



HAL
open science

Patrick Vaudon -Introduction à la théorie géométrique de la diffraction 1

Patrick Vaudon

► **To cite this version:**

Patrick Vaudon. Patrick Vaudon -Introduction à la théorie géométrique de la diffraction 1. Master. France. 2015, pp.140. hal-04817603

HAL Id: hal-04817603

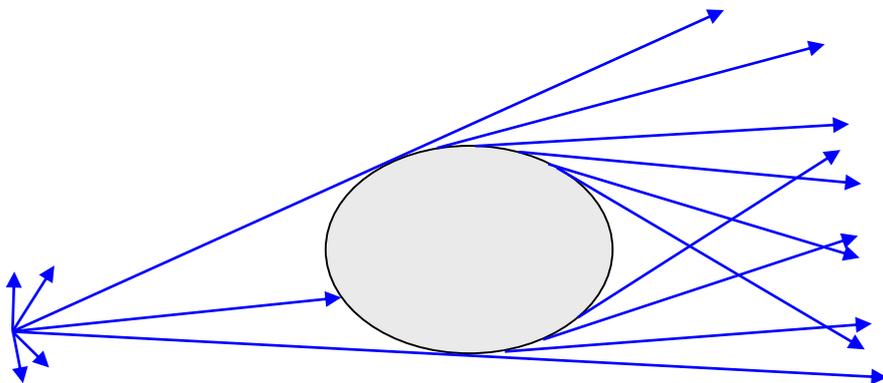
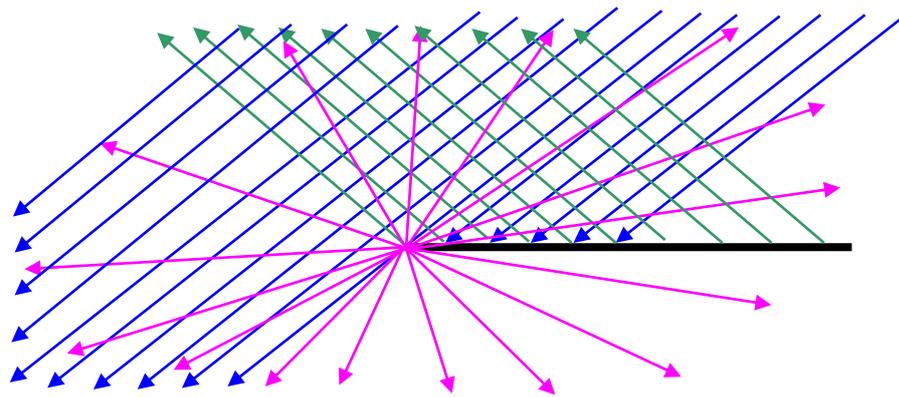
<https://hal.science/hal-04817603v1>

Submitted on 3 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Introduction à la théorie géométrique de la diffraction



Patrick VAUDON

Xlim - Université de Limoges – France

Table des matières

Introduction à la théorie géométrique de la diffraction

I - Méthodes asymptotiques en électromagnétisme : généralités	3
II - Optique géométrique	9
III - La théorie géométrique de la diffraction.....	20
IV - Diffraction d'une onde plane par un demi-plan parfaitement conducteur	27
V - Diffraction d'une onde cylindrique par un demi-plan parfaitement conducteur	41
VI - Diffraction par une ouverture	51
VII - Antenne sur plan de masse limité	60
VIII - Diffraction d'une onde plane par une arête formée par deux demi-plans parfaitement conducteurs	71
IX - Diffraction d'une onde cylindrique par une arête	87
X - Diffraction d'une onde plane par un cylindre parfaitement conducteur	99
XI - Diffraction d'une onde cylindrique par un cylindre parfaitement conducteur	126
Bibliographie.....	142

I - Méthodes asymptotiques en électromagnétisme : généralités

La théorie rigoureuse de l'électromagnétisme repose sur les équations de MAXWELL. Ces équations sont complexes, et ne permettent pas, en général, pour un problème donné, de fournir une solution analytique.

On a alors recours à des méthodes numériques permettant de résoudre les formulations intégrales, ou directement les équations de MAXWELL par une discrétisation de l'espace et du temps (méthode FDTD). Pour atteindre un niveau de convergence suffisant, cette discrétisation doit s'effectuer avec un pas spatial et temporel suffisamment fin, ce qui limite rapidement la taille spatiale des structures pouvant être traitées de cette manière, car le volume de calcul augmente de manière exponentielle.

Lorsque l'on doit traiter de grandes structures, on est alors obligé de se tourner vers des solutions alternatives, et en particulier vers des méthodes dites asymptotiques.

Une méthode asymptotique peut être présentée comme une méthode approchée, mais qui tend vers la solution exacte lorsque la fréquence tend vers l'infini, ou de manière équivalente, lorsque la longueur d'onde tend vers 0.

S'agissant d'une méthode approchée, cela permet de simplifier les équations de MAXWELL par des hypothèses adéquates et donc de construire une théorie allégée qui converge asymptotiquement vers les solutions des équations de MAXWELL.

On peut envisager, d'un point de vue théorique, deux manières de construire des solutions asymptotiques :

- On procède à une résolution rigoureuse des équations de MAXWELL et on étudie la limite de la solution lorsque la fréquence tend vers l'infini.

- On injecte dans les équations de MAXWELL des développements des champs E et H dont on sait qu'ils sont asymptotiquement valides lorsque la fréquence tend vers l'infini.

Pratiquement, on recense essentiellement deux familles de méthodes :

- une famille basée sur l'optique géométrique, soit donc le comportement « géométrique » des rayons lumineux : c'est cette famille qui sera décrite dans ce document.

- une famille où le champ diffracté est obtenu en faisant rayonner les courants qui prennent naissance sur une structure illuminée par une onde électromagnétique : la forme asymptotique de la méthode tient au fait qu'en première approximation ces courants sont calculés en considérant qu'ils sont égaux à $\vec{n} \wedge \vec{H}$, où H représente le champ incident sur la structure. On néglige donc les aller-retours des courants sur la structure, et il faut donc être prudent dans l'utilisation de cette méthode (comme de la première), lorsque des phénomènes résonnants sont susceptibles d'apparaître.

I – Le développement de KLINE-LUNEBERG

Kline et Luneberg ont émis l'hypothèse qu'en espace libre, et dans un milieu homogène et isotrope, le champ électromagnétique pouvait admettre un développement de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = e^{-jk\psi(\vec{r})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{E}_n(\vec{r})}{(j\omega)^n} \quad (\text{I-1})$$

$$\vec{H}(\vec{r}, \omega) = e^{-jk\psi(\vec{r})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{H}_n(\vec{r})}{(j\omega)^n} \quad (\text{I-2})$$

Cela suppose qu'aux très hautes fréquences (ω tend vers l'infini), l'état de phase du champ électromagnétique est caractérisé par une surface équiphase $\psi(\vec{r})$ également appelée front d'onde.

L'intérêt d'une formulation de cette nature est qu'elle doit permettre de déterminer les propriétés asymptotiques du champ électromagnétique en les introduisant dans les équations de MAXWELL. En particulier, aux très hautes fréquences, seul le terme d'ordre $n = 0$ aura une importance significative, et permettra donc d'exprimer le comportement du champ.

D'un point de vue purement mathématique, ces développements sont controversés, car ils sont introduits sans avoir aucune assurance de la convergence des séries proposées, et on sait que des raisonnements rigoureux sur une série non convergente peuvent conduire à des conclusions erronées.

Dans le cas présent l'intérêt physique porte sur les premiers termes de la série, et on montre que cette forme asymptotique permet de retrouver correctement le formalisme de l'optique géométrique. Il semble que cela n'apporte pas d'éclairage nouveau dans la compréhension des phénomènes et nous n'insisterons pas davantage sur ces développements..

II – Fondements de l'optique géométrique

On trouve trace de réflexions sur ce pan de la physique dès l'antiquité et il semble que les premiers travaux dans ce domaine remontent aux grecs PYTHAGORE, EMPEDOCLE, et également EUCLIDE, le grand mathématicien d'Alexandrie à qui l'ont attribué la paternité de la loi de la réflexion sur une surface plane : l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

Il faudra attendre le 17^{ème} siècle pour voir apparaître des progrès significatifs avec SNELL, DESCARTES et FERMAT. Leurs analyses conduiront à une théorie scalaire à peu près complète, et conçue sans aucune référence à l'électromagnétisme qui ne verra le jour que bien plus tard.

Ce n'est qu'après les travaux de MAXWELL, et donc la certitude que la lumière est bien un phénomène électromagnétique, que les physiciens vont chercher à justifier rigoureusement le passage des équations de MAXWELL à l'optique géométrique.

II-1 – Le théorème de HUYGENS-FRESNEL

Ce théorème est décrit en détail dans le chapitre sur les théorèmes généraux de l'électromagnétisme. Dans le cas qui nous préoccupe, nous allons particulariser la surface fermée ψ qui entoure les sources et sur laquelle nous évaluons les courants équivalents ; et considérer que sur cette surface, la phase de l'onde qui se propage est constante. La surface ψ désigne donc une surface équiphase également appelée front d'onde.

Nous ferons l'hypothèse que cette surface est suffisamment régulière pour pouvoir conduire le raisonnement qui va suivre : dans le cas contraire, cela indique qu'une théorie d'optique géométrique n'est pas applicable.

Le théorème de HUYGENS-FRESNEL indique que l'on peut calculer le champ électromagnétique en un point quelconque de l'espace extérieur à la surface, en sommant les contributions rayonnées des courants équivalents sur chaque éléments de surface. On se propose alors de calculer le champ obtenu au point d'observation P, dont le plus proche point situé sur ψ est O, après avoir posé $|\overline{OP}| = r$ (Figure I-1).

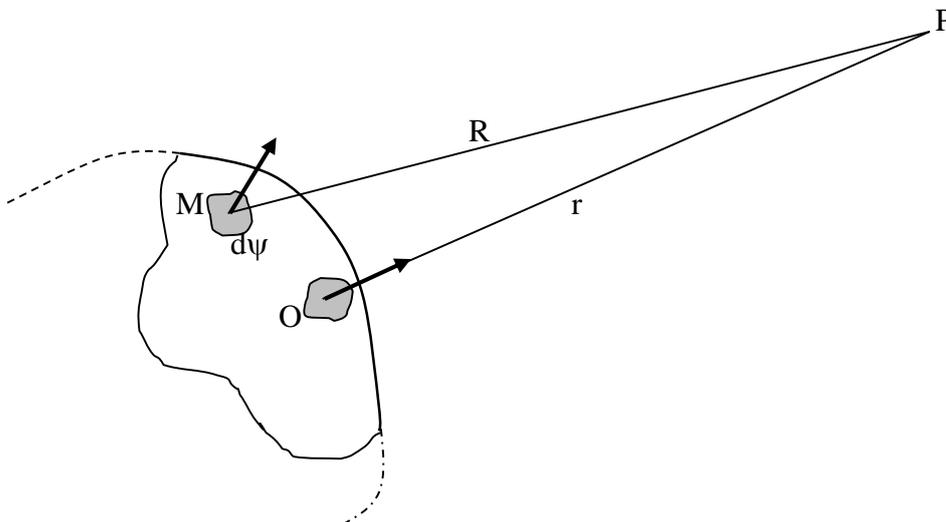


Figure I-1 : Application du théorème de HUYGENS-FRESNEL à une surface équiphase ψ

Les sources de courant équivalentes se déduisent des champs électromagnétiques présents sur la surface équiphase par la relation :

$$\vec{J}_e = \vec{n} \wedge \vec{H} \quad \text{pour les courants électriques équivalents} \quad (\text{I-3})$$

$$\vec{J}_m = -\vec{n} \wedge \vec{E} \quad \text{pour les courants magnétiques équivalents} \quad (\text{I-4})$$

Dans ces conditions, si $d\vec{E}(\mathbf{R})$ représente la contribution en P d'une source localisée sur l'élément de surface $d\psi$, le champ total au point P s'obtient en sommant toutes les contributions de la surface ψ :

$$\vec{E}(\mathbf{P}) = \iint_{\psi} d\vec{E}(\mathbf{R}) \quad (\text{I-5})$$

La surface $d\psi$ étant infiniment petite, ces contributions sont celles de dipôles électriques et magnétiques élémentaires soit donc :

$$d\vec{E}(\mathbf{R}) = \frac{jk\eta}{4\pi} \left((\vec{J}_e \wedge \vec{U}_R) \vec{U}_R \Lambda - \frac{1}{\eta} (\vec{J}_m \wedge \vec{U}_R) \right) \frac{e^{-jkR}}{R} d\psi \quad (\text{I-6})$$

où η représente l'impédance d'onde en espace libre et $k = 2\pi/\lambda$.

Lorsque k tend vers l'infini, le produit (kR) varie très rapidement lorsque le point M se déplace lors de l'intégration. Dans ces conditions, la méthode de la phase stationnaire montre que l'intégrale (I-5) qui représente le champ total rayonné au point P , ne dépend pratiquement que de l'élément de surface $d\psi$ qui entoure le point O , et on trouve :

$$\vec{E}(\mathbf{P}) = \vec{E}(\mathbf{O}) \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + r)(\rho_2 + r)}} e^{-jkr} \quad (\text{I-7})$$

où ρ_1 et ρ_2 sont les rayons de courbures principaux qui caractérisent l'élément de surface $d\psi$ entourant le point O .

Ainsi, lorsque k tend vers l'infini, nous venons d'établir une relation ponctuelle entre les champs électromagnétiques présents au point P et au point O . Ce résultat est à la base de la théorie des rayons de l'optique géométrique.

II-2 – La méthode de la phase stationnaire

On peut illustrer dans une situation simplifiée le raisonnement du paragraphe précédent.

Considérons une surface équiphasse plane, un point d'observation P , une origine sur la surface choisie comme étant la plus proche de P , et un point courant sur la surface équiphasse M (Figure I-2) :

Chaque élément de courant sur la surface contribue au champ rayonné au point P avec une phase égale à :

$$\Phi = kR = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{r}{\cos \theta} \quad (\text{I-8})$$

Le signal physique correspondant à $e^{-j\Phi}$ est donné par $\cos(\Phi)$, et nous pouvons donner une représentation graphique de cette fonction (Figure I-3)

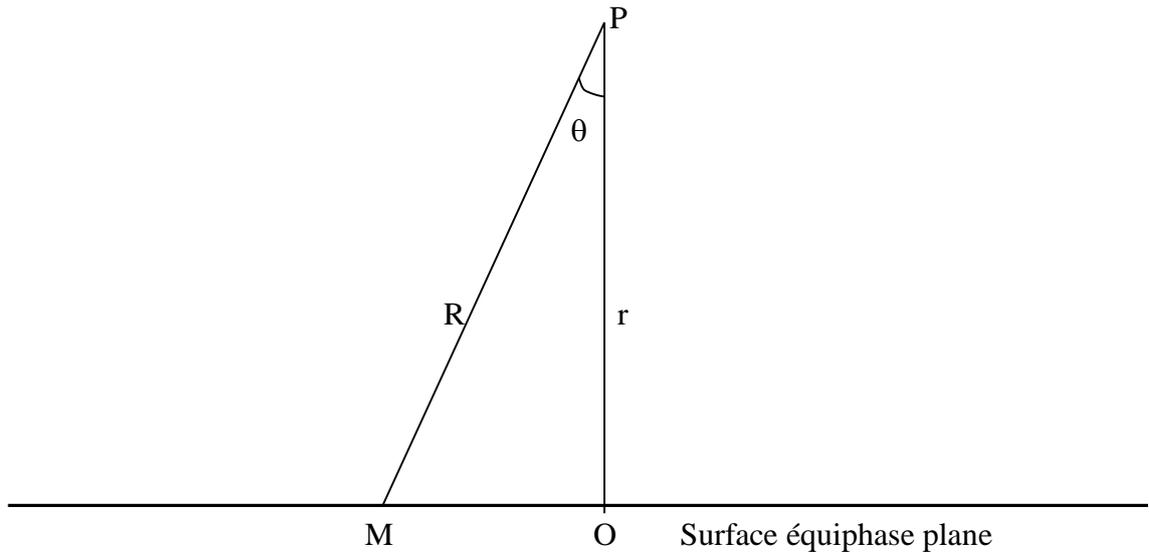


Figure I-2 : *Champ rayonné au point P par une surface équiphasse plane*

On note que hormis dans la zone proche de $\theta = 0$, la fonction oscille avec une périodicité lentement variable, si bien que sa valeur moyenne, et donc son intégrale, est proche de 0 en dehors du voisinage de $\theta = 0$.

