



**HAL**  
open science

## Figure non hydrostatique des planètes : Inversion gravimétrique et modèles 3D de la Terre et de la Lune

Frédéric Chambat, B. Valette

► **To cite this version:**

Frédéric Chambat, B. Valette. Figure non hydrostatique des planètes : Inversion gravimétrique et modèles 3D de la Terre et de la Lune. Actes des Journées Systèmes de Référence 1996, 1996, Paris, France. 10.1111/j.1365-246X.2010.04771.x . hal-04821172

**HAL Id: hal-04821172**

**<https://hal.science/hal-04821172v1>**

Submitted on 5 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**FIGURE NON HYDROSTATIQUE DES PLANÈTES :**  
INVERSION GRAVIMÉTRIQUE ET  
MODÈLES 3D DE LA TERRE ET DE LA LUNE <sup>1</sup>

Frédéric CHAMBAT	Bernard VALETTE
EOPGS -Dynamique Globale	IPGP - Sismologie
5, rue René Descartes	4, place Jussieu
67084 Strasbourg Cedex	75252 Paris Cedex 05
e-mail : fred@dione.u-strasbg.fr	e-mail : valette@ipgp.jussieu.fr

**Abstract.** *The link between the shape of the Earth and stress is studied without any a priori rheological hypothesis. The external gravity potential is expressed up to second order as a function of lateral variations of stress.*

*The inversion of potential and topography data is carried out, up to degree 360 for the Earth and degree 70 for the Moon, minimizing the deviatoric stress. The Earth's crustal thickness, which is the best determined quantity, is found to be more important below reliefs, where the tectonic state is in vertical compression. Compilations of 'moho' seismic depths confirm our results. Positive mass anomalies under major basins of the Moon are clearly visible down to great depth.*

La compréhension de la forme des corps célestes qui reste une des questions fondamentales de la géophysique et de l'astrophysique a suscité les études classiques sur les figures d'équilibre des corps hydrostatiques. Dans une problématique plus moderne où l'on dispose d'une description détaillée de la topographie et du champ de gravité des planètes il nous faut abandonner l'hypothèse hydrostatique et considérer le cas d'un tenseur des contraintes quelconque. Chercher les distributions de contraintes compatibles avec la forme d'une planète se ramène en fait à généraliser les équations de Clairaut. On se propose ici d'explorer l'influence du déviateur des contraintes sur certains observables géophysiques. On présente notamment une nouvelle méthode d'inversion du champ de gravité et de la topographie dont l'idée essentielle est de prendre le déviateur des contraintes comme paramètre.

---

<sup>1</sup>Published in Actes des Journées Systèmes de Référence 1996, Ed. N. Capitaine, Pub. Observatoire de Paris

# 1 FIGURE HYDROSTATIQUE DE LA TERRE

En 1743 Clairaut détermine au premier ordre la forme que prendrait une Terre hétérogène auto gravitante sous les hypothèses que sa rotation est uniforme et que l'équilibre est hydrostatique. Cela revient à résoudre au voisinage d'une configuration sphérique l'équation d'équilibre :

$$\text{grad}p = \rho \text{grad}\varphi, \quad (1)$$

et l'équation de Poisson :

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho - 2\Omega^2, \quad (2)$$

où  $p$  est la pression,  $\rho$  la masse volumique,  $\varphi$  le potentiel de pesanteur,  $G$  la constante de la gravitation universelle et  $\Omega$  le vecteur rotation de la Terre. On déduit de la relation 1 que les surfaces d'égale densité sont des surfaces équipotentielles ainsi que les surfaces de discontinuité de  $\rho$ . Cette propriété permet alors de résoudre complètement l'équation 2 par perturbation (cf. p. ex. Denis, 1989, Moritz, 1990). On en conclut que la figure hydrostatique de la Terre ne présente au premier ordre qu'un seul terme zonal de degré 2.

