



HAL
open science

Théorème limite local pour le flot géodésique en courbure négative

Stéphane Le Borgne

► **To cite this version:**

Stéphane Le Borgne. Théorème limite local pour le flot géodésique en courbure négative. 2024. hal-04819540

HAL Id: hal-04819540

<https://hal.science/hal-04819540v1>

Preprint submitted on 4 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÉORÈME LIMITE LOCAL POUR LE FLOT GÉODÉSIQUE EN COURBURE NÉGATIVE

PAR STÉPHANE LE BORGNE

RÉSUMÉ. — Nous donnons des conditions simples pour que des fonctions lipschitziennes sur $PSL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ satisfassent le théorème limite local pour le flot géodésique lorsque Γ est un sous-groupe fuchsien co-compact de $PSL(2, \mathbb{R})$.

ABSTRACT (*Local limit theorem for the geodesic flow*). — We give simple conditions on Hölder continuous functions so that they satisfy the local limit theorem for the geodesic flow on $PSL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ when Γ is cocompact fuchsian group of $PSL(2, \mathbb{R})$.

Introduction

Nous considérons ici le cas le plus simple de flot d'Anosov : celui du flot géodésique sur une surface compacte de courbure négative constante. On peut décrire cet exemple classique à partir de l'action du sous-groupe diagonal du groupe $G = PSL(2, \mathbb{R})$ sur un quotient compact de G .

Considérons Γ , un réseau cocompact de $G = PSL(2, \mathbb{R})$. Le groupe à un paramètre

$$\{g_t := \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R}\}$$

agit sur le quotient $X = G/\Gamma$ par translation à gauche :

$$g_t : X \longrightarrow X \quad x \mapsto g_t x.$$

Nous notons g_t aussi bien la matrice définie ci-dessus que la translation à gauche sur X par cette matrice. Le flot g_t est le flot géodésique sur une surface compacte de courbure -1 dont X est le fibré unitaire tangent. Désignons par μ la mesure de probabilité sur X déduite de la mesure de Haar. Elle est invariante par g_t . Nous nous intéressons au système dynamique en temps continu (X, g_t, μ) .

STÉPHANE LE BORGNE, Université de Rennes, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex
E-mail : sleborgn@univ-rennes1.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 37D40(37A50 60F05).

Mots clefs. — flot géodésique, théorème limite local.

Soit $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. On note

$$\sigma^2 = \sigma^2(\phi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left(\left(\int_0^t \phi(g_s \cdot) ds \right)^2 \right),$$

où \mathbb{E} désigne l'espérance par rapport à la mesure μ . Cette quantité est égale à

$$\sigma^2(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(\phi(\cdot)\phi(g_t \cdot)) dt, .$$

Le théorème limite central pour une fonction lipschitzienne ϕ centrée est vérifié si on a l'égalité

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu \left\{ x / \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \int_0^t \phi(g_s x) ds \leq a \right\} = F_{\mathcal{N}}(a)$$

où $F_{\mathcal{N}}$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. L'obstruction évidente $\sigma = 0$ au théorème limite central est la seule obstruction. Elle est équivalente à dire que ϕ est un cobord pour le flot (*i.e.* que ϕ est la dérivée dans la direction du flot d'une fonction sur X).

Le théorème limite local pour une fonction lipschitzienne ϕ centrée est vérifié si, pour tout intervalle I , on a l'équivalence

$$\mu \left\{ x / \int_0^t \phi(g_s x) ds \in I \right\} \sim \frac{\ell(I)}{\sigma\sqrt{2\pi t}}$$

où $\ell(I)$ désigne la longueur de I . L'obstruction attendue au théorème limite local est l'arithmicité de ϕ , c'est-à-dire une égalité de la forme

$$\int_0^t \phi(g_s \cdot) ds = \psi + bt + \chi - g_t \chi$$

où b est une constante, χ et ψ sont des fonctions mesurables, ψ à valeurs dans un réseau $a\mathbb{Z}$.

C'est le théorème limite local qui nous intéresse ici. Dolgopyat et Nandori ont étudié ce problème dans [2] (leur méthode consiste à se ramener au cas d'un flot suspendu grâce à une partition de Markov et à adapter la technique classique dite de Nagaev (sur cette technique voir [1], [5], [6], [7])). Dolgopyat et Nandori font la liste des comportements possibles avec des conditions abstraites caractérisant les différents cas. Leurs résultats sont valables dans un cadre beaucoup plus général que celui que nous considérons ici et ils donnent les comportements possibles des probabilités $\mu \left\{ x / \int_0^t \phi(g_s x) ds \in I \right\}$ en fonction de conditions abstraites sur la fonction ϕ . Le but du présent travail est de préciser ce qui se passe pour les fonctions régulières (lipschitziennes) dans le cas du flot géodésique sur les surfaces compactes de courbure -1.

Nous commençons par donner une version du résultat principal de Dolgopyat et Nandori, puis nous montrons, dans le cadre fixé ici, comment quelques raisonnements topologiques donnent un critère très simple assurant qu'une fonction lipschitzienne satisfait le théorème limite local. La méthode est analogue à celle présentée dans [3] pour étudier les cobords.

Dans le cas du système dynamique défini par un automorphisme hyperbolique du tore plusieurs comportements sont également possibles suivant qu'une fonction satisfait ou pas une condition de périodicité. L'action associée à l'automorphisme sur l'homologie n'ayant pas 1 pour valeur propre, on peut montrer que pour une fonction lipschitzienne la seule restriction au théorème limite local est que la fonction ne soit pas un cobord. Est-ce la même chose pour un flot ? Une différence importante dans ce cas est que la composée d'une fonction par le flot est homotope à la fonction. Nous allons voir que la situation est effectivement différente mais qu'une rigidité subsiste (au moins dans le cas simple que nous étudions ici).

Le résultat principal du présent travail est le suivant.

THÉORÈME 0.1. — *Soit ϕ une application lipschitzienne définie sur X d'intégrale nulle. S'il n'existe pas de fonction $\tilde{\chi}$ continue définie sur G telle que, pour $x \in G$, $\gamma \in \Gamma$,*

$$\tilde{\chi}(x\gamma) = \tilde{\chi}(x) + k_\gamma a$$

pour un réel $a \neq 0$ et un morphisme $k \mapsto k_\gamma$ de Γ dans \mathbb{Z} , et telle qu'on ait

$$\phi(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tilde{\chi}(g_s x) - \tilde{\chi}(x)}{s},$$

alors ϕ satisfait le théorème limite local, c'est-à-dire qu'on a l'équivalence

$$\mu\{x \in X / x \in A, g_t x \in B, \int_0^t \phi(g_s x) ds \in I\} \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t}} \mu(A) \mu(B) \ell(I).$$

Autrement dit l'obstruction au théorème limite local est aussi que ϕ soit la dérivée d'une fonction dans la direction du flot. Ce n'est cependant pas la même obstruction que pour le théorème limite central : la fonction $\tilde{\chi}$ n'est a priori définie que sur G , pas nécessairement sur G/Γ . Nous verrons qu'il est alors facile de trouver des fonctions explicites qui satisfassent le théorème limite local et des fonctions qui ne le satisfassent pas, bien qu'elles ne soient pas des cobords.

1. Le résultat de Dolgopyat et Nandori

Il est possible de représenter le flot géodésique comme flot suspendu au dessus d'un décalage de type fini. Rappelons ce qu'est un sous-décalage de type fini (Ω, σ) . L'espace Ω est l'ensemble des suites à valeurs dans un alphabet fini \mathcal{A} satisfaisant les conditions d'admissibilité données par une matrice M , indexée par $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, à coefficients 0 ou 1 :

$$\omega \in \Omega \text{ si et seulement si } \forall i \in \mathbb{Z}, M_{\omega_i \omega_{i+1}} = 1,$$

la transformation σ est le décalage à gauche $((\sigma(\omega))_i = \omega_{i+1})$. On munit Ω de la distance

$$d(\omega, \omega') = \exp(-\max\{k \in \mathbb{N} / \omega_j = \omega'_j \text{ pour tout } j \text{ tel que } |j| \leq k\}).$$

