



**HAL**  
open science

# Implémentation non intrusive d'une méthode aux éléments finis généralisés sous Abaqus: Application aux composites à matrice céramique dans le cadre de l'élasticité linéaire

Thomas-David Jayet, Emmanuel Baranger

## ► To cite this version:

Thomas-David Jayet, Emmanuel Baranger. Implémentation non intrusive d'une méthode aux éléments finis généralisés sous Abaqus: Application aux composites à matrice céramique dans le cadre de l'élasticité linéaire. 14ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2019), CSMA, LEM3, MSME, Université de Lorraine, Arts et Métiers, CNRS, May 2019, Hyères, France. hal-04824550

**HAL Id: hal-04824550**

**<https://hal.science/hal-04824550v1>**

Submitted on 7 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Implémentation non intrusive d'une méthode aux éléments finis généralisés sous Abaqus: Application aux composites à matrice céramique dans le cadre de l'élasticité linéaire

T. Jayet<sup>1,2,3</sup>, E. Baranger<sup>2</sup>, G. Couegnat<sup>3</sup>,  
S. Denneulin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Safran Ceramics, [sebastien.denneulin@safrangroup.com](mailto:sebastien.denneulin@safrangroup.com)

<sup>2</sup> LMT, ENS Cachan, CNRS, Université Paris-Saclay, [\[thomas-david.jayet,emmanuel.baranger\]@ens-paris-saclay.fr](mailto:[thomas-david.jayet,emmanuel.baranger]@ens-paris-saclay.fr)

<sup>3</sup> LCTS, CNRS, Université de Bordeaux, Safran, CEA, [couegnat@lcts.u-bordeaux.fr](mailto:couegnat@lcts.u-bordeaux.fr)

**Résumé** — Les travaux présentés ici portent sur la construction d'un modèle versatile permettant de modéliser la microstructure d'un composite à matrice céramique de type SiC/SiC, l'objectif final étant de développer à plus long terme un outil permettant de mieux comprendre et anticiper les phénomènes intervenant à haute température pour cette catégorie de matériaux. Une solution proposée est d'implémenter la Méthode des Éléments Finis Généralisés dans un code commercial. Pour illustrer les propos, un VER sera construit puis testé dans le cas d'un calcul élastique avec cette méthode.

**Mots clés** — Composite à matrice céramique, GFEM, Abaqus, multi-échelle.

## 1 Introduction

### 1.1 Contexte industriel

D'ici 2035, le réseau aérien devrait transporter l'équivalent de la population mondiale chaque année. La question se pose alors pour les équipementiers aéronautiques de produire des moteurs plus économes en carburant. Une solution consiste à augmenter la température de la turbine afin d'améliorer le rendement des moteurs [5]. Néanmoins des températures très élevées dégradent les propriétés mécaniques de certains alliages métalliques et donc l'intégrité physique de la structure. Une solution retenue consiste alors à remplacer certaines pièces statiques des parties chaudes du moteur par des Composites à Matrice Céramique (CMC). L'intérêt de ces matériaux est qu'ils possèdent à très haute température (plus de 1000 °C) des propriétés thermomécaniques intéressantes.

De tels composites peuvent être fabriqués de la manière suivante : les fibres Hi-Nicalon-S<sup>TM</sup> sont revêtues de nitrure de bore ou de pyrocarbone afin de les isoler de la matrice, de les protéger des phénomènes d'oxydation et d'aider à la déviation de fissures. Puis la préforme fibreuse subit un procédé d'infiltration de matrice en carbure de silicium (SiC) par voie gazeuse (procédé CVI) pour la figer. Enfin, les porosités résiduelles sont comblées successivement par un procédé de Slurry-Cast, consistant à injecter des poudres, et par un procédé de Melt-infiltration, consistant à injecter un métal liquide.

Le produit fini a donc une microstructure très riche et fortement hétérogène (voir Figure 1) dont les phases constitutives en céramique sont fragiles. Ainsi les observations par micrographie ont permis d'identifier un certain nombre de phénomènes de dégradation des CMC à haute température : de l'initiation et propagation de fissures, de la déviation de fissure à l'interface fibre-matrice aussi appelée décohésion [16] et du fluage [23].

