



HAL
open science

Méthode de Décomposition en Onde Plane Basée sur Rastérisation pour la Modélisation des Cristaux Phononiques 2D

Wei Shen, Yu Cong, Honoré Yin

► **To cite this version:**

Wei Shen, Yu Cong, Honoré Yin. Méthode de Décomposition en Onde Plane Basée sur Rastérisation pour la Modélisation des Cristaux Phononiques 2D. 16ème Colloque National en Calcul de Structures (CSMA 2024), CNRS; CSMA; ENS Paris-Saclay; CentraleSupélec, May 2024, Hyères, France. hal-04822995

HAL Id: hal-04822995

<https://hal.science/hal-04822995v1>

Submitted on 13 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthode de Décomposition en Onde Plane Basée sur Rastérisation pour la Modélisation des Cristaux Phononiques 2D

W. Shen¹, Y. Cong², H. Yin¹

¹Navier, Ecole des Ponts, Univ Gustave Eiffel, CNRS, 77455, Marne-la-Vallée, France

²LMEE, University Paris-Saclay, Univ Evry, 91020, Evry, France

Résumé – Nous présentons la Méthode de Décomposition en Onde Plane basée sur Rastérisation (DOPR), une approche permettant de calculer les bandes interdites de vibration dans le cadre de la conception de métamatériaux acoustiques, tels que les cristaux phononiques, qui intègrent des microstructures complexes. En comparaison avec la méthode classique de Décomposition en Onde Plane (DOP), la méthode DOPR utilise le traitement d'image de rastérisation pour discrétiser en premier lieu la microstructure. Ensuite, les fonctions de forme nécessaires à la mise en œuvre de la décomposition en ondes planes sont calculées en additionnant les fonctions de forme correspondant à chaque point du domaine rastérisé. Cette approche permet d'éviter le fastidieux développement analytique des fonctions de forme, qui limitait l'application de la méthode DOP classique aux géométries simples. Ainsi, la méthode représente une approche semi-analytique capable de gérer automatiquement les microstructures à géométries complexes. Nous validons cette méthode à travers des exemples numériques que nous présentons dans cette étude.

Mots clefs - Méthode de Décomposition en Onde Plane basée sur Rastérisation (DOPR), Bande interdite de vibration, Matériaux acoustiques

1. Introduction

La bande interdite de vibration, définie comme une plage de fréquences où la propagation des ondes élastiques de vibration est interdite ou fortement atténuée [1-3], revêt une grande importance dans le domaine des matériaux phononiques et des métamatériaux phononiques. L'analyse des bandes interdites de vibration constitue une étape fondamentale dans la conception de ces matériaux, en vue de leur utilisation dans l'isolation des vibrations, la conversion d'énergie, voire le développement de matériaux présentant des propriétés acoustiques spécifiques. Plusieurs méthodes sont à disposition pour calculer ces bandes interdites de vibration, parmi lesquelles la Méthode des Éléments Finis (MEF), la Méthode de Matrice de Transfert (MMT) et la Décomposition en Onde Plane (DOP). Cette dernière, en tant que méthode semi-analytique, se distingue par sa capacité à allier précision et efficacité. Cependant, la DOP classique requiert la détermination analytique des fonctions de forme pour chaque nouvelle configuration géométrique, ce qui entraîne des coûts de mise en œuvre considérables, voire prohibitifs, notamment dans le cas de microstructures à géométrie complexe. Dans l'objectif de contourner cette étape de développement analytique en réponse à des formes géométriques variées, nous avons développé la Méthode de Décomposition en Onde Plane basée sur la Rastérisation (DOPR). L'idée consiste à utiliser le traitement d'image de rastérisation pour d'abord discrétiser uniformément la microstructure multiphasique. Ensuite, les fonctions de forme géométriques nécessaires à la mise en place de la décomposition en ondes planes sont calculées en considérant la somme des fonctions de forme correspondant à chaque point du domaine rastérisé. Cette approche permet de gérer automatiquement des géométries complexes, tout en conservant les avantages de la méthode semi-analytique, à savoir précision et rapidité de résolution.