On dit que est M irréductible apériodique si $M^k > 0$ pour un certain k . Nous définissons le flot suspendu sur Ω associé à une fonction höldérienne τ (fonction plafond) définie sur Ω , strictement positive, de la façon suivante. Nous notons g_s le flot par analogie avec le

flot géodésique qui peut être représenté par un flot suspendu (nous rappelons comment plus bas). L'espace sur lequel agit le flot est

$$X_\tau = \{(\omega, s) / \omega \in \Omega, s \in \mathbb{R}\} / \sim$$

où \sim désigne la relation d'équivalence

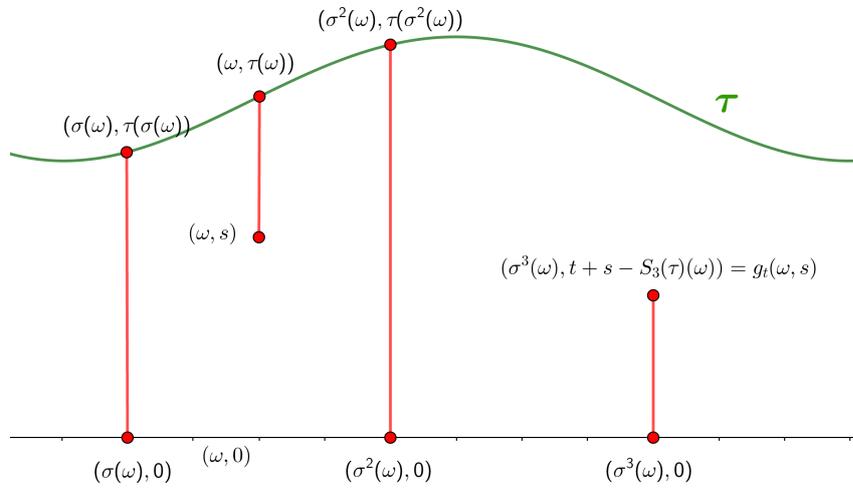
$$(\omega, s + \tau(\omega)) \sim (\sigma(\omega), s).$$

Le flot g_t est simplement le déplacement de la deuxième coordonnée à vitesse 1 :

$$g_t(\omega, s) = (\omega, t + s).$$

Un domaine fondamental naturel pour la relation \sim est

$$X_\tau = \{(\omega, s) / \omega \in \Omega, s \in [0, \tau(\omega)]\}.$$



On peut représenter le flot géodésique par un tel flot suspendu.

THÉORÈME 1.1. — *Il existe \mathcal{A} un alphabet, M une matrice d'adjacence irréductible apériodique définissant un sous-décalage de type fini (Ω, σ) , une fonction höldérienne τ strictement positive sur Ω et une application \mathcal{P} de X_τ sur $X = G/\Gamma$, höldérienne, presque partout bijective, tels que*

$$\mathcal{P}(g_t(\omega, s)) = g_t(\mathcal{P}(\omega, s)).$$

Etudier les intégrales ergodiques

$$\int_0^t \phi(g_u x) du \text{ ou } \int_0^t \phi(g_u(\omega, s)) du$$

revient au même. Pour le cas du flot suspendu, il est intéressant de se ramener à des sommes ergodiques sur la base. C'est possible au prix de quelques manipulations et à condition de considérer des sommes ergodiques prises à des temps variables.

Notons $S_k(\tau)$ la somme ergodique de τ

$$S_k(\tau)(\omega) = \sum_{j=0}^{k-1} \tau(\sigma^j \omega),$$

et posons

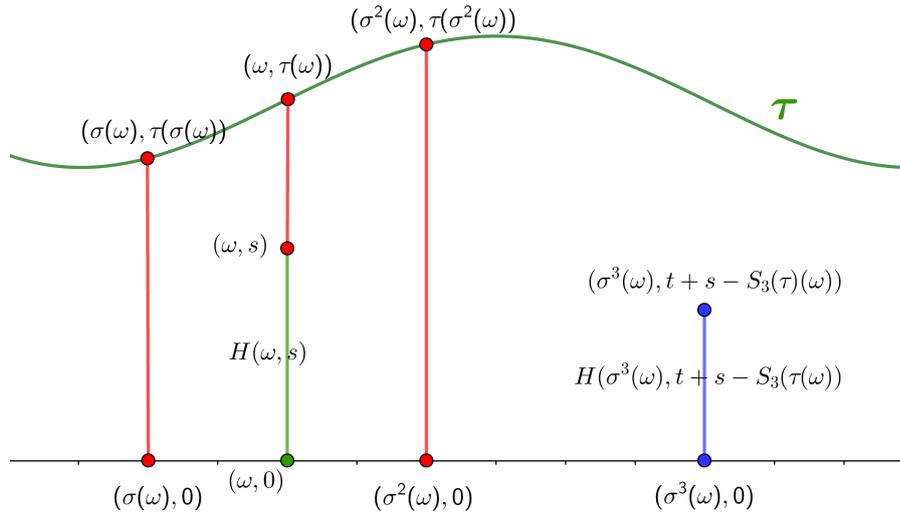
$$N_t(\omega) = \max\{k \in \mathbb{N} / S_k(\tau)(\omega) \leq t\}.$$

La quantité $N_t(\omega)$ compte le nombre de fois où le flot passe de la base au plafond (défini par le graphe de τ) en partant de $(\omega, 0)$.

Introduisons aussi la fonction H de (ω, s)

$$H((\omega, s)) = \int_0^s \phi(g_u(\omega, 0)) du$$

(intégrale de ϕ le long du flot de $(\omega, 0)$ à (ω, s)). Grâce à cette fonction on peut modifier une intégrale ergodique (correspondant à la trajectoire rouge sur le dessin ci-dessous) pour obtenir une intégrale sur une trajectoire qui fasse un certain nombre de trajets base-plafond. Sur le dessin : on ajoute l'intégrale sur la partie verte ($H(\omega, s)$) et on enlève l'intégrale sur la partie bleue ($H(\sigma^3(\omega), t + s - S_3(\tau)(\omega)) = H(g_t(\omega, s))$).



Les calculs s'écrivent ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \phi(g_u(\omega, s)) du + H((\omega, s)) &= \int_0^t \phi(g_u(\omega, s)) du + \int_0^s \phi(g_u(\omega, 0)) du \\
&= \int_s^{t+s} \phi(g_u(\omega, 0)) du + \int_0^s \phi(g_u(\omega, 0)) du \\
&= \int_0^{t+s} \phi(g_u(\omega, 0)) du \\
&= \int_0^{S_{N_{t+s}}(\tau)} \phi(g_u(\omega, 0)) du + \int_{S_{N_{t+s}}(\tau)}^{t+s} \phi(g_u(\omega, 0)) du \\
&= \int_0^{S_{N_{t+s}}(\tau)} \phi(g_u(\omega, 0)) du \\
&\quad + \int_0^{t+s-S_{N_{t+s}}(\tau)} \phi(g_{u+S_{N_{t+s}}(\tau)}(\omega, 0)) du \\
&= \int_0^{S_{N_{t+s}}(\tau)} \phi(g_u(\omega, 0)) du \\
&\quad + \int_0^{t+s-S_{N_{t+s}}(\tau)} \phi(g_u(\sigma^{N_{t+s}}\omega, 0)) du \\
&= \int_0^{S_{N_{t+s}}(\tau)} \phi(g_u(\omega, 0)) du + H(g_t(\omega, s))
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\int_0^t \phi(g_u(\omega, s)) du = \int_0^{S_{N_{t+s}}(\tau)} \phi(g_u(\omega, 0)) du + H(g_t(\omega, s)) - H((\omega, s)).$$

Autrement dit, à un cobord (pour le flot) près, l'intégrale ergodique est égale à une somme ergodique de la fonction

$$\Phi(\omega) = \int_0^{\tau(\omega)} \phi(g_u(\omega, 0)) du$$

prise en un temps variable :

$$\int_0^t \phi(g_u(\omega, s)) du = S_{N_{t+s}(\omega)}(\Phi)(\omega) + H(g_t(\omega, s)) - H(\omega, s).$$

L'idée de Dolgopyat et Nandori est de ramener l'étude du théorème local pour le flot à celle du théorème local pour le décalage sur Ω pour des fonctions à valeurs vectorielles. La fonction qui nous intéressera ici est (Φ, τ) . Le comportement des sommes ergodiques de (Φ, τ) dépend de l'existence ou non de nombres réels u, v , tels que $u\Phi + v\tau$ soit cohomologue à une fonction prenant ses valeurs dans un translaté de réseau. Autrement dit il est important de savoir à quelle condition, il existe a, b , une fonction ψ à valeurs dans $a\mathbb{Z}$, une fonction mesurable χ , tels que

$$u\Phi + v\tau = b + \psi + \chi - \chi \circ \sigma.$$

Cette condition est liée au fait qu'un certain opérateur associé à (Φ, τ) et σ a une valeur propre de module 1. Nous renvoyons au livre d'Hennion et Hervé [7] pour une description complète de la méthode. Dolgopyat et Nandori appliquent une méthode similaire dans un cadre plus général (celui des tours de Young). En utilisant une information sur les déviations par rapport à la moyenne des sommes ergodique de τ , ils obtiennent une description complète des comportements possibles dont on peut déduire le théorème suivant.