D'un point de vue industriel, il serait intéressant d'avoir un modèle de compréhension de ces mécanismes afin d'optimiser les procédés de fabrication. D'un point de vue scientifique la question se pose alors de savoir comment modéliser simplement une microstructure complexe dans le but de simuler à terme des scénarios de dégradation à l'échelle des fibres pour différentes morphologies de composites,

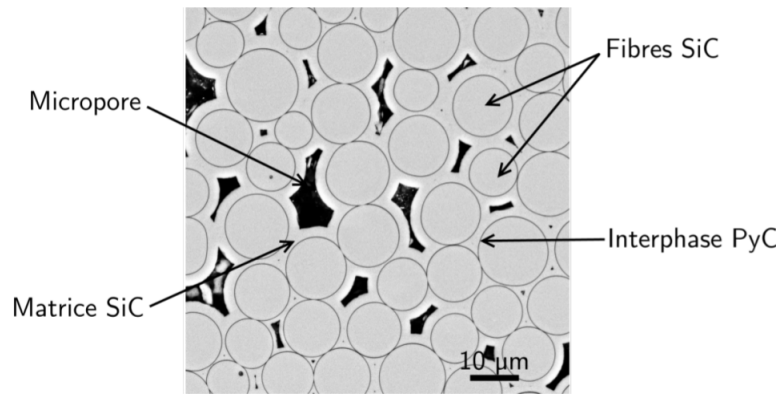


FIGURE 1 – Visualisation des torons d’un composite à matrice céramique et zoom sur la microstructure, [3]

avant de remonter à l’échelle du tissage puis de la pièce.

Le matériau étudié sera inspiré de celui développé par Safran Ceramics. Une contrainte logicielle est imposée par l’industriel : Abaqus ainsi que les langages permettant de dialoguer avec ce code commercial comme Python ou Fortran 77.

## 1.2 Eléments de bibliographie

Dans la section suivante, des éléments de bibliographie sont proposés afin de justifier l’emploi de la méthode des éléments finis généralisés au vu du besoin exprimé par l’industriel. Puisque l’établissement d’un lien entre l’état du matériau à l’échelle de la fibre et l’état de santé matière de la pièce à l’échelle macroscopique est souhaité, une stratégie de séparation d’échelle est adoptée afin de décorrélérer les problèmes relatifs à chaque ordre de grandeur. Le point de vue adopté n’est pas de rechercher une solution complète à un problème mais de chercher les informations pertinentes aidant à la compréhension de certains mécanismes au sein des composites à matrice céramique.

Les méthodes de décomposition de domaine se basent sur une structure complète, avant de la découper et de résoudre chaque sous-problème de manière parallélisée. Les méthodes d’homogénéisation quant à elle partent d’une description fine d’une microstructure pour en déduire un comportement global. Une autre façon de décrire une structure, située à mi-chemin entre la sous-structuration et l’homogénéisation, consiste à enrichir un problème grossier en y ajoutant des détails géométriques ou de variation de comportement. Une revue de ces trois stratégies est proposée dans les trois sections suivantes.

### 1.2.1 La décomposition de domaine

Les méthodes de décomposition de domaine reposent sur la résolution complète d’un problème sur une structure prédécoupée. L’établissement de conditions aux limites aux bords des sous-structures mène à plusieurs problèmes couplés aux conditions aux limites sur chaque sous-domaine pour conserver l’équilibre et la continuité des déplacements. Plusieurs méthodes de décomposition de domaine existent, celles basées sur un non recouvrement de structures sont listées dans [11]. Chaque sous-problème peut être résolu séparément, par conséquent les stratégies de décomposition de domaines sont facilement parallélisables et chaque sous-structure peut décrire finement la morphologie locale. Plusieurs approches itératives sont possibles : les approches primales imposent la continuité du déplacement durant le processus de résolution avant de vérifier l’équilibre de la sous-structure à convergence [15], les approches duales privilégient l’équilibre de la sous-structure à chaque pas de temps avant de contrôler la continuité du déplacement à convergence [7] et les approches mixtes comme la LATIN [13] ne favorisent ni l’équilibre ni la continuité du déplacement.