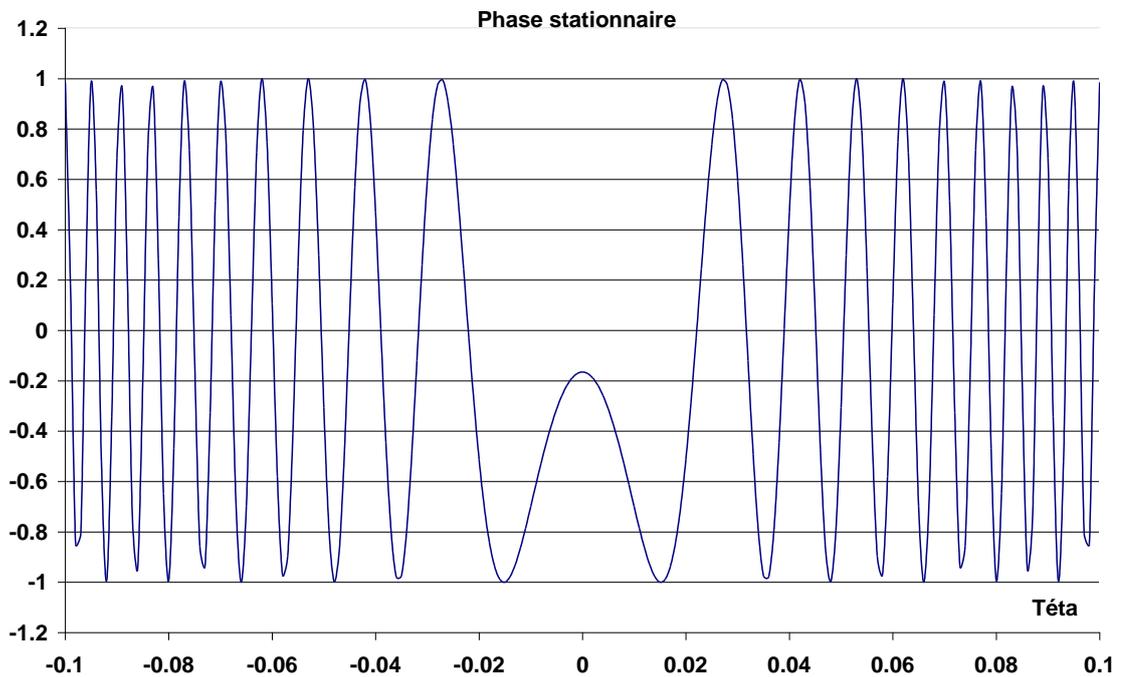


Figure I-3 : *Représentation de la fonction $\cos(\beta/\cos\theta)$ où β a été choisi arbitrairement égal à $4E7$ et où θ varie de -0.1° à $+0.1^\circ$*

Dans la réalité, il y a un terme qui vient en facteur de l'exponentielle dans la relation (I-6), et qui est proportionnel à l'amplitude des courants équivalents. Mais il suffit que ce terme soit lentement variable devant la périodicité des oscillations pour qu'on puisse admettre que la

valeur moyenne de chaque période est nulle, et donc à nouveau constater que l'intégrale de rayonnement ne dépend pratiquement que du voisinage du point de stationnarité.

Le traitement mathématique rigoureux revient à considérer une intégrale du type :

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda g(x)} dx \quad (\text{I-9})$$

Lorsque λ tend vers l'infini, si la fonction $g(x)$ possède un point de stationnarité x_s situé entre a et b , pour lequel $g'(x_s) = 0$, alors l'intégrale tend asymptotiquement vers la valeur :

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda |g''(x_s)|}} f(x_s) e^{i\lambda g(x_s)} e^{j\sigma \frac{\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\text{I-10})$$

où σ représente le signe de $g''(x_s)$.

II - Optique géométrique

Bien avant la découverte des équations de MAXWELL, les physiciens ont tenté d'élaborer des modèles permettant de rendre compte des phénomènes liés à la propagation de la lumière.

Les premiers éléments de la théorie étaient purement scalaires, et fondés sur des propriétés géométriques de propagation, ainsi que sur des propriétés de conservation de l'énergie : pour une source lumineuse qui émet à puissance constante, l'énergie lumineuse qui se répand sans perte dans un espace isotrope doit avoir un flux constant à travers toute surface fermée entourant la source.

I – La théorie scalaire

Elle est basée sur la notion front d'onde et de rayon. Elle prouvera son intérêt et son efficacité dans l'analyse des systèmes optiques et plus particulièrement dans le comportement des rayons lumineux à la traversée des systèmes de lentilles.

Un front d'onde est une surface sur laquelle l'onde a une phase constante. L'ensemble des courbes orthogonales à cette surface constitue les rayons de l'optique géométrique. En espace libre, ces rayons sont des droites, mais ils peuvent se courber lorsque la lumière se propage dans des milieux inhomogènes.

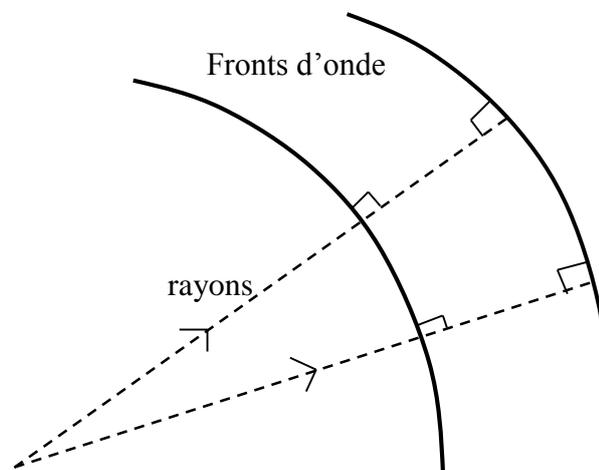


Figure II-1 : Représentation des surfaces équiphasées et des rayons orthogonaux à ces surfaces.

Un rayon représente physiquement la direction de propagation de l'énergie : on peut le vérifier de manière rigoureuse en montrant que sa direction et son sens sont portés par le vecteur de POYTING.

Afin de pouvoir donner une description énergétique du transport de l'énergie lumineuse, on considère en général un faisceau de rayons constitué d'un rayon axial et d'un ensemble de rayons paraxiaux (Figure I-2)

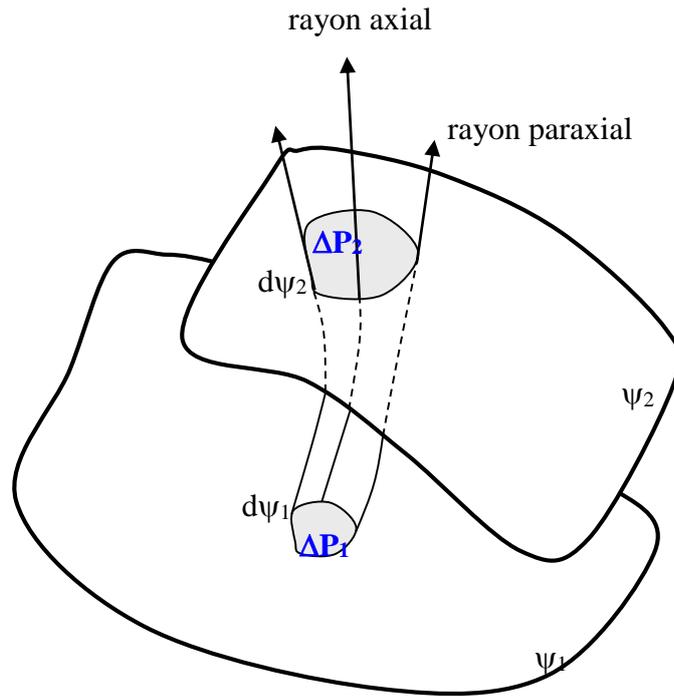


Figure I-2 : Représentation de deux surfaces équiphases traversées par un « tube » de rayons

Considérons deux surfaces équiphases ψ_1 et ψ_2 , et un « tube » de rayons qui traverse respectivement chaque surface avec une aire $d\psi_1$ et $d\psi_2$.

Puisque l'énergie est transportée suivant la direction du rayon, il s'ensuit que l'énergie totale transportée dans un tube de rayon est constante car aucune énergie ne s'échappe de ce tube.

Si ΔP représente la densité de puissance par unité de surface, la condition d'une puissance transportée dans le tube de rayon constante s'écrit :

$$\Delta P_1 \cdot d\psi_1 = \Delta P_2 \cdot d\psi_2 \quad (\text{II-1})$$

La densité surfacique de puissance ΔP est donnée en champ lointain par la partie réelle du vecteur de POYNTING :

$$\Delta P = \frac{E^2}{2\eta} \quad (\text{II-2})$$

d'où on déduit de (II-1,2) :

$$E_1^2 \cdot d\psi_1 = E_2^2 \cdot d\psi_2 \quad (\text{II-3})$$

Soit encore :

$$E_2 = \sqrt{\frac{d\psi_1}{d\psi_2}} E_1 \quad (\text{II-4})$$

Dans le cas général, l'élément de surface $d\psi$ peut être décrit à l'aide des rayons de courbure principaux, et en se référant à la figure II-3, les éléments de surface $d\psi_1$ et $d\psi_2$ entourant les points O_1 et O_2 sont liés par la relation :

$$\frac{d\psi_1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{d\psi_2}{(R + \rho_1)(R + \rho_2)} \quad (\text{II-5})$$

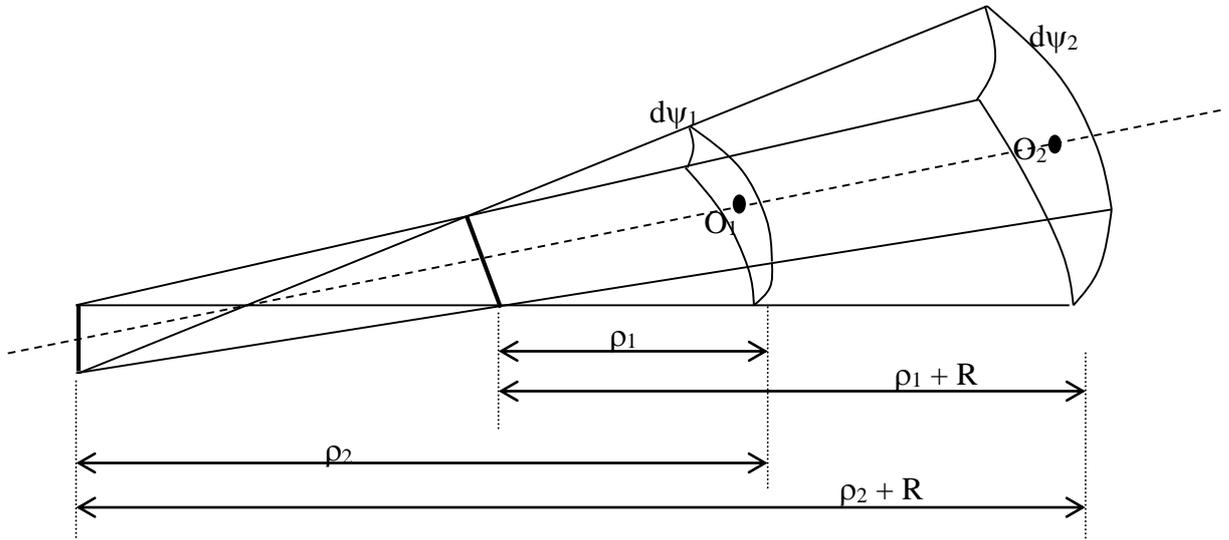


Figure II-3 : Représentation des éléments de surface découpés par un faisceau de rayon

On peut donc, sur la base des hypothèses qui ont été formulées, relier ponctuellement l'amplitude du champ électromagnétique au point O_2 à l'amplitude du champ électromagnétique au point O_1 par la relation déduite de (II-4,5) :

$$E_2 = \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + R)(\rho_2 + R)}} E_1 \quad (\text{II-6})$$

Cette relation exprime la manière dont l'énergie se répartit dans l'espace en fonction de la nature géométrique de la surface constituée par le front d'onde. En particulier, si cette surface est plane, les rayons de courbure ρ_1 et ρ_2 sont infinis, et on a donc $E_2 = E_1$: il n'y a pas de dispersion de l'énergie qui reste constante au cours de la propagation.

Suivant la nature de la surface équiphase, on peut particulariser les rayons de courbure de la manière suivante :

- onde plane : $\rho_1 = \rho_2 = \infty$
- onde cylindrique : ρ_1 ou $\rho_2 = \infty$
- onde sphérique : $\rho_1 = \rho_2$ finis
- onde astigmatique : ρ_1, ρ_2 finis quelconques

Lorsque $R = -\rho_1$ ou $R = -\rho_2$ la relation (II-6) diverge. Ces points, ou ensemble de points où se produisent une telle situation sont appelés des caustiques. L'optique géométrique ne permet pas de calculer correctement les champs au niveau des caustiques, et il faut avoir recours à d'autres méthodes.

Lorsqu'une caustique est traversée par un rayon, l'expression sous la racine de (II-6) passe par l'infini et change de signe, ce qui impose un rattrapage de phase de $+\pi/2$ ou $-\pi/2$ suivant le sens de propagation.

II – Le principe de FERMAT

Entre deux surfaces équiphases infiniment proches ψ et $\psi + d\psi$, l'incrément de la fonction caractéristique ψ dépend de la vitesse de propagation de l'onde, et donc de la permittivité du milieu. Pour un rayon qui effectue un trajet d'abscisse curviligne ds entre ces deux surfaces, on peut écrire :

$$d\psi = \frac{c}{v} ds = \sqrt{\epsilon_r} ds \quad (\text{II-7})$$

Dans un milieu inhomogène, la permittivité varie en chaque point, et la vitesse de propagation également. Mais quel que soit le rayon considéré entre deux surfaces équiphases, la quantité :

$$d\psi(x, y, z) = \sqrt{\epsilon_r(x, y, z)} ds = n(x, y, z) ds \quad (\text{II-8})$$

est constante par définition de la surface équiphase. Elle peut donc être prise comme définition du chemin optique élémentaire.

Le long d'un rayon dont la trajectoire est représentée par une courbe Γ , le chemin optique sera défini par l'intégrale curviligne :

$$\Delta s = \int_{\Gamma} n \cdot ds \quad (\text{II-9})$$

où $n = \sqrt{\epsilon_r}$ représente l'indice de réfraction et ds l'abscisse curviligne (et non un élément de surface)

Considérons une source lumineuse et un point d'observation :

FERMAT a émis le principe selon lequel, parmi l'infinité des trajets Γ possibles de la source au point d'observation, la lumière choisie le trajet tel que le chemin optique soit stationnaire par rapport à toute modification infinitésimale de ce trajet.

En d'autres termes, le trajet suivi par un rayon est extremum (maximum ou minimum) par rapport aux trajets voisins. Sa dérivée par rapport à l'abscisse curviligne s'annule et la différence entre le chemin optique suivi par le rayon et tout chemin optique voisin est un infiniment petit du second ordre.

Ce principe peut être pris comme postulat de l'optique géométrique à partir duquel on peut bâtir toute la théorie. Il permet d'établir directement que pour n constant, les rayons suivent des trajectoires rectilignes, et de retrouver les lois de la réflexion et de la diffraction pour des milieux d'indices quelconques.

Il permet de justifier de manière rigoureuse les trajets lumineux empruntés par les rayons réfléchis ou diffractés, qui vont être mis en œuvre dans la Théorie Géométrique de la Diffraction. D'une manière plus générale, lorsqu'on considèrera des rayons rampants sur une structure parfaitement conductrice, c'est encore ce principe qui permettra d'affirmer que la trajectoire suivie sera une géodésique de la structure.

On peut illustrer sur un exemple l'utilisation du principe de FERMAT pour déterminer la trajectoire d'un rayon réfléchi (Figure II-4) :

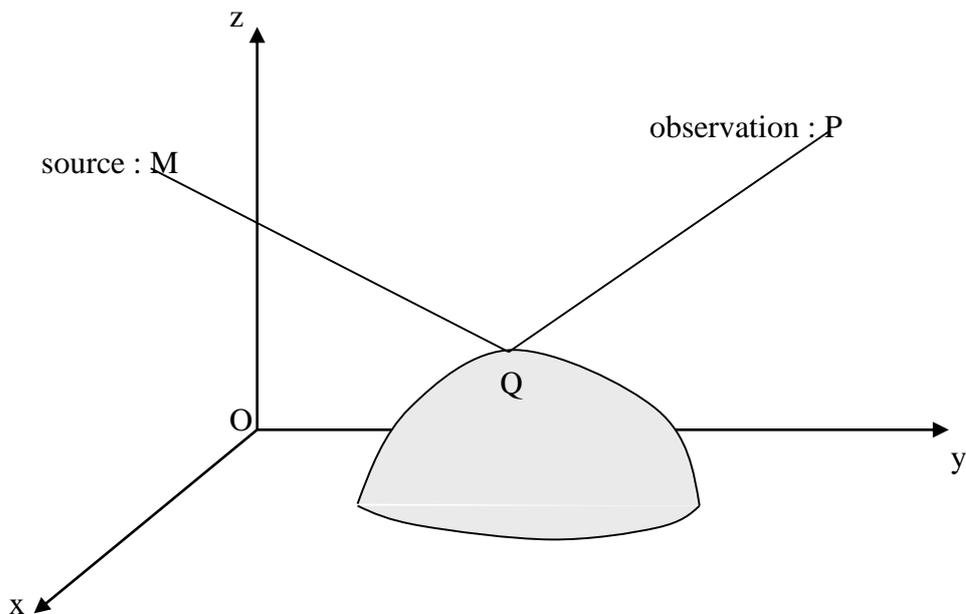


Figure II-4 : Illustration du principe de FERMAT dans la recherche d'une trajectoire de rayon réfléchi.

Considérons une surface quelconque en forme de cloche parfaitement conductrice, un point source et un point d'observation. Le problème consiste à trouver sur quel point Q appartenant à la surface, le rayon issu de la source M va se réfléchir pour atteindre le point d'observation P.

Nous sommes en espace libre et le principe de FERMAT permet d'affirmer que le point Q sera tel que le trajet $MQ + QP$ soit minimum parmi tous les trajets possibles possédant un point appartenant à la surface. Connaissant la nature de la surface, il « suffit » alors de mettre cette propriété en équation.

III – La théorie vectorielle

La théorie scalaire présentée dans les paragraphes précédents doit être complétée par une représentation vectorielle des champs électrique et magnétique.

La notion de rayon suppose implicitement que l'on se place dans des conditions de champ lointain, et la structure du champ électromagnétique associé au rayon sera celle d'une onde plane : les champs électrique et magnétique sont orthogonaux entre eux et orthogonaux à la direction de propagation avec laquelle ils forment un trièdre direct.

Muni de ces propriétés, on peut décrire les phénomènes de réflexions sur une surface parfaitement conductrice.

III-1 – Réflexion d'un rayon sur une surface parfaitement conductrice.

L'optique géométrique permet de traiter l'interface entre deux milieux de caractéristiques ϵ_1 , μ_1 et ϵ_2 , μ_2 à l'aide de coefficients de réflexion et de transmission, et de la loi de SNELL-DESCARTES.