THÉORÈME 1.2. — *Si le couple (Φ, τ) n'est pas cohomologue à une fonction à valeurs dans un sous-groupe fermé de \mathbb{R}^2 de l'une des formes suivantes*

$$a\mathbb{Z} \times \mathbb{R}, \{(x, y) : y - \alpha x \in \beta\mathbb{Z}\}, \mathbb{Z}(a, b) + \mathbb{Z}(c, d)$$

avec $\alpha \neq 0$, a/c et b/d irrationnels, alors

$$\mu\{x \in X / x \in A, g_t x \in B, \int_0^t \phi(g_s x) ds \in I\} \sim \frac{c}{\sqrt{t}} \mu(A) \mu(B) \ell(I),$$

où c est une constante strictement positive.

Lorsque (Φ, τ) est cohomologue à une fonction à valeurs dans un sous-groupe d'une des formes données dans le théorème, on peut trouver v tel que $\Phi + v\tau$ soit cohomologue à une fonction ψ à valeurs dans un ensemble de la forme $a\mathbb{Z}$:

$$\Phi(\omega) + v\tau(\omega) = \psi(\omega) + \chi(\omega) - \chi(\sigma\omega).$$

Vérifions-le dans chacun des trois cas.

Lorsque (Φ, τ) est cohomologue à une fonction à valeurs dans $a\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, alors

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \tau \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \circ \sigma = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

avec ψ à valeur dans $a\mathbb{Z}$, et

$$\Phi(\omega) + 0\tau(\omega) = \psi_1 + \chi_1(\omega) - \chi_1(\sigma\omega).$$

Lorsque (Φ, τ) est cohomologue à une fonction à valeurs dans $\{(x, y) : y - \alpha x \in \beta\mathbb{Z}\}$, alors

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \tau \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \circ \sigma = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

avec $\psi_2 - \alpha\psi_1$ à valeur dans $\beta\mathbb{Z}$, et

$$\tau - \alpha\Phi(\omega) = (\psi_2 - \alpha\psi_1) + (\chi_2 - \alpha\chi_1)(\omega) - (\chi_2 - \alpha\chi_1)(\sigma\omega).$$

Enfin, lorsque (Φ, τ) est cohomologue à une fonction à valeurs dans $\mathbb{Z}(a, b) + \mathbb{Z}(c, d)$, alors

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \tau \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \circ \sigma = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2.$$

Alors

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{c}{d} & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} a - \frac{bc}{d} & 0 \\ b & d \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{c}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \tau \end{pmatrix}$$

est cohomologue à une fonction à valeur dans

$$\begin{pmatrix} a - \frac{bc}{d} & 0 \\ b & d \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2.$$

Cela signifie en particulier que

$$\Phi - \frac{c}{d}\tau$$

est cohomologue à une fonction à valeur dans $(a - \frac{bc}{d})\mathbb{Z}$.

Nous avons donc le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1.1. — *S'il n'existe pas de nombre réel v tel que $\Phi + v\tau$ soit cohomologue à une fonction à valeurs dans un sous-groupe strict fermé de \mathbb{R} , alors*

$$\mu\{x \in X \mid x \in A, g_t x \in B, \int_0^t \phi(g_s x) ds \in I\} \sim \frac{c}{\sqrt{t}} \mu(A) \mu(B) \ell(I),$$

où c est une constante strictement positive.

REMARQUE 1.0.1. — *On attend d'une application directe de la méthode de Nagaev que le théorème local soit satisfait si le vecteur (Φ, τ) n'est pas arithmétique, c'est-à-dire que les combinaisons linéaires $\Phi + v\tau$ ne sont jamais cohomologues à des fonctions à valeurs dans des **translatés de réseaux**. Grâce au travail de Dolgopyat et Nandori, nous pouvons remplacer cette condition par la condition plus faible que les combinaisons linéaires $\Phi + v\tau$ ne sont jamais cohomologues à des fonctions à valeurs dans des **réseaux**.*

Cherchons à mieux comprendre l'obstruction au théorème limite local figurant dans le corollaire précédent.

Supposons donc qu'il existe $v \in \mathbb{R}$, $a > 0$, ψ mesurable à valeurs dans $a\mathbb{Z}$, χ mesurable tels que, pour tout ω , on ait :

$$\Phi(\omega) = \int_0^{\tau(\omega)} \phi(g_u(x, 0)) du = \psi(\omega) - v\tau(\omega) + \chi(\omega) - \chi(\sigma(\omega)).$$

En reprenant l'égalité établie plus haut, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \phi(g_u(\omega, s)) du &= \int_0^{S_{N_{t+s}}(\tau)} \phi(g_u(\omega, 0)) du + H(g_t(\omega, s)) - H((\omega, s)) \\
 &= \sum_{k=0}^{N_{t+s}(\omega)-1} \Phi(\sigma^k \omega) + H(g_t(\omega, s)) - H((\omega, s)) \\
 &= \sum_{k=0}^{N_{t+s}(\omega)-1} (\psi(\sigma^k \omega) - v\tau(\sigma^k \omega) + \chi(\sigma^k \omega) - \chi(\sigma^{k+1} \omega)) \\
 &\quad + H(g_t(\omega, s)) - H((\omega, s)) \\
 &= \sum_{k=0}^{N_{t+s}(\omega)-1} \psi(\sigma^k \omega) + \chi(\omega) - \chi(\sigma^{N_{t+s}(\omega)} \omega) \\
 &\quad + v \sum_{k=0}^{N_{t+s}(\omega)-1} \tau(\sigma^k \omega) + H(g_t(\omega, s)) - H((\omega, s))
 \end{aligned}$$

Mais $\sum_{k=0}^{N_{t+s}(\omega)-1} \tau(\sigma^k \omega) = S_{N_{t+s}}(\tau)$ peut s'écrire de la façon suivante

$$S_{N_{t+s}}(\tau)(\omega, s) = t + s - (t + s - S_{N_{t+s}}(\tau)(\omega, s)) = t + \zeta(\omega, s) - \zeta(\sigma^{N_{t+s}}(\omega, s)),$$

où $\zeta(\omega, s) = s$.

L'intégrale ergodique de ϕ peut donc s'exprimer de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \phi(g_u(\omega, s)) du &= \sum_{k=0}^{N_{t+s}(\omega)-1} \psi(\sigma^k \omega) - vt \\
 &\quad + H(g_t(\omega, s)) + \chi(\sigma^{N_{t+s}(\omega)} \omega) + v\zeta(\sigma^{N_{t+s}(\omega)}(\omega, s)) \\
 &\quad - H(\omega, s) - \chi(\omega) - v\zeta(\omega, s) \\
 &= \sum_{k=0}^{N_{t+s}(\omega)-1} \psi(\sigma^k \omega) - vt \\
 &\quad + H(g_t(\omega, s)) - \chi(g_t(\omega, s)) - v\zeta(g_t(\omega, s)) \\
 &\quad - H(\omega, s) + \chi(\omega) + v\zeta(\omega, s)
 \end{aligned}$$

Finalement, nous avons obtenu l'égalité :

$$\int_0^t \phi(g_u(\omega, s)) du = \sum_{k=0}^{N_{t+s}(\omega)-1} \psi(\sigma^k \omega) - vt + \tilde{H}(g_t(\omega, s)) - \tilde{H}((\omega, s)),$$

où $\tilde{H}(\omega, s) = H(\omega, s) - \chi(\omega, s) - v\zeta(\omega, s)$. Comme ψ est à valeur dans $a\mathbb{Z}$ cela signifie que $\int_0^t \phi(g_u(\omega, s)) du$ est cohomologue (au sens du flot) à une fonction à valeur dans $a\mathbb{Z} - vt$.

Nous en tirons l'information suivante : si $\int_0^t \phi(g_u(\omega, s)) du$ n'est pas cohomologue à une fonction à valeurs dans un ensemble de la forme $bt + a\mathbb{Z}$ la fonction ϕ satisfait le théorème limite local pour le flot suspendu.

L'avantage de cette condition portant sur $\int_0^t \phi(g_u(\omega, s)) du$ est que, si on revient au flot géodésique, ces intégrales de 0 à t sont des fonctions continues sur une variété (quand ϕ l'est). Nous allons pouvoir utiliser des propriétés topologiques pour préciser ce qui se passe.

2. Propriétés de régularité dans l'équation d'arithmicité

Considérons une fonction lipschitzienne φ définie sur $X = G/\Gamma$. Supposons qu'elle soit arithmétique c'est-à-dire qu'il existe deux constantes a et b , deux fonctions mesurables χ et ψ , ψ à valeurs dans $a\mathbb{Z}$, tels que

$$(1) \quad \varphi = \psi + b + \chi - g_1\chi.$$

Nous allons montrer que χ doit conserver une certaine régularité. Il en est donc de même pour ψ , qui doit être constante puisqu'elle est à valeurs discrètes. On en déduit que la fonction φ doit satisfaire une condition forte : être un cobord en un sens affaibli (χ étant définie sur G , pas nécessairement sur $X = G/\Gamma$).