# 2 TOPOGRAPHIE ET ÉQUILIBRE NON HYDROSTATIQUE

Pour modéliser les variations latérales de pesanteur et de densité ainsi que les topographies terrestres on doit considérer un tenseur des contraintes quelconque. Cela conduit à l'équation d'équilibre :

$$\text{div}\sigma + \rho \text{grad}\varphi = 0, \quad (3)$$

où  $\text{div}\sigma$  est la divergence du tenseur des contraintes  $\sigma$ .

Dans le cas général, la résolution au premier ordre de l'équation de Poisson conduit à l'expression du potentiel sur le bord externe en fonction des variations latérales de densité sur les équipotentielles (notées  $\delta_\varphi\rho$ ) et des hauteurs d'interface au dessus des équipotentielles ( $h$ ). L'intérêt de cette paramétrisation est que les variables  $\delta_\varphi\rho$  et  $h$  sont toutes deux nulles dans le cas hydrostatique. On détermine leur expression en fonction du déviateur des contraintes en effectuant une perturbation lagrangienne de l'équation d'équilibre 3. On se place pour cela dans le repère associé aux directions propres du tenseur des contraintes et on néglige la différence entre les deux valeurs propres horizontales. Cela conduit aux relations :

$$\delta_\varphi\rho(r) = \frac{1}{gr^2}\partial_r(r^2\delta_l(\sigma_T - \sigma_N)), \quad h(r) = -\frac{\delta_l\sigma_T}{\rho g}(r) \quad \text{en volume}, \quad (4)$$

$$h(r_\Sigma) = -\frac{[\delta_l(\sigma_T - \sigma_N)]}{[\rho]g} \quad \text{aux interfaces}, \quad (5)$$

où  $g$  est la gravité du modèle sphérique de référence,  $[\rho]$  le saut de densité aux interfaces,  $\delta_l \sigma_N$  la composante quasi verticale des contraintes,  $\delta_l \sigma_T$  sa composante quasi horizontale,  $h$  la hauteur au dessus des équipotentielles des surfaces orthogonales à la direction quasi verticale.

Grâce à ces relations on déduit l'expression au deuxième ordre du potentiel de pesanteur sur le bord externe de la Terre ( $r = b$ ) pour toute harmonique :

$$\begin{aligned} \delta_e \varphi_l^m(b) &= \frac{5}{3} \Omega^2 b^2 \delta_l^2 \delta_m^0 k_1(b) + \int_0^b k_2 \delta_l (\sigma_T - \sigma_N)_l^m(r) dr \\ &+ \frac{2\pi G}{2l+1} \sum_{r_\Sigma} \left( \frac{r_\Sigma}{r} \right)^{l+1} \left[ (l+2) \rho \xi^2 + 2r_\Sigma \delta_e \rho \xi + r_\Sigma \dot{\rho} \xi^2 \right]_l^m(r_\Sigma), \end{aligned} \quad (6)$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont des noyaux calculables numériquement,  $r_\Sigma$  le rayon moyen d'une interface et où les paramètres  $\delta_e \rho$  et  $\xi$  s'expriment en fonction du déviateur des contraintes. Le premier terme correspond à la solution hydrostatique. Le deuxième est le terme non hydrostatique de premier ordre. Notons que le noyau  $k_2(r)$  est approximativement en  $r^l$  si bien que la résolution en profondeur diminue avec la longueur d'onde spatiale. Le dernier terme est celui de deuxième ordre (cf. à l'article publié dans ces actes, Chambat et Valette, 1996).

### 3 INVERSION GRAVIMÉTRIQUE

Les relations 5 et 6 permettent de déterminer par inversion le déviateur des contraintes à partir du potentiel et de la topographie externe. Si l'on néglige les termes de deuxième ordre dans la relation 6, cette inversion peut être menée degré par degré par une méthode de moindres carrés fonctionnels (cf. Tarantola et Valette, 1982). L'intérêt de la paramétrisation adoptée est de conduire au modèle le plus hydrostatique possible puisque la régularisation du problème inverse est réalisée par une norme qui porte sur le déviateur. Ce problème étant très sous déterminé, le choix de cette norme doit par ailleurs être soigné pour bien tenir compte des effets de bord. Les variations latérales de la densité et de la topographie des interfaces peuvent ensuite être calculées grâce aux relations 4 et 5.