2. Méthode de décomposition en onde plane basée sur rasterisation

Nous présentons deux exemples de matériaux phononiques périodiques dans la Figure 1. Ces structures sont caractérisées par une périodicité observée dans le plan x-y. La dynamique de ces problèmes peut être modélisée par l'équation du mouvement classique, en supposant l'absence d'amortissement :

$$[\mathbf{K}]\mathbf{u} - \mathbf{f} = [\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}}, \quad (1)$$

où \mathbf{u} représente le vecteur de déplacement, \mathbf{f} désigne le vecteur de force externe, $[\mathbf{K}]$ et $[\mathbf{M}]$ désignent les matrices de rigidité et de masse.

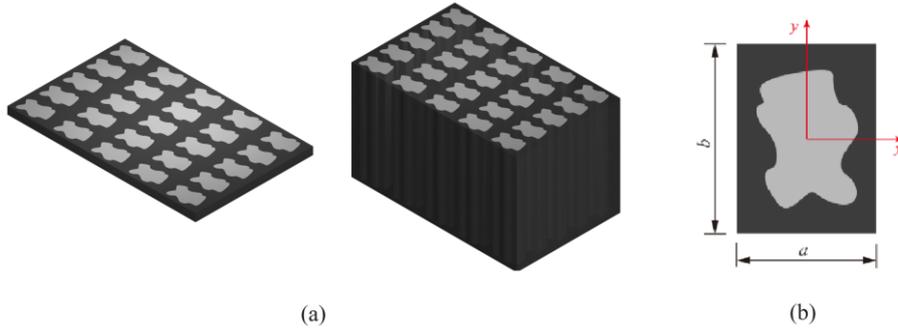


Fig. 1 Cristaux phononiques 2D : (a) exemple d'une plaque périodique, (b) un matériau volumique avec la périodicité dans le plan, et (c) la représentation d'une cellule unitaire décrivant la microstructure dans le plan.

En considérant la périodicité dans le plan x-y, la représentation des problèmes de la Figure 1 se réduit à une description bidimensionnelle de la microstructure, ce qui conduit à la définition d'une cellule unitaire telle qu'indiquée par la Figure 2(a). Dans le cadre de la décomposition en onde plane, le vecteur de déplacement est exprimé sous la forme d'une série d'ondes planes superposées [6, 7], ainsi nous avons :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left[\sum_{\mathbf{G}'_{(m,n)}} \mathbf{u}_{\mathbf{G}'_{(m,n)}} e^{i\mathbf{G}'_{(m,n)}\cdot\mathbf{r}} \right] e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

où i est l'unité imaginaire, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ et $\mathbf{r} = (x, y)$ représentent le vecteur d'onde de Bloch et le vecteur de position, respectivement. Le paramètre ω est la pulsation, et t le temps. Nous utilisons $\mathbf{G}'_{(m,n)} = (G'_x, G'_y) = (2\pi m / a, 2\pi n / b)$ pour désigner le vecteur du réseau réciproque 2D où m et n sont des entiers couvrant la plage de $-\infty$ à $+\infty$. Etant donnée la périodicité de la structure, les paramètres menant à la définition des matrices $[\mathbf{K}]$ et $[\mathbf{M}]$ (Eq. (1)) peut être représentés sous la forme du développement en série de Fourier. Commençons par

$$\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}_{(M,N)}} \alpha_{\mathbf{G}_{(M,N)}} e^{i\mathbf{G}_{(M,N)}\cdot\mathbf{r}}, \quad (3)$$

où $\alpha(\mathbf{r})$ est utilisé pour désigner tout paramètre matériau des matrices $[\mathbf{K}]$ et $[\mathbf{M}]$. Comme dans Eq. (2), nous utilisons $\mathbf{G}'_{(M,N)} = (G'_x, G'_y) = (2\pi M / a, 2\pi N / b)$ pour définir le vecteur du réseau réciproque 2D où les paramètres M et N sont des entiers couvrant la plage de $-\infty$ à $+\infty$. Ainsi, les coefficients de Fourier $\alpha_{\mathbf{G}_{(M,N)}}$ sont

$$\alpha_{\mathbf{G}_{(M,N)}} = \frac{1}{A} \iint_{\Omega} \alpha(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{G}_{(M,N)} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (4)$$