Dans le présent document, on ne s'intéressera qu'à la réflexion et à la diffraction de surfaces parfaitement conductrices, le problème élémentaire étant celui de la réflexion d'une onde plane par un plan parfaitement conducteur (Figure II-5). Pour une surface quelconque, on considérera, du point de vue de la polarisation, que la réflexion s'effectue comme sur un plan tangent à la surface. Le calcul de l'amplitude du champ réfléchi est nettement plus complexe et sera évoqué au paragraphe suivant.

On désignera par plan d'incidence, le plan contenant le rayon incident et la normale à la surface, par plan de réflexion celui contenant le rayon réfléchi et la normale à la surface. La loi de SNELL-DESCARTES établit que ces deux plans sont confondus et que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

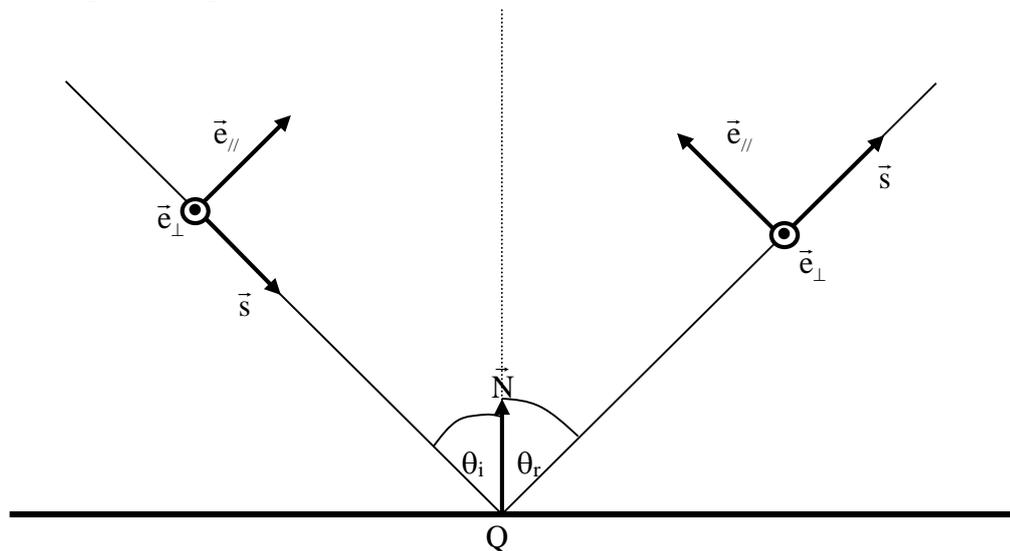


Figure II-5 : représentation d'un rayon réfléchi par une surface plane et du système de coordonnées associé à chaque rayon.

Le coefficient de réflexion au point Q dépend de la polarisation de l'onde incidente. Dans le cas d'une polarisation quelconque, on adopte souvent une description matricielle. A cette fin, on définit un système de coordonnées propre à chaque rayon, constitué des vecteurs suivants :

- \vec{s} : vecteur unitaire dans la direction de propagation
- \vec{e}_\perp : vecteur unitaire perpendiculaire au plan d'incidence
- \vec{e}_\parallel : vecteur inclus dans le plan d'incidence formant un trièdre direct avec les

deux autres et vérifiant : $\vec{e}_\parallel = \vec{e}_\perp \wedge \vec{s}$.

Désignons par $E^{i,r}$ le champ électrique incident (respectivement réfléchi), et décomposons ce champ dans la base associée au rayon incident (respectivement réfléchi) :

$$\vec{E}^i = E_{//}^i \vec{e}_{//}^i + E_{\perp}^i \vec{e}_{\perp}^i \quad (\text{II-10})$$

$$\vec{E}^r = E_{//}^r \vec{e}_{//}^r + E_{\perp}^r \vec{e}_{\perp}^r \quad (\text{II-11})$$

Les conditions aux limites imposent sur le plan parfaitement conducteur :

$$E_{//}^i = E_{//}^r \quad \text{et} \quad E_{\perp}^i = - E_{\perp}^r \quad (\text{II-12})$$

Ces informations peuvent être reprises sous forme matricielle de la manière suivante :

$$[\mathbf{E}^r] = [\mathbf{R}][\mathbf{E}^i] \quad \text{avec} \quad [\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-13})$$

Il est important de noter que dans l'écriture (II-13), les vecteurs \vec{E}^i et \vec{E}^r sont exprimés dans deux bases différentes : le premier dans la base locale associée au rayon incident, le second dans la base locale associée au rayon réfléchi.

III-2 – Réflexion d'une famille de rayons sur une surface parfaitement conductrice.

L'analyse précédente nous fournit la valeur du champ réfléchi au point de réflexion, en fonction de la valeur du champ incident à ce même point de réflexion. Afin de connaître l'évolution de l'amplitude du champ réfléchi lorsqu'il se propage, il est nécessaire de considérer l'ensemble des rayons paraxiaux pour calculer l'astigmatisme du faisceau de rayons réfléchis.

Dans le cas général, l'onde incidente est astigmatique, et il est naturel de penser que sa réflexion sur une surface quelconque va changer la valeur de cet astigmatisme.

Considérons une famille de rayons incidents astigmatique, dont les rayons de courbure principaux en un point Q sont ρ_1^i et ρ_2^i .

Ces rayons tombent sur une surface parfaitement conductrice au voisinage de Q et donnent naissance à une famille de rayons réfléchis dont les rayons de courbure principaux en Q sont notés ρ_1^r et ρ_2^r (Figure II-6).

Le champ réfléchi en P à une distance s^r du point Q s'écrit en prenant l'origine des phases en Q :

$$[\mathbf{E}^r(\text{P})] = [\mathbf{E}^r(\text{Q})] \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s^r)(\rho_2^r + s^r)}} e^{-jks^r} \quad (\text{II-14})$$

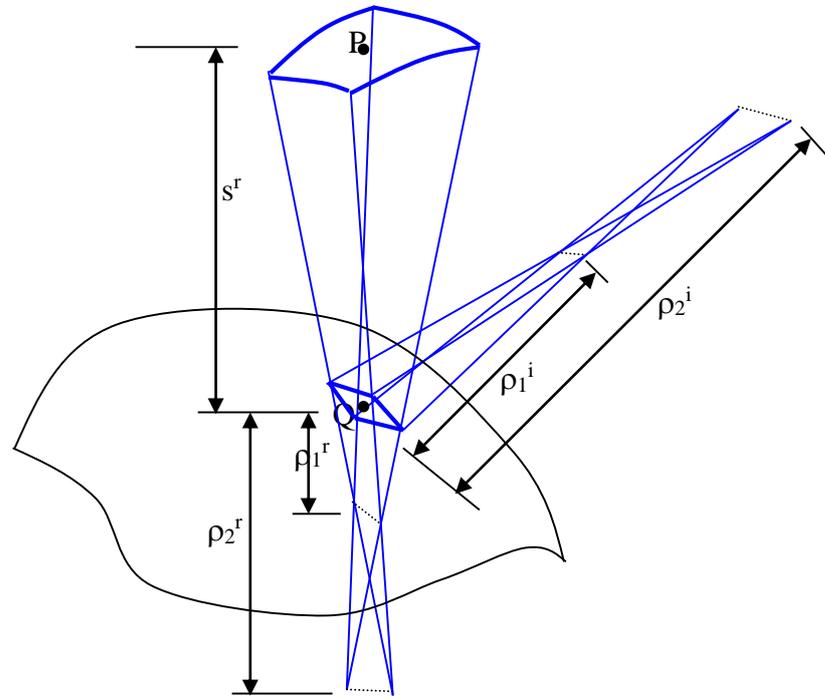


Figure II-6 : représentation d'une famille de rayons réfléchis par une surface quelconque

Soit encore, en fonction de la matrice de réflexion et du champ incident en Q :

$$[E^r(P)] = [R][E^i(Q)] \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s^r)(\rho_2^r + s^r)}} e^{-jks^r} \quad (\text{II-15})$$

Si on suppose connu le champ incident en Q, la détermination du champ au point P nécessite l'évaluation des rayons de courbures principaux ρ_1^r et ρ_2^r au point Q, de la surface équiphasse associée à la famille de rayons réfléchis.

Il s'agit d'un problème difficile de géométrie dans l'espace dont la résolution a été initiée par FOCK puis DESCHAMPS dans les années 1970. KOUYOUMJAN et PATHAK ont diagonalisé la matrice de courbure pour en extraire les valeurs propres et les vecteurs propres qui vont représenter respectivement les rayons de courbures principaux et les directions des plans principaux. On obtient :

$$\frac{1}{\rho_{1,2}^r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1^i} + \frac{1}{\rho_2^i} \right) + \frac{\cos \theta^i}{|\Gamma|^2} \left(\frac{(\Gamma_{22})^2 + (\Gamma_{12})^2}{R_1} + \frac{(\Gamma_{21})^2 + (\Gamma_{11})^2}{R_2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_1^i} - \frac{1}{\rho_2^i} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_1^i} - \frac{1}{\rho_2^i} \right) \frac{4 \cos \theta^i}{|\Gamma|^2} \left(\frac{(\Gamma_{22})^2 - (\Gamma_{12})^2}{R_1} + \frac{(\Gamma_{21})^2 - (\Gamma_{11})^2}{R_2} \right) + \frac{4 \cos^2 \theta^i}{|\Gamma|^4} \left(\frac{(\Gamma_{22})^2 + (\Gamma_{12})^2}{R_1} + \frac{(\Gamma_{21})^2 + (\Gamma_{11})^2}{R_2} \right) - \frac{4|\Gamma|^2}{R_1 R_2}} \quad (\text{II-16})$$

Dans cette expression, le signe + est associé au calcul du rayon de courbure ρ_1^r et le signe - à ρ_2^r .

L'énumération de tous les éléments géométriques qui interviennent dans cette relation, en les associant à leur représentation physique constitue un bon exercice en lui-même. Pour interpréter correctement cette relation, on a besoin de :

- \vec{N} : normale unitaire à l'élément de surface parfaitement conductrice sur laquelle a lieu la réflexion.
- \vec{U}_1, \vec{U}_2 : vecteurs unitaires dans les directions principales de la surface au point Q
- \vec{X}_1^i, \vec{X}_2^i : vecteurs unitaires dans les directions principales du front d'onde incident.
- ρ_1^i, ρ_2^i : rayons de courbure principaux du faisceau incident au point Q.
- ρ_1^r, ρ_2^r : rayons de courbure principaux du faisceau réfléchi au point Q.
- R_1, R_2 : rayons de courbure principaux de l'élément de surface parfaitement conductrice entourant le point Q.
- θ^i : angle d'incidence par rapport à la normale \vec{N} à la surface parfaitement conductrice au point Q
- \vec{X}_1^r, \vec{X}_2^r : vecteurs unitaires orthogonaux aux rayons réfléchis : ces deux vecteurs ne sont pas, en général, dans les directions principales du front d'onde réfléchi. Ils sont obtenus par réflexion des vecteurs unitaires \vec{X}_1^i, \vec{X}_2^i sur le plan tangent à la surface parfaitement conductrice en Q suivant la relation :

$$\vec{X}_{1,2}^r = \vec{X}_{1,2}^i - 2(\vec{N} \cdot \vec{X}_{1,2}^i) \vec{N} \quad (\text{II-17})$$

On pose également dans l'expression (II-16) :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \vec{X}_1^i \cdot \vec{U}_1 & \vec{X}_1^i \cdot \vec{U}_2 \\ \vec{X}_2^i \cdot \vec{U}_1 & \vec{X}_2^i \cdot \vec{U}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II-18})$$

Soit pour chacun des termes de la matrice (II-18) :

$$\Gamma_{jk} = \vec{X}_j^i \cdot \vec{U}_k \quad (\text{II-19})$$

III-3 – Cas particuliers.

Lorsque l'onde incidente est sphérique, les deux rayons de courbure principaux du front d'onde incident sont égaux et on peut poser :

$$\rho_1^i = \rho_2^i = \rho^i \quad (\text{II-20})$$

On pose également :

- θ_1 : angle entre la direction du rayon incident et \vec{U}_1
- θ_2 : angle entre la direction du rayon incident et \vec{U}_2

On obtient alors l'expression simplifiée :

$$\frac{1}{\rho_{1,2}^r} = \frac{1}{\rho^i} + \frac{1}{\cos \theta^i} \left(\frac{\sin^2(\theta_2)}{R_1} + \frac{\sin^2(\theta_1)}{R_2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{\cos \theta^i} \left(\frac{\sin^2(\theta_2)}{R_1} + \frac{\sin^2(\theta_1)}{R_2} \right) - \frac{4}{R_1 R_2}} \quad (\text{II-21})$$

Si on pose ω : angle entre le plan d'incidence (\vec{s}^i, \vec{N}) et le plan orthogonal à l'élément de surface parfaitement conductrice qui inclut la direction principale \vec{U}_2 : (\vec{U}_2, \vec{N}) , on peut donner une relation qui exprime θ_1 et θ_2 en fonction de ω et de θ^i :

$$\sin^2(\theta_1) = \cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)\cos^2(\theta^i) \quad (\text{II-22})$$

$$\sin^2(\theta_2) = \sin^2(\omega) + \cos^2(\omega)\cos^2(\theta^i) \quad (\text{II-23})$$

Lorsque le plan d'incidence contient l'une des directions principales de l'élément de surface parfaitement conductrice (par exemple \vec{U}_2), on a $\omega = 0$, et on obtient les relations épurés ci-dessous :

$$\frac{1}{\rho_1^r} = \frac{1}{\rho^i} + 2 \frac{\cos \theta^i}{R_1} \quad (\text{II-24})$$

$$\frac{1}{\rho_2^r} = \frac{1}{\rho^i} + \frac{2}{R_2 \cos \theta^i} \quad (\text{II-25})$$

Nous examinerons pour conclure le cas particulier d'un problème à deux dimensions (figure II-7) :

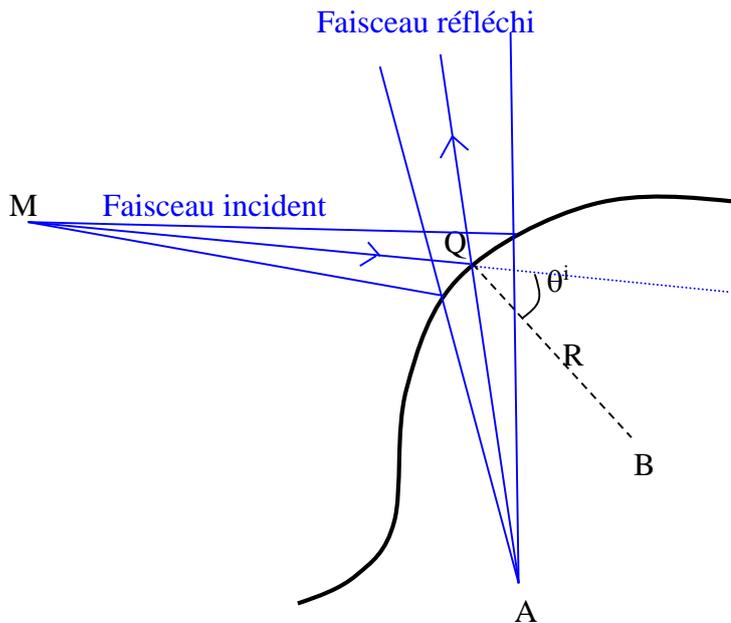


Figure II-7 : Réflexion d'un faisceau de rayons sur une surface parfaitement conductrice, en deux dimensions.

On identifie sur la figure (II-8) :

- $\rho^i = MQ$: rayon de courbure de la surface équiphase du faisceau incident
- $R = QB$: rayon de courbure de la surface parfaitement conductrice.
- $\rho^r = QA$: rayon de courbure de la surface équiphase du faisceau réfléchi
- θ^i : angle(QA , QB) : angle d'incidence par rapport à la normale à la surface.

Le rayon de courbure du faisceau réfléchi s'obtient alors par la relation :

$$\frac{1}{\rho^r} = \frac{1}{\rho^i} + \frac{2}{R \cos \theta^i} \quad (\text{II-26})$$

Si l'onde incidente est une onde plane, ρ^i tend vers l'infini et on obtient :

$$\rho^r = \frac{R \cos \theta^i}{2} \quad (\text{II-27})$$

On note que lorsque θ^i tend vers $\pi/2$, la relation (II-26) diverge, et il faudra donc traiter de manière particulière le cas d'une incidence rasante.

III - La théorie géométrique de la diffraction

L'optique géométrique telle que nous l'avons définie permet de décrire de manière satisfaisante l'évolution de la phase et de l'amplitude d'une onde haute fréquence qui se propage en espace libre. Elle se montre en difficulté dès qu'elle doit être utilisée en présence d'un obstacle (Figure III-1) :

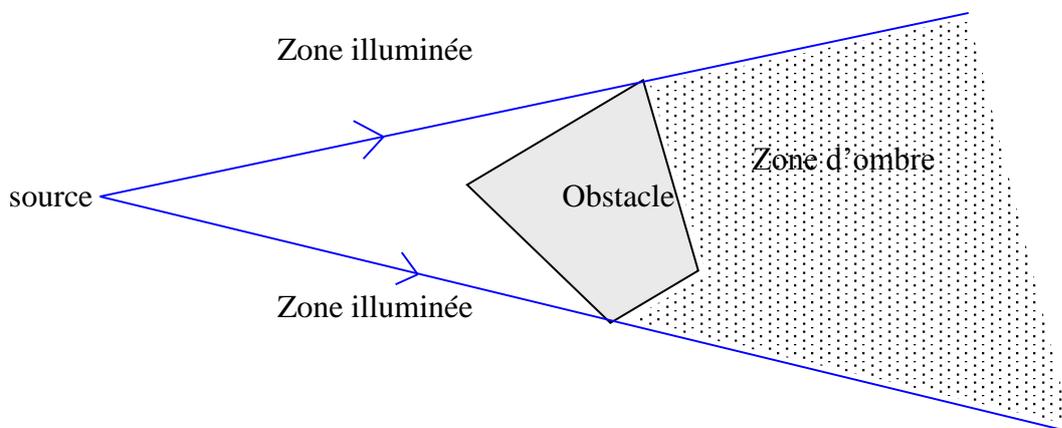


Figure III-1 : *Rayons de l'optique géométrique en présence d'un obstacle*

Une théorie de rayons permet d'obtenir un calcul correct du champ dans la zone illuminée, mais donne un champ nul dans la zone d'ombre, ce qui constitue une approximation trop grossière pour une majorité d'applications.