Le principe général de la preuve est classique. Il s'agit de l'argument de Hopf qui utilise les feuilles contractées et dilatées par le flot. Ces feuilles sont définies ici par l'action de deux autres sous-groupes de G , souvent appelés horocycliques :

$$\{h_t^+ := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R}\} \quad \{h_t^- := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R}\}.$$

Ils définissent respectivement les feuilles dilatées et contractées par le flot g_t car on a les relations

$$g_t h_s^+ g_{-t} = h_{e^t s}^+, \quad g_t h_s^- g_{-t} = h_{e^{-t} s}^-.$$

LEMME 2.0.1. — *Soit $\alpha > 0$. Il existe $C > 0$ tel que, pour presque tout x , pour presque tout $t \in [-\alpha, \alpha]$, pour presque tout $s \in [-\alpha, \alpha]$, on a*

$$\begin{aligned} |\exp(2i\pi(\chi(x) - \chi(h_t^- x))/a) - 1| &\leq C|t|, \\ |\exp(2i\pi(\chi(x) - \chi(h_s^+ x))/a) - 1| &\leq C|s|. \end{aligned}$$

Démonstration. — En appliquant la fonction $\exp(2i\pi \cdot /a)$ à l'égalité (1), on obtient

$$\exp(2i\pi\varphi/a) = \exp(2i\pi\psi/a) \exp(2i\pi b/a) \frac{\exp(2i\pi\chi/a)}{\exp(2i\pi\chi \circ g_1/a)}$$

Comme ψ est à valeurs dans $a\mathbb{Z}$, $\exp(2i\pi\psi/a) = 1$, et on a (notons $g_1\chi$ pour $\chi \circ g_1$)

$$\exp(2i\pi\varphi/a) = \exp(2i\pi b/a) \frac{\exp(2i\pi\chi/a)}{\exp(2i\pi g_1\chi/a)}.$$

En écrivant cette égalité pour $g_k\varphi$, k variant de 0 à $n-1$ et en faisant le produit des égalités obtenues, on a

$$\prod_{k=0}^{n-1} \exp(2i\pi g_k\varphi/a) = \exp(2i\pi nb/a) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\exp(2i\pi g_k\chi/a)}{\exp(2i\pi g_{k+1}\chi/a)} = \exp(2i\pi nb/a) \frac{\exp(2i\pi\chi/a)}{\exp(2i\pi g_n\chi/a)}.$$

Prenons alors x et y sur la même feuille contractée par g_t , autrement dit y de la forme $y = h_s^-x$ et faisons le quotient de l'égalité précédente prise en x et y :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \exp(2i\pi(\varphi(g_kx) - \varphi(g_ky))/a) = \frac{\exp(2i\pi(\chi(x) - \chi(y))/a)}{\exp(2i\pi(\chi(g_nx) - \chi(g_ny))/a)}.$$

Comme la distance de g_kx à g_ky tend exponentiellement vite vers 0 avec k et que φ est lipschitzienne, on peut majorer, uniformément en n , la distance à 1 du terme de gauche

$$\left| \prod_{k=0}^{n-1} \exp(2i\pi(\varphi(g_kx) - \varphi(g_ky))/a) - 1 \right| \leq Cd(x, y).$$

On en déduit

$$(2) \quad |\exp(2i\pi(\chi(x) - \chi(y))/a) - 1| \leq Cd(x, y) + |\exp(2i\pi(\chi(g_nx) - \chi(g_ny))/a) - 1|.$$

Il faut maintenant voir que, pour presque tout y sur la feuille contractée passant par x , on a

$$|\exp(2i\pi(\chi(x) - \chi(y))/a) - 1| \leq Cd(x, y).$$

L'idée est très simple. La fonction χ , mesurable, est continue sur un compact K de mesure positive. Pour une suite (n_k) de temps si $g_{n_k}x$ et $g_{n_k}y$ sont tous les deux dans K alors $\chi(g_{n_k}x) - \chi(g_{n_k}y)$ tend vers 0. L'inégalité (2) étant valable pour tout n , on a le résultat voulu. Donnons-quelques détails.

Prenons pour K un compact inclus dans une boîte de flot P de la forme

$$P = \{h_s^-z / s \in [-\beta, \beta], z \in S\}$$

où S est une section de dimension 2 dans X . On a une formule d'intégration pour calculer la mesure de K :

$$\mu(K) = \int_S \ell(\{s \in [-\beta, \beta] / h_s^-z \in K\}) d_S z$$

où ℓ est la mesure de Lebesgue et $d_S z$ est une mesure à densité sur S . Le théorème de densité de Lebesgue affirme que presque tout point de $I_K(z) = \{s \in [-\beta, \beta] / h_s^-z \in K\}$ est de densité, autrement dit, pour presque tout $s \in I_K(z)$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ell(I_K(z) \cap [s-r, s+r])}{2r} = 1$$

L'application

$$S \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1] : (z, t, r) \mapsto \mathbf{1}_K(h_{t+r}^-z)$$

est mesurable, et

$$S \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1] : (z, t) \mapsto \int_{-r}^r \mathbf{1}_K(h_{t+s}^-z) ds$$

aussi. On en déduit que l'ensemble

$$K^{\epsilon, \delta} = \left\{ h_t^- z / \frac{1}{2r} \int_{-r}^r \mathbf{1}_K(h_{t+s}^- z) ds > 1 - \epsilon, \forall r < \delta \right\}$$

est une partie mesurable de K et on a

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(K^{\epsilon, \delta}) = \mu(K).$$

Prenons ϵ, δ tels que $\mu(K^{\epsilon, \delta}) > 0$. Comme le système $(G/\Gamma, g_1, \mu)$ est ergodique, pour presque tout x , pour une infinité de n , $g_n x$ appartient à $K^{\epsilon, \delta}$, disons le long d'une suite extraite $(n_k) : g_{n_k} x \in K^{\epsilon, \delta}$. Fixons une tel x et une telle suite (n_k) . Notons $h_{[-\alpha, \alpha]}^- x$ l'ensemble

$$h_{[-\alpha, \alpha]}^- x = \{h_s^- x / s \in [-\alpha, \alpha]\}.$$

On a

$$g_{n_k} h_{[-\alpha, \alpha]}^- x = h_{[-e^{-n_k} \alpha, e^{-n_k} \alpha]}^- g_{n_k} x = h_{[u_{n_k} - e^{-n_k} \alpha, u_{n_k} + e^{-n_k} \alpha]}^- z_{n_k},$$

où la suite $(z_{n_k}, u_{n_k}) \in S \times \mathbb{R}$ est la suite des coordonnées de $g_{n_k} x$ dans le système décrivant K à partir d'une boîte de flot de h^- . Par définition de $K^{\epsilon, \delta}$, dès que $\alpha e^{-n_k} < \delta$, on a

$$\frac{1}{2\alpha e^{-n_k}} \int_{u_{n_k} - \alpha e^{-n_k}}^{u_{n_k} + \alpha e^{-n_k}} \mathbf{1}_K(h_{t+s}^- z_{n_k}) ds > 1 - \epsilon$$

ce qui entraîne

$$\frac{\ell\{t \in [-\alpha, \alpha] / g_{n_k} h_t^- x \in K\}}{2\alpha} > 1 - \epsilon,$$

dès que k est suffisamment grand. Lorsque k tend vers l'infini, la distance entre les points $g_{n_k} x$ et $g_{n_k} h_t^- x$ tend vers 0, donc comme ils appartiennent à K , $\chi(g_{n_k} x) - \chi(g_{n_k} h_t^- x)$ tend vers 0. Notons ρ le module de continuité de χ sur K : ρ fonction croissante continue sur \mathbb{R}_+ valant 0 en 0 telle que

$$\forall y, z \in K, |\chi(y) - \chi(z)| \leq \rho(d(y, z)).$$

Lorsque $g_{n_k} x$ et $g_{n_k} h_t^- x$ appartiennent à K , on a

$$\left| \exp(2i\pi(\chi(x) - \chi(h_t^- x))/a) - 1 \right| \leq C|t| + \rho(d(g_{n_k} x, g_{n_k} h_t^- x)) \leq C|t| + 2\rho(e^{-n_k} t).$$

Mais la mesure de l'ensemble des t tels que $2\rho(e^{-n_k} t)$ soit supérieur à $C|t|$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini. On en déduit (prendre k assez grand pour un ϵ donné) que l'ensemble des nombres t dans $[-\alpha, \alpha]$ tels que

$$\left| \exp(2i\pi(\chi(x) - \chi(h_t^- x))/a) - 1 \right| \leq 2C|t|$$

est de mesure supérieure à $2\alpha(1 - 2\epsilon)$.