où Ω représente le domaine 2D occupé par la cellule unitaire dont l'aire est donnée par $A = a \times b$. Les paramètres de matériau de la phase- J peuvent donc être notés par

$$\alpha_{\mathbf{G}_{(M,N)}} = \sum_{j=1}^J \alpha_{(j)} F_j(\mathbf{G}_{(M,N)}), \quad (5)$$

qui représente l'interpolation des paramètres de matériau de la phase- j , notés par $\alpha_{(j)}$, à l'aide des fonctions de forme associées, notées par $F_j(\mathbf{G}_{(M,N)})$, définies par

$$F_j(\mathbf{G}_{(M,N)}) = \frac{1}{A} \iint_{\Omega_j} e^{-i\mathbf{G}_{(M,N)} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (6)$$

où Ω_j correspond au domaine 2D occupé par le matériau de la phase- j .

Lorsque Ω_j est décrit par une forme géométrique complexe, une description analytique du domaine intégral devient difficile. La solution que nous proposons consiste à utiliser le traitement d'image de rasterisation pour d'abord discrétiser uniformément le domaine Ω . Puis, chaque élément obtenu se verra attribuer les propriétés matérielles qui lui sont associées, à partir desquelles les fonctions de forme nécessaires à la décomposition en ondes planes seront calculées. Ensuite, les fonctions de forme élémentaires seront additionnées sur Ω_j , ce qui permet d'évaluer les fonction de forme de Ω_j , indépendamment de sa complexité géométrique.

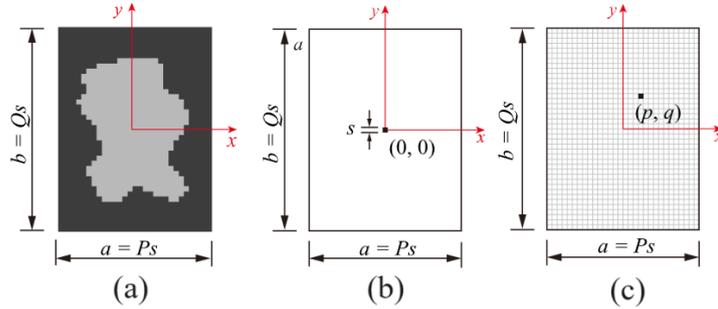


Fig. 2 Rasterisation d'une cellule unitaire : (a) représentation d'une cellule unitaire rasterisée, (b) mise en évidence d'un élément situé au centre $(0,0)$ du domaine, et (c) un élément situé à une position quelconque (p, q) .

Nous présentons dans la Figure 2(a) une cellule unitaire rasterisée, dont la discrétisation uniforme est composée d'éléments carrés de dimension $s \times s$. Ainsi, les entiers P et Q indiquent le raffinement du maillage selon x et y . Supposons qu'il existe un élément au centre $(0,0)$ de la cellule unitaire, comme dans la Figure 3(b). La fonction de forme de cet élément peut être exprimée comme suit [7] :

$$F_{(0,0)}(\mathbf{G}_{(M,N)}, s) = \frac{1}{A} \begin{cases} s^2 & \text{for } G_x = 0, G_y = 0, \\ \frac{2s}{G_x} \sin\left(\frac{G_x s}{2}\right) & \text{for } G_x \neq 0, G_y = 0, \\ \frac{2s}{G_y} \sin\left(\frac{G_y s}{2}\right) & \text{for } G_x = 0, G_y \neq 0, \\ \frac{4}{G_x G_y} \sin\left(\frac{G_x s}{2}\right) \sin\left(\frac{G_y s}{2}\right) & \text{for } G_x \neq 0, G_y \neq 0, \end{cases} \quad (7)$$