Les méthodes de décomposition de domaine sont capables de modéliser une microstructure riche

du fait de la possibilité de paralléliser les calculs. Néanmoins on ne cherche pas à résoudre finement le problème et ces stratégies ne permettent pas d'isoler l'information pertinente.

### 1.2.2 Les méthodes d'homogénéisation

L'étude des quantités moyennes au sein d'une microstructure de taille donnée constitue le fondement de l'homogénéisation, une revue de ces méthodes est disponible dans [18]. La théorie correspondante est adaptée à l'étude des solides élastiques linéaires et permet de définir un comportement à l'échelle macroscopique. En cas de présence de non linéarités, une mise à jour de l'état de la microstructure est nécessaire et les méthodes d'homogénéisation doivent être réappliquées pour obtenir le bon comportement à l'échelle macroscopique.

Dans le cadre de chargements périodiques sur microstructures elles-mêmes périodiques, une méthode globale-locale itérative dite FE<sup>2</sup> a été développée par [8] pour les composites SiC/Ti dans un cadre élastique. Plus récemment des méthodes FFT couplées à des algorithmes de gradient conjugué ont été mises en oeuvre pour traiter des problèmes de plasticité sur des microstructures à conditions aux limites périodiques [10]. Toutefois dans le cadre des composites SiC/SiC il est difficile de parler de périodicité au vu des microstructures observées, ceci est d'autant plus vrai que la propagation d'une fissure au sein d'un VER romprait sa périodicité.

### 1.2.3 Les méthodes d'enrichissement de la cinématique

On considère un domaine  $\Omega$  soumis à des sollicitations extérieures en efforts sur  $\partial\Omega_F$  et déplacement sur  $\partial\Omega_D$  dont une illustration est donnée en Figure 2. approché par un maillage dénommé  $\Omega_h$ . Il est alors possible de définir des *patches*  $\Omega_k$  d'éléments ayant un même noeud commun  $k$ . Pour chaque *patch* on définit aussi une fonction "chapeau"  $\widehat{\phi}_k$  qui vaut 1 sur le noeud  $k$  et 0 aux bords du *patch*. Si ces fonctions "chapeau" vérifient les hypothèses de partition de l'unité explicitées dans [17] alors il est possible d'enrichir le champ de déplacement de Galerkin et d'écrire :

$$\underline{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \widehat{\phi}_i(\mathbf{x}) \underline{u}_i + \sum_{i=1}^{N_{EF}} \widehat{\phi}_i(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{n_{enr}^{(i)}} \psi_j^{(i)}(\mathbf{x}) \underline{a}_j^{(i)} \quad (1)$$

Une telle forme de champ de déplacement constitue le fondement de la Méthode des Eléments Finis Généralisés (GFEM). Le nombre entier  $N$  désigne le nombre de *patches* au sein du maillage,  $\widehat{\phi}_i$  est une fonction "chapeau" dont la valeur vaut 1 sur le noeud central du *patch* et 0 à ses bords.  $n_{enr}^{(i)}$  correspond au nombre de fonctions d'enrichissement  $\psi_j^{(i)}$  au sein du *patch*  $i$ . Enfin  $\underline{u}_i$  est le déplacement aux noeuds du maillage et  $\underline{a}_j^{(i)}$  désigne les inconnues d'enrichissements ajoutées au noeud numéro  $i$ . Il a été montré dans [17] que si les fonctions d'enrichissement décrivent bien la cinématique locale de la structure alors le champ de déplacement  $\underline{u}_h$  approche correctement le champ réel recherché  $\underline{u}$ . Les produits  $\widehat{\phi}_i \psi_j^{(i)}$  assurent la continuité de l'enrichissement entre deux *patches* qui se superposent comme ceux notés  $\Omega_p$  et  $\Omega_q$  sur la Figure 2.