Nous avons établi la propriété suivante : les ensembles X_ϵ définis par

$$X_\epsilon = \{x \in X / \ell\{t \in [-\alpha, \alpha] / \left| \exp(2i\pi(\chi(x) - \chi(h_t^- x))/a) - 1 \right| \leq 2C|t|\} \geq 2\alpha(1 - 2\epsilon)\}$$

sont de mesure pleine. L'intersection $X_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} X_{1/n}$ est aussi de mesure pleine et, si x appartient à X_0 , la mesure de l'ensemble

$$\{t \in [-\alpha, \alpha] / \left| \exp(2i\pi(\chi(x) - \chi(h_t^- x))/a) - 1 \right| \leq 2C|t|\}$$

est supérieure à $2\alpha(1 - 2/n)$ pour tout n , donc de mesure 2α .

En raisonnant exactement de la même manière, pour des temps négatifs, on a aussi, pour presque tout x , pour presque tout $t \in [-\alpha, \alpha]$,

$$|\exp(2i\pi(\chi(x) - \chi(h_t^+ x))/a) - 1| \leq 2C|t|.$$

□

Nous avons obtenu une régularité de $\exp(2i\pi\chi/a)$ le long des courbes contractées et dilatées par le flot géodésique (à ensemble de mesure nulle près). Le fait que l'on puisse atteindre tous les points d'un voisinage en se déplaçant uniquement sur des courbes contractées ou dilatées permet d'établir la continuité de $\exp(2i\pi\chi/a)$.

Pour $r \in \mathbb{R}$, posons

$$v_1 = \sqrt{|e^{-r} - 1|}, \quad v_2 = -e^r v_1, \quad t_2 = -\text{signe}(r)\sqrt{|e^{-r} - 1|}, \quad t_1 = -e^r t_2.$$

On vérifiera facilement l'égalité

$$g_r = h_{v_2}^+ h_{t_2}^- h_{v_1}^+ h_{t_1}^-.$$

De cette égalité on déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. — *Il existe $C > 0$, $a > 0$, tels que, pour tout $r < a$, l'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : [-Cr^{1/2}, Cr^{1/2}]^4 &\rightarrow B(\text{Id}, r) \\ (t_1, \dots, t_4) &\mapsto h_{t_4}^+ h_{t_3}^- h_{t_2}^+ h_{t_1}^- \end{aligned}$$

soit surjective.

Par ailleurs on a le lemme suivant.

LEMME 2.0.2. — *Soit X_0 une partie de X de mesure pleine. Il existe $C > 0$, $\alpha > 0$ et un ensemble de mesure 1, X_4 , tels que pour tout $x \in X_1$ pour tout $r < \alpha$, pour presque tout $y \in B(x, r)$, il existe un quadruplet $(t_1, t_2, t_3, t_4) \in [-C\sqrt{d(x, y)}, C\sqrt{d(x, y)}]^4$ tel que*

$$\begin{aligned} x &\in X_0 \\ h_{t_1}^- x &\in X_0 \\ h_{t_2}^+ h_{t_1}^- x &\in X_0 \\ h_{t_3}^- h_{t_2}^+ h_{t_1}^- x &\in X_0 \\ y = h_{t_4}^+ h_{t_3}^- h_{t_2}^+ h_{t_1}^- x &\in X_0 \end{aligned}$$

Démonstration. — Fixons un réel positif r inférieur à α . On montre en utilisant le théorème de Fubini qu'il existe un ensemble $X_1 \subset X_0$ de mesure pleine tel que, pour tout $x \in X_1$, $h_t^- x$ appartient à X_0 pour presque tout $t \in [-C\sqrt{r}, C\sqrt{r}]$. De la même façon il existe un ensemble $X_2 \subset X_1$ de mesure pleine tel que pour tout $x \in X_2$, $h_t^+ x$ appartient à X_1 pour presque tout $t \in [-C\sqrt{r}, C\sqrt{r}]$. On continue jusqu'à obtenir $X_4 \subset X_3$ un ensemble de mesure pleine tel que, pour tout $x \in X_4$, pour presque tout $t \in [-C\sqrt{r}, C\sqrt{r}]$, $h_t^+ x$ appartient à X_3 . Pour $x \in X_4$ l'ensemble des quadruplets $(t_1, t_2, t_3, t_4) \in [-C\sqrt{d(x, y)}, C\sqrt{d(x, y)}]^4$ tels que $h_{t_1}^- x$, $h_{t_2}^+ h_{t_1}^- x$, $h_{t_3}^- h_{t_2}^+ h_{t_1}^- x$, $h_{t_4}^+ h_{t_3}^- h_{t_2}^+ h_{t_1}^- x$

soient tous les quatre dans X_0 est de mesure pleine dans $[-C\sqrt{d(x,y)}, C\sqrt{d(x,y)}]^4$. D'après le lemme précédent, l'image de l'application

$$\mathcal{L} : (t_1, \dots, t_4) \mapsto h_{t_4}^+ h_{t_3}^- h_{t_2}^+ h_{t_1}^-$$

contient $B_0(Id, r)$. Grâce au théorème de Sard, on sait que l'ensemble des points en lesquels la dérivée de \mathcal{L} n'est pas de rang maximum a une image négligeable. Comme \mathcal{L} est localement conjuguée à une application linéaire surjective en un point où la dérivée est surjective, l'image d'un sous-ensemble de mesure pleine de $[-C\sqrt{r}, C\sqrt{r}]^4$ contient un sous-ensemble de mesure pleine de $B(Id, r)$. On en déduit que, pour tout entier k , pour presque tous les points y de $B(x, 2^{-k}\alpha) \setminus B(x, 2^{-k-1}\alpha)$, il existe

$$(t_1, t_2, t_3, t_4) \in [-C2^{-k/2}\sqrt{\alpha}, C2^{-k/2}\sqrt{\alpha}]^4 \subset [C\sqrt{2d(x,y)}, C\sqrt{2d(x,y)}]^4$$

tel que l'on ait la propriété énoncée dans le lemme. Le lemme se déduit alors de l'égalité $B_0(x, \alpha) = \cup_k B_0(x, 2^{-k}\alpha) \setminus B_0(x, 2^{-k-1}\alpha)$. \square

PROPOSITION 2.2. — *Il existe $C > 0$ tel que, pour presque tout x , presque tout $y \in B(x, \alpha)$, on ait*

$$|\exp(2i\pi\chi(x)/a) - \exp(2i\pi\chi(y)/a)| \leq C\sqrt{d(x,y)}.$$

Démonstration. — On applique maintenant le lemme précédent en prenant pour X_0 l'ensemble des points x tels que si x et $z = h_t^+ x$ ou bien $z = h_t^- x$ ($|t| \leq \alpha$) appartiennent à X_0 , alors on a $|\chi(x) - \chi(z)| \leq Cd(x, z)$. Le lemme assure que pour presque tout x , presque tout $y \in B(x, \alpha)$, on peut trouver des nombres $t_i \in [-C\sqrt{d(x,y)}, C\sqrt{d(x,y)}]$ tels que

$$\begin{aligned} & |\exp(2i\pi\chi(x)/a) - \exp(2i\pi\chi(y)/a)| \\ &= |\exp(2i\pi\chi(x)/a) - \exp(2i\pi\chi(h_{t_4}^+ h_{t_3}^- h_{t_2}^+ h_{t_1}^- x)/a)| \\ &\leq |\exp(2i\pi\chi(x)/a) - \exp(2i\pi\chi(h_{t_1}^- x)/a)| \\ &\quad + |\exp(2i\pi\chi(h_{t_1}^- x)/a) - \exp(2i\pi\chi(h_{t_2}^+ h_{t_1}^- x)/a)| \\ &\quad + |\exp(2i\pi\chi(h_{t_2}^+ h_{t_1}^- x)/a) - \exp(2i\pi\chi(h_{t_3}^- h_{t_2}^+ h_{t_1}^- x)/a)| \\ &\quad + |\exp(2i\pi\chi(h_{t_3}^- h_{t_2}^+ h_{t_1}^- x)/a) - \exp(2i\pi\chi(h_{t_4}^+ h_{t_3}^- h_{t_2}^+ h_{t_1}^- x)/a)| \\ &\leq 2C(|t_1| + |t_2| + |t_3| + |t_4|) \\ &\leq 8C\sqrt{d(x,y)}, \end{aligned}$$

car chacun des points intermédiaires introduit appartient à X_0 et est sur la feuille contractée ou dilatée du point suivant. \square

