nous avons utilisé deux modèles classiques de variogramme de type sphérique.

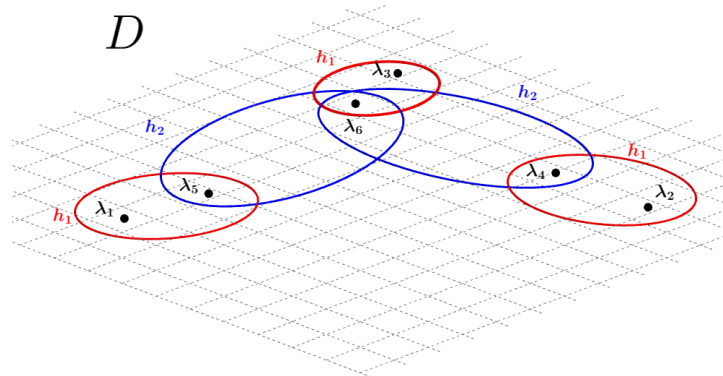


FIGURE 2 – Distances  $h_k = k \cdot m(\Lambda)$  intervenant dans la construction du semi-variogramme expérimental.

**Data:**

- $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N}$  Ensemble de paramètres ,  
 $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq N}$  Ensemble de bases POD associées aux paramètres.

**Result:** Portée  $a$  et palier  $c$ .

```

1 Définir  $m(\Lambda)$  et  $M(\Lambda)$  comme dans (4) et (5), respectivement
2  $h_0 = 0$ 
3 for  $k = 1$  à  $K + 1$  do
4    $h_k = k \cdot m(\Lambda)$  si  $k < K + 1$ , sinon  $h_k = M(\Lambda)$ 
5    $D_k = \emptyset$ 
6   for  $i = 1$  à  $N$  do
7     for  $j = i + 1$  à  $N$  do
8       if  $h_{k-1} < \|\lambda_i - \lambda_j\| \leq h_k$  then
9         Ajouter  $\widehat{d^2}(\log(\Phi_i), \log(\Phi_j))$  à l'ensemble  $D_k$ 
10        end
11      end
12    end
13    if  $\text{Card}(D_k) \neq 0$  then
14       $\tilde{v}_k = \frac{1}{\text{Card}(D_k)} \text{Somme}(D_k)$ 
15    end
16 end
17  $a = h_{K+1}$  // Portée
18  $c = \tilde{v}_{K+1}$  // Palier

```

**Algorithm 2:** Construction du semi-variogramme expérimental dans la méthode de krigeage grassmannien. Le logarithme et la distance géodésiques sont exprimés en termes de matrices comme dans (2) et (7), respectivement.

**Résumé de la méthode de krigeage grassmannien** Pour un ensemble  $(\overline{\Phi}_i)_{1 \leq i \leq N}$  de  $N$  points sur la variété de Grassmann  $G_m(\mathbb{R}^n)$  associés aux paramètres  $\Lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq N} \subset \mathbb{R}^P$  et un nouveau paramètre  $\lambda^* \in \mathbb{R}^P$ , les étapes de la méthode de krigeage grassmannien sont :

1. Obtenir par l'algorithme 2 la portée  $a$  et le palier  $c$  du semi-variogramme expérimental associé aux données.
2. Modéliser le semi-variogramme expérimental à l'aide d'un modèle analytique et obtenir les poids  $\alpha_1(\lambda^*), \dots, \alpha_N(\lambda^*)$  comme solution du problème (3).
3. Calculer la valeur estimée  $Z_{\text{KRI}}^* = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda^*) \exp_{\overline{\Phi}_i}^{-1}(\overline{\Phi}_i)$ .
4. Associer la base interpolée via l'exponentielle géodésique :  $\overline{\Phi}_{\text{KRI}}^* = \exp_{\overline{\Phi}_r}(Z_{\text{KRI}}^*)$ .