Les Eléments Finis Etendus (XFEM) se basent eux aussi sur les hypothèses de la partition de l'unité et la formulation du champ de déplacement est la même que décrite dans (1). Les fonctions d'enrichissement XFEM sont définies analytiquement et leur implémentation dans le code Abaqus a déjà été réalisée pour une application à la fissuration. Toutefois l'efficacité de la XFEM est fortement dépendante de la taille de maille en front de fissure car elle conditionne la qualité de l'évaluation des enrichissements analytiques relatifs à la pointe de fissure. Une force de la GFEM est que les fonctions d'enrichissement peuvent être définies numériquement sur un *patch*  $\Omega_k$  à partir de calculs de champs locaux sur un maillage fin  $\omega_k$  et prenant en compte les détails structuraux. Les fonctions numériques  $\psi_j^{(i)}$  sont construites à partir de la résolution de problèmes locaux dont l'ensemble des solutions s'insert dans un "Handbook".

Les méthodes d'enrichissement cinématiques ont montré leur efficacité dans le cadre de calculs sur des structures comprenant de très nombreux motifs [20] ou prenant en compte un chargement thermique

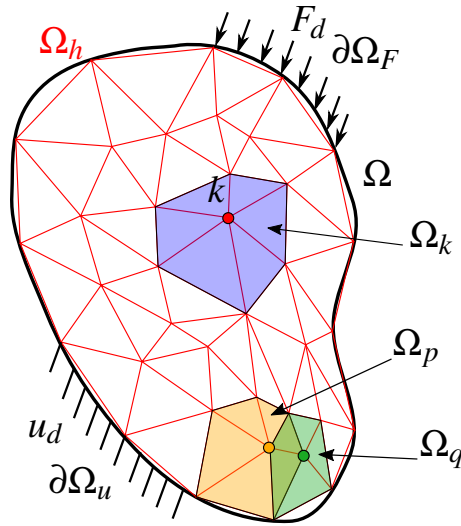


FIGURE 2 – Exemples de *patches* sur le maillage du domaine  $\Omega$ . Chaque *patch*  $\Omega_k$  possède un noeud central numéroté  $k$ , deux *patches*  $\Omega_p$  et  $\Omega_q$  peuvent se recouvrir

[4] ou faisant intervenir des phénomènes de fissuration [9]. Aussi une intégration de la méthode de Proper Orthogonal Decomposition dans la formulation GFEM a été réalisée dans [1]. De tels modèles développés à partir d'une formulation enrichie du déplacement laissent supposer que la GFEM est un candidat intéressant dans le cadre du développement d'un outil de compréhension des phénomènes se produisant à l'échelle de la fibre dans un composite à matrice céramique car elle présente une information sous forme condensée.

## 2 Choix spécifique d'une méthode de construction des fonctions d'enrichissement GFEM

Une difficulté inhérente à la GFEM est la construction de la matrice de rigidité issue de la cinématique enrichie et en particulier le calcul des termes d'intégration croisées entre les fonctions "chapeaux" et les fonctions d'enrichissement. Il est alors légitime de se demander quelle est la meilleure stratégie pour construire les fonctions d'enrichissement et la matrice de rigidité GFEM tout en tenant compte de la contrainte logicielle qu'est Abaqus.

### 2.1 Bilan des stratégies d'enrichissement existantes

Différentes façons de construire ces fonctions d'enrichissement  $\psi_j^{(i)}$  existent dans la littérature. Il a été proposé dans [19] une stratégie de construction des fonctions d'enrichissement à partir d'une base canonique en chargement sur des *patches* contenant un ou plusieurs détails structuraux : une base de solutions précalculées est alors créée et appelée *Handbook*. Ces solutions ainsi construites sont ensuite positionnées sur une structure maillée grossièrement afin d'y intégrer les différents motifs. Toutefois il est nécessaire de gérer la superposition des maillages de plusieurs *patches* entre eux et par conséquent des non conformités de maillages qui sont potentiellement difficiles à traiter. Une autre façon de créer les fonctions d'enrichissement a été proposée dans [6]. Sur une structure homogène maillée grossièrement, ces fonctions sont issues d'un calcul effectué sur un maillage fin géométriquement conforme aux éléments macroscopiques contenant les détails de structure. Dans un premier temps un calcul homogène est réalisé sur le maillage fin puis un calcul est effectué en tenant compte du comportement des détails structuraux, la différence des déplacements issus de ces deux calculs donnent l'enrichissement numérique. Cette méthode possède deux avantages : sur chaque *patch* les fonctions d'enrichissement sont construites avec le même maillage local et leur génération peut être faite en parallèle. De prime abord Abaqus possède tous les outils pour construire ces fonctions d'enrichissement mais cette stratégie impose la génération systématique des enrichissements à chaque test, cela s'éloigne de l'idée de développer