La théorie géométrique de la diffraction vient compléter la théorie de l'optique géométrique en introduisant des rayons diffractés qui vont permettre de décrire avec précision (sans être exact pour autant car il s'agit d'une méthode asymptotiquement valide aux hautes fréquences) les champs électromagnétiques qui sont présents dans les zones d'ombre.

On doit à KELLER l'idée originale du prolongement des lois de l'optique géométrique à des phénomènes de diffraction, et à KOUYOUMJAN et PATHAK une mise en forme rigoureuse et l'élaboration de formulations uniformes pour décrire le champ diffracté.

I - Le postulat de la théorie géométrique de la diffraction

La cohérence de cette théorie est fondée sur le fait que les rayons diffractés doivent obéir aux mêmes lois que la théorie de l'optique géométrique.

I-1 – La diffraction est un phénomène local aux hautes fréquences

L'optique géométrique a montré comment la réflexion sur une surface parfaitement conductrice pouvait être évaluée à partir de la seule connaissance de l'élément de surface infiniment petit qui entoure le point de la surface où le rayon se réfléchit.

Keller postule qu'aux hautes fréquences, la diffraction est également un phénomène local, et qu'elle ne dépend que de la forme de l'objet diffractant au voisinage du point de diffraction.

L'hypothèse d'un phénomène local simplifie grandement les calculs de champs diffractés. Après avoir déterminé le point de diffraction, on remplace ce dernier, localement par une structure « canonique » dont on connaît la solution exacte ou asymptotique à un problème de diffraction : ces solutions sont élaborées pour des structures élémentaires et peu nombreuses : pointes, arêtes et cylindre.

La théorie géométrique de la diffraction est chargée de fournir toutes les caractéristiques des rayons diffractés, en fonction de celles des rayons incidents et de la nature locale de la surface au point de diffraction.

I-2 – Le principe de FERMAT s'applique aux rayons diffractés

Le cas de l'arête

Si on tente d'appliquer le principe de FERMAT à un phénomène de diffraction par une arête, on doit admettre que la trajectoire d'un rayon issu d'un point source M à un point d'observation P est telle que le chemin optique entre M et P, avec un point Q du trajet situé sur l'arête, est stationnaire pour des variations infinitésimales de ce trajet.

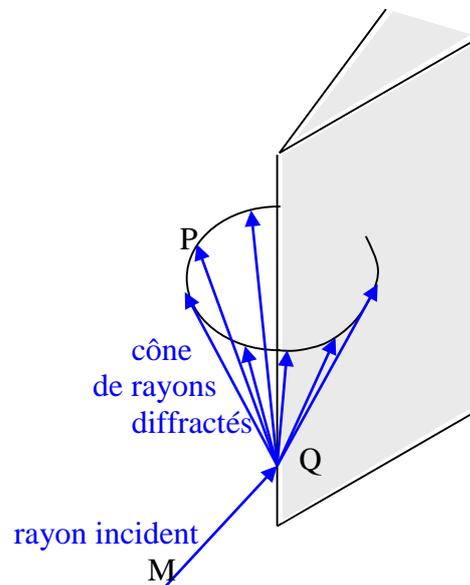


Figure III-2 : Cône de KELLER formé par les rayons diffractés qui obéissent au principe de FERMAT

L'application de ce principe conduit à identifier un faisceau de rayons diffractés qui forment un cône autour de l'arête, appelé cône de KELLER (Figure III-1).

Le cas d'une surface

Lorsque l'obstacle est constitué par une surface régulière (sans arêtes), la théorie montre que la zone d'ombre est atteinte par des rayons « rampants » sur la surface diffractante à partir du point illuminé le plus proche Figure (III-1).

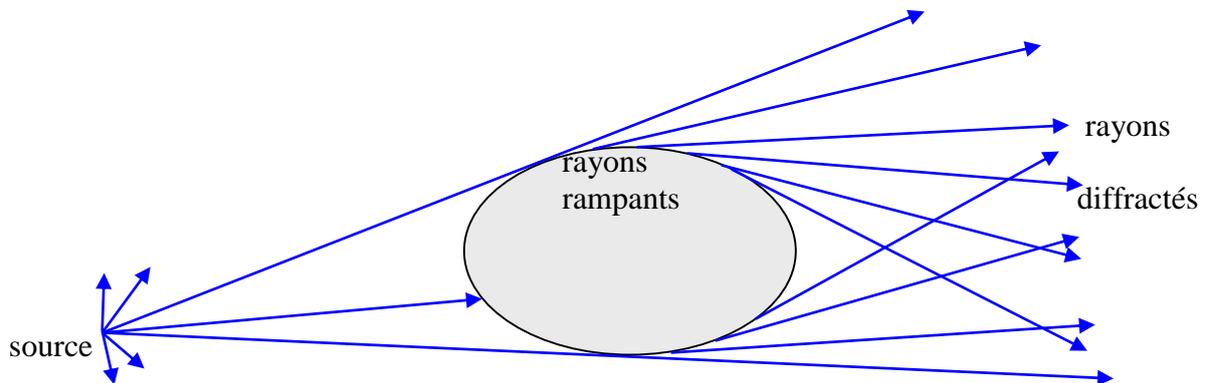


Figure III-3 : Représentation des rayons rampants et diffractés par un obstacle « lisse »

Ces rayons rampants sont éjectés tangentiellement à la surface vers la zone d'ombre et contribuent à générer le champ présent dans cette région.

Ces rayons obéissent au principe de FERMAT, et donc « rampent » sur la surface en suivant le trajet le plus court possible, c'est à dire une géodésique de la surface, avant de rejoindre le point d'observation dans la zone d'ombre..

I-3 Les calculs de champ de l'optique géométrique s'appliquent aux rayons diffractés

Loin de la structure, les rayons diffractés obéissent aux lois de l'optique géométrique. Les calculs de phase et d'amplitude seront donc calqués sur ceux que nous avons exposés en optique géométrique. Une attention particulière devra être portée au front d'onde du champ diffracté issu d'une arête, car cette dernière constitue par définition une caustique du faisceau de rayon.

II – Principe du calcul de champ électromagnétique par TGD

Il est instructif d'examiner, sur un exemple simple, comment la Théorie Géométrique de la Diffraction permet de calculer les champs électromagnétiques en présence d'une structure diffractante.

Nous considérons la situation simple où une onde plane tombe en incidence oblique sur un demi-plan parfaitement conducteur. Notre propos est comprendre comment on obtient le champ total en un point d'observation quelconque de l'espace, par une théorie de rayons.

On distingue sur la figure III-3, trois types de rayons : des rayons incidents, des rayons réfléchis, et des rayons diffractés.

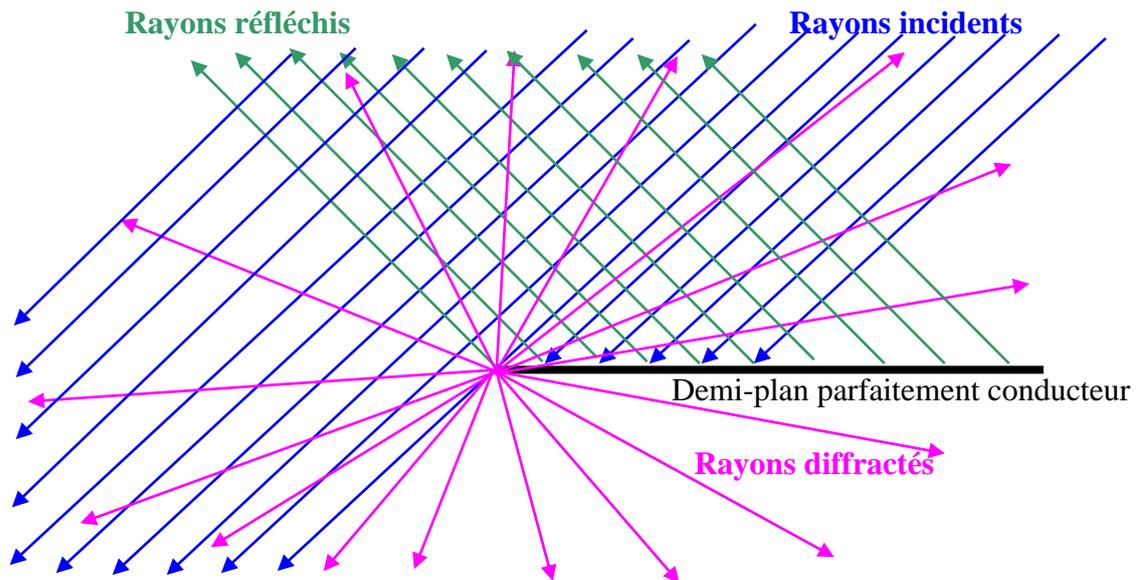


Figure III-4 : Représentation des différents types de rayons générés par une structure diffractante.

Cela conduit à différencier trois zones d'espace par la nature des rayons présents dans ces zones (Figure III-4)

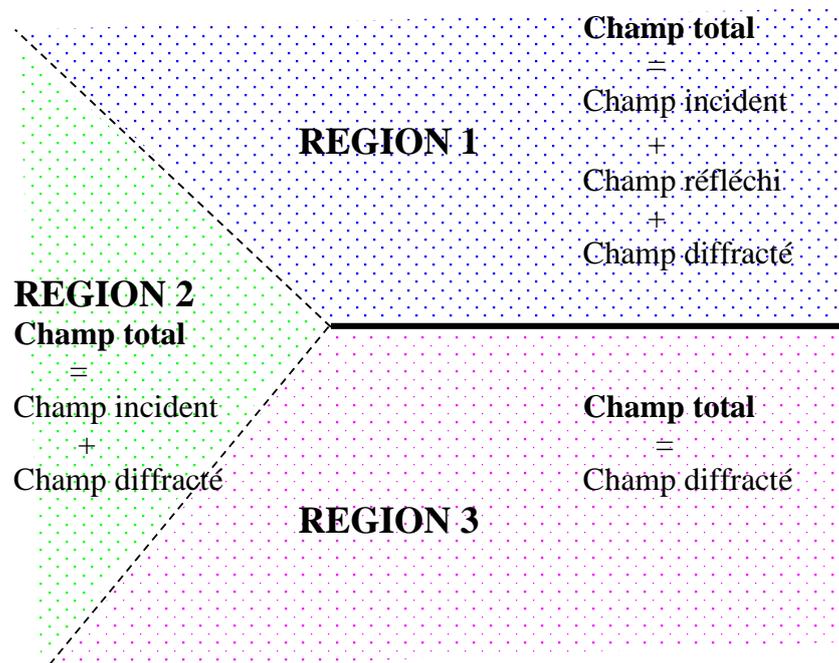


Figure III-5 : Représentation des catégories de rayon présentes dans chaque région de l'espace

Nous adopterons la notation suivante : \vec{U}^i représente le champ incident tangent à la structure, avec la convention suivante :

$$- \vec{U}^i = \vec{E}^i \text{ en polarisation électrique}$$

$$- \vec{U}^i = \vec{H}^i \text{ en polarisation magnétique}$$

Le champ réfléchi est représenté avec la même convention, indiquée par la lettre r. Les champs incidents et réfléchis correspondent aux termes de l'optique géométrique.

Dans la région 1, sont présents à la fois les rayons incidents, réfléchis, et diffractés. A l'extrémité de cette région (demi-droite en pointillés) appelée limite de la zone de réflexion, le champ réfléchi disparaît, donnant lieu à une discontinuité des champs calculés par l'optique géométrique. La Théorie Géométrique de la Diffraction introduit un rayon diffracté qui compense exactement cette discontinuité.

Dans la région 2, sont présents les champs incidents et diffractés. A l'extrémité de cette région (demi-droite en pointillés) appelée limite de la zone illuminée ou limite de la zone d'ombre, le champ incident disparaît, donnant lieu à une nouvelle discontinuité des termes de l'optique géométrique. Là encore, cette discontinuité est exactement compensée par le rayon diffracté qui est introduit de part et d'autre de cette limite.

Dans la situation simple décrite ci-dessus (incidence normale), on peut donner une formulation du champ total en un point d'observation quelconque de l'espace de manière relativement intuitive :

$$\vec{U}(\mathbf{P}) = Y^i \vec{U}^i(\mathbf{P}) + Y^r \vec{U}^r(\mathbf{P}) + \vec{U}^d(\mathbf{P}) \quad (\text{III-1})$$

et puisque ces vecteurs sont tous parallèles, cette relation reste vraie en écriture scalaire :

$$U(\mathbf{P}) = Y^i U^i(\mathbf{P}) + Y^r U^r(\mathbf{P}) + U^d(\mathbf{P}) \quad (\text{III-2})$$

$Y^{i,r}$ sont des échelons unités qui indiquent la présence ou l'absence respectivement du champ incident et réfléchi :

- $Y^i = 1$ dans la région 1 et 2 ; $Y^i = 0$ dans la région 3
- $Y^r = 1$ dans la région 1 ; $Y^r = 0$ dans les régions 2 et 3

III –Le système de coordonnées

Comme dans le cas de la réflexion, lorsqu'on associe une polarisation au rayon incident, il est nécessaire de définir avec précision le système de coordonnées dans lequel on exprime cette polarisation.

Dans le cas d'une diffraction par un dièdre, la figure III-5 indique les éléments géométriques et les notations utilisées.

Le rayon incident arrive sur l'arête avec une incidence oblique faisant un angle β_0 avec la tangente à l'arête.

Le plan d'incidence est défini par le rayon incident et le vecteur tangent à l'arête. Cette définition, couramment adoptée, n'est pas très heureuse, car elle ne coïncide pas avec la définition du plan d'incidence utilisée en réflexion : ces deux plans sont orthogonaux.

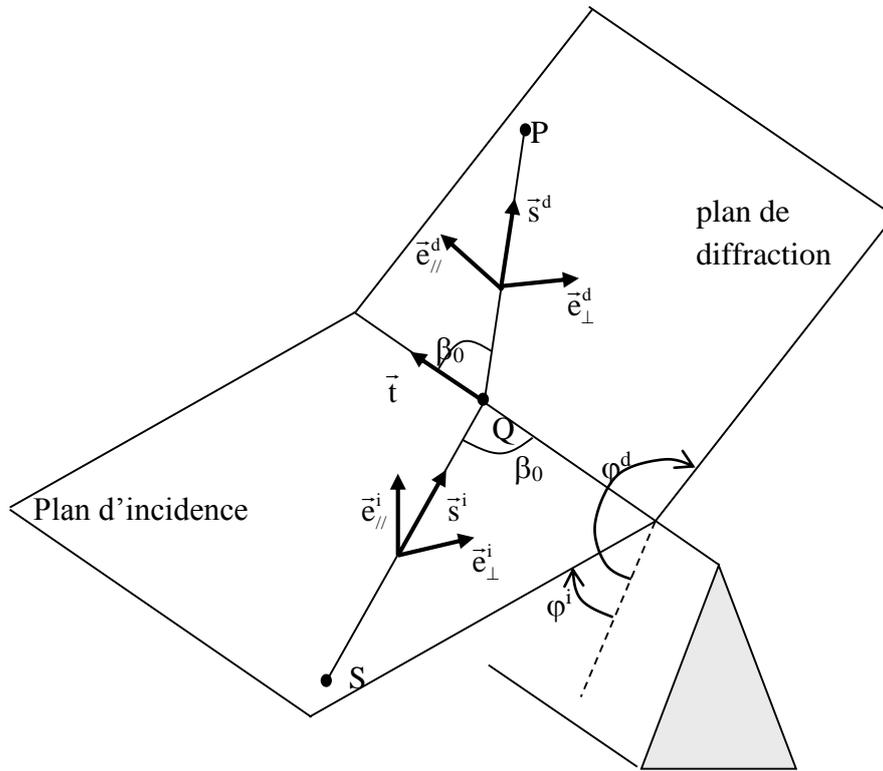


Figure III-6 : Représentation des bases locales associées aux rayons incidents et diffractés

Afin de conserver la cohérence de la notation entre rayons réfléchis et rayons diffractés, les vecteurs unitaires parallèles et orthogonaux correspondent aux définitions des rayons réfléchis : $\vec{e}_{//} = \vec{e}_{\perp} \wedge \vec{s}$

On peut écrire dans les bases locales associées à chaque rayon (incident et diffracté) :

$$\vec{E}^i = E_{//}^i \vec{e}_{//}^i + E_{\perp}^i \vec{e}_{\perp}^i \quad (\text{III-3})$$

$$\vec{E}^d = E_{//}^d \vec{e}_{//}^d + E_{\perp}^d \vec{e}_{\perp}^d \quad (\text{III-4})$$

Si on se place au point de diffraction Q, le champ diffracté s'exprime en fonction du champ incident par un coefficient de diffraction qui dépend de la polarisation, ce que l'on peut résumer sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} E_{//}^d(Q) \\ E_{\perp}^d(Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{//} & 0 \\ 0 & D_{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{//}^i(Q) \\ E_{\perp}^i(Q) \end{bmatrix} \quad (\text{III-5})$$

Le champ diffracté obéissant aux lois de l'optique géométrique, il est nécessaire de déterminer les rayons de courbures principaux de la famille de rayons diffractés, afin de pouvoir déterminer le champ en un point quelconque de l'espace.