On en déduit qu'il existe une fonction höldérienne coïncidant presque partout avec $\exp(2i\pi\chi/a)$. Autrement dit on peut considérer que la fonction $\exp(2i\pi\chi/a)$ est höldérienne. En prenant le logarithme on peut obtenir localement des fonctions höldériennes qui ne diffèrent de χ que de multiples entiers de $2\pi/a$. Il reste à voir dans quelle mesure cela permet de construire une version höldérienne de χ définie sur X . Il peut y avoir des obstructions topologiques. On peut définir de proche en proche une version $\tilde{\chi}$ de χ sur le revêtement universel \tilde{X} de X . On peut décomposer la projection Π de \tilde{X} sur X en la composée de deux applications : la première de \tilde{X} sur G , de fibre \mathbb{Z} ,

la deuxième de G sur $X = G/\Gamma$, de fibre Γ . Nous allons voir qu'on peut "redescendre" $\tilde{\chi}$ sur G (autrement dit on peut considérer que $\tilde{\chi}$ est définie sur G) mais qu'il peut très bien se faire que $\tilde{\chi}$ ne soit pas définie sur X (mais $\tilde{\chi} - g_1\tilde{\chi}$, elle, est définie sur X).

PROPOSITION 2.3. — *Si φ une fonction arithmétique lipschitzienne sur G/Γ d'intégrale nulle, alors il existe une fonction $\tilde{\chi}$ définie sur G , höldérienne, tel que*

$$\varphi = \tilde{\chi} - g_1\tilde{\chi}.$$

Démonstration. — Dire que φ est arithmétique est dire qu'il existe deux constantes a et b , deux fonctions mesurables χ et ψ définies sur G/Γ , ψ à valeurs dans $a\mathbb{Z}$, tels que

$$\varphi = \psi + b + \chi - g_1\chi.$$

Une chose possible est de définir une fonction $\tilde{\chi}$ höldérienne sur le revêtement universel de X tel que

$$\exp(2i\pi\chi/a) = \exp(2i\pi\tilde{\chi} \circ \Pi/a)$$

où Π est la projection du revêtement universel \tilde{X} sur X . Il suffit de recoller les fonctions höldériennes locales obtenues en prenant de logarithme de $\exp(2i\pi\chi(x)/a)$.

On définit explicitement \tilde{G} (en suivant par exemple [4]) :

$$\tilde{G} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \theta \right) \in G \times \mathbb{R} / ci + d = e^{i\theta}|ci + d| \right\}.$$

On définit $\tilde{\chi}$ sur \tilde{G} continue telle que

$$\varphi = b + \tilde{\psi} + \tilde{\chi} - g_1\tilde{\chi}$$

où φ est vue comme fonction sur \tilde{G} et $\tilde{\psi}$ est à valeur dans $a\mathbb{Z}$. Posons $\tilde{g}_s = (g_s, 0)$ et Π de \tilde{G} dans G par $\Pi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \theta \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a

$$(g_s, 0) \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \theta \right) = \left(g_s \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \theta \right).$$

En effet

$$g_s \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{s/2}a & e^{s/2}b \\ e^{-s/2}c & e^{-s/2}d \end{pmatrix}$$

et les deux égalités

$$ci + d = e^{i\theta}|ci + d|, \quad ce^{-s/2}i + de^{-s/2} = e^{i\theta}|ce^{-s/2}i + de^{-s/2}|$$

sont équivalentes.

Pour simplifier l'écriture notons z la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Lorsqu'on définit $\tilde{\chi}$ de proche en proche sur \tilde{G} on peut avoir

$$\tilde{\chi}(z, \theta + 2\pi) = \tilde{\chi}(z, \theta) + k \frac{2\pi}{a}.$$

Pour des raisons de continuité k ne dépend ni de z ni de θ . Posons alors

$$\hat{\chi}(z, \theta) = \tilde{\chi}(z, \theta) - k \frac{\theta}{a}.$$

On a

$$\hat{\chi}(z, \theta + 2\pi) = \tilde{\chi}(z, \theta + 2\pi) - k \frac{\theta + 2\pi}{a} = \tilde{\chi}(z, \theta) + k \frac{2\pi}{a} - k \frac{\theta + 2\pi}{a} = \hat{\chi}(z, \theta),$$

autrement dit $\hat{\chi}$ est définie sur G . Par ailleurs

$$\hat{\chi}(z, \theta) - g_1 \hat{\chi}(z, \theta) = \tilde{\chi}(z, \theta) - k \frac{2\pi}{a} - \tilde{\chi}(g_1 z, \theta) + k \frac{2\pi}{a} = \tilde{\chi}(z, \theta) - \tilde{\chi}(g_1 z, \theta)$$

puisque θ est invariant par g_1 . Ceci montre qu'on peut considérer que $\tilde{\chi}$ est définie sur G .

L'égalité (valable sur G)

$$\varphi = \psi + b + \tilde{\chi} - g_1 \tilde{\chi}$$

avec ψ à valeurs discrètes, φ et $\tilde{\chi}$ continues, devient (ψ est constante puisque continue à valeurs discrètes)

$$\varphi = b' + \tilde{\chi} - g_1 \tilde{\chi}.$$

Intégrons maintenant cette égalité sur un domaine fondamental Δ de G/Γ . Comme μ est invariante par g_t , nous avons

$$0 = \int_{\Delta} \varphi(\tilde{x}) d\mu(\tilde{x}) = b' + \int_{\Delta} \tilde{\chi}(\tilde{x}) d\mu(\tilde{x}) - \int_{\Delta} \tilde{\chi}(g_1 \tilde{x}) d\mu(\tilde{x}) = b'.$$

□

REMARQUE 2.0.3. — *Si on se donne une fonction $\tilde{\chi}$ définie sur G lipschitzienne telle que $\exp(2i\pi\tilde{\chi}/a)$ soit définie sur G/Γ , alors, automatiquement, $\tilde{\chi} - g_1\tilde{\chi}$ est définie sur G/Γ . Il suffit de remarquer que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe $k_\gamma \in \mathbb{Z}$ (indépendant de x pour des raisons de continuité) tel que, pour tout x , on ait*

$$\tilde{\chi}(x\gamma) = \tilde{\chi}(x) + k_\gamma a.$$

On a alors, pour tout $x \in G$ et tout $\gamma \in \Gamma$

$$\tilde{\chi}(x\gamma) - \tilde{\chi}(g_1 x\gamma) = \tilde{\chi}(x) + k_\gamma a - \tilde{\chi}(g_1 x) - k_\gamma a = \tilde{\chi}(x) - \tilde{\chi}(g_1 x).$$

REMARQUE 2.0.4. — *Nous avons considéré une fonction lipschitzienne φ arithmétique pour l'action de g_1 pour ne pas alourdir les notations. On peut raisonner exactement de la même façon pour une fonction φ arithmétique pour l'action de g_t ($t \neq 0$) c'est-à-dire qu'il existe deux constantes a et b , deux fonctions mesurables χ et ψ , ψ à valeurs dans $a\mathbb{Z}$, tels que*

$$(3) \quad \varphi = \psi + b + \chi - g_t \chi.$$

Dans ce cas il existe une fonction $\tilde{\chi}_t$ définie sur G , höldérienne, tel que

$$\varphi = \tilde{\chi}_t - g_t \tilde{\chi}_t.$$

3. Le théorème limite local pour le flot géodésique

Revenons à notre problème d'origine : on prend pour φ la fonction

$$\varphi_t(x) = \int_0^t \phi(g_s x) ds$$

où ϕ est une fonction lipschitzienne d'intégrale nulle définie sur $X = G/\Gamma$ où Γ est un sous-groupe fuchsien co-compact de G . Le réseau est donc engendré par un nombre fini d'éléments qui peuvent être elliptiques, auquel cas l'une de leur puissance est égale à l'identité, ou hyperboliques.

On cherche à quelle condition, pour tout t , φ_t est cohomologue à une fonction à valeurs dans $vt + a\mathbb{Z}$.

D'après le paragraphe précédent cela signifie que, pour tout t , il existe une fonction $\tilde{\chi}_t$, définie sur G , höldérienne, telle que $\exp(2i\pi\tilde{\chi}_t/a)$ soit définie sur G/Γ et

$$\int_0^t \phi(g_s x) ds = \tilde{\chi}_t(x) - \tilde{\chi}_t(g_t x).$$

Puisque $\exp(2i\pi\tilde{\chi}/a)$ est définie sur X , pour tout x appartenant à G , tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un entier $k_{\gamma,t}$ tel que

$$\tilde{\chi}_t(\tilde{x}\gamma) = \tilde{\chi}_t(\tilde{x}) + k_{\gamma,t}a.$$

Comme $x \mapsto \tilde{\chi}_t(\tilde{x}\gamma) - \tilde{\chi}_t(\tilde{x})$ est continue à ensemble de valeurs discret, $k_{\gamma,t}$ ne dépend pas de x . On obtient ainsi un morphisme de Γ dans $\mathbb{Z} : \gamma \mapsto k_{\gamma,t}$.