un outil de modélisation souple.

Enfin plus récemment [21, 22] une hypothèse de petite taille des supports d'enrichissement a été ajoutée permettant de simplifier les produits croisés dans le calcul de la matrice de rigidité ainsi qu'une hypothèse de localisation des motifs assurant la non interaction entre les enrichissements, ce qui permet d'une part une construction *a priori* du *Handbook* et d'autre part l'utilisation multiple d'un même motif dans un calcul. Une séparation d'échelle est ainsi faite. Cette GFEM multi-échelle est utilisée dans le cadre de la propagation de fissures dans [9]. C'est ce point qui va motiver les travaux d'intégration de la GFEM multi-échelle dans Abaqus (pour un calcul d'élasticité linéaire dans un premier temps) en vue plus tard d'y ajouter la modélisation des phénomènes non-linéaires à haute température pour des composites à matrice céramique.

Il est à noter que le mauvais conditionnement de la matrice de rigidité GFEM mis en évidence dans [2] est une difficulté automatiquement surmontée dans le cadre de la GFEM multi-échelle car la construction des fonctions d'enrichissement répond aux hypothèses de la GFEM Stable (SGFEM) décrites dans ce même article. Un calcul de propagation de fissure a déjà été réalisé dans le cadre de la SGFEM par [12].

## 2.2 Implémentation de la GFEM multi-échelle sous Abaqus

### 2.2.1 Problème de référence

Dans l'optique de développer la GFEM multi-échelle dans Abaqus, un calcul sur un VER de référence est réalisé. Il contient des fibres de type Hi-Nicalon-S<sup>TM</sup> chacune enrobée de nitrure de bore. Le carbure de silicium (SiC) maintenant la préforme fibreuse par procédé CVI est aussi prise en compte ainsi que la matrice obtenue par procédé de Melt Infiltration. Cette structure 2D extrudée de face carrée est montrée en Figure 3, les porosités résiduelles ne sont pas prises en compte ici.

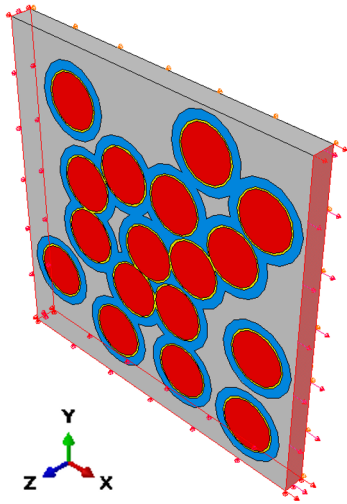
Il est choisi de réaliser sur ce VER un essai de traction uniaxiale en élasticité dans le but d'obtenir un résultat de référence. Un déplacement d'intensité égale à  $\frac{1}{60}$  de la largeur (soit une déformation de structure de 1%) est imposée sur une face et 3 glissements surfaciques assurent l'absence de mouvement de corps rigide. Ces conditions aux limites sont illustrées en Figure 3(a). Le maillage de référence possède 524 580 degrés de liberté et 89s de calcul pour un seul coeur ont été nécessaires pour aboutir au champ représentant la contrainte selon  $x$  de la Figure 3(b).