Nous avons appliqué cette approche au cas de la Terre et de la Lune. Dans le cas de la Terre le potentiel est estimé jusqu'au degré 360 d'harmonique par la combinaison d'observations de satellites géodésiques et de mesures locales de la gravité (Rapp *et al.*, 1991). La topographie et la bathymétrie sont suffisamment bien connues pour être également développées au degré 360. La mission Clementine a permis de construire des développements correspondants jusqu'au degré 70 pour la Lune (Zuber *et al.*, 1994).

Le principal résultat que l'on obtient dans le cas de la Terre est l'estimation de l'épaisseur de la croûte. La minimisation du déviateur conduit à une généralisation des théories classiques d'isostasie, c'est-à-dire à une épaisseur de la croûte importante sous les reliefs qui induisent dans celle-ci une compression verticale du fait du chargement. La carte de

la profondeur de la croûte sous l'Europe (figure 1) permet d'apprécier la résolution spatiale obtenue et est en accord avec les modèles sismiques compilés par Meissner (1986). Notre approche montre de plus que les variations latérales du déviateur ne dépassent pas le kilobar dans la croûte où il est principalement contrôlé par la topographie de surface. Dans le manteau supérieur il présente par contre une forte corrélation avec les structures tectoniques (figure 2).

La Lune est quant à elle marquée par des anomalies positives de gravité au niveau des grands bassins. Ces structures connues sous le nom de « mascons » sont usuellement supposées résulter de remontées de lave consécutives aux impacts météoritiques. Ces anomalies ne peuvent être expliquées uniquement par une forte variation de l'épaisseur de la croûte et imposent donc une forte densité au niveau des bassins jusqu'à une profondeur de l'ordre de 200 km (cf. figure 3). Cela confirme l'interprétation qui en est faite et donne une indication sur la profondeur de la base de ces remontées. Le contraste entre la face visible et la face cachée apparaît nettement dans l'épaisseur de la croûte (cf. figure 4). Cela conforte le résultat obtenu par Zuber *et al.* (1994) dans le cadre schématique d'un modèle à deux couches homogènes qui ne peut expliquer seul l'ensemble des données lunaires.

## Références :

Chambat, F., 1996, Figure de la Terre : Gravimétrie, régime de contraintes et vibrations propres, Thèse de Doctorat, Université Paris 7.

Denis, C., 1989, The hydrostatic figure of the Earth, in Gravity and Low Frequency Geodynamics (chapter 3), Physics and Evolution of the Earth's Interior, vol. 4, ed. by R. Teisseyre, Elsevier.

Meissner, R. (Ed.), 1986, The continental crust, A Geophysical Approach, International Geophysics Series, vol. 34, Academic Press.

Moritz, H., 1990, The Figure of the Earth, Wichmann.

Rapp, R. H., Wang, Y. M., Pavlis, N. K., 1991, The OSU91 potential coefficient and sea surface topography models, Report, Dept. of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus.

Tarantola, A., Valette, B., 1982, Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion, Rev. Geophysics Space Phys., 20, 2, 219-232.

Valette, B., 1987, Spectre des oscillations libres de la Terre; Aspects mathématiques et géophysiques, Thèse de Doctorat d'État, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.

Zuber, M., Smith, D., Lemoine, F., Neumann, G., 1994, The shape and internal structure of the Moon from the Clementine mission, Science, 266, 1839-1843.