Si γ est elliptique il existe $m \geq 2$ tel que $\gamma^m = Id$ et on a

$$\tilde{\chi}_t(\tilde{x}) = \tilde{\chi}_t(\tilde{x}\gamma^m) = \tilde{\chi}_t(\tilde{x}) + mk_{\gamma,t}a,$$

égalité dont on déduit $k_{\gamma,t} = 0$. Autrement si γ est elliptique, pour tout x , on a

$$\tilde{\chi}_t(\tilde{x}\gamma) = \tilde{\chi}_t(\tilde{x}).$$

Nous montrons maintenant qu'on peut choisir les fonctions $\tilde{\chi}_t$ toutes égales entre elles.

PROPOSITION 3.1. — *Soit ϕ une fonction lipschitzienne d'intégrale nulle définie sur $X = G/\Gamma$. Si pour tout t , $\varphi_t(x) = \int_0^t \phi(g_s x) ds$ est cohomologue à une fonction à valeur dans un ensemble de la forme $vt + a\mathbb{Z}$ ($a > 0$), alors il existe une fonction $\tilde{\chi}$ définie sur G telle que*

$$\int_0^t \phi(g_s x) ds = \tilde{\chi}(x) - \tilde{\chi}(g_t x).$$

Démonstration. — Les fonctions $\tilde{\chi}_t$ ne sont définies qu'à constantes additives près. Pour qu'elles coïncident il faut donc imposer une condition : par exemple qu'elles soient toutes d'intégrales nulles sur un domaine fondamental fixé ou bien qu'elles prennent toutes la valeur 0 en l'identité. Nous imposons une telle condition.

Supposons que $\tilde{\chi}_s = \tilde{\chi}_t$ et écrivons

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}_{s+t}(g_{s+t}x) - \tilde{\chi}_{s+t}(x) &= \int_0^{s+t} \phi(g_u \tilde{x}) du \\
&= \int_0^t \phi(g_u \tilde{x}) du + \int_t^{s+t} \phi(g_u \tilde{x}) du \\
&= \int_0^t \phi(g_u \tilde{x}) du + \int_t^{s+t} \phi(g_u \tilde{x}) du \\
&= \int_0^t \phi(g_u \tilde{x}) du + \int_t^s \phi(g_{t+u} \tilde{x}) du \\
&= \tilde{\chi}_t(g_t x) - \tilde{\chi}_t(x) + \tilde{\chi}_s(g_{s+t}x) - \tilde{\chi}_s(g_t x) \\
&= \tilde{\chi}_t(g_t x) - \tilde{\chi}_s(g_t x) + \tilde{\chi}_s(g_{s+t}x) - \tilde{\chi}_t(x) \\
&= \tilde{\chi}_s(g_{s+t}x) - \tilde{\chi}_s(x)
\end{aligned}$$

Cela entraîne

$$\tilde{\chi}_{s+t}(g_{s+t}x) - \tilde{\chi}_s(g_{s+t}x) = \tilde{\chi}_{s+t}(x) - \tilde{\chi}_s(x),$$

ce qui signifie que la fonction $x \mapsto \tilde{\chi}_{s+t}(x) - \tilde{\chi}_s(x)$ est invariante par g_{s+t} . Si elle est définie sur G/Γ et si $t + s \neq 0$, elle est constante par ergodicité de g_{t+s} , donc nulle.

Soit γ un élément elliptique de Γ . Nous avons déjà remarqué que $\tilde{\chi}_{s+t}(x\gamma) = \tilde{\chi}_{s+t}(x)$ et $\tilde{\chi}_s(x\gamma) = \tilde{\chi}_s(x)$, pour tout x , en particulier on a $\tilde{\chi}_{s+t}(x\gamma) - \tilde{\chi}_s(x\gamma) = \tilde{\chi}_{s+t}(x) - \tilde{\chi}_s(x)$.

Soit γ un élément hyperbolique de Γ . Il existe \tilde{x} un élément de G et $u > 0$ tels que $g_u \tilde{x} = \tilde{x}\gamma$. On a alors, d'une part, $(\tilde{\chi}_{s+t} - \tilde{\chi}_s)(\tilde{x}\gamma^n) = (\tilde{\chi}_{s+t} - \tilde{\chi}_s)(\tilde{x}) + n(k_{\gamma, s+t} - k_{\gamma, s})a$. Et d'autre part, $(\tilde{\chi}_{s+t} - \tilde{\chi}_s)(\tilde{x}\gamma^n) = (\tilde{\chi}_{s+t} - \tilde{\chi}_s)(g_{nu} \tilde{x}) = (\tilde{\chi}_{s+t} - \tilde{\chi}_s)(g_{r_n} \tilde{x})$, où r_n est le reste de la division euclidienne de nu par $s + t$, puisque $\tilde{\chi}_{s+t}(g_{s+t}x) - \tilde{\chi}_s(g_{s+t}x) = \tilde{\chi}_{s+t}(x) - \tilde{\chi}_s(x)$. Cela impose $k_{\gamma, s+t} = k_{\gamma, s}$ (puisque $r \mapsto (\tilde{\chi}_{s+t} - \tilde{\chi}_s)(g_u \tilde{x})$ est bornée sur $[0, s + t]$). Par conséquent, on a $\tilde{\chi}_{s+t}(x\gamma) - \tilde{\chi}_s(x\gamma) = \tilde{\chi}_{s+t}(x) - \tilde{\chi}_s(x)$.

La fonction $\tilde{\chi}_{s+t} - \tilde{\chi}_s$ est bien définie sur G/Γ .

Nous avons montré la propriété suivante : si $\tilde{\chi}_s = \tilde{\chi}_t$ et $s + t \neq 0$, alors $\tilde{\chi}_s = \tilde{\chi}_t = \tilde{\chi}_{s+t}$.

Désignons par E l'ensemble $E = \{t \in \mathbb{R} / \tilde{\chi}_t = \tilde{\chi}_1\}$. Par la propriété précédente, de $\tilde{\chi}_1 = \tilde{\chi}_1$, on déduit $\tilde{\chi}_2 = \tilde{\chi}_1$, puis $\tilde{\chi}_n = \tilde{\chi}_1$ pour tout entier $n \geq 1$, de la même façon $\tilde{\chi}_{n/p} = \tilde{\chi}_1/p$ et par conséquent $\tilde{\chi}_{n/p} = \tilde{\chi}_1$. Tous les nombres rationnels strictement positifs appartiennent à E .

Considérons alors un nombre réel $t > 0$ quelconque. On peut l'approcher par une suite de nombres rationnels $q_n < t$.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\chi}_t(g_t x) - \tilde{\chi}_t(x) &= \int_0^t \phi(g_u x) du \\
 &= \int_0^{q_n} \phi(g_u x) du + \int_{q_n}^t \phi(g_u x) du \\
 &= \tilde{\chi}_{q_n}(g_{q_n} x) - \tilde{\chi}_{q_n}(x) + \int_{q_n}^t \phi(g_u x) du \\
 &= \tilde{\chi}_{q_n}(g_t x) - \tilde{\chi}_{q_n}(x) + \tilde{\chi}_{q_n}(g_{q_n} x) - \tilde{\chi}_{q_n}(g_t x) + \int_{q_n}^t \phi(g_u x) du \\
 &= \tilde{\chi}_1(g_t x) - \tilde{\chi}_1(x) + \tilde{\chi}_{q_n}(g_1 x) - \tilde{\chi}_1(g_t x) + \int_{q_n}^t \phi(g_u x) du \\
 &= \tilde{\chi}_1(g_t x) - \tilde{\chi}_1(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\tilde{\chi}_1(g_{q_n} x) - \tilde{\chi}_1(g_t x) + \int_{q_n}^t \phi(g_u x) du \right) \\
 &= \tilde{\chi}_1(g_t x) - \tilde{\chi}_1(x).
 \end{aligned}$$