### 2.2.2 Choix des motifs et construction des enrichissements

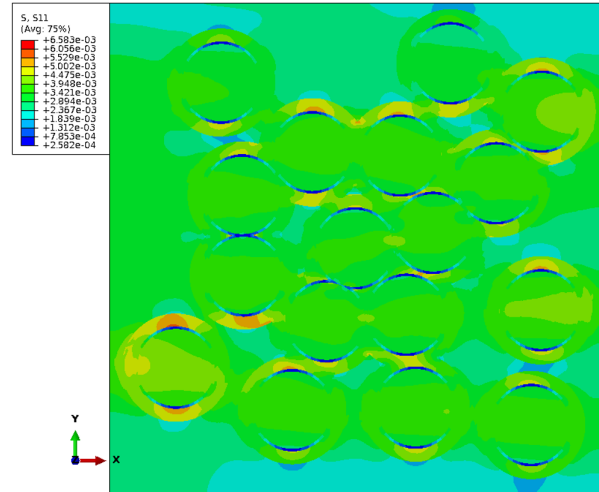
Il est nécessaire d'extraire à partir de la microstructure des motifs géométriques élémentaires qui seront utilisés dans la construction des fonctions d'enrichissement numériques. On s'inspire pour ces premiers travaux des motifs extraits dans [22], c'est-à-dire un *patch* à face carrée avec une seule fibre en son centre ou un *patch* avec deux fibres dont les centres sont éloignés d'une distance  $L$ . Pour chaque distance  $L$  fixée, un *patch* est créé. Une illustration des motifs choisis est donnée en Figure 4(a). La profondeur des *patches* est fixée, il faut néanmoins déterminer la longueur de chaque côté afin que le champ autour des inclusions soit le plus possible contenu dans le motif. Or il existe une expression analytique pour des champs de contrainte autour d'une inclusion plongée dans un milieu infini [14], un critère en énergie de déformation élastique a donc été défini afin de conserver dans le support 90% de l'énergie calculée théoriquement. Pour les *patches* contenant deux fibres, les dimensions des côtés sont calculées en considérant une inclusion circulaire unique englobant les deux fibres.

### 2.2.3 Construction de la rigidité relative à la GFEM multi-échelle

La taille des différents *patches* ainsi fixée on définit sur chacun d'entre eux un maillage local contenant les informations relatives aux détails structuraux ainsi que huit noeuds macroscopiques situés aux coins du *patch*. Les fonctions d'enrichissement sont construites numériquement à partir d'une base canonique en déformation. Pour écrire dans Abaqus la matrice de rigidité GFEM multi-échelle telle qu'écrite dans

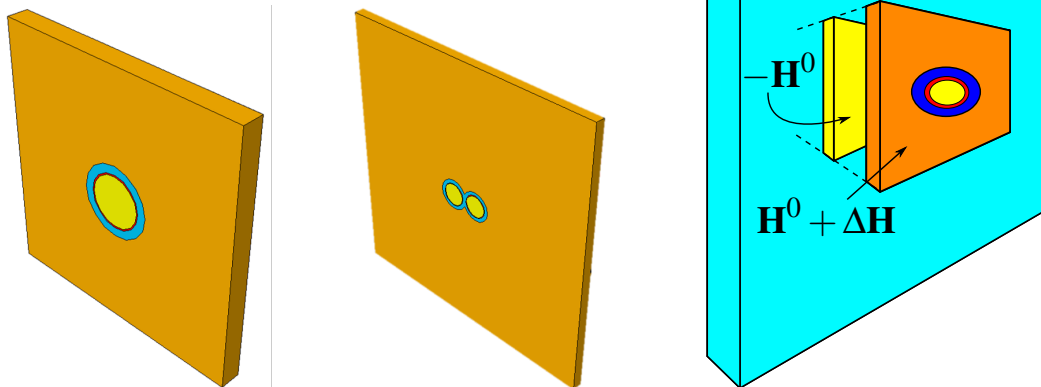


(a) VER de référence sur lequel sont appliquées les conditions aux limites.



(b) Champ correspondant à la première composante du tenseur des contraintes sous Abaqus, le maillage n'est pas montré ici pour des raisons de lisibilité

FIGURE 3 – VER de référence. Un déplacement imposé selon l'axe  $x$  est imposé afin de simuler un essai de traction, 3 glissements surfaciques empêchent les mouvements de corps rigide.