De façon plus générale, tel qu'illustré dans la Fig. 2(c), un élément situé à (p, q) aura sa fonction de forme exprimée sous la forme de :

$$F_{(p,q)}(\mathbf{G}_{(M,N)}, s) = \left[\cos(G_x p^* s + G_y q^* s) - i \sin(G_x p^* s + G_y q^* s) \right] F_{(0,0)}(\mathbf{G}_{(M,N)}, s), \quad (8)$$

où

$$p^* = \begin{cases} p & \text{if } P \text{ is odd,} \\ p - 0.5 \operatorname{sgn}(p) & \text{if } P \text{ is even,} \end{cases} \quad (9)$$

et

$$q^* = \begin{cases} q & \text{if } Q \text{ is odd,} \\ q - 0.5 \operatorname{sgn}(q) & \text{if } Q \text{ is even,} \end{cases} \quad (10)$$

où l'opérateur $\operatorname{sgn}(\)$ correspond à la fonction de signe. Considérons maintenant la somme des éléments du domaine Ω_j , la fonction de forme de la phase- j est obtenue par :

$$F_j(\mathbf{G}_{(M,N)}) = \sum_{(p,q) \in \Omega_j} F_{(p,q)}(\mathbf{G}_{(M,N)}, s). \quad (11)$$

Le processus de détermination de la fonction de forme $F_j(\mathbf{G}_{(M,N)})$ peut être automatisé une fois que la rasterisation de la cellule unitaire est accomplie. Par conséquent, le coût de calcul nécessaire pour évaluer $F_j(\mathbf{G}_{(M,N)})$ sera considérablement réduit par rapport à une méthode analytique. De plus, l'approche permettra une précision améliorée avec une discrétisation plus fine. En substituant les Eqs. (2) et (3) dans Eq. (1), en négligeant la force externe et en appliquant la règle de Laurent [8], nous obtenons :

$$[\mathbf{K}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}] \mathbf{u}_{\mathbf{G}'(m,n)} - \omega^2 [\mathbf{M}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}] \mathbf{u}_{\mathbf{G}'(m,n)} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

où

$$\mathbf{u}_{\mathbf{G}'(m,n)} = \frac{1}{A} \iint_{\Omega} \mathbf{u} e^{-i(\mathbf{G}'(m,n) + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \, d\mathbf{r}, \quad (13)$$

puis, $[\mathbf{K}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}]$ et $[\mathbf{M}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}]$ sont les nouvelles matrices de rigidité et de masse. Ainsi, nous obtenons le problème modal sous la forme de :

$$[[\mathbf{K}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}] - \omega^2 [\mathbf{M}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}]] = \mathbf{0}. \quad (14)$$

La résolution de Eq. (14) permet d'étudier les comportements vibratoires du domaine Ω , et plus concrètement via les diagrammes des bandes interdites dont les exemples seront fournis dans la section numérique. Les paramètres m, n, M et N prennent des valeurs dans l'intervalle $[-L, L]$. Les solutions tendent progressivement à converger avec l'augmentation de la valeur de L ,

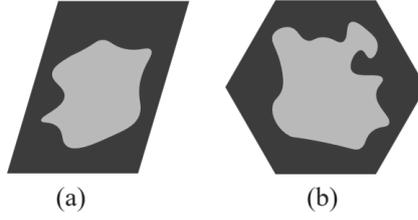


Fig. 3 La cellule unitaire peut être de forme variée : (a) un parallélogramme, (b) une cellule hexagonale.

Il convient de noter que la méthode DOPR conserve son efficacité indépendamment de la forme géométrique de la cellule unitaire, qu'elle soit de la forme hexagonale, ou d'un parallélogramme, comme illustrées dans la Figure 3.

2. Résultats numériques

2.1. Validation de la méthode DOPR

Afin de valider la méthode DOPR, nous présentons une comparaison avec les résultats obtenus à l'aide de la méthode classique de DOP. Nous examinons une microstructure à géométrie simple, telle qu'illustrée dans la Figure 5, qui est composée d'une inclusion circulaire placée dans une matrice au sein d'une cellule unitaire de forme carrée.

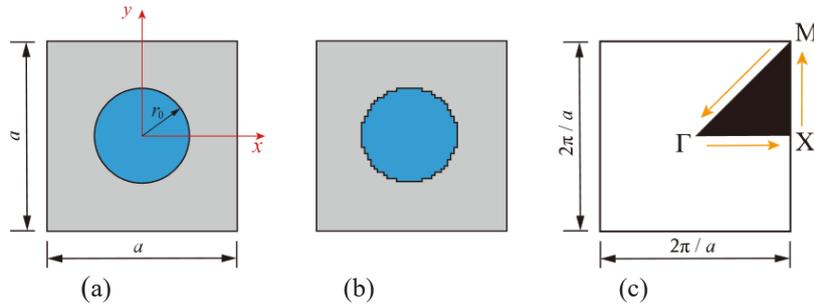


Fig. 4 La cellule unitaire avec inclusion : (a) la géométrie de la cellule unitaire, (b) la cellule unitaire rasterisée, et (c) la première zone de Brillouin irréductible pour l'analyse des bandes interdites de vibration.