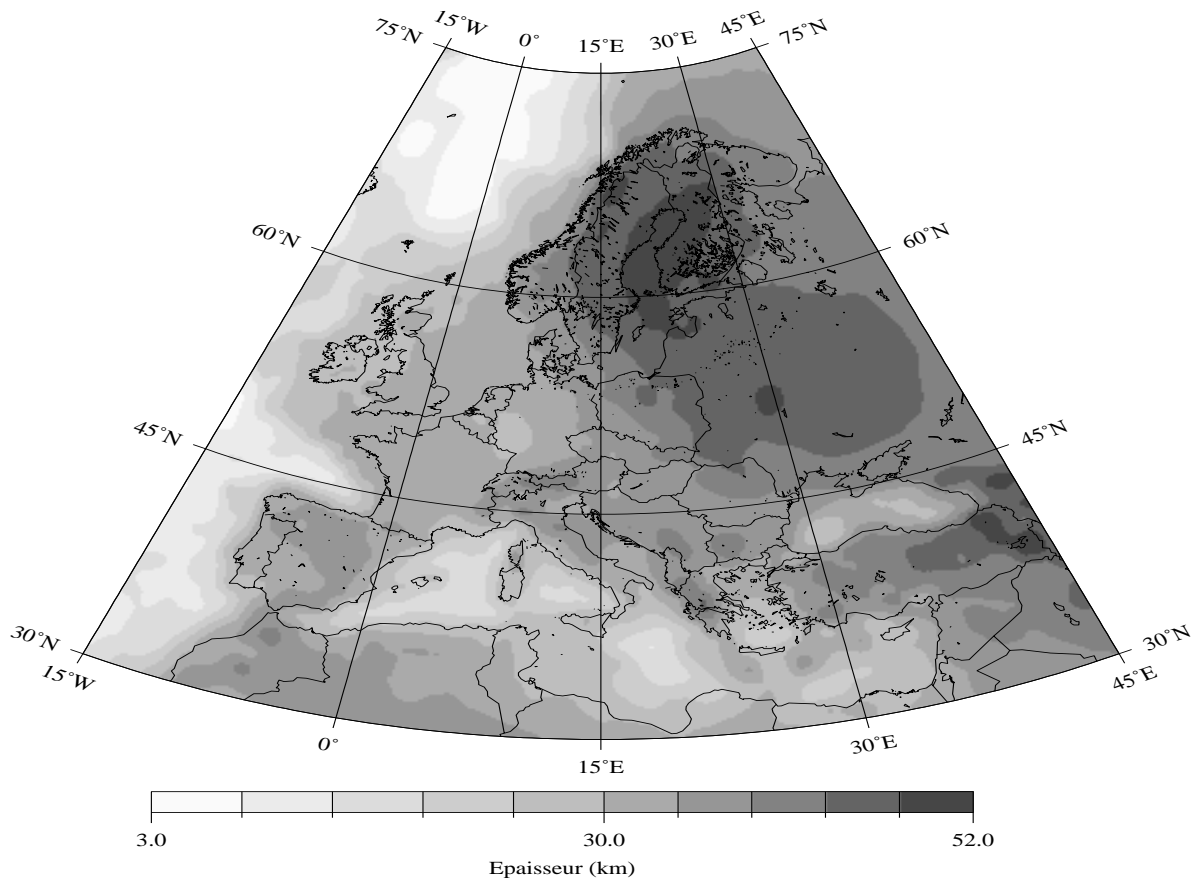


Figure 1: *Épaisseur de la croûte sous l'Europe (pour toutes les cartes chacune des deux parties de l'échelle est divisée en sous parties égales).*