(a) Exemples de *patches* utilisés pour le développement de la GFEM multi-échelle. Les inclusions sont composées des fibres, de l'interphase et de la matrice SiC CVI.

(b) Le support homogène macroscopique (en bleu) de comportement  $\mathbf{H}^0$  peut accueillir des *patches* (en orange) de comportement  $\mathbf{H}^0 + \Delta\mathbf{H}$  auquel il faut soustraire  $\mathbf{H}^0$  sur la partie éléments finis via un support intermédiaire (en jaune)

FIGURE 4 – VER de référence. Un déplacement imposé selon l'axe  $x$  est imposé afin de simuler un essai de traction, 3 glissements surfaciques empêchent les mouvements de corps rigide.

[21], c'est-à-dire avec une simplification des produits croisés, il faut utiliser l'hypothèse concernant la taille des supports d'enrichissements. Sur un *patch*  $\Omega_i$  possédant  $j$  supports d'enrichissements  $\omega_j^{(i)}$  chacun de centre  $C_j$  les fonctions "chapeau" varient peu :

$$\forall \mathbf{x} \in \omega_j^{(i)}, \hat{\varphi}_i(\mathbf{x}) \approx \hat{\varphi}_i(C_j) \quad (2)$$

Ecrire cette hypothèse dans la formulation cinématique (1) permet sous Abaqus d'obtenir les termes de la matrice de rigidité désirée. Un super élément avec cette matrice de rigidité et les inconnues GFEM est ensuite construit à partir de la cinématique GFEM simplifiée avec (2). Il faut toutefois soustraire à la partie éléments finis du *patch* le comportement homogène car il est déjà présent dans la structure macroscopique. Un support intermédiaire éléments finis de rigidité négative est alors interposé entre le *patch* et la structure macroscopique homogène, comme illustré en Figure 4(b).

## 2.2.4 Simulation et post-traitement

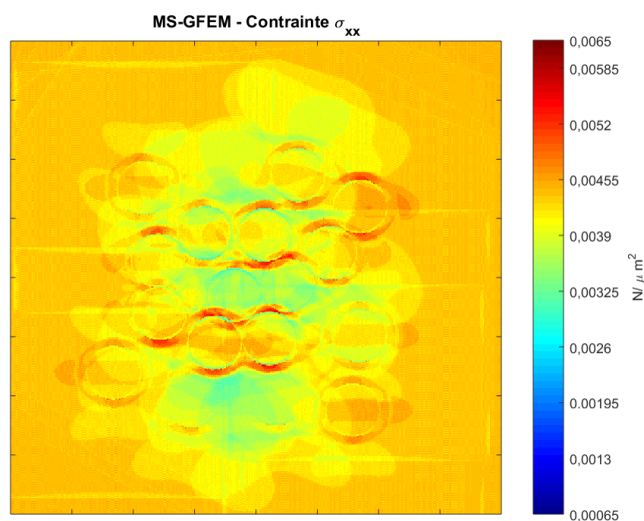


FIGURE 5 – Image Matlab issue du post-traitement du calcul MSGFEM sous Abaqus. Les concentrations de contraintes sont similaires à celles du calcul de référence mais le champ reconstruit est trop "flou" pour une comparaison raisonnable avec le calcul de référence

Pour reconstruire le VER de référence, 17 *patches* ont été positionnés sur une structure macroscopique homogène et le même essai de traction que pour le calcul éléments finis a été réalisé. Le nombre de degrés de libertés du calcul GFEM est environ 500 fois inférieur à celui du calcul de référence et le temps de calcul pour un seul coeur est de 35s (deux fois moins que pour le calcul éléments finis). Une visualisation de la première composante du tenseur des contraintes est donnée en Figure 5 après un post-traitement sous Matlab. Le post-traitement est pour le moment réalisé avec la cinématique approchée utilisée pour l'intégration numérique, d'où les bords francs visibles. Ce point de post-traitement est à améliorer ainsi que la définition des images exportées.