La cellule unitaire est représentée dans la Figure 4(a). Elle a des dimensions de $a \times a = 0,5 \text{ mm} \times 0,5 \text{ mm}$, avec une inclusion de rayon $r_0 = a\sqrt{0.5/\pi}$. La cellule unitaire est discrétisée de manière uniforme avec une résolution de 200×200 pour la mise en œuvre de la méthode DOPR. Les diagrammes des bandes interdites de vibration obtenus avec la méthode DOPR et la méthode DOP sont comparés dans la Figure 6. Cette comparaison met en évidence une bonne cohérence entre les deux ensembles de résultats, ce qui valide la précision de la méthode.

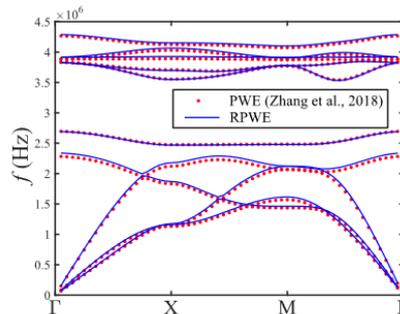


Fig. 5 Le diagramme des bandes interdites de vibration : comparaison entre les modèles DOPR et DOP classique.

2.2 Application de la méthode DOPR : cellule unitaire hexagonale

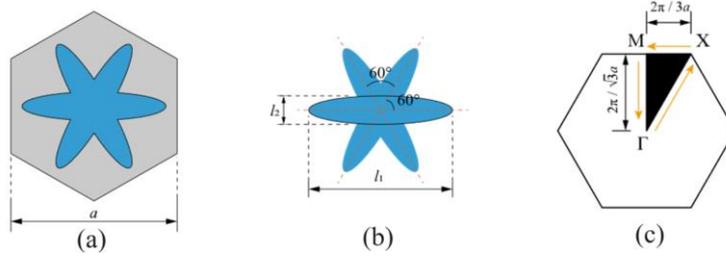


Fig. 6 La cellule unitaire hexagonale : (a) la géométrie de la cellule unitaire (b) l'inclusion composée d'ellipses, et (c) la première zone de Brillouin irréductible pour l'analyse des bandes interdites de vibration.

Dans cet exemple, nous étudions un matériau phononique dont la cellule unitaire a une forme hexagonale, comme illustré dans la Figure 6. Les dimensions de la cellule unitaire sont caractérisées par sa longueur $a = 10$ mm. Elle est composée d'une inclusion en céramique dont la forme résulte de la combinaison de trois ellipses, espacées à un angle de 60° . Les dimensions de chaque ellipse sont définies par son grand diamètre $l_1 = \sqrt{3}a/2$ et son petit diamètre $l_2 = \sqrt{3}a/10$. La matrice est en époxy. Une discrétisation de 600×693 est appliquée pour créer le maillage. L'analyse par la méthode DOPR fait apparaître une bande interdite de vibration entre 171,2 kHz et 191,5 kHz, comme indiquée dans la Figure 7(a).

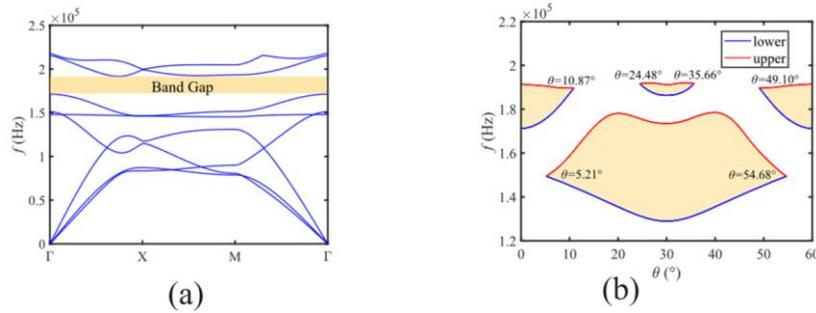


Fig. 7 (a) Diagramme de bandes interdites issu du modèle avec la cellule unitaire hexagonale, et (b) l'évolution de la bande interdite en fonction de l'angle de rotation de l'inclusion.

