



HAL
open science

Identification et localisation de tourbillons par homologie persistante

Rolando Mosquera, Dina Razafindralandy, Aziz Hamdouni, Anas Sakout

► **To cite this version:**

Rolando Mosquera, Dina Razafindralandy, Aziz Hamdouni, Anas Sakout. Identification et localisation de tourbillons par homologie persistante. 16ème Colloque National en Calcul des Structures, CNRS, CSMA, ENS Paris-Saclay, CentraleSupélec, May 2024, Giens, France. hal-04823157

HAL Id: hal-04823157

<https://hal.science/hal-04823157v1>

Submitted on 6 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Identification et localisation de tourbillons par homologie persistante

R. Mosquera¹, D. Razafindralandy¹, A. Hamdouni¹, A. Sakout¹

¹ LaSIE, UMR 7356 - CNRS - La Rochelle Université
Avenue Michel Crépeau 17042 La Rochelle cedex 1.

Résumé —

Actuellement, pour identifier des tourbillons dans un écoulement de fluides, les critères les plus utilisés sont le critère Q , le critère Δ et le critère λ_2 . Cependant, ces critères présentent plusieurs limitations et lacunes [2] dues au fait que dans la pratique ils ont besoin de recourir à un seuillage pour chaque application. Dans cette communication, nous proposons un nouveau critère d'identification et de localisation d'une classe des tourbillons, fondé sur l'analyse topologique de données (TDA) qui, à la différence des critères précédents, n'a pas besoin de recourir à un seuillage. Les performances de ce critère topologique seront illustrées sur différents exemples de tourbillons analytiques et de données expérimentales 3D.

Mots clés — Homologie persistante, identification de tourbillons, dynamique des fluides.

Introduction

La compréhension des structures tourbillonnaires est un sujet central en mécanique des fluides. Malgré le fait qu'il n'y ait pas toujours de consensus sur une définition rigoureuse d'un tourbillon, depuis ces dernières décennies, un certain nombre de critères d'identification et de visualisation ont été proposés pour essayer de mieux comprendre ces phénomènes. Les critères d'identification les plus fréquemment utilisés dans la pratique sont les critères Q , Δ , et λ_2 . Ces critères, appelés aussi classiques, dépendent exclusivement des valeurs propres du tenseur du gradient de vitesse ou des invariants associés [1]. Selon ces critères, un tourbillon est identifié comme une région connexe où une inégalité exprimée en termes de valeurs propres du gradient de vitesse est vérifiée. Utilisés avec succès dans certains cas d'écoulements, ces critères présentent néanmoins plusieurs limitations et lacunes. D'abord, en étant un tourbillon, un phénomène d'écoulement non-local qui se déploie dans l'espace et le temps, une estimation des caractéristiques de ce phénomène par intermédiaire des critères locaux, présenteront toujours une limitation intrinsèque [15]. Puis, dans chaque application, pour éviter des problèmes liés aux erreurs numériques, le choix d'une valeur du seuil est nécessaire. Or, chaque valeur du seuil donne une structure de tourbillon différent [11, 10]. Ainsi, la représentation de la géométrie du tourbillon est directement affectée. Enfin, le manque d'interprétation physique claire du seuil est une limitation commune de tous ces critères locaux.

Dans cette communication, un nouveau critère de détection et localisation d'une classe de tourbillon sera proposée. Plus précisément, nous présentons §3 un critère non-local qui est fondé sur l'analyse topologique de données (TDA) [12] (notion qui sera rappelée dans §2). A partir de la construction d'une structure topologique associée à une fonction définie sur le domaine spatial (fonction filtre), la détection de tourbillons sera faite grâce à l'existence d'une classe d'invariants topologiques (à savoir les nombres de Betti) associée à cette structure topologique. Les principales caractéristiques de ce nouveau critère sont les suivantes : (i) sa capacité à détecter des tourbillons d'intensités différents qui co-existent, (ii) ce critère ne recourt pas à l'utilisation d'un seuillage comme dans le cas des critères classiques (voir §1), en échange, les tourbillons apparaissent comme descripteurs multi-échelle associés à la topologie de la fonction de filtre considéré, (iii) son caractère non-local, en effet, chaque tourbillon sera associé à un invariant topologique qui lui-même est associé à la structure globale d'un espace topologique et (iv) sa robustesse face au choix de la fonction de filtre. Les performances de ce nouveau critère topologique seront illustrées §4 sur différents exemples de tourbillons analytiques et de données expérimentales 3D.