L'examen des solutions exactes montre que le champ diffracté apparaît toujours comme issu de l'arête. Cette dernière constitue donc une caustique pour la famille de rayons diffractés, et le champ au point d'observation P, à une distance $s^d = QP$ du point de diffraction, s'obtient en fonction du champ incident au point Q suivant la relation :

$$\begin{bmatrix} E_{//}^d(P) \\ E_{\perp}^d(P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{//} & 0 \\ 0 & D_{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{//}^i(Q) \\ E_{\perp}^i(Q) \end{bmatrix} \sqrt{\frac{\rho^d}{s^d(\rho^d + s^d)}} e^{-jks^d} \quad (\text{III-6})$$

Il reste à préciser la valeur de ρ^d qui est la distance entre la seconde caustique et le point de diffraction Q (Figure III-6).

Cette valeur a été établie pour la première fois par KELLER, mais on doit à KOUYOUMJAN et PATHAK une formulation simplifiée :

$$\frac{1}{\rho^d} = \frac{1}{\rho_{inc}^i} - \frac{\vec{n} \cdot (\vec{s}^i - \vec{s}^d)}{R \sin^2 \beta_0} \quad (\text{III-7})$$

dans laquelle ρ_{inc}^i désigne le rayon de courbure de l'onde incidente, pris non pas dans l'un des plan principaux, mais dans le plan d'incidence. Il peut s'exprimer en fonction des rayons de courbure dans les plan principaux ρ_1^i et ρ_2^i ; et de l'angle α entre la tangente à l'arête \vec{t} et la direction principale \vec{U}_1^i :

$$\frac{1}{\rho_{inc}^i} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho_1^i} + \frac{\sin^2 \alpha}{\rho_2^i} \quad (\text{III-8})$$

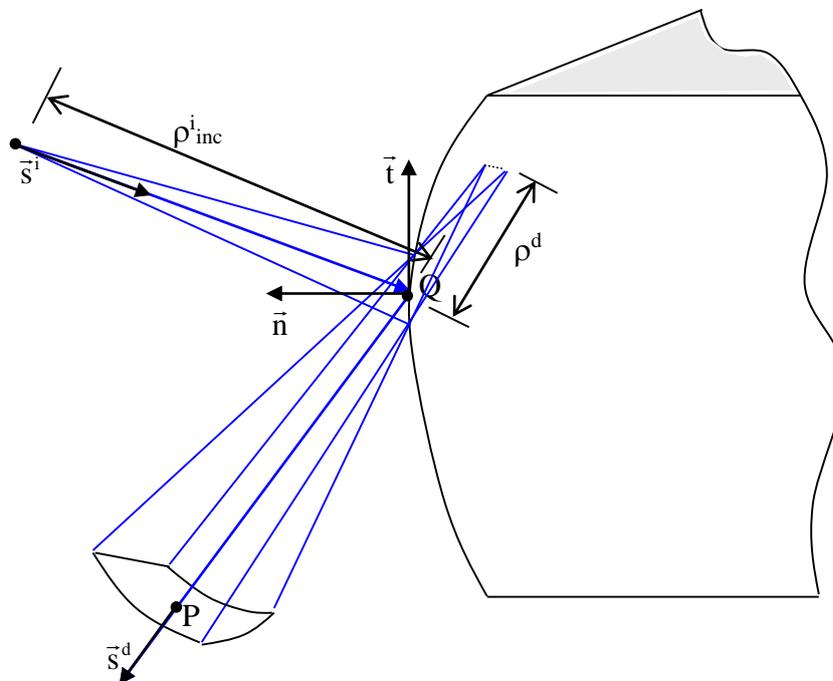


Figure III-7 : Représentation du faisceau diffracté par une arête

IV - Diffraction d'une onde plane par un demi-plan parfaitement conducteur

Dans le chapitre précédent, nous avons laissé en suspens le coefficient qui permet de relier le champ diffracté au champ incident, appelé coefficient de diffraction.

Une des difficultés auxquelles la Théorie Géométrique de la Diffraction a été confrontée est celle de l'élaboration de coefficients de diffraction qui permettent d'obtenir des résultats asymptotiquement valides dans toutes les régions de l'espace.

A cet égard, l'analyse du cas canonique de la diffraction d'une onde plane par un plan parfaitement conducteur constitue une base et une confirmation de la validité de la théorie, car le champ total se présente pratiquement sous une forme directement compatible avec la GTD.

I- La solution exacte à la diffraction d'une onde plane par un demi-plan

On doit cette solution à A. SOMMERFELD, suivant une méthode qui sera généralisé par P.C. CLEMMOW et qui consiste à rechercher des solutions sous la forme d'un spectre d'ondes planes.

Dans la situation décrite par la figure IV-1, une onde plane en incidence normale au point P peut s'exprimer en coordonnées cartésiennes ou cylindriques suivant la relation :

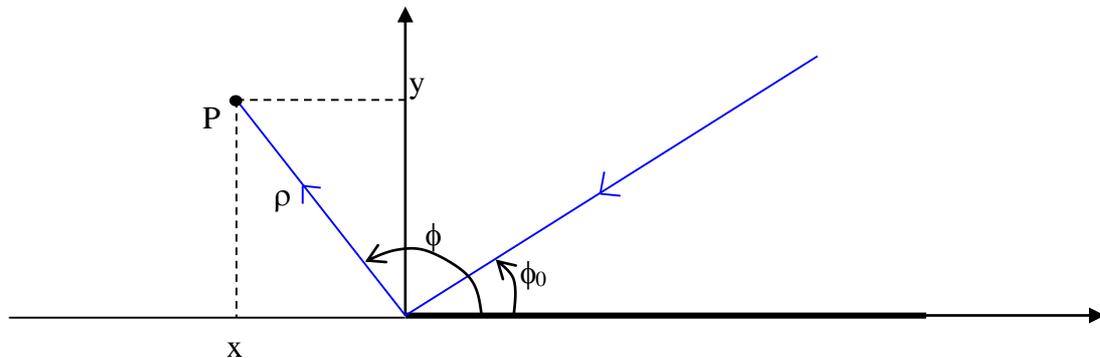


Figure IV-1 : Représentation d'une onde plane incidente sur un demi-plan parfaitement conducteur, et du point d'observation P.

$$\vec{U}^i = U_0 e^{-jk(x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0)} \vec{e}_z \quad (\text{IV-1})$$

$$\vec{U}^i = U_0 e^{jk\rho \cos(\phi - \phi_0)} \vec{e}_z \quad (\text{IV-2})$$

où U représente le champ électrique E en polarisation électrique, et le champ magnétique H en polarisation magnétique.

Le problème étant à symétrie cylindrique, nous utiliserons désormais le système de coordonnées correspondant.

Le champ réfléchi au point P, situé dans la zone de réflexion, s'écrit dans ces conditions:

$$\vec{U}^r = U_0 e^{jk\rho \cos(\phi + \phi_0)} \vec{e}_z \quad (\text{IV-3})$$

Le champ total entourant l'arête dépend de la polarisation de l'onde incidente : la réflexion sur le plan parfaitement conducteur change le signe du champ électrique tangentiel réfléchi, mais pas celui du champ magnétique tangentiel.

Le champ total au point P, pour une onde incidente d'amplitude unité, déduit de la solution de SOMMERFELD, s'écrit en polarisation électrique :

$$\begin{aligned} E_{\text{Total}} = & Y \left[\cos \frac{\phi - \phi_0}{2} \right] e^{jk\rho \cos(\phi - \phi_0)} - \text{Sgn} \left(\cos \frac{\phi - \phi_0}{2} \right) K_- \left(\sqrt{2k\rho \cos^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} \right) e^{-jk\rho} \\ & - \left\{ Y \left[\cos \frac{\phi + \phi_0}{2} \right] e^{jk\rho \cos(\phi + \phi_0)} - \text{Sgn} \left(\cos \frac{\phi + \phi_0}{2} \right) K_- \left(\sqrt{2k\rho \cos^2 \frac{\phi + \phi_0}{2}} \right) e^{-jk\rho} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV-4})$$

où Y représente l'échelon de HEAVYSIDE et K_- une forme particulière de l'intégrale de FRESNEL :

$$K_-(x) = \sqrt{\frac{j}{\pi}} e^{jx^2} \int_x^\infty e^{-j\tau^2} d\tau \quad (\text{IV-5})$$

L'expression correspondante en polarisation magnétique s'obtient en changeant le signe de la deuxième ligne :

$$\begin{aligned} H_{\text{Total}} = & Y \left[\cos \frac{\phi - \phi_0}{2} \right] e^{jk\rho \cos(\phi - \phi_0)} - \text{Sgn} \left(\cos \frac{\phi - \phi_0}{2} \right) K_- \left(\sqrt{2k\rho \cos^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} \right) e^{-jk\rho} \\ & + \left\{ Y \left[\cos \frac{\phi + \phi_0}{2} \right] e^{jk\rho \cos(\phi + \phi_0)} - \text{Sgn} \left(\cos \frac{\phi + \phi_0}{2} \right) K_- \left(\sqrt{2k\rho \cos^2 \frac{\phi + \phi_0}{2}} \right) e^{-jk\rho} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV-6})$$

Les termes de cette expression s'identifient exactement aux rayons utilisés dans la théorie géométrique de la diffraction :

$$Y \left[\cos \frac{\phi - \phi_0}{2} \right] e^{jk\rho \cos(\phi - \phi_0)} \quad (\text{IV-7})$$

correspond au champ incident, l'échelon de HEAVYSIDE prenant la valeur 1 lorsque le rayon incident est présent dans la zone illuminée, et la valeur 0 dans la zone d'ombre.

$$Y \left[\cos \frac{\phi + \phi_0}{2} \right] e^{jk\rho \cos(\phi + \phi_0)} \quad (IV-8)$$

correspond au champ réfléchi, l'échelon de HEAVYSIDE prenant la valeur 1 lorsque le rayon incident est présent dans la zone de réflexion, et la valeur 0 dans la zone où il n'existe pas de rayons réfléchis.

$$U_d = - \left\{ \begin{array}{l} \text{Sgn} \left(\cos \frac{\phi - \phi_0}{2} \right) \text{K}_- \left(\sqrt{2k\rho \cos^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} \right) e^{-jk\rho} \\ \mp \text{Sgn} \left(\cos \frac{\phi + \phi_0}{2} \right) \text{K}_- \left(\sqrt{2k\rho \cos^2 \frac{\phi + \phi_0}{2}} \right) e^{-jk\rho} \end{array} \right\} \quad (IV-9)$$

correspond au champ diffracté qui est présent dans toutes les régions de l'espace, le signe – est associé à la polarisation électrique ($U = E$), le signe + à la polarisation magnétique ($U = H$).

On constate que l'expression (IV-9) est composée de deux termes de diffraction, l'un clairement associé au champ incident, et l'autre au champ réfléchi. Ces termes sont quelquefois dissociés de la manière suivante :

$$U_d^i = -\text{Sgn} \left(\cos \frac{\phi - \phi_0}{2} \right) \text{K}_- \left(\sqrt{2k\rho \cos^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} \right) e^{-jk\rho} \quad (IV-10)$$

$$U_d^r = -\text{Sgn} \left(\cos \frac{\phi + \phi_0}{2} \right) \text{K}_- \left(\sqrt{2k\rho \cos^2 \frac{\phi + \phi_0}{2}} \right) e^{-jk\rho} \quad (IV-11)$$

ce qui permet d'écrire le champ diffracté sous la forme :

$$U_d = (U_d^i \mp U_d^r) \quad (IV-12)$$

Le terme de propagation en $e^{-jk\rho}$ exprime le fait que tous les rayons diffractés sont issus de l'arête qui constitue donc une caustique pour le faisceau de rayons diffractés.

Les changements de signes des expressions (IV-10, 11) qui s'opèrent au niveau des frontières d'ombre et de réflexion jouent un rôle fondamental repris dans le paragraphe suivant.

II- La continuité du champ total

Le champ calculé en prenant en compte seulement les termes de l'optique géométrique s'écrit :

$$\bar{U}_{OG} = \bar{U}^i \mp \bar{U}^r = Y \left[\cos \frac{\phi - \phi_0}{2} \right] e^{jk\rho \cos(\phi - \phi_0)} \mp Y \left[\cos \frac{\phi + \phi_0}{2} \right] e^{jk\rho \cos(\phi + \phi_0)} \quad (IV-13)$$

Les échelons de HEAVYSIDE qui traduisent la présence ou l'absence des rayons incidents et réfléchis, rendent le champ de l'optique géométrique discontinu au voisinage de :

$$\cos \frac{\phi - \phi_0}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \cos \frac{\phi + \phi_0}{2} = 0 \quad (\text{IV-14})$$

soit encore :

$$\phi - \phi_0 = \pm\pi \quad \text{et} \quad \phi + \phi_0 = \pi \text{ ou } 3\pi \quad (\text{IV-15})$$

Les limites correspondant à ces discontinuités sont représentés sur la figure IV-2, est sont appelées limite de la région ombre-lumière, et limite de la région de réflexion.

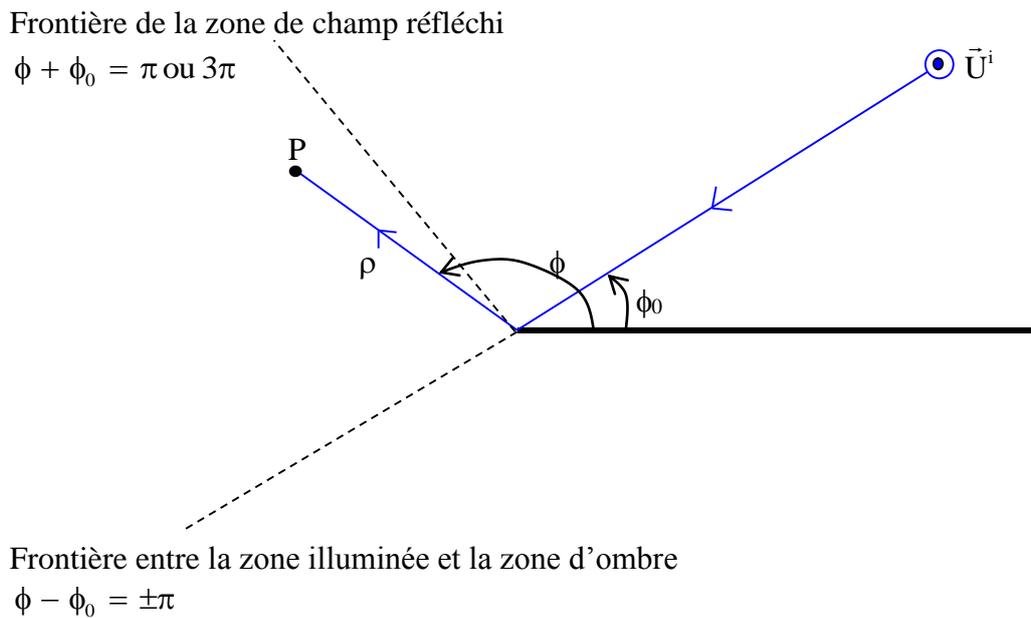


Figure IV-2 : Représentation des frontières de discontinuité de l'optique géométrique

Sur ces frontières, la solution exacte qui représente le champ total est nécessairement continue et on en déduit que ce sont les rayons diffractés qui doivent assurer cette continuité.

Sur la frontière de réflexion :

Le champ réfléchi de l'optique géométrique devient :

$$U^r = Y \left[\cos \frac{\phi + \phi_0}{2} \right] e^{jk\rho \cos(\phi + \phi_0)} = e^{-jk\rho} \text{ ou } 0 \quad (\text{IV-16})$$

suivant que l'on se place dans la zone de réflexion, ou dans la zone sans rayon réfléchi.

Le champ diffracté associé au champ réfléchi devient de chaque côté de la frontière :

$$U_d^r = -\text{Sgn} \left(\cos \frac{\phi + \phi_0}{2} \right) K_- \left(\sqrt{2k\rho \cos^2 \frac{\phi + \phi_0}{2}} \right) e^{-jk\rho} = \mp K_-(0) e^{-jk\rho} = \mp \frac{1}{2} e^{-jk\rho} \quad (\text{IV-17})$$

Si on fait la somme des deux termes (IV-16) et (IV-17), on obtient de chaque côté de la frontière un champ identique qui assure donc la continuité du champ total :

$$U^r + U_d^r = \frac{1}{2} e^{-jk\rho} \quad (\text{IV-18})$$

Sur la frontière ombre lumière

Le champ incident de l'optique géométrique devient :

$$U^i = Y \left[\cos \frac{\phi - \phi_0}{2} \right] e^{jk\rho \cos(\phi - \phi_0)} = e^{-jk\rho} \text{ ou } 0 \quad (\text{IV-19})$$

suivant que l'on se place dans la zone illuminée, ou dans la zone d'ombre.

Le champ diffracté associé au champ incident devient de chaque côté de la frontière ombre-lumière :

$$U_d^i = -\text{Sgn} \left(\cos \frac{\phi - \phi_0}{2} \right) K_- \left(\sqrt{2k\rho \cos^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} \right) e^{-jk\rho} = \mp K_-(0) e^{-jk\rho} = \mp \frac{1}{2} e^{-jk\rho} \quad (\text{IV-20})$$

Si on fait la somme des deux termes (IV-19) et (IV-20), on obtient de chaque côté de la frontière ombre-lumière un champ identique qui assure donc la continuité du champ total :

$$U^i + U_d^i = \frac{1}{2} e^{-jk\rho} \quad (\text{IV-21})$$

On confirme donc par ces résultats que les rayons qui portent le champ diffracté assurent la continuité du champ total autour des frontières de l'optique géométrique.

D'un point de vue physique, pour assurer cette continuité au voisinage de la frontière ombre lumière, les rayons diffractés doivent avoir une structure d'onde plane quelle que soit la distance de l'arête à laquelle on se situe. Leur amplitude est donc constante le long de cette frontière. Lorsqu'on s'éloigne de cette frontière, le champ diffracté apparaît comme issu de l'arête et prend donc une structure d'onde cylindrique. C'est la fonction de FRESNEL modifiée qui assure cette transition, et nous proposons de faire une présentation succincte de ses propriétés.