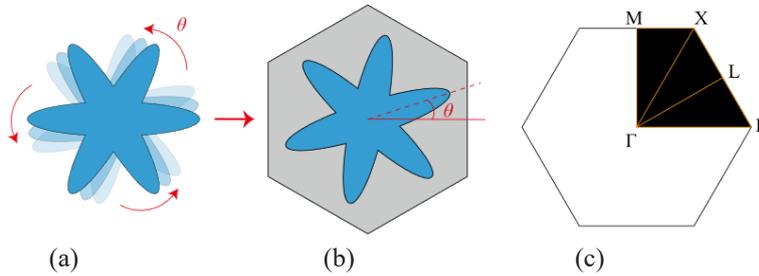


Fig. 8 La cellule unitaire avec l'inclusion soumise à une rotation θ : (a) configuration de l'inclusion, (b) la cellule unitaire avec l'inclusion pivotée d'un angle de θ , et (c) la première zone de Brillouin irréductible pour l'analyse des bandes interdites de vibration.

En faisant pivoter l'inclusion illustrée dans la Figure 6 d'un angle θ , une nouvelle cellule unitaire sera obtenue, comme présentée dans la Figure 8. Dans cet exemple, une série de valeurs de θ a été considérée, ce qui nous permet d'étudier l'évolution de la bande interdite de vibration en fonction de l'angle d'inclinaison θ . Ainsi dans la Figure 7(b), les courbes rouges et bleues représentent respectivement les limites supérieure et inférieure de la bande interdite en fonction de θ .

3.3 Application de la méthode DOPR : structure de circuit intégré

L'une des incertitudes liées à l'utilisation d'une discrétisation uniforme, telle que le prescrit la méthode DOPR, réside dans l'adaptabilité du maillage aux caractéristiques géométriques complexes, notamment celles comportant des courbures et une faible épaisseur. La représentation de telles géométries par un maillage uniforme peut entraîner des erreurs d'approximation. Cet exemple vise donc à explorer l'application de la méthode DOPR à une structure de circuit intégré, comprenant des structures de fils ayant une forme élancée ou en anneau. La composition de la structure est illustrée dans la Figure 11(a), où la plaque de base est en époxy, les fils sont en cuivre, et les composants sont modélisés en utilisant les propriétés du silicium. La cellule unitaire est représentée dans la Figure 11(b,c). Ses dimensions sont définies par $a = 20$ mm, $w = 0,4$ mm et $r1 = 0,6$ mm. Le domaine est discrétisé avec une résolution de maillage de 500×500 . Nous avons étudié l'influence de l'épaisseur de la plaque sur la bande interdite de vibration en faisant varier le paramètre h_1 de 0.8 mm à 1,5 mm, tout en maintenant le paramètre h_2 à 1,8 mm. L'évolution de la bande interdite en fonction de ces conditions est présentée dans la Figure (10).

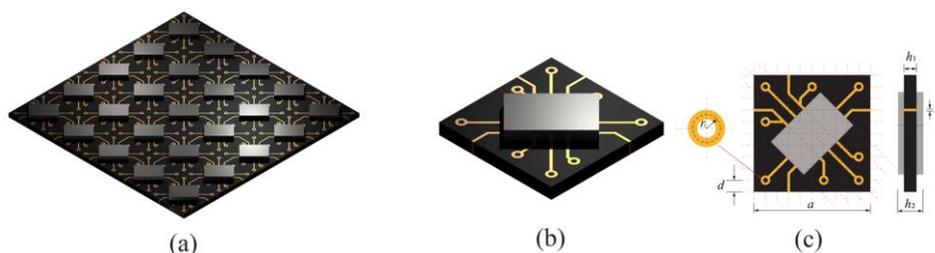


Fig. 9 Structure d'un circuit intégré : (a) représentation du problème global, (b) cellule unitaire, et (c) les définitions géométriques de la cellule unitaire.