1 Les critères classiques et ses limites

Dans cette section, les critères classiques les plus populaires, à savoir le critère Q , le critère Δ et le critère λ_2 seront brièvement rappelés. Ces critères dépendent exclusivement des valeurs propres du tenseur gradient de vitesse $\nabla\vec{v}$ ou des invariants associés. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [3, 4].

Supposons que λ_1, λ_2 et λ_3 sont trois valeurs propres. L'équation caractéristique peut être écrite comme

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0 \quad (1)$$

où

$$P = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = -\text{tr}(\nabla\vec{v}) \quad (2)$$

$$Q = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = -\frac{1}{2} [\text{tr}(\nabla\vec{v}^2) - \text{tr}(\nabla\vec{v})^2] \quad (3)$$

$$R = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\det(\nabla\vec{v}) \quad (4)$$

P , Q et R sont les trois invariants du tenseur du gradient de vitesse. Pour les écoulements incompressibles, comme $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, $P = 0$. De plus, le gradient de vitesse $\nabla\vec{v}$ peut-être décomposé en deux parties comme suit

$$\nabla\vec{v} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^\top) + \frac{1}{2}(\nabla\vec{v} - \nabla\vec{v}^\top) = S + W \quad (5)$$

où S est la partie symétrique (tenseur de déformation) et W est la partie anti-symétrique (tenseur de vortacité).

1.0.1 Le critère Q

Le critère Q proposé par Hunt et al. [5] est défini comme le résidu de la norme du tenseur de vortacité au carré soustrait de la norme du tenseur de vitesse de déformation au carré, c'est-à-dire

$$Q = \frac{1}{2} (\|W\|_F - \|S\|_F) \quad (6)$$

où $\|\cdot\|_F$ dénote la norme de Frobenius. Selon ce critère, un tourbillon est défini comme « une région de fluides connexes où $Q > 0$ ». Ce critère ajoute également une condition secondaire sur la pression (souvent omise) dans la région du vortex, exigeant qu'elle soit inférieure à la pression ambiante. En regardant la définition du deuxième invariant, on voit que Q définit les tourbillons comme des zones où l'amplitude de vortacité est supérieure à l'amplitude du taux de déformation.

1.0.2 Le critère delta Δ

Le critère delta Δ introduit par Chong [6] définit un tourbillon comme une région où $\nabla\vec{v}$ a deux valeurs propres complexes. En effet, le discriminant de l'équation caractéristique du tenseur du gradient de vitesse $\nabla\vec{v}$ s'écrit

$$\Delta = \det(\nabla\vec{v} - \lambda_3) = \left(\frac{1}{3}\tilde{Q}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\tilde{R}\right)^2$$

où $\tilde{Q} = Q - \frac{P^2}{3}$ et $\tilde{R} = R + \frac{2P^3}{27} - \frac{PQ}{3}$. Ainsi, $\nabla\vec{v}$ admet que des valeurs propres réelles si $\Delta \leq 0$ et une valeur propre réelle et deux valeurs propres complexes conjuguées si $\Delta > 0$. Comme dans le cas d'un fluide incompressible nous avons $\tilde{Q} = Q$ et $\tilde{R} = R$, ainsi, selon ce critère un point est à l'intérieur d'un tourbillon si

$$\Delta = \left(\frac{1}{3}Q\right)^3 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 > 0 \quad (7)$$

1.0.3 Le critère λ_2

Le critère λ_2 définit un tourbillon comme une région connexe avec deux valeurs propres négatives de $S^2 + W^2$ [4]. Ce critère est fondé sur l'observation qu'un minimum de pression locale dans un plan ne permet pas d'identifier les tourbillons sous des effets instationnaires et visqueux. Ainsi, en négligeant ces effets, la partie symétrique du gradient de l'équation incompressible de Navier-Stokes s'écrit $S^2 + W^2 = -\nabla(\nabla p)/\rho$ où p est la pression. Comme $S^2 + W^2$ est symétrique, il n'a que des valeurs propres réelles, et donc en ordonnant ces valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$, la définition devient équivalente à exiger que $\lambda_2 < 0$.