III- La fonction de FRESNEL modifiée K₋

L'intégrale de FRESNEL classique qui intervient dans les phénomènes de diffraction optique se présente sous la forme :

$$F(x) = \int_x^\infty e^{j\tau^2} d\tau \quad (\text{IV-22})$$

La fonction K₋(x) utilisée en TGD est construite à partir de l'intégrale de FRESNEL en introduisant un terme multiplicatif :

$$K_-(x) = \sqrt{\frac{j}{\pi}} e^{jx^2} F(x) = \sqrt{\frac{j}{\pi}} e^{jx^2} \int_x^\infty e^{j\tau^2} d\tau \quad (\text{IV-23})$$

Elle possède les propriétés suivantes :

$$a) K_{-}(0) = \frac{1}{2} \quad (IV-24)$$

$$b) K_{-}(x \rightarrow \infty) = \frac{1}{2x\sqrt{j\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} j^n \left(\frac{1}{2}\right)_n x^{-2n} \quad (IV-25)$$

avec :

$$\left(\frac{1}{2}\right)_0 = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} + n - 1\right) \quad (IV-26)$$

$$c) K_{-}(-x) = e^{jx^2} - K_{-}(x) \quad (IV-27)$$

$$d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a e^{-k\rho x^2}}{x^2 + ja^2} dx = \text{Sgn}(a)(2\pi)K_{-}\left(a\sqrt{k\rho}\right) e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad (IV-28)$$

Les représentations graphiques de ses parties réelles et imaginaires, ainsi que module et argument sont données ci-dessous.

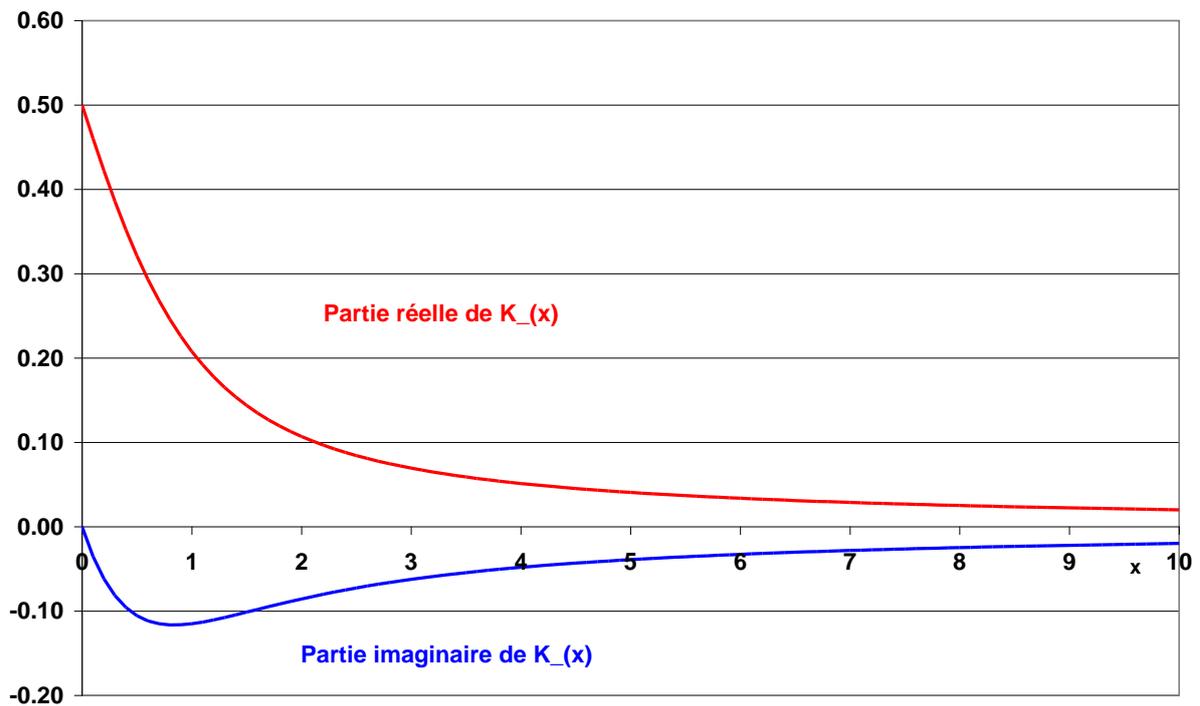


Figure IV-3 : Partie réelle et imaginaire de la fonction de FRESNEL modifiée $K_{-}(x)$

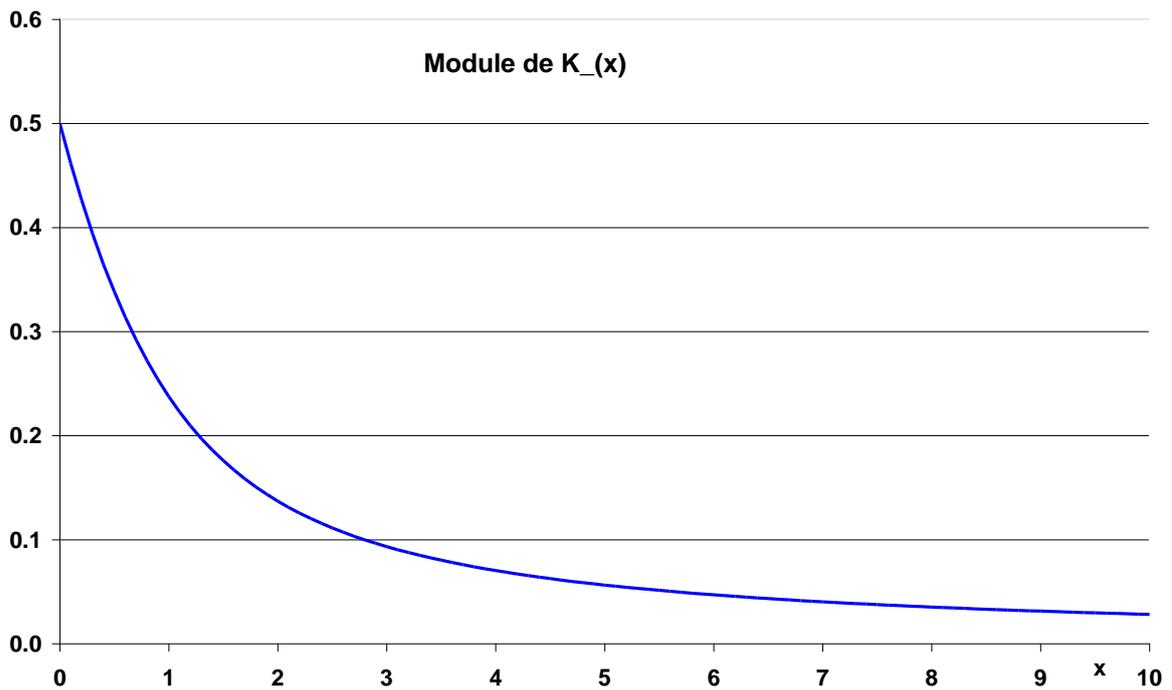


Figure IV-4 : Module de la fonction de FRESNEL modifiée $K_{\text{}}(x)$

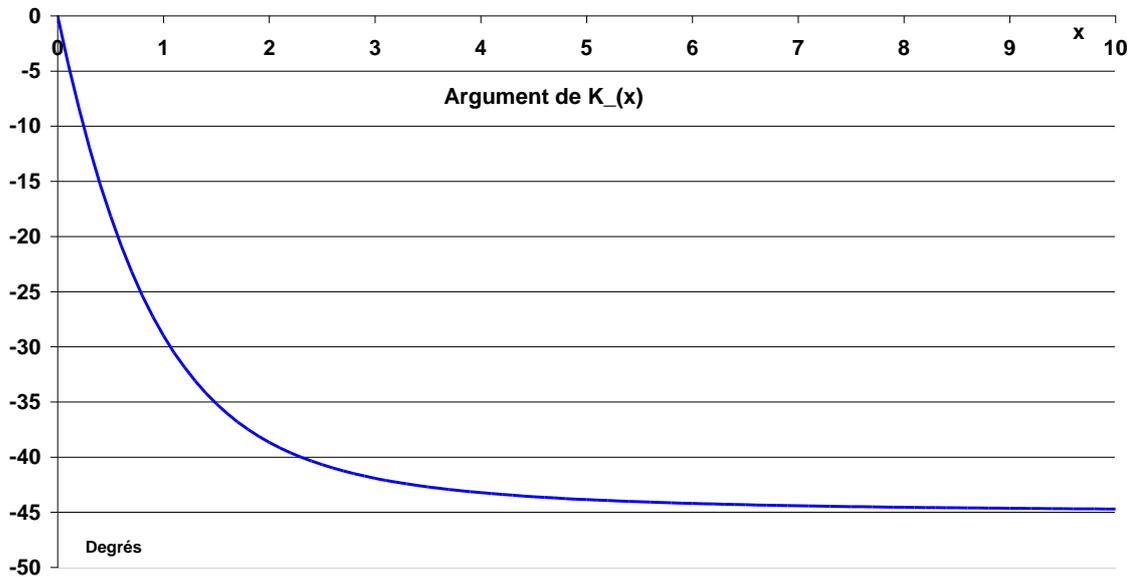


Figure IV-5 : Argument de la fonction de FRESNEL modifiée $K_{\text{}}(x)$

Le programme ci-dessous, facilement transposable dans un langage informatique usuel permet de calculer la fonction $K_{\text{}}(x)$. Il prend comme paramètre d'entrée la variable x , et rend les parties réelles et imaginaires de $K_{\text{}}(x)$.

```

const AK2:array[0..50] of real=(0.5,0.4603,0.4219,0.3857,0.352,0.3213,
0.2933,0.2682,0.2457,0.2256,0.2077,0.1918,0.1777,0.1651,0.1538,0.1438,0.1348,
0.1267,0.1195,0.1129,0.1070,0.1016,0.09673,0.09226,0.08816,0.0844,0.08093,
0.07773,0.07477,0.07203,0.06947,0.06709,0.06486,0.06278,0.06083,0.05899,
0.05726,0.05563,0.05409,0.05264,0.05126,0.04995,0.04871,0.04753,0.0464,
0.04533,0.0443,0.04333,0.04239,0.04149,0.04064);
  AK3:array[0..50] of real=(0,-0.03515,-0.06188,-0.08165,-0.0958,
-0.1054,-0.1116,-0.115,-0.1164,-0.1163,-0.1151,-0.1131,-0.1105,-0.1076,
-0.1045,-0.1013,-0.09807,-0.09484,-0.09167,-0.08859,-0.08562,-0.08276,
-0.08003,-0.07742,-0.07493,-0.07257,-0.07032,-0.06818,-0.06614,-0.06421,
-0.06238,-0.06063,-0.05897,-0.05739,-0.05588,-0.05444,-0.05307,-0.05177,
-0.05052,-0.04933,-0.04818,-0.04709,-0.04605,-0.04504,-0.04408,-0.04316,
-0.04227,-0.04142,-0.0406,-0.03981,-0.03905);

procedure KREIM(X:real; var RE,IM:real);
var N:0..50;
begin
  if x<=5 then begin
    N:=trunc(X/0.1);
    RE:=AK2[N] + ((AK2[N+1]-AK2[N])/0.1)*(X-(trunc(X*10+1E-9)/10));
    IM:=AK3[N] + ((AK3[N+1]-AK3[N])/0.1)*(X-(trunc(X*10+1E-9)/10));
  end
  else begin
    RE:=(1/(sqrt(8*PI)*X))*( 1+1/(2*sqr(X)));
    IM:=(1/(sqrt(8*PI)*X))*(-1+1/(2*sqr(X)));
  end;
end;

```

IV- Exemple de calculs des champs entourant l'arête d'un demi-plan parfaitement conducteur.

Les formulations théoriques décrivent les phénomènes physiques avec un haut niveau d'abstraction, particulièrement dans le cas où les fonctions mathématiques mises en jeu ne sont pas très familières, comme la fonction de FRESNEL modifiée.

La représentation de cartographies de champ aide à une compréhension plus fine des phénomènes physiques et facilite l'assimilation des phénomènes car les notions sont présentés sous un aspect différent.

Dans le cas présent, nous traitons un problème en dimension deux et nous proposons d'examiner le champ entourant l'arête à une distance ρ fixée en fonction de l'angle d'observation ϕ . Le champ est exprimé en dB, soit donc en prenant $10 \text{ Log}(U^2)$.

IV-1 Quelques exemples de champ total

Le champ total entourant l'arête doit être continu. On y distingue :

- Dans les zones où sont présents les champs incidents et réfléchis, des fortes ondulations liés aux interférences entre deux ondes d'amplitude comparable.

- Dans les zones où sont présents seulement le champ incident ou le champ réfléchi, de petites ondulations liées aux interférences entre le champ incident ou réfléchi avec un champ diffracté d'amplitude très inférieure.

- Dans les zones où il n'existe que du champ diffracté, une variation « lisse » du champ total.

- les conditions aux limites qui imposent :

* Un champ total nul sur chacune des faces en polarisation électrique les courbes tendent vers moins l'infini en dB.

* Une dérivée normale du champ total nulle en polarisation magnétique (les courbes arrivent avec une tangente horizontale au niveau de chaque face).

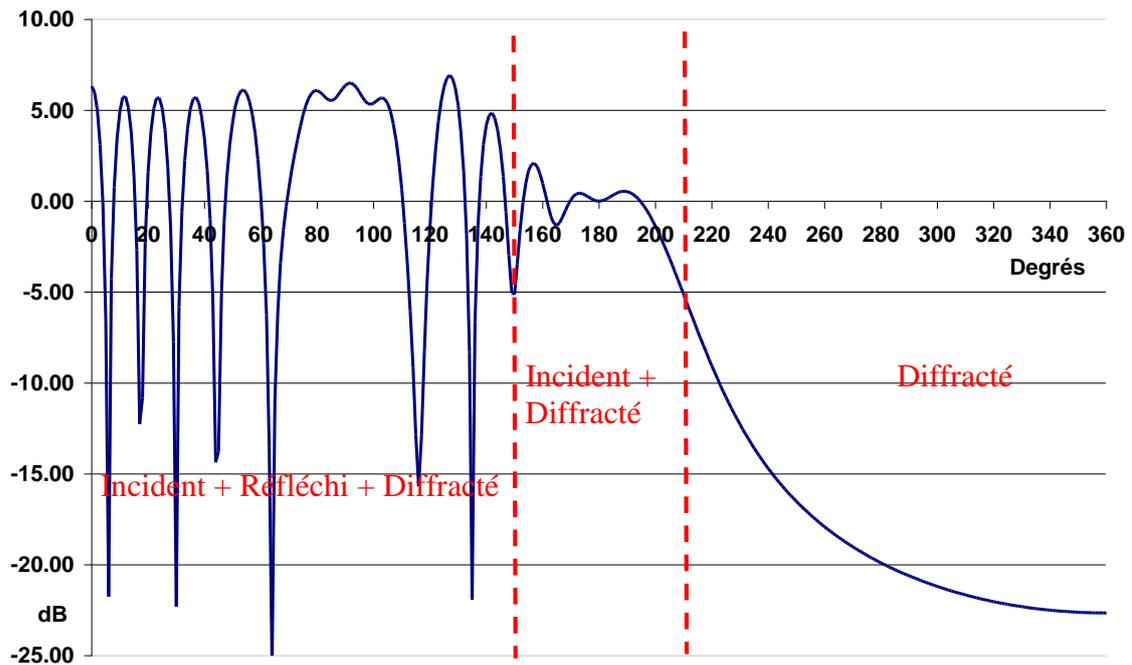


Figure IV-6 : Représentation du champ total entourant l'arête dans les conditions :
Polarisation magnétique – angle d'incidence $\phi_0 = 30^\circ$ - Distance de l'arête : $\rho = 5\lambda$.

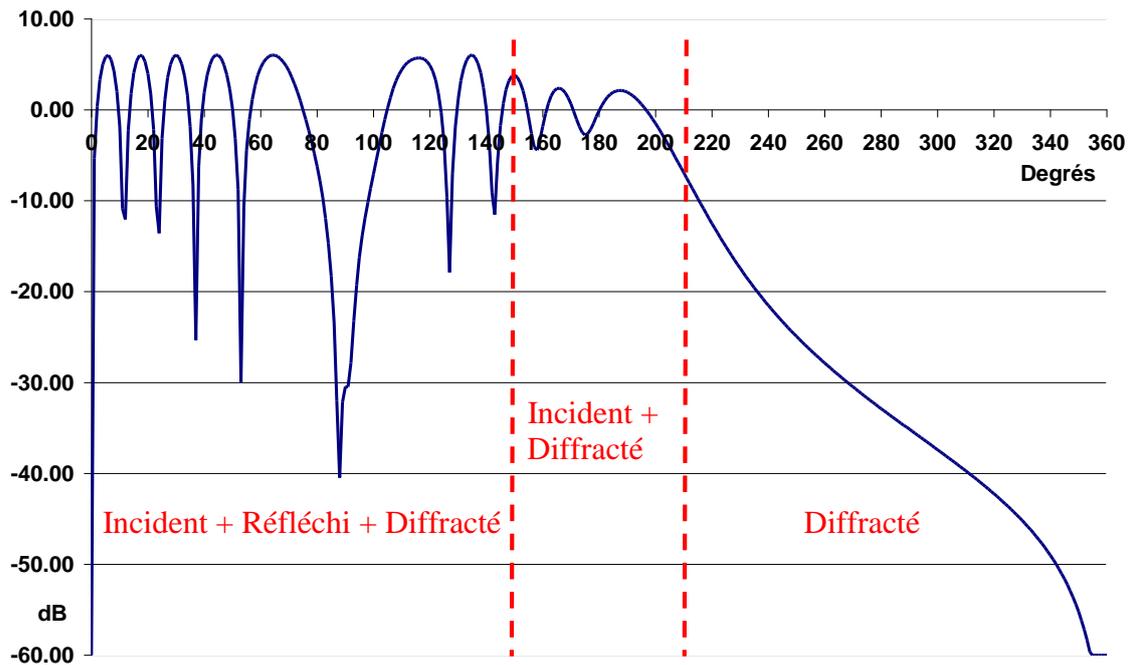


Figure IV-7 : Représentation du champ total entourant l'arête dans les conditions :
Polarisation électrique – angle d'incidence $\phi_0 = 30^\circ$ - Distance de l'arête : $\rho = 5\lambda$.