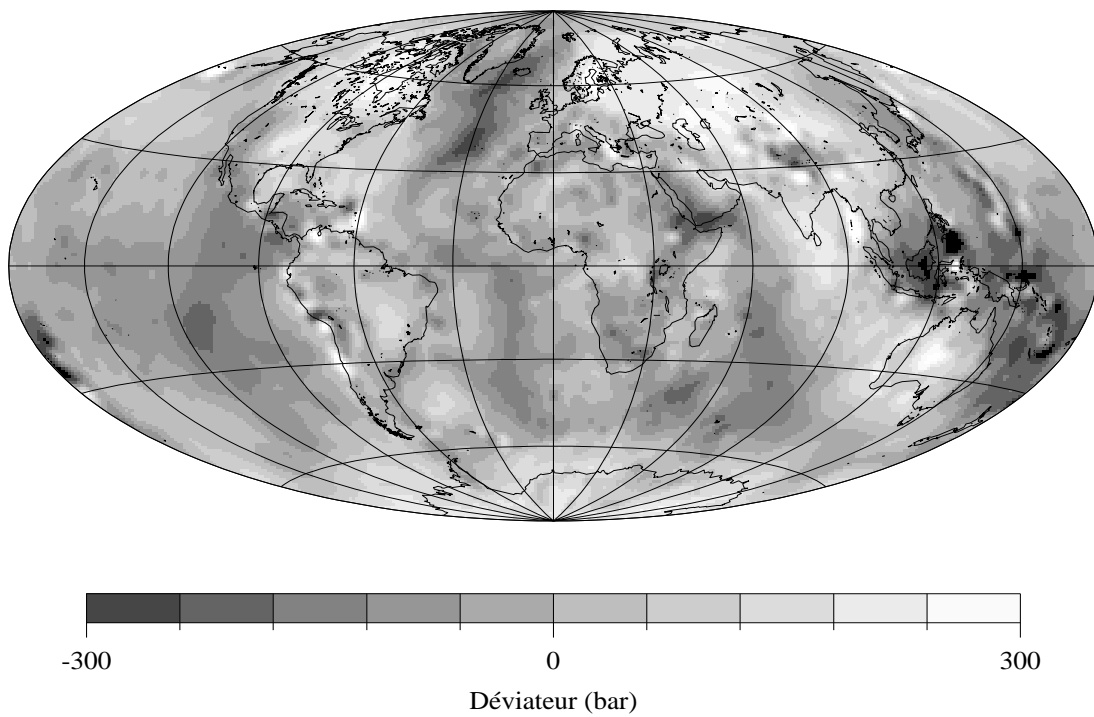


Figure 2: *Déviateur des contraintes dans la Terre à 60 km de profondeur ( $-\delta_l(\sigma_T - \sigma_N)$ ).*