1.0.4 Limites des critères classiques

Une caractéristique commune qui présente tous les critères classiques, est qu'en pratique, l'utilisateur doit choisir un seuil pour éviter des erreurs numériques. Ainsi, par exemple dans le cas du critère Q , un point sera jugé appartenir à un tourbillon si $Q > Q_{\text{seuil}}$. Cependant, comme il a été déjà mis en évidence dans plusieurs applications [7, 11, 10], le choix de ce seuil est crucial pour identifier correctement les tourbillons car des seuils différents donnent des structures tourbillonnaires complètement différentes. Il n'existe actuellement aucune justification théorique pour le choix de la valeur du seuil ou de son interprétation physique. Entre autre, quand des tourbillons forts et faibles coexistent, il n'existe pas une manière appropriée de choisir la valeur du seuil [7]. Toutes ces observation mentionnées ci-dessus, qui découlent à partir de l'utilisation d'un seuil, représentent des limitations communes de tout critère classique.

Pour mettre en évidence ces limitations, nous allons prendre comme base le modèle analytique de tourbillons 3D de Kaufmann–Scully [13], et utiliser le critère Q pour détecter les tourbillons. Le profil de vitesse de ce modèle s'écrit

$$v(x, y, z) = \frac{f_z(z, s)}{A(x, y)} (y - b, x - a, c) \quad (8)$$

où $f_z(z, s) = \exp(-\frac{z^2}{s})$, $s = \sigma^2$ est une constante, $A(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + r_c^2$, r_c est le rayon du cœur du tourbillon et (a, b) est le centre du tourbillon dans le plan $z = c$. Dans la suite on note $v_x(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = f_z(z, s) \frac{y - b}{A(x, y)}$, $v_y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = f_z(z, s) \frac{x - a}{A(x, y)}$ avec $\mathbf{x} = (x, y, z)$ et $\boldsymbol{\eta} = (a, b, c, r_c, s)$. A partir du modèle (8) et en utilisant différentes valeurs du paramètre $\boldsymbol{\eta} = (a, b, c, r_c, s)$, nous pouvons construire un modèle analytique à quatre tourbillons avec différents rayons de cœurs. Plus précisément, nous considérons le profil vitesse

$$v(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i \in \{1,3\}} v_x(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_i) - v_x(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_{i+1}), \sum_{i \in \{1,3\}} v_y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_i) - v_y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_{i+1}), c \right)$$

où $\mathbf{x} \in [0, 2] \times [0, 2] \times [-0.5, 0.5]$, $\boldsymbol{\eta}_i = (a_i, b_i, c, r_c, s)$ ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) avec les valeurs $(a_1, b_1) = (0.5, 0.8)$, $(a_2, b_2) = (0.3, 1.7)$, $(a_3, b_3) = (1.7, 0.3)$ et $(a_4, b_4) = (1.6, 1.1)$. Nous allons utiliser le critère Q pour essayer de détecter les quatre tourbillons associés à ce modèle analytique. Les iso-surfaces associées à quatre valeurs différentes du seuil sont montrées en figure 1. Nous pouvons observer que chaque valeur de seuil donne une structure tourbillonnaire complètement différente et que les tourbillons faibles sont négligés à partir d'une certaine valeur du seuil.