## 4 Application

Les performances des deux méthodes proposées dans cette communication sont illustrées sur l'interpolation de bases POD en mécanique des fluides. Nous considérons le cas des détachements tourbillonnaires derrière un obstacle circulaire de diamètre 1m dans l'écoulement d'un fluide incompressible en 2D dans un canal de dimensions 40m×10m (voir figure 3). Le modèle discret complet est obtenu par projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes adimensionnelles sur des éléments de type *Taylor-Hood* (P2 pour la vitesse et P1 pour la pression). La masse volumique du fluide est  $\rho = 1\text{kg/m}^3$  et la viscosité dynamique pilote l'inverse du nombre de Reynolds qui sera choisie comme paramètre d'interpolation  $\lambda = \text{Re}^{-1}$ . Le modèle discret est résolu par une méthode de type prédicteur/correcteur pour les paramètres  $\lambda \in \{100^{-1}, 120^{-1}, 130^{-1}, 160^{-1}, 170^{-1}, 200^{-1}\}$ , et dans chaque cas nous construisons la base POD par une décomposition en valeurs singulières de la matrice des clichés du champ de vitesse fluctuante (troncature à 10 valeurs). L'interpolation est réalisée pour  $\lambda^* = 110^{-1}$  et une base POD de référence est construite pour ce paramètre par simulation du modèle discret complet.

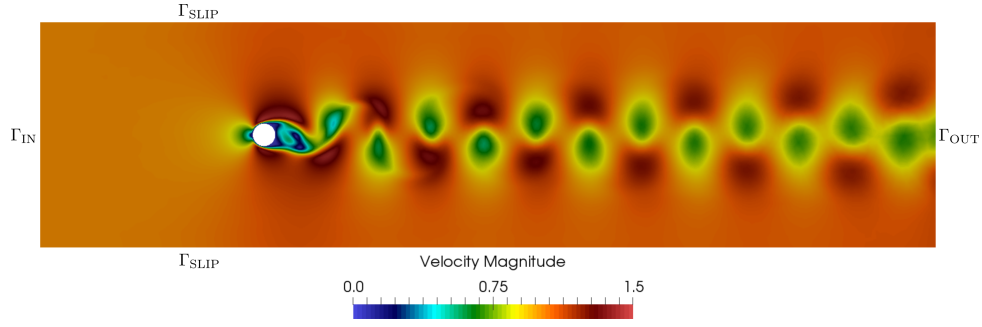


FIGURE 3 – Configuration utilisée dans les tests numériques, avec des conditions limites de Dirichlet  $\mathbf{v} = (1, 0)$  sur  $\Gamma_{IN}$ ,  $\mathbf{v} = (0, 0)$  sur le solide circulaire et  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = (0, 0)$  sur  $\Gamma_0$  avec  $\mathbf{n}$  le vecteur normal au bord, et sortie libre  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = (0, 0)$  sur  $\Gamma_{OUT}$ , avec  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy.

Les modèles réduits (voir schéma en figure 1) sont réalisés par projection des équations continues sur la base POD de référence et les bases interpolées par la méthode d’Amsallem et Farhat, par IDW-G et par krigeage grassmannien. Les premiers coefficients temporels  $(a_i(t))_{1 \leq i \leq 4}$  obtenus par simulation des modèles réduits sont présentés en figure 4. Il apparaît clairement que le modèle réduit construit sur la base IDW-G approche mieux le comportement du modèle réduit de référence (POD) que celui construit sur la base interpolée par la méthode d’Amsallem et Farhat. Ces résultats se répercutent sur les coefficients aérodynamiques (trainée, portance), non présentés ici.