On note sur la figure IV-7 (polarisation électrique) un niveau de champ diffracté très inférieur à celui de la figure IV-6 (polarisation magnétique). Il s'agit d'une propriété générale qui reste vraie dans tous les problèmes de diffraction.

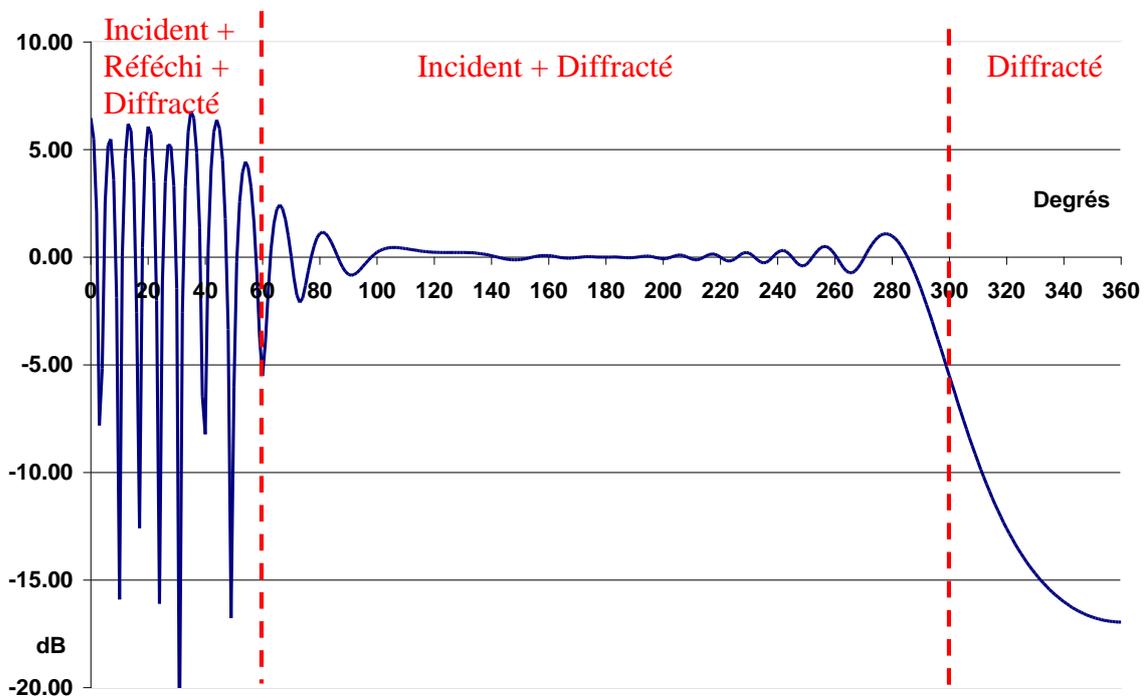


Figure IV-8 : Représentation du champ total entourant l'arête dans les conditions :
Polarisation magnétique – angle d'incidence $\phi_0 = 120^\circ$ - Distance de l'arête : $\rho = 5\lambda$.

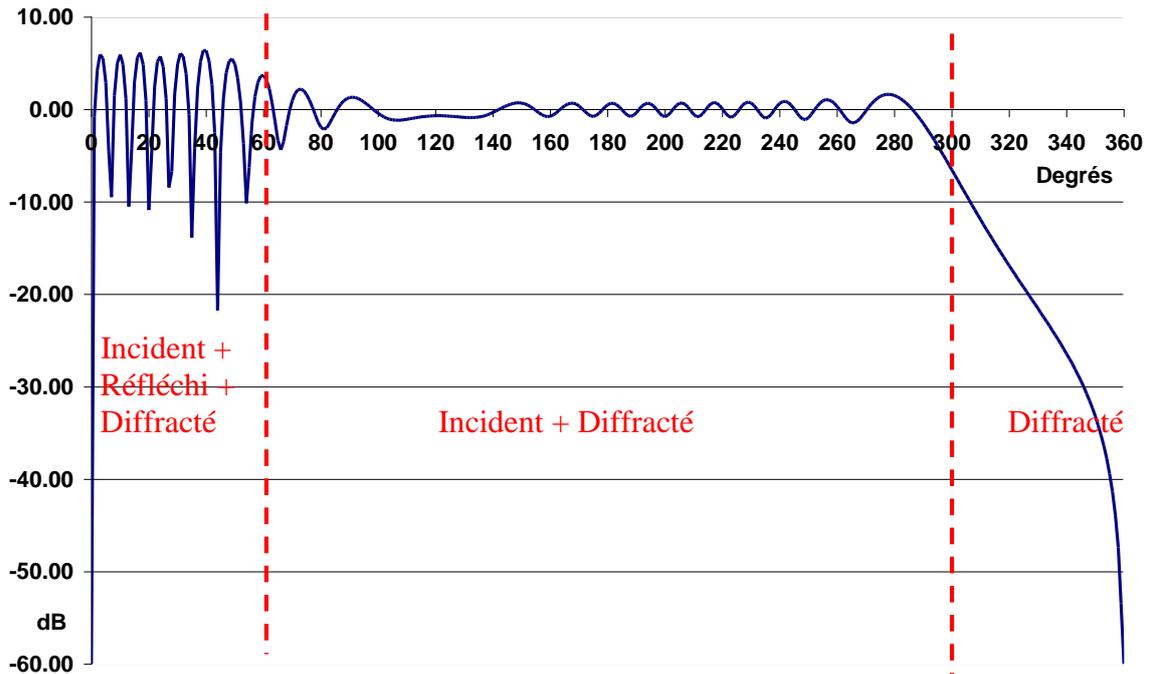


Figure IV-9 : Représentation du champ total entourant l'arête dans les conditions :
Polarisation électrique – angle d'incidence $\phi_0 = 120^\circ$ - Distance de l'arête : $\rho = 5\lambda$.

IV-2 Quelques exemples de champ diffracté

Le champ diffracté est discontinu sur les frontières de l'optique géométrique. Cependant, si on le représente en module, cette discontinuité disparaît, puisqu'il prend la même valeur de chaque côté de la frontière au signe près. Les frontières sont alors signalées sur les courbes par des discontinuités dans la dérivée par rapport à l'angle d'observation.

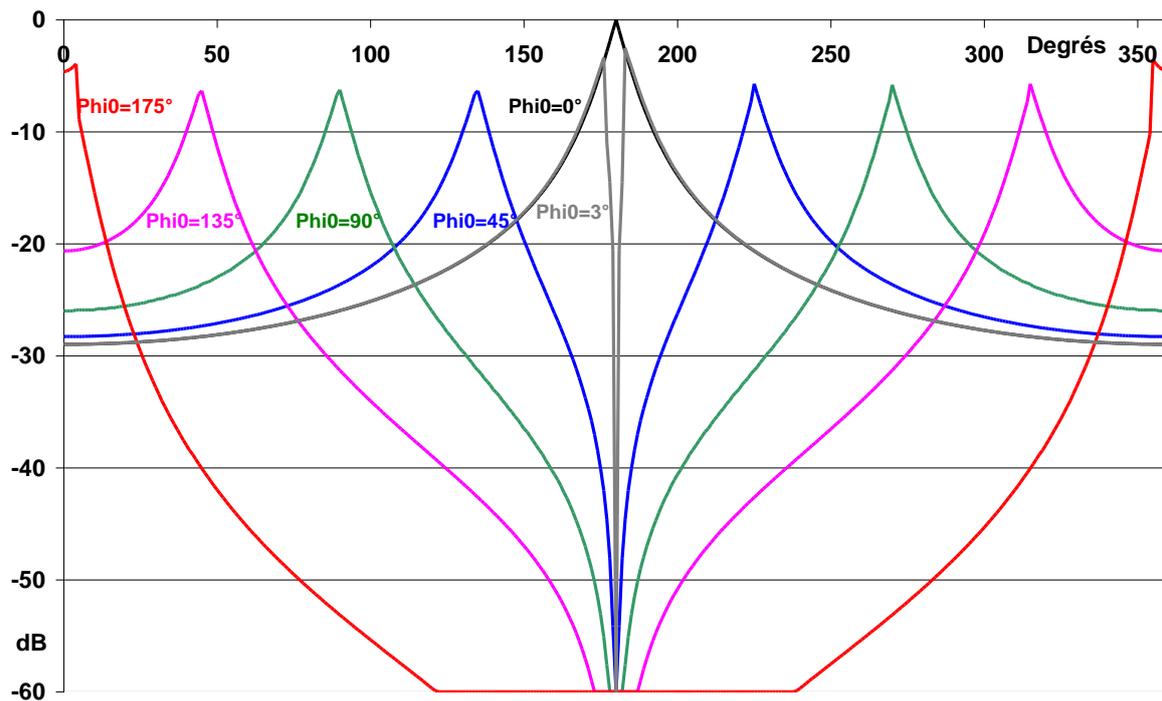


Figure IV-10 : Représentation du champ diffracté entourant l'arête dans les conditions :
Polarisation magnétique -- Distance de l'arête : $\rho = 20\lambda$. -- angle d'incidence : Φ_0

Ces courbes appellent les observations suivantes :

- En dehors des incidences $\phi_0 = 0^\circ$ et $\phi_0 = 180^\circ$, le maximum de champ diffracté prend une valeur très proche de -6dB , et se situe sur les frontières du champ incident et réfléchi.
- En dehors de l'incidence rasante $\phi_0 = 0^\circ$, il n'y a pas de champ diffracté dans la direction $\phi = 180^\circ$.
- En incidence rasante $\phi_0 = 0^\circ$, le champ diffracté dans la direction $\phi = 180^\circ$ est un maximum absolu. Il est égal à la moitié du champ total.
- En incidence rasante $\phi_0 = 180^\circ$, il n'y a pas de champ diffracté, sauf en $\phi = 0^\circ$ et $\phi = 360^\circ$ où il atteint un maximum absolu.
- Le champ diffracté respecte les conditions aux limites, ce qui se traduit par une tangente horizontale en $\phi = 0^\circ$ et $\phi = 180^\circ$. On en déduit que le champ de l'optique géométrique (incident + réfléchi) respecte également les conditions aux limites puisque c'est par nature une propriété vérifiée par le champ total.

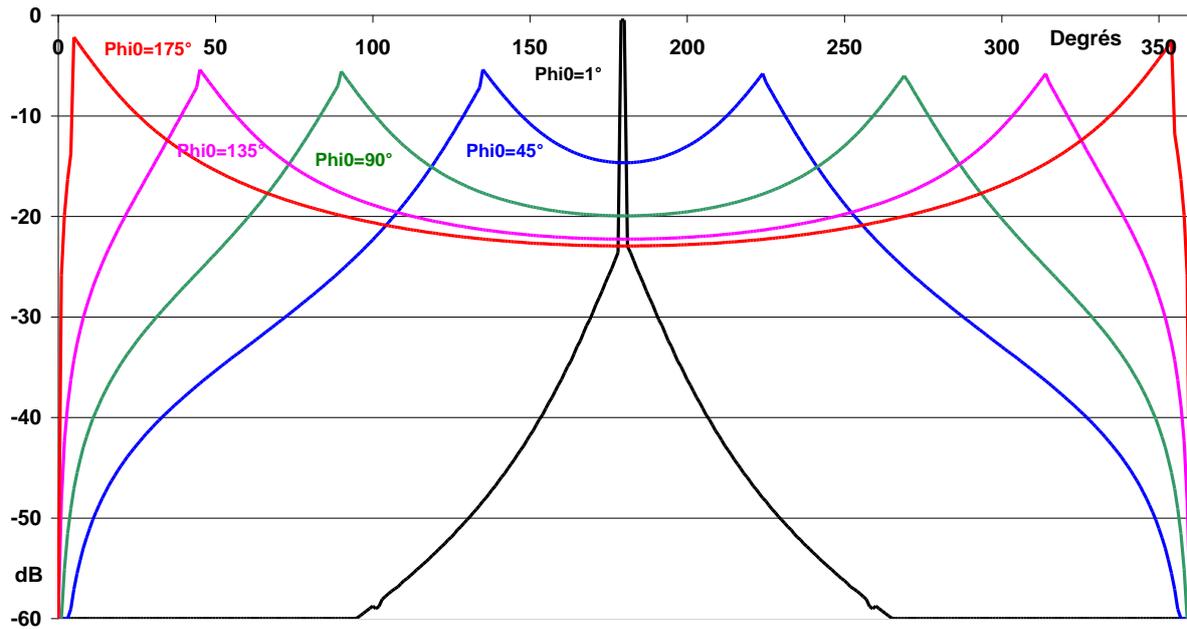


Figure IV-11 : Représentation du champ diffracté entourant l'arête dans les conditions :
Polarisation électrique – Distance de l'arête : $\rho = 20\lambda$. – angle d'incidence : Φ_i0

Ces courbes appellent les observations suivantes :

- En dehors des incidences $\phi_0 = 0^\circ$ et $\phi_0 = 180^\circ$, le maximum de champ diffracté prend une valeur très proche de -6dB , et se situe sur les frontières du champ incident et réfléchi.
- En dehors de l'incidence rasante $\phi_0 = 180^\circ$, il n'y a pas de champ diffracté dans les directions $\phi = 0^\circ$ et $\phi = 180^\circ$.
- En incidence rasante $\phi_0 = 180^\circ$, le champ diffracté dans les directions $\phi = 0^\circ$ et $\phi = 360^\circ$ est un maximum absolu. Il est égal à la moitié du champ total.
- En incidence rasante $\phi_0 = 0^\circ$, il n'y a pas de champ diffracté, sauf en $\phi = 180^\circ$ où il atteint un maximum absolu.
- Le champ diffracté respecte les conditions aux limites, ce qui se traduit par une tangente verticale en $\phi = 0^\circ$ et $\phi = 180^\circ$. On en déduit que le champ de l'optique géométrique (incident + réfléchi) respecte également les conditions aux limites puisque c'est par nature une propriété vérifiée par le champ total.

La figura VI-12 représente toujours le champ diffracté, mais en conservant un angle d'incidence fixe et en faisant varier la distance du point d'observation par rapport à l'arête.

On remarque, en polarisation magnétique :

- Sur les limites des zones d'incidence et de réflexion, le champ diffracté est sensiblement constant, quelle que soit la distance de l'arête à laquelle on se place. En d'autres termes, dans cette zone là, le champ diffracté a le comportement d'une onde plane.
- Loin de ces frontières, le champ diffracté décroît régulièrement en fonction de la distance, et a le comportement d'une onde cylindrique.

- La zone intermédiaire entre le comportement d'onde plane et le comportement d'onde cylindrique est appelée zone de transition. La fonction $K_-(x)$ qui assure le passage entre ces deux zones est parfois appelée fonction de transition.