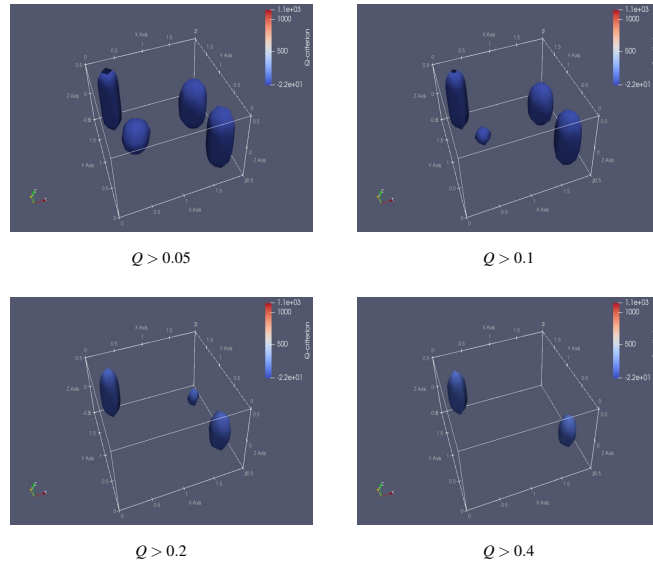


FIGURE 1 – Critère Q avec différentes valeurs du seuil

2 Rappels sur l'homologie persistante

L'analyse topologique de données (TDA) [12] est un domaine récent qui exploite et rend effectif les outils de la topologie algébrique. Un des outils fondamentaux de la TDA est l'homologie persistante. Dans cette section, nous allons rappeler brièvement le principe de l'homologie persistante et introduire certains concepts et notations qui seront utilisés dans la suite de cette communication.

L'homologie persistante est une méthode qui permet de calculer les caractéristiques topologiques d'un espace à différentes résolutions spatiales. Un point de vue qui exhibe facilement cette technique, est l'étude de la topologie du domaine d'une fonction à partir de l'étude de l'évolution de la topologie des sous-niveaux de cette fonction. Par exemple, considérons comme espace le tore \mathbb{T} (surface de \mathbb{R}^3), et considérons comme fonction, la fonction hauteur. Pour chaque $h \in \mathbb{R}$ on note $\mathbb{T}^h = \{x \in \mathbb{T} : f(x) \leq h\}$. Comme il est montré en figure 2, pour chaque valeur de h nous avons : (a) \mathbb{T}^h est homéomorphe à un disque, (b) \mathbb{T}^h est homéomorphe à un cylindre, (c) \mathbb{T}^h est homéomorphe à une surface compacte connexe dont le bord est un cercle et (d) \mathbb{T}^h est le tore.

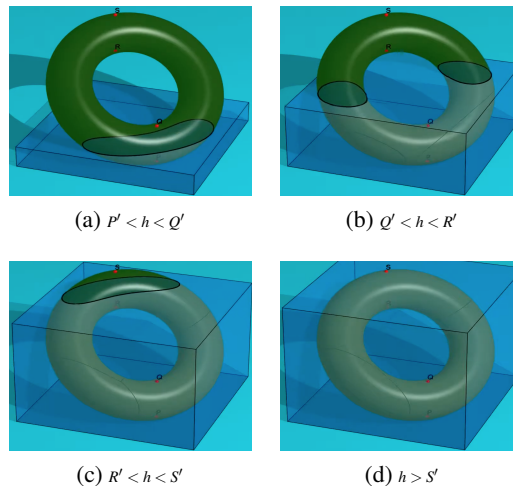


FIGURE 2 – Reconstruction d'un tore \mathbb{T} à partir de la fonction hauteur.

Dans la suite, quelques concepts et constructions associés au calcul de l'homologie persistante sont rappelés. Soit K un complexe simpliciale, l'ensemble de k -chaînes $C_k(K) = \{\sum \varepsilon_\sigma \sigma : \sigma \in K_{(k)}, \varepsilon_\sigma \in \mathbb{Z}_2\}$ peut être muni d'une structure de groupe, où $K_{(k)}$ est l'ensemble de simplexes de dimension k . Si l'on définit le bord $\partial\sigma$ d'un k -simplex σ comme la somme de ses $(k-1)$ -faces, on peut construire une

application linéaire $\partial_k : C_k(K) \rightarrow C_{k-1}(K)$ (l'opérateur de bord) qui vérifie la condition $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$. Les concepts introduits précédemment permettent de définir la notion des groupes d'homologie, objet mathématique qui se trouve au cœur de l'homologie persistante.