## Remerciements

Nous remercions Safran Ceramics et l'ANRT pour le financement de ces travaux de thèse.

## Références

- [1] W. Aquino, J.C. Brigham, C.J. Earls, N. Sukumar. *Generalized finite element method using proper orthogonal decomposition*, International journal for numerical methods in engineering, Wiley, 887-906, 2009.
- [2] I. Babuška, U. Banerjee. *Stable generalized finite element method (SGFEM)*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 91-111, 2012.



- [3] C. Chateau. *Analyse expérimentale et modélisation micromécaniques du comportement élastique et de l'endommagement de composites SiC/SiC unidirectionnels*, PhD thesis, 2012.
- [4] J. Chessa, P. Smolinski, T. Belytschko. *The extended finite element method (XFEM) for solidification problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 1959-1977, 2002.
- [5] J.A. DiCarlo, H-M. Yun, G.N. Morscher, and R.T. Bhatt. *SiC/SiC composites for 1200°C and above*, Handbook of Ceramic Composites, Springer, 77-98, 2005.
- [6] C.A. Duarte, D.J. Kim. *Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 487-504, 2008.
- [7] C. Farhat, F.X. Roux. *A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 1205-1227, 1991.
- [8] F. Feyel. *Multiscale FE<sup>2</sup> elastoviscoplastic analysis of composites structures*, Computational Material Science, Elsevier, 344-354, 1999.
- [9] O. Friderikos, E. Baranger, P. Ladevèze. *Multiscale GFEM with superposition of crack enrichment functions driven by finite fracture mechanics : Theory, first computation and open problems*, Composites Structures, Elsevier, 145-157, 2017.
- [10] L. Gélébart, R. Mondon-Cancel. *Non-linear extension of FFT-based methods accelerated by conjugate gradients to evaluate the mechanical behavior of composite materials*, Computational Material Science, Elsevier, 430-439, 2013.
- [11] P. Gosselet, C. Rey. *Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics*, Archives of computational methods in engineering, Springer, 515-572, 2006.
- [12] V. Gupta, C.A. Duarte, I. Babuška, U. Banerjee. *A stable and optimally convergent generalized FEM (SG-FEM) for linear elastic fracture mechanics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 23-39, 2013.
- [13] P. Ladevèze, D. Dureisseix. *Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série IIB, Mécanique, physique, astronomie, 1237-1244, 1999.
- [14] S.G. Lekhnitskii. *Anisotropic plates*, Technical report, Foreign Technology Div Wright-Patterson Afb Oh, 1968.
- [15] J. Mandel, M. Brezina. *Balancing domain decomposition : theory and performance in two and three dimensions*, Communications in Numerical Methods in Engineering, Wiley, 233-241, 1993.
- [16] D.B. Marshall, A.G. Evans. *Failure mechanisms in ceramic-fiber/ceramic-matrix composites*, Journal of the American Ceramic Society, Wiley, 225,231, 1985.
- [17] J.M Melenk, I. Babuška. *The partition of unity finite element method : basic theory and applications*, Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 1996.
- [18] S. Nemat-Nasser, M. Hori. *Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*, North Holland, 1999.
- [19] T. Strouboulis, K. Copps, I. Babuška. *The generalized finite element method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 4081-4193, 2000.
- [20] T. Strouboulis, L. Zhang, I. Babuška. *Generalized finite element method using mesh-based handbooks : application to problems in domains with many voids*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 3109-3161, 2003.
- [21] B. Tranquart, P. Ladevèze, E. Baranger, A. Mouret. *A computational approach of handling complex composites microstructures*, Composites Structures, Elsevier, 2097-2109, 2012.
- [22] B. Tranquart. *Vers un matériau virtuel pour l'optimisation qualitative d'une nouvelle famille de CMCs*, PhD thesis, 2011.
- [23] S. Zhu, M. Mizuno b, Y. Kagawa, Y. Mutoh a. *Monotonic tension, fatigue and creep behavior of SiC-fiber reinforced SiC-matrix composites : a review*, Composites Science and Technology, Elsevier, 833-851, 1999.