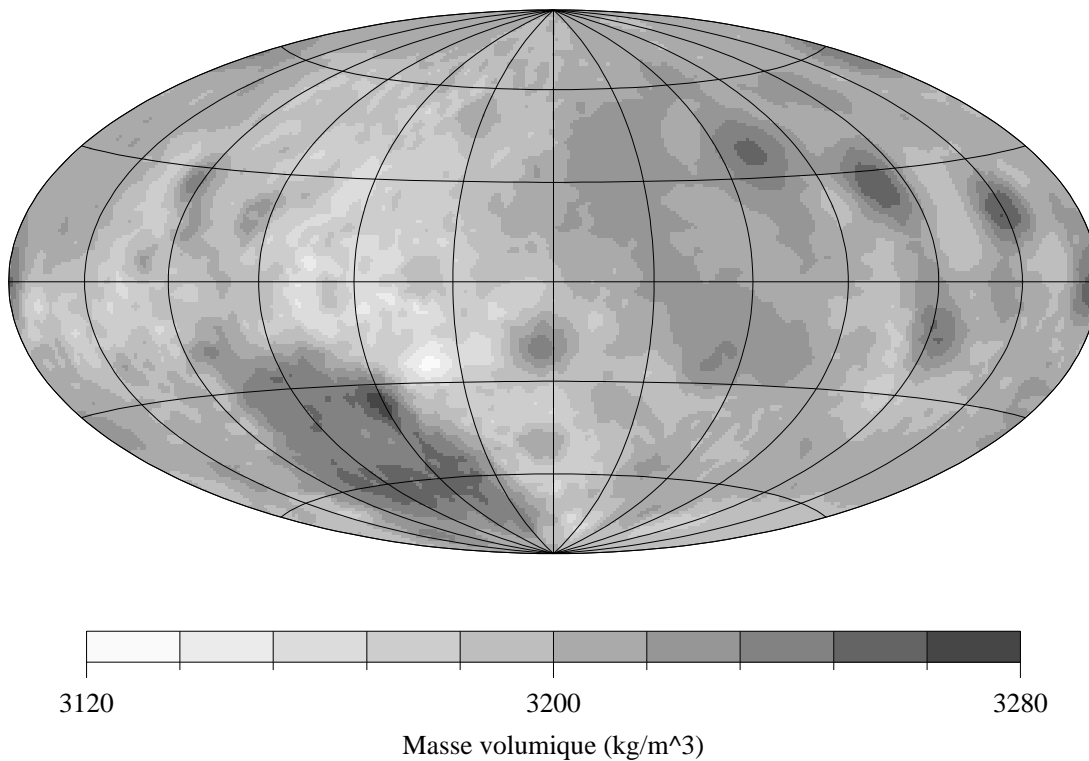


Figure 3: *Masse volumique dans la Lune à 100 km de profondeur.*

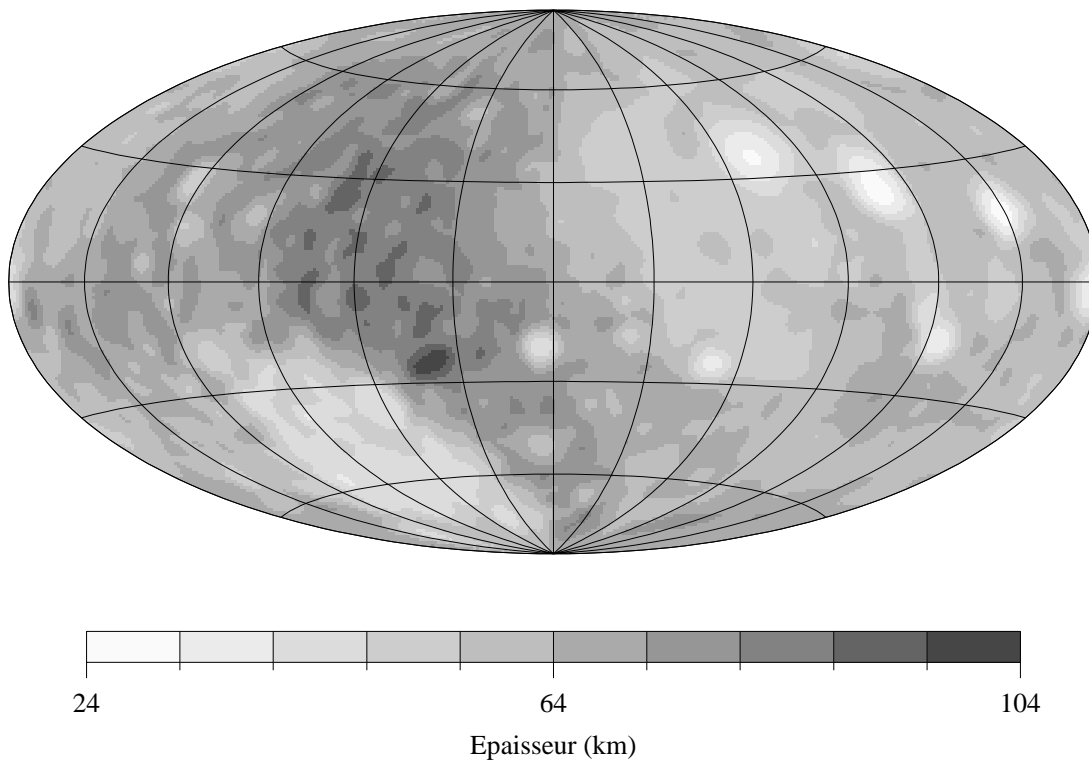


Figure 4: *Épaisseur de la croûte lunaire (sur les cartes de la Lune l'hémisphère droit correspond à la face visible, l'hémisphère gauche à la face cachée).*