Le k i-ème groupe d'homologie de K est défini par $H_k(K) = \frac{\text{Ker}(\partial : C_k \rightarrow C_{k-1})}{\text{Im}(\partial : C_{k+1} \rightarrow C_k)}$, et le k i-ème nombre de Betti de K est défini comme sa dimension, c'est-à-dire $\beta_k(K) = \dim(H_k(K))$. Les nombres de Betti sont des invariants topologiques qui permettent de distinguer différents espaces topologiques. Les premiers k nombres de Betti peuvent, intuitivement, être associés aux nombres de surfaces indépendantes de dimension k . Plus précisément, $\beta_0(K)$ est le nombre de composantes connexes, $\beta_1(K)$ est le nombre de courbes fermées indépendantes et $\beta_2(K)$ est le nombre de cavités indépendantes. Par exemple dans le cas du cercle nous avons $\beta_0(S^1) = 1, \beta_1(S^1) = 1, \beta_2(S^1) = 0$ et pour le tore $\beta_0(\mathbb{T}) = 1, \beta_1(\mathbb{T}) = 2, \beta_2(\mathbb{T}) = 1$.

Maintenant, nous introduisons la notion de filtration. Une filtration de K est une suite croissante de sous-complexes de $K : \emptyset = K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^N = K$, et est celui qui permettra l'estimation de caractéristiques topologiques de l'espace sous-jacent à plusieurs échelles. Le principe de l'homologie persistante est de calculer l'homologie à chaque étape de cette filtration, et de mesurer la durée de vie des classes d'homologie. Cette information « durée de vie de classes d'homologie », est encodé dans le diagramme de persistance (DP). Plus précisément, un diagramme de persistance est un ensemble de paires de nombres $a \leq b$ qui représentent les « caractéristiques » qui apparaissent à l'étape a et persistent jusqu'à l'étape b . De manière équivalente, les mêmes informations sont représentées par des traits horizontaux dans un code barres. Les classes qui vivent plus longtemps seront celles qui contiennent les informations topologiques globales de l'espace. Par exemple, le code barres d'un nuage de points représentant un tore \mathbb{T} est montré en figure 3.



FIGURE 3 – Code barres d'un tore \mathbb{T} .

Finalement, il est important de remarquer que toutes les caractéristiques topologiques encodées dans les diagrammes de persistance sont stables. Plus précisément, nous avons le théorème suivant :

Théorème (stabilité) : Sous des hypothèses de régularité sur les fonctions $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$, nous avons $d_B(D_f, D_g) \leq \|f - g\|_\infty$, où d_B est la distance de bottleneck et D_f, D_g sont les diagrammes de persistance associées à f, g respectivement.

3 Le critère topologique d'identification et localisation de tourbillons

Soient $\vec{v}(x, t)$ les solution d'une équation aux dérivées partielles d'évolution, comme les équations de Navier-Stokes pour les écoulements incompressibles. Ces équations peuvent être écrites symboliquement comme suit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(x, t) = F(\vec{v}), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

où Ω est le domaine spatial étudié et $F(\vec{v})$ ne contient que des dérivées spatiales de u et le terme source. Pour compléter ce problème différentiel d'évolution, nous supposons qu'une condition initiale et des conditions aux limites appropriées sont choisies. On suppose aussi, que les solutions du problème (9) décrivent des structures tourbillonnaires. Dans ce contexte, le critère topologique d'identification et localisation de tourbillons sera présenté.

3.1 Identification des tourbillons par le critère topologique

Considérons un réseau discret $\tilde{\Omega} = \{(i, j, k) : 0 \leq i \leq n_I, 0 \leq j \leq n_J, 0 \leq k \leq n_K\}$ associé à un maillage régulier du domaine spatial Ω , et une fonction à valeurs réelles $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ (fonction filtre). Les principales étapes de l'identification de tourbillons par intermédiaire du critère topologique sont :

1. A partir du réseau discret $\tilde{\Omega}$, définir un complexe cubique K (collection de cellules cubiques fermée sous l'opération « prise de frontière ∂ »). Les cellules élémentaires de ce complexe sont les sommets $(i, j, k) \in \tilde{\Omega}$ (0-cellules), les arrêts unitaires (1-cellules), les carrés unitaires (2-cellules) et les cubes unitaires (3-cellules).
2. En utilisant la fonction filtre f , nous pouvons construire une filtration, nommée filtration de sous-niveau. Plus précisément, d'abord on étend la fonction filtre f à chaque cellule du complexe K . Ensuite, pour chaque valeur $f_i = f(\sigma_i)$ nous considérons le sous-complexe $f^{-1}([-\infty, f_i])$, enfin, la filtration de sous-niveau est donnée par

$$f^{-1}([-\infty, f_1]) \subset f^{-1}([-\infty, f_2]) \cdots \subset f^{-1}([-\infty, f_{N_K}]) = K, \quad (10)$$

où N_K est le nombre de cellules du complexe K .