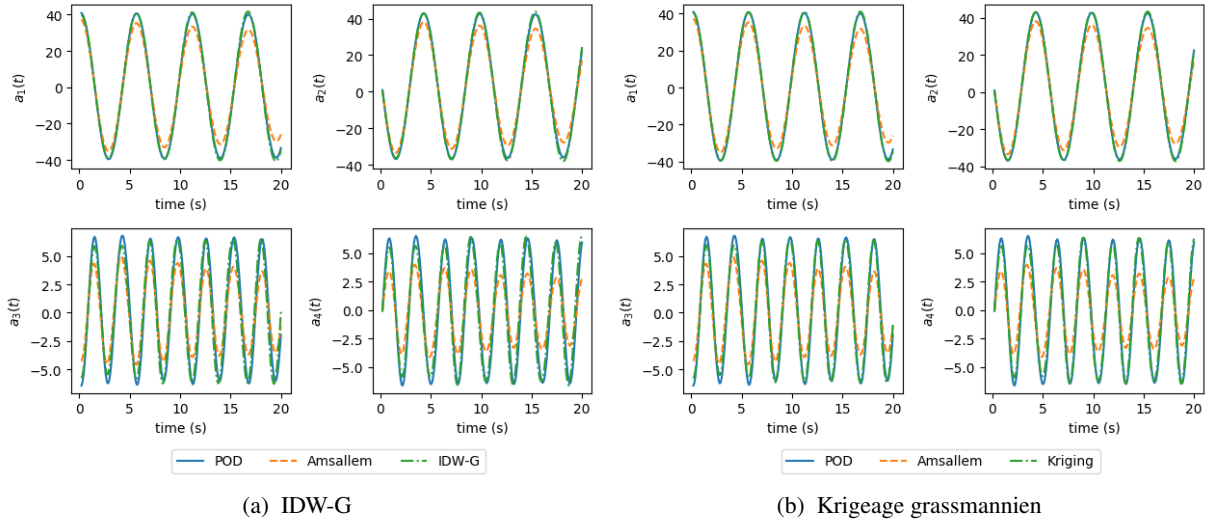


FIGURE 4 – Quatre premiers coefficients temporels des modèles réduits obtenus par projection sur la base de référence (POD) et les bases interpolées par la méthode d’Amsallem et Farhat, par IDW-G (4a) et par krigeage grassmannien (4b).

## Conclusions

Dans ce travail, nous avons proposé deux méthodes d’interpolation sur la variété de Grassmann. La méthode IDW-G, basée sur la généralisation à la variété de Grassmann de la méthode de pondération inverse de la distance, ne nécessite pas de choisir un espace de référence, auquel les méthodes d’interpolation existantes étaient sensibles. La méthode KG est construite comme par une modification de la méthode de krigeage dans un espace vectoriel afin de prendre en compte la distance intrinsèque sur la variété de Grassmann, de sorte à préserver et exploiter la répartition des points interpolés sur la variété. L’exemple de validation numérique que nous avons présenté montre la pertinence des deux méthodes proposées. Cependant, la méthode par krigeage présente l’avantage d’être explicite. Des perspectives à ce travail sont l’estimation *a priori* des erreurs d’interpolations et la généralisation des méthodes proposées à d’autres variétés (*e.g.* variétés de tenseurs).



## Références

- [1] D. Amsallem, C. Farhat, Interpolation method for adapting reduced-order models and application to aeroelasticity, AIAA journal 46 (7), 1803–1813, 2008.
- [2] P. A. Absil, R. Mahony, & R. Sepulchre, Riemannian geometry of Grassmann manifolds with a view on algorithmic computation, Acta Applicandae Mathematica, Springer, 80, 199-220, 2004.
- [3] R. Mosquera, Interpolation sur les variétés grassmanniennes et applications à la réduction de modèles en mécanique, Université de La Rochelle, École Doctorale EUCLIDE, 2018.
- [4] R. Mosquera, A. Hamdouni, A. El Hamidi et C. Allery, POD-basis interpolation via inverse distance weighting on Grassmann manifolds, à paraître, Discrete & Continuous Dynamical Systems - S, 12 (6), 2019.
- [5] H. Karcher, Riemannian center of mass and mollifier smoothing, Communications on pure and applied mathematics, Wiley Online Library, 30, 509-541, 1977.
- [6] Y.-C. Wong, Differential geometry of grassmann manifolds, Proceedings of the National Academy of Sciences 57 (3) , 589–594, 1967.
- [7] D. Zimmerman, C. Pavlik, A. Ruggles, et M. P. Armstrong, An experimental comparison of ordinary and universal kriging and inverse distance weighting, Mathematical Geology, Springer, 31, 375-390, 1999.
- [8] G. Y. Lu, et D. W. Wong, An adaptive inverse-distance weighting spatial interpolation technique, Computers & geosciences, Elsevier, 34, 1044-1055, 2008.
- [9] D. Shepard, A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data, Proceedings of the 23rd ACM national conference, 517-524, 1968.
- [10] N. Cressie, The origins of kriging Mathematical geology, Springer, 22, 239-252, 1990.
- [11] N. Cressie, Statistics for spatial data, Terra Nova, 4(5), 613-617, 1992.
- [12] C. Gaetan, & X. Guyon, Spatial statistics and modeling, Springer, (2010).
- [13] M. L. Stein, Interpolation of spatial data : some theory for kriging, Springer Science & Business Media, 2012.
- [14] E. Verfaillie, V. Van Lancker, & M. Van Meirvenne, Multivariate geostatistics for the predictive modelling of the surficial sand distribution in shelf seas, Continental Shelf Research, Elsevier, 26, 2454-2468, 2006.
- [15] R. J. Barnes, & T. B. Johnson, Positive kriging Geostatistics for natural resources characterization, Springer, 231-244, 1984.
- [16] E. Liberge, Réduction de modèles par POD-Galerkin pour les problèmes d'interaction fluide-structure, Université de La Rochelle, 2008.