On en déduit que $\tilde{\chi}_t = \tilde{\chi}_1$ pour tout $t > 0$. Enfin de l'égalité

$$\int_0^{-t} \phi(g_u g_t x) du = - \int_0^t \phi(g_u x) du$$

on déduit

$$\tilde{\chi}_{-t}(x) - \tilde{\chi}_{-t}(g_t x) = -(\tilde{\chi}_t(g_t x) - \tilde{\chi}_t(x))$$

ce qui entraîne

$$(\tilde{\chi}_t - \tilde{\chi}_{-t})(x) = (\tilde{\chi}_t - \tilde{\chi}_{-t})(g_t x)$$

et $\tilde{\chi}_t = \tilde{\chi}_{-t}$ (si $t \neq 0$). □

Si le morphisme $\gamma \mapsto k_\gamma$ est nul alors $\tilde{\chi}$ est définie sur X et $\int_0^t \phi(g_s x) ds$ est un cobord. Sinon $\tilde{\chi}$ n'est pas définie sur X mais $\tilde{\chi} - g_t \tilde{\chi}$ comme remarqué plus haut. En divisant l'égalité

$$\int_0^t \phi(g_s x) ds = \tilde{\chi}(x) - \tilde{\chi}(g_t x)$$

par t , on obtient

$$\frac{1}{t} \int_0^t \phi(g_s x) ds = \frac{\tilde{\chi}(x) - \tilde{\chi}(g_t x)}{t}.$$

La fonction ϕ étant continue, le membre de gauche de cette égalité converge vers $\phi(x)$ quand t tend vers 0. On en déduit que $\tilde{\chi}$ est dérivable dans la direction de flot de dérivée ϕ :

$$\phi(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{\chi}(x) - \tilde{\chi}(g_t x)}{t}.$$

Nous avons finalement établi le résultat suivant.

THÉORÈME 3.1. — Soit ϕ une application lipschitzienne définie sur X d'intégrale nulle. S'il n'existe pas de fonction $\tilde{\chi}$ continue définie sur G telle que, pour $x \in G$, $\gamma \in \Gamma$,

$$\tilde{\chi}(x\gamma) = \tilde{\chi}(x) + k_\gamma a$$

pour un réel $a \neq 0$ et un morphisme $k \mapsto k_\gamma$ de Γ dans \mathbb{Z} , et telle qu'on ait

$$\phi(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tilde{\chi}(g_s x) - \tilde{\chi}(x)}{s},$$

alors

$$\mu\{x \in X / x \in A, g_t x \in B, \int_0^t \phi(g_s x) ds \in I\} \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \mu(A)\mu(B)\ell(I).$$

3.1. Exemples de fonctions satisfaisant le théorème limite local. — S'il existe une fonction $\tilde{\chi}$ définie sur G telle que

$$\tilde{\chi}(x\gamma) = \tilde{\chi}(x) + k_\gamma a$$

pour un morphisme $k \mapsto k_\gamma$ de Γ dans \mathbb{Z} et

$$\phi(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tilde{\chi}(g_s x) - \tilde{\chi}(x)}{s},$$

alors les intégrales de ϕ le long des orbites périodiques sont toutes des multiples entiers de a . En effet, si $g_t x = x$, on a

$$\int_0^t \phi(g_s x) ds = \tilde{\chi}(g_t \tilde{x}) - \tilde{\chi}(\tilde{x}),$$

quel que soit le représentant \tilde{x} de x . Or, dire que $g_t x = x$ est dire qu'il existe γ dans Γ tel que $g_t \tilde{x} = x\gamma$. On a donc

$$\int_0^t \phi(g_s x) ds = \tilde{\chi}(\tilde{x}\gamma) - \tilde{\chi}(\tilde{x}) = k_\gamma a.$$

Il est alors facile de trouver des fonctions qui satisfassent le théorème limite local. Considérons deux orbites périodiques, autrement dit deux points x_1, x_2 et deux réels strictement positifs t_1, t_2 tels que $g_{t_1} x_1 = x_1, g_{t_2} x_2 = x_2$. Il existe alors deux éléments γ_1, γ_2 satisfaisant

$$g_{t_1} \tilde{x}_1 = \tilde{x}_1 \gamma_1, \quad g_{t_2} \tilde{x}_2 = \tilde{x}_2 \gamma_2.$$

Soit ϕ une fonction höldérienne sur X . Si les valeurs des deux intégrales

$$\int_0^{t_1} \phi(g_s x_1) ds \quad \text{et} \quad \int_0^{t_2} \phi(g_s x_2) ds$$

sont indépendantes sur \mathbb{Q} alors ϕ satisfait le théorème limite local. On peut trouver des conditions plus faciles à vérifier. Donnons-nous un troisième point périodique x_3 : $g_{t_3} x_3 = x_3, g_{t_3} \tilde{x}_3 = \tilde{x}_3 \gamma_3$ et demandons de plus que les trois éléments $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ vérifient l'égalité

$$\gamma_3 = \gamma_1 \gamma_2.$$

Si

$$(4) \quad \int_0^{t_3} \phi(g_s x_3) ds \neq \int_0^{t_1} \phi(g_s x_1) ds + \int_0^{t_2} \phi(g_s x_2) ds$$

alors ϕ satisfait le théorème limite local. Les trois trajectoires de x_1, x_2, x_3 forment trois parties compactes disjointes de X . Il est très facile de construire des fonctions satisfaisant le théorème limite local. Considérons une fonction quelconque ϕ, C^∞ sur X . Si la condition (4) n'est pas satisfaite, il suffit de modifier ϕ sur une petite partie de l'une des trois orbites considérées pour que (4) soit satisfaite.

3.2. Exemples de fonctions ne satisfaisant pas le théorème limite local. —

Inversement il est facile également de construire des fonctions qui ne satisfassent pas le théorème limite local bien qu'elles ne soient pas des cobords. On considère un domaine fondamental Δ , son adhérence $\overline{\Delta}$ et on construit une fonction $\tilde{\chi}$ sur $\overline{\Delta}$, sur un voisinage du bord de $\overline{\Delta}$ telle que pour x sur ce bord on ait $\tilde{\chi}(x\gamma) = \tilde{\chi}(x) + k_\gamma$ avec des entiers k_γ qui ne soient pas tous nuls. On peut le faire de telle façon qu'il soit possible ensuite d'étendre $\tilde{\chi}$ à G en une fonction C^∞ satisfaisant $\tilde{\chi}(x\gamma) = \tilde{\chi}(x) + k_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Prenons alors pour ϕ la dérivée de $\tilde{\chi}$ dans la direction du flot. Comme nous l'avons déjà dit ϕ est bien définie sur G/Γ et

$$\int_0^t \phi(g_s x) ds = \tilde{\chi}(g_t x) - \tilde{\chi}(x).$$

Fixons un domaine fondamental Δ pour l'action à gauche de Γ sur G . Pour tout nombre réel t et tout x appartenant à Δ , il existe $\gamma_{t,x} \in \Gamma$ tel que $g_t x = \overline{g_t x} \gamma_{t,x}$, où $\overline{g_t x} \in \Delta$. On a donc, pour $x \in \Delta$,

$$\int_0^t \phi(g_s x) ds = \tilde{\chi}(\overline{g_t x} \gamma_{t,x}) - \tilde{\chi}(x) = k_{\gamma_{t,x}} + \tilde{\chi}(\overline{g_t x}) - \tilde{\chi}(x)$$

On voit ainsi que les intégrales ergodiques sont la somme d'un cobord et d'une variable à valeurs entières. il est possible de faire varier la fonction $\tilde{\chi}$ sans que les entiers $k_{\gamma_{t,x}}$. On peut par exemple choisir $\tilde{\chi}$ de telle sorte que la probabilité que $\tilde{\chi}(x)$ soit éloigné d'un entier d'une quantité arbitrairement petite (par exemple $1/100$) soit arbitrairement petite (par exemple $1/100$). Dans un tel cas la probabilité $\int_0^t \phi(g_s x) ds$ appartienne à $[0, 1; 0, 9]$ sera toujours inférieure à $1/100$: le théorème local (dans la version du théorème ci-dessus) n'est pas satisfait.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. Breiman, *Probability*, Addison-Wesley, 1968.
- [2] J.-P. Conze et S. Le Borgne, *Méthode de martingales et flot géodésique sur une surface de courbure constante négative*, Ergodic Theory Dynam. Systems 21 (2001), no. 2, 421–441.
- [3] D. Dolgopyat et P. Nandori, *On mixing and the local central limit theorem for hyperbolic flows*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 40, 2020, no. 1, 142–174.

- [4] R. Godement, *Introduction à la théorie des groupes de Lie*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [5] S. Gouëzel, *Vitesse de décorrélation et théorèmes limites pour les applications non uniformément dilatantes*, Thèse, 2004.
- [6] Y. Guivarc'h et J. Hardy, *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 24 (1988), no. 1, 73–98.
- [7] H. Hennion et L. Hervé, *Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness*, Lecture Notes in Mathematics, 1766, Springer-Verlag, 2001.