3. Calculer l'homologie persistante (n -nombres de Betti) et le diagramme de persistante (DP) associée à la filtration (voir section 2).
4. Les $N_2 \in \mathbb{N}$ nombres de Betti de dimension 2 (cavités) associés à la filtration, seront considérés comme indicateurs de l'existence de N_2 tourbillons. Il est important de remarquer que chaque 2-nombre de Betti est associé à une surface de \mathbb{R}^3 .

3.2 Localisation de tourbillons par le critère topologique

Jusqu'à présent, nous avons exploité le rang des groupes d'homologie de la filtration (10) pour obtenir les N_2 nombres de Betti de dimension 2. Maintenant, chaque 2-nombre de Betti obtenu précédemment, est associé à un intervalle de persistante (ou barre dans le code-barres) créé par des classes d'homologie qui naissent et meurent aux extrémités. Dans la suite, afin de localiser les N_2 tourbillons associés à notre problème (9), nous sommes intéressés par reconstruire une structure géométrique correspondant à chaque intervalle de persistante. Cependant, chaque intervalle de persistante n'est pas associé à la classe d'un cycle particulier car les cycles associés aux extrémités ne sont pas nécessairement uniques. Ainsi, nous allons introduire la notion de cycle optimal en volume [8, 9], de manière que ces classes génèrent le groupe d'homologie.

Soit $D_2 = \{(b_i, d_i)\}_{i=1}^{N_2}$ l'ensemble d'intervalles de persistance associés aux N_2 2-nombres de Betti. Pour chaque intervalle de persistante $(b, d) \in D_2$, $v \in C_3(K_d)$ est un volume persistant si v est solution du problème de minimisation :

$$\text{minimise } \|v\|_0, \quad (11)$$

sous les contraintes

$$v = \sigma_d + \sum_{\tau_k \in \mathcal{F}_3} \alpha_k \tau_k, \quad (12)$$

$$(\partial_3 v)_\sigma = 0, \sigma \in \mathcal{F}_3, \quad (13)$$

$$(\partial_3 v)_{\sigma_b} \neq 0 \quad (14)$$

où $\|v\|_0$ est le nombre de coefficients non nuls sur le corps \mathbb{Z}_2 et \mathcal{F}_3 est l'ensemble de 3-simplexes σ_k tel que $b < k < d$. Soit v une solution du problème (11)-(14), alors le bord $\partial_3 v$ de v est appelé un cycle optimal en volume pour l'intervalle (b, d) . En utilisant la programmation linéaire, Obayashi [9] propose un algorithme pour résoudre le problème d'optimisation (10)-(13). Même si dans cette section nous n'avons traité que des complexes cubiques, cette procédure est également applicable à toute autre filtration cellulaire telle qu'une filtration alpha ou une filtration Vietoris-Rips.

4 Applications numériques

Les performances du critère topologique proposées dans cette communication seront illustrées d'une part, dans le cas du modèle analytique de Kaufmann–Scully [13] introduit dans la section 1 et d'autre part, dans le cas de données expérimentales 3D. Dans le cas du modèle de Kaufmann–Scully, nous considérons la même configuration que dans la section 1 et comme fonction filtre nous considérons les fonctions Q , λ_2 , Δ et la fonction vector vortex (fonction associée à un critère d'identification introduit dans [14]). Les surfaces associées aux tourbillons dans ce cas sont présentées en figure 5. Dans ce cas, nous pouvons constater d'une part, que le critère topologique est capable de capturer des tourbillons forts et faibles et d'autre part que ce critère est robuste au choix de la fonction de filtre.