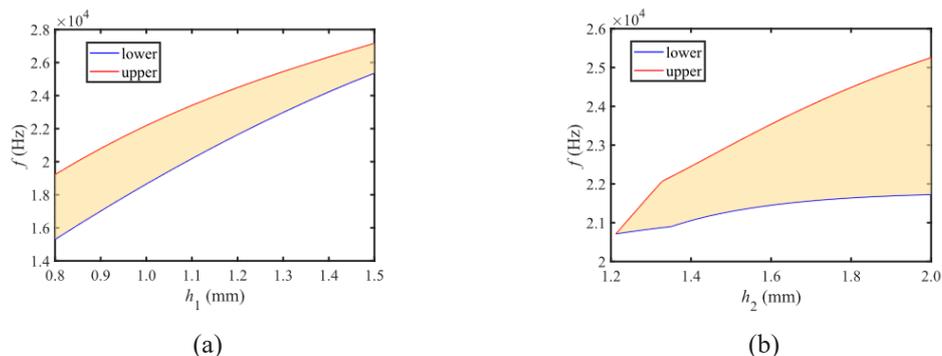


Fig. 10 Evolution des bandes interdites de vibration en fonction des caractéristiques géométriques de la structure : (a) $h_2 = 1,8$ mm, en faisant varier h_1 de 0,8 mm à 1,5 mm, (b) $h_2 = 1,2$ mm, en faisant varier h_1 de 1,2 mm à 2,0 mm.

4. Conclusion

Cette étude a introduit la Méthode de Décomposition en Onde Plane basée sur Rastérisation (DOPR) en tant qu'approche semi-analytique pour le calcul des bandes interdites de vibration dans le domaine de la conception des métamatériaux acoustiques, notamment les cristaux phononiques intégrant des microstructures complexes. Par rapport à la méthode classique de Décomposition en Onde Plane (DOP), la DOPR a démontré son avantage significatif en utilisant le traitement d'image de

rastérisation pour discrétiser automatiquement la microstructure, éliminant ainsi le besoin fastidieux de développer analytiquement les fonctions de forme. Cette automatisation permet de traiter des géométries complexes avec une précision et une efficacité accrues. Les résultats obtenus dans cette étude ont confirmé la fiabilité et la performance de la méthode DOPR grâce à des exemples numériques. La DOPR offre une solution prometteuse pour surmonter les limites précédemment associées à la DOP classique, en élargissant considérablement son applicabilité à des microstructures plus complexes.

Références

- [1] A. Pelat, T. Gallot, and F. Gautier, On the control of the first Bragg band gap in periodic continuously corrugated beam for flexural vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 446(2019) 249-262.
- [2] Z. Yao, R. Zhao, V. Zega, and A. Corigliano, A metaplate for complete 3D vibration isolation. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 84(2020) 104016.
- [3] Y. Ruan, X. Liang, X. Hua, C. Zhang, H. Xia, and C. Li, Isolating low-frequency vibration from power systems on a ship using spiral phononic crystals. *Ocean Engineering*, 225(2021) 108804.
- [4] G. Zhang, W. Shen, S. Gu, X.-L. Gao, and Z.-Q. Xin, Band gaps for elastic flexural wave propagation in periodic composite plate structures with star-shaped, transversely isotropic, magneto-electro-elastic inclusions. *Acta Mechanica*, 232(2021) 4325-4346.
- [5] G. Zhang and X.-L. Gao, Band gaps for wave propagation in 2-D periodic three-phase composites with coated star-shaped inclusions and an orthotropic matrix. *Composites Part B: Engineering*, 182(2020) 107319.
- [6] E. Miranda Jr and J. Dos Santos, Evanescent Bloch waves and complex band structure in magnetoelectroelastic phononic crystals. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 112(2018) 280-304.
- [7] G. Zhang, X.-L. Gao, and S. Ding, Band gaps for wave propagation in 2-D periodic composite structures incorporating microstructure effects. *Acta Mechanica*, 229(2018) 4199-4214.
- [8] L. Li, Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures. *JOSA A*, 13(9) (1996) 1870-1876.