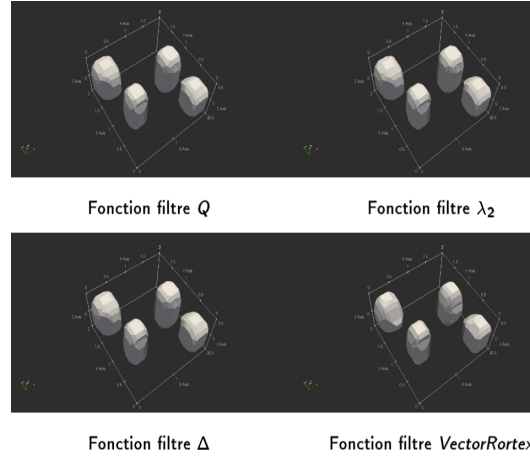


FIGURE 4 – Modèle analytique de Scully. Quatre fonctions filtres différents sont considérés.

Dans le deuxième cas, il s'agit de champs 3D mesurés par Tomo-PIV dans le cadre d'une analyse aéroacoustique des jets d'air issus d'une fente rectangulaire impactant une plaque fendue [16]. La configuration du domaine spatial est : $L_y = [-39.59\text{mm}, -4.43\text{mm}]$, $L_x = [-50.37\text{mm}, 30.14\text{mm}]$ et $L_z = [-10.98\text{mm}, 8.29\text{mm}]$. Le temps de chaque acquisition est de 1 seconde avec un pas temporel de 0.0005 et un maillage régulier est considéré avec $N_y = 32$, $N_x = 72$, $N_z = 18$. Pour un nombre de Reynolds de 4415 et pour l'instant $t = 1000$, nous utilisons le critère topologique avec la fonction de filtre $f = Q$ pour étudier les structures tourbillonnaires. Les résultats sont présentés en figure 4. De gauche à droite dans la figure 6, nous présentons les surfaces persistantes associées à la filtration. Nous constatons que ces surfaces, associées aux tourbillons, apparaissent comme des descripteurs multi-échelles associés à la topologie globale de chaque espace dans la filtration.

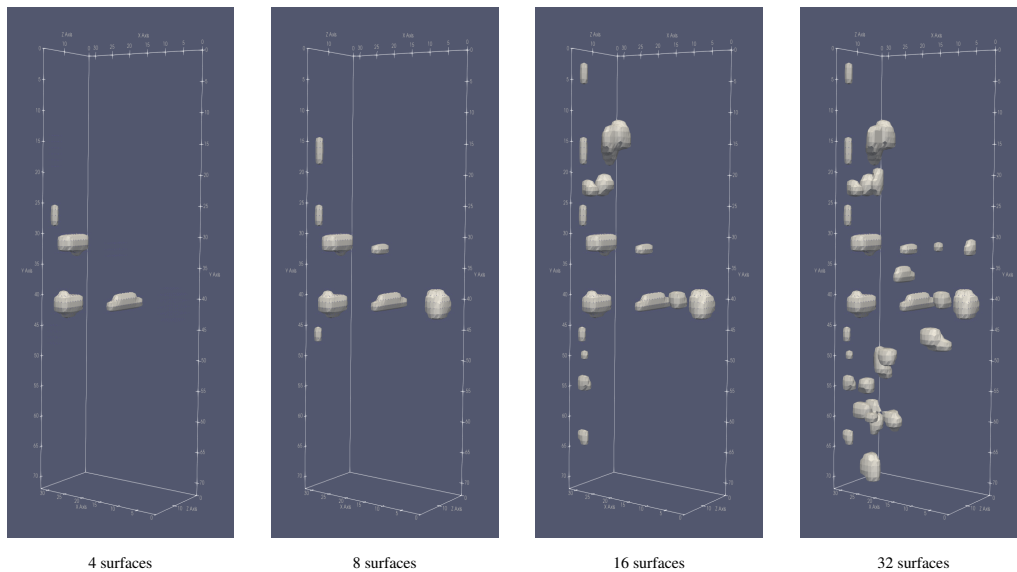


FIGURE 5 – Structures tourbillonnaires obtenu par le critère topologique.

Conclusions

Dans ce travail, nous avons proposé un nouveau critère d'identification et de localisation d'une classe de tourbillons. Fondé sur l'homologie persistante, ce critère identifie les tourbillons par les invariants topologiques (nombres de Betti) associés à la filtration. Grâce à une notion d'optimalité définie sur les cycles de la filtration, ce nouveau critère topologique parvient à localiser les tourbillons. A la différence des critères classiques comme Q, λ_2, Δ entre autres, ce critère topologique n'a pas besoin de recourir à un seuillage, en échange, les tourbillons par ce nouveau critère, apparaissent comme descripteurs multi-échelles. Ce critère ouvre un nouveau front pour étudier les tourbillons à partir des invariants topologiques associés à une fonction de filtre et peut se montrer adapté pour quantifier le détachement des tourbillons. Les exemples de validation numérique que nous avons présentés montrent la pertinence de ce nouveau critère proposé. Des perspectives à ce travail sont de définir un axe de tourbillon et étendre cette nouvelle approche aux écoulements compressibles.

Remerciements Ce travail a été soutenu par la Région Nouvelle-Aquitaine dans le cadre de la convention N° AAPR2022A-2022-17466410, et par le projet Urban & Coastal Lab La Rochelle (UCLR), financé par le Dialogue Stratégique de Gestion (DSG 2023).

Références

- [1] Epps, Brenden. "Review of vortex identification methods", In : 55th AIAA aerospace sciences meeting, p. 0989, 2017.
- [2] Liu, Chaoqun, et al. "Third generation of vortex identification methods : Omega and Liutex/Rortex based systems", Journal of Hydrodynamics 31, 205-223, 2019.
- [3] Zhang, et al. "A selected review of vortex identification methods with applications", Journal of Hydrodynamics, Springe, 30, 767-779, 2018.
- [4] Jeong, Hussain et al. "On the identification of a vortex", Journal of fluid mechanics, Cambridge University Press, 285, 69-94, 1995.
- [5] Hunt, Julian et al. Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows, Studying turbulence using numerical simulation databases, 2. Proceedings of the 1988 summer program.
- [6] Chong, Min S et al. A general classification of three-dimensional flow fields, Physics of Fluids A : Fluid Dynamics 2, American Institute of Physics, 765-777, 1990.
- [7] Liu, Chaoqun et al. Third generation of vortex identification methods : Omega and Liutex/Rortex based systems, Journal of Hydrodynamics, Springer, 31, 205-223, 2019.
- [8] Schweinhart, Benjamin. Statistical topology of embedded graphs. Thèse de doctorat. Princeton University, 2015.
- [9] Obayashi, I. Volume-optimal cycle : Tightest representative cycle of a generator in persistent homology. SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry, 2(4), 508-534, 2018.
- [10] Wang, Yiqian et FU, Song. On the thresholds of vortex identification methods. In : Symposium on Fluid-Structure-Sound Interactions and Control. Singapore : Springer Singapore, p. 45-49. 2017.
- [11] Dubief, Yves et DELCAYRE, Franck. On coherent-vortex identification in turbulence. Journal of turbulence, 2000, vol. 1, no 1, p. 011.
- [12] Edelsbrunner, Letscher, & Zomorodian. Topological persistence and simplification. Discrete & Computational Geometry, 28, 511-533, (2002).
- [13] Scully, Michael. Computation of helicopter rotor wake geometry and its influence on rotor harmonic airloads. Diss. Massachusetts Institute of Technology, 1975.
- [14] Tian, S., Gao, Y., Dong, X., & Liu, C. Definitions of vortex vector and vortex. Journal of Fluid Mechanics, 849, 312-339, 2018.
- [15] Chakraborty, P., Balachandar, S., & Adrian, R. J. On the relationships between local vortex identification schemes. Journal of fluid mechanics, 535, 189-214, 2005.
- [16] Hamdi, J., Assoum, H., Abed-Meraïm, K., & Sakout, A. Volume reconstruction of an impinging jet obtained from stereoscopic-PIV data using POD. European Journal of Mechanics-B/Fluids, 67, 433-445, 2018.