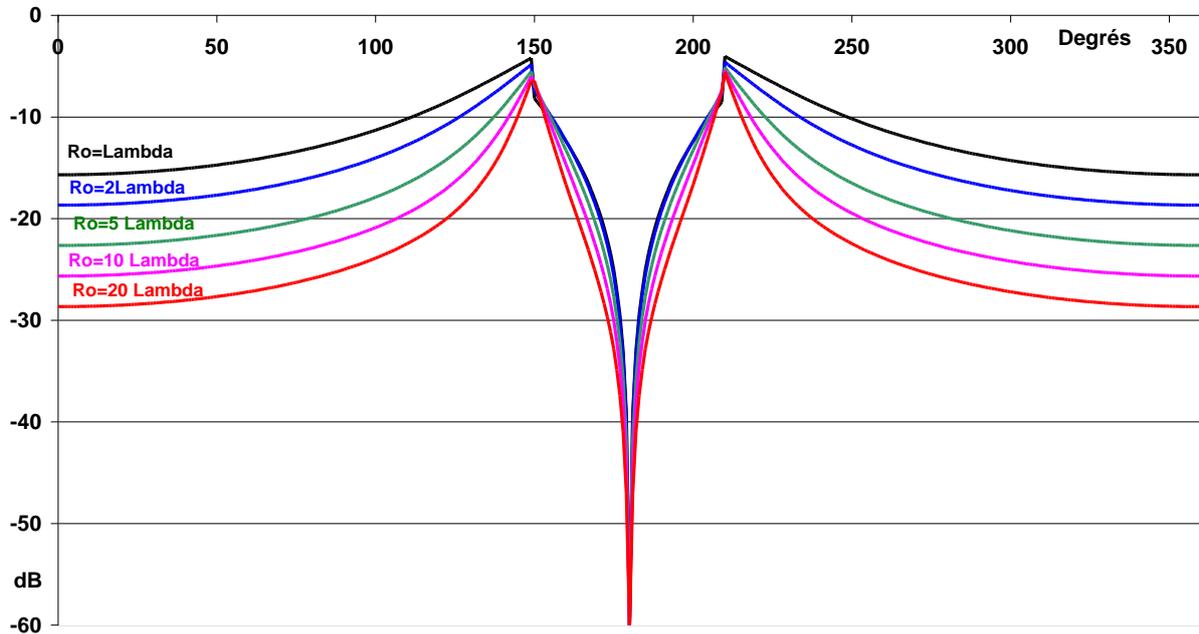


Figure IV-12 : Représentation du champ diffracté entourant l'arête dans les conditions :
Polarisation magnétique -- angle d'incidence : $\Phi_0 = 30^\circ$ - Distance de l'arête : R_0

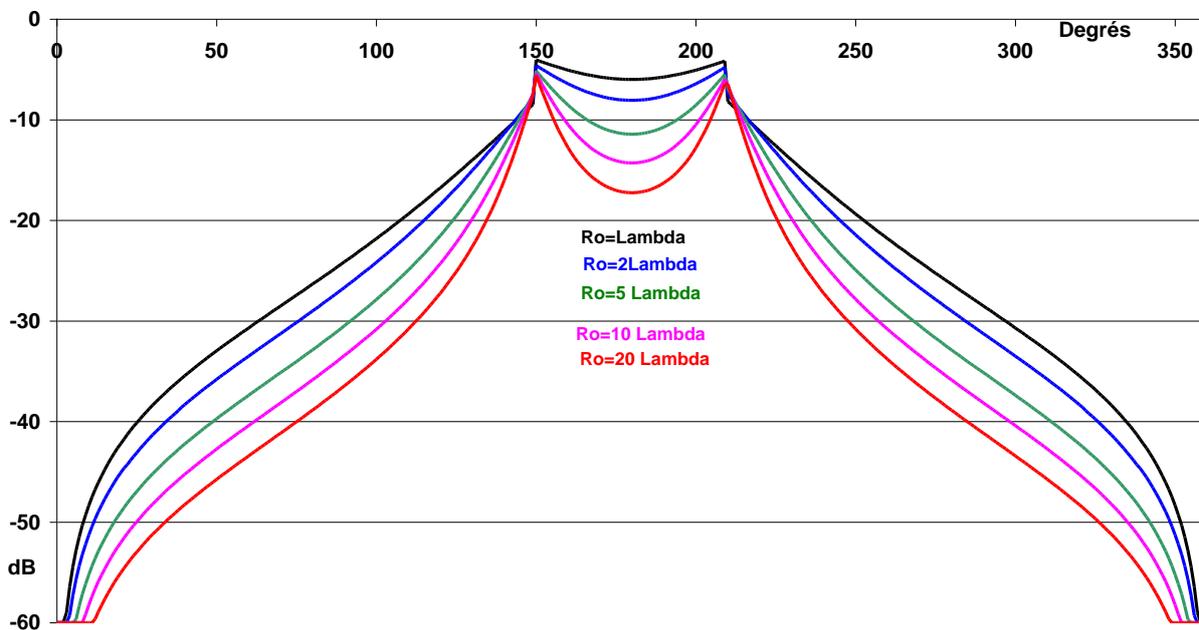


Figure IV-13 : Représentation du champ diffracté entourant l'arête dans les conditions :
Polarisation électrique -- angle d'incidence : $\Phi_0 = 30^\circ$ - Distance de l'arête : R_0

Cette famille de courbe n'appelle pas de nouveau commentaires par rapport à la précédente en polarisation magnétique.

V - Diffraction d'une onde cylindrique par un demi-plan parfaitement conducteur

Dans de nombreuses applications, l'onde qui vient diffracter sur un obstacle n'est pas une onde plane, mais plutôt une onde issue d'une source quasi ponctuelle comme une antenne. Si on traite un problème en dimension deux, cela signifie que l'onde qui tombe sur l'obstacle est une onde cylindrique.

Cela induit des différences significatives par rapport à une onde plane, à la fois dans les rayons de l'optique géométrique et dans les rayons diffractés.

Il n'existe pas à ce jour de solution en termes d'intégrale de FRESNEL à un tel problème. On sait par contre en donner une solution exacte sous forme de série. Si on se réfère aux notations de la figure V-1, cette série se présente sous la forme :

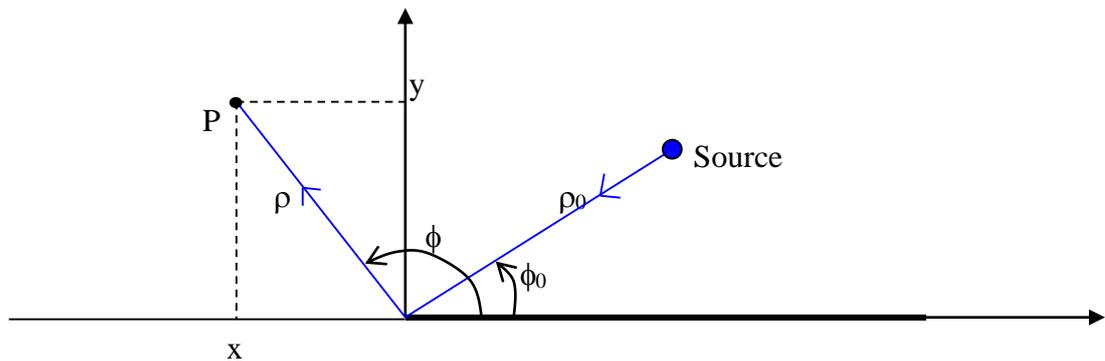


Figure V-1 : Diffraction d'une onde cylindrique par un demi-plan

$$U_z = \frac{1}{4j} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_{\frac{m}{2}}(k\rho) H_{\frac{m}{2}}^{(2)}(k\rho_0) \begin{cases} \sin\left(\frac{m}{2}\phi\right)\sin\left(\frac{m}{2}\phi_0\right) & (U = E) \\ \cos\left(\frac{m}{2}\phi\right)\cos\left(\frac{m}{2}\phi_0\right) & (U = H) \end{cases} \text{ pour } \rho < \rho_0 \quad (V-1)$$

$$U_z = \frac{1}{4j} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_{\frac{m}{2}}(k\rho_0) H_{\frac{m}{2}}^{(2)}(k\rho) \begin{cases} \sin\left(\frac{m}{2}\phi\right)\sin\left(\frac{m}{2}\phi_0\right) & (U = E) \\ \cos\left(\frac{m}{2}\phi\right)\cos\left(\frac{m}{2}\phi_0\right) & (U = H) \end{cases} \text{ pour } \rho > \rho_0 \quad (V-2)$$

Dans ces relations :

- ρ_0 et ϕ_0 représentent respectivement la distance de la source par rapport à l'arête et l'angle d'incidence sur l'arête de l'onde issue de la source.

- ρ et ϕ représentent respectivement la distance du point d'observation par rapport à l'arête et l'angle que fait la direction du point d'observation avec le demi-plan..

- J représente la fonction de BESSEL de première espèce (Ne pas confondre J et j tel que $j^2 = -1$)
- $H^{(2)}$ représente la fonction de HANKEL de deuxième type
- $\varepsilon_m = 1$ pour $m = 0$, $\varepsilon_m = 2$ pour m différent de 0.

On pourrait penser que, puisqu'il existe une solution exacte à ce problème, il n'est pas nécessaire de développer une théorie asymptotique comme la Théorie Géométrique de la Diffraction. En fait, les séries présentées ont une convergence très lente qui devient catastrophique lorsque le paramètre $k\rho$ prend une valeur importante, ce qui les rend inexploitable en champ lointain. Elles permettent, par contre, une validation de toutes les théories sensées traiter correctement ce problème.

La série relative à l'onde plane s'obtient en déplaçant la source à l'infini, et en remplaçant la fonction de HANKEL par sa forme asymptotique. On obtient :

$$U_z = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m j^2 J_{\frac{m}{2}}(k\rho) \begin{cases} \sin\left(\frac{m}{2}\phi\right)\sin\left(\frac{m}{2}\phi_0\right) & (U = E) \\ \cos\left(\frac{m}{2}\phi\right)\cos\left(\frac{m}{2}\phi_0\right) & (U = H) \end{cases} \quad (V-3)$$

Du point de vue du traitement d'une onde incidente cylindrique en TGD, les champs de l'optique géométrique seront décrits correctement en prenant en compte le rayon de courbure des ondes incidentes et réfléchies.

Il se pose un problème par contre en ce qui concerne le traitement des rayons diffractés. Nous avons remarqué au chapitre précédent que ces rayons sont chargés d'assurer la continuité du champ total, et ont donc obligatoirement une structure d'onde plane au voisinage des frontières de l'optique géométrique et une structure d'onde cylindrique loin de ces frontières. Ils ne peuvent donc plus assurer la continuité du champ total pour une onde cylindrique.

Dans cette nouvelle situation, les rayons doivent avoir une structure d'onde cylindrique issue de la source au voisinage des frontières de l'optique géométrique, et une structure d'onde cylindrique issue de l'arête loin de ces frontières. Le passage de l'un à l'autre doit être assuré par la fonction de transition.

On doit à KOUYOUMJAN et PATHAK d'avoir apporté une solution simple à cet épineux problème, solution autour de laquelle ils vont élaborer une Théorie Uniforme de la Diffraction ou TUD. Elle consiste à introduire dans la fonction de transition K_{\perp} , non pas la distance ρ du point d'observation à l'arête, mais le paramètre :

$$L = \frac{\rho\rho_0}{\rho + \rho_0} \quad (V-4)$$

On peut détailler le raisonnement qui conduit à l'introduction de ce paramètre sur le cas de la frontière ombre lumière

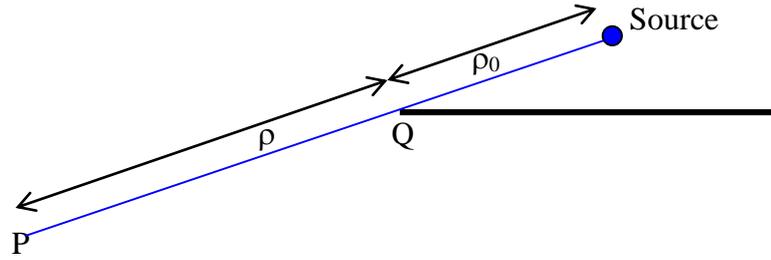


Figure V-2 : Continuité du champ total sur la frontière ombre-lumière

Sur cette frontière, le champ cylindrique incident s'écrit :

$$U^i = E_0 \frac{e^{-jk(\rho_0 + \rho)}}{\sqrt{\rho_0 + \rho}} \quad (V-5)$$

La fonction K_- étant égal à + ou - $\frac{1}{2}$ sur la frontière, le champ diffracté associé au champ incident s'écrit obligatoirement pour assurer la continuité du champ total :

$$U_d^i = \pm \frac{E_0}{2} \frac{e^{-jk(\rho_0 + \rho)}}{\sqrt{\rho_0 + \rho}} \quad (V-6)$$

Or nous souhaitons que ce champ diffracté puisse s'exprimer en fonction du champ incident sur l'arête $U^i(Q)$, et du coefficient de diffraction qui vaut + ou - $\frac{1}{2}$: nous devons donc l'écrire sous la forme :

$$U_d^i = \left[\pm \frac{1}{2} \right] \left[E_0 \frac{e^{-jk\rho_0}}{\sqrt{\rho_0}} \right] \sqrt{\frac{\rho_0}{(\rho + \rho_0)}} e^{-jk\rho} \quad (V-7)$$

Loin de cette frontière, le champ diffracté doit apparaître comme une onde cylindrique issue de l'arête, et nous faisons apparaître cette contrainte en réécrivant (IV-35) :

$$U_d^i = \left[\pm \frac{1}{2} \right] \left[E_0 \frac{e^{-jk\rho_0}}{\sqrt{\rho_0}} \right] \sqrt{\frac{\rho\rho_0}{(\rho + \rho_0)}} \frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \quad (V-8)$$

Loin de l'arête et de la frontière ombre-lumière, la fonction de transition $K_-(x)$ peut être remplacée par le premier terme de son développement asymptotique (IV-25) :

$$K_-(x \rightarrow \infty) = \frac{1}{2x\sqrt{j\pi}} \quad (V-9)$$

Si nous souhaitons que le champ diffracté ait une structure cylindrique issue de l'arête, et donc une décroissance en $\rho^{-1/2}$, il faut nécessairement qu'apparaisse dans x , paramètre de la fonction K_- , le facteur :

$$\sqrt{\frac{\rho\rho_0}{\rho + \rho_0}} \quad (V-10)$$

afin de compenser le terme identique de l'expression (V-8). Cela conduit à exprimer le champ diffracté associé au champ incident sous la forme suivante, déduite de (V-8) :

$$U_d^i = -\text{Sgn}\left(\cos \frac{\phi - \phi_0}{2}\right) \mathbf{K} \left(\sqrt{2k \frac{\rho \rho_0}{\rho + \rho_0} \cos^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} \right) \left[E_0 \frac{e^{-jk\rho_0}}{\sqrt{\rho_0}} \right] \sqrt{\frac{\rho \rho_0}{(\rho + \rho_0)}} \frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \quad (\text{V-11})$$

On peut vérifier que sur la frontière ombre lumière, on retrouve la formulation (V-8) qui assure la continuité du champ total, tandis que loin de cette frontière on obtient :

$$\bar{U}_d^i = \left[E_0 \frac{e^{-jk\rho_0}}{\sqrt{\rho_0}} \right] \frac{1}{\sqrt{8\pi j k} \cos \frac{\phi - \phi_0}{2}} \frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} = U^i(Q) \frac{1}{\sqrt{8\pi j k} \cos \frac{\phi - \phi_0}{2}} \frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \quad (\text{V-12})$$

En résumé, la solution uniforme élaborée (V-11) est peut être présentée sous la forme (pour la partie relative au champ incident) :

$$U_d^i(P) = U^i(Q) D \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho + \rho_0}} e^{-jk\rho} \quad (\text{V-13})$$

dans la quelle :

$$U^i(Q) = \left[E_0 \frac{e^{-jk\rho_0}}{\sqrt{\rho_0}} \right] \text{représente le champ incident au point de diffraction } Q \quad (\text{V-14})$$

$$D = -\text{Sgn}\left(\cos \frac{\phi - \phi_0}{2}\right) \mathbf{K} \left(\sqrt{2k \frac{\rho \rho_0}{\rho + \rho_0} \cos^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} \right) \quad (\text{V-15})$$

représente le coefficient de diffraction au point Q

Rien n'indique à priori que le raisonnement heuristique que nous avons fait conduite à une formulation rigoureuse du champ diffracté par un demi-plan sous une incidence cylindrique. C'est la comparaison de cette formulation avec la solution exacte sous forme de séries qui va permettre de juger de sa validité.

Deux séries de comparaisons sont proposées, la première en polarisation électrique, la seconde en polarisation magnétique.

Dans chaque série certains paramètres sont conservés constants :

- La distance ρ du point d'observation à l'arête qui est fixée à 2.5λ
- La distance ρ_0 de la source à l'arête qui est fixée à 1.5λ

Le champ est calculé sur un cercle de rayon constant ρ autour de l'arête (Figure V-3), en fonction de l'angle d'observation ϕ .

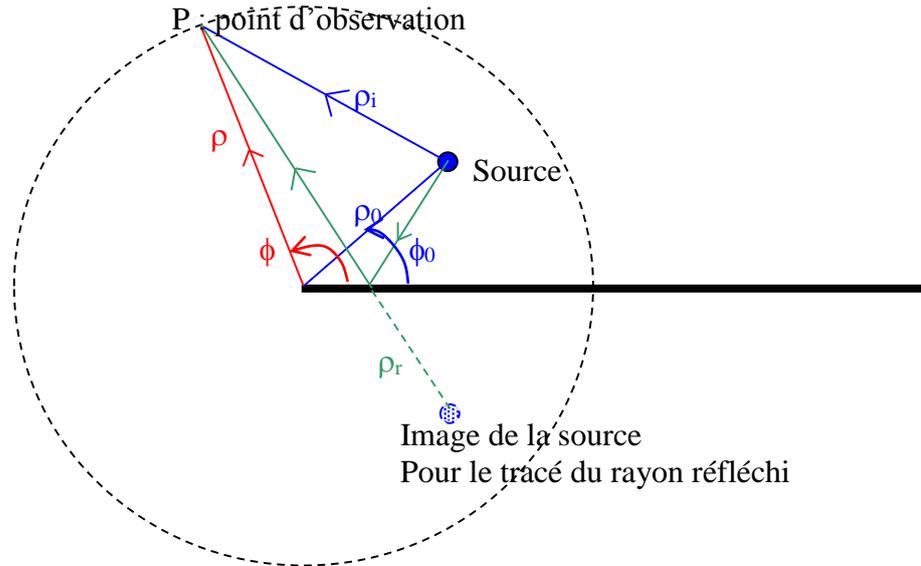


Figure V-3 : Représentation des notations pour le calcul du champ électromagnétique autour de l'arête d'un demi plan soumis à une onde cylindrique.

Les champs sont calculés de la manière suivante par la Théorie Géométrique de la diffraction :

- Champ incident :

$$U^i = E_0 \frac{e^{-jk\rho_i}}{\sqrt{\rho_i}} \quad (V-16)$$

- Champ Réfléchi :

$$U^r = \pm E_0 \frac{e^{-jk\rho_r}}{\sqrt{\rho_r}} \quad + : (H) \quad \text{et} \quad - : (E) \quad (V-17)$$

où ρ_r représente la distance de la source image au point d'observation.

- Champ Diffracté :

$$U_d^i = -\text{Sgn}\left(\cos \frac{\phi - \phi_0}{2}\right) K \left[\sqrt{2k \frac{\rho\rho_0}{\rho + \rho_0} \cos^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} \right] \left[E_0 \frac{e^{-jk\rho_0}}{\sqrt{\rho_0}} \right] \sqrt{\frac{\rho\rho_0}{(\rho + \rho_0)}} \frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \quad (V-18)$$

$$U_d^r = -\text{Sgn}\left(\cos \frac{\phi + \phi_0}{2}\right) K \left[\sqrt{2k \frac{\rho\rho_0}{\rho + \rho_0} \cos^2 \frac{\phi + \phi_0}{2}} \right] \left[E_0 \frac{e^{-jk\rho_0}}{\sqrt{\rho_0}} \right] \sqrt{\frac{\rho\rho_0}{(\rho + \rho_0)}} \frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \quad (V-19)$$

$$U_d = U_d^i \pm U_d^r \quad + : (H) \quad \text{et} \quad - : (E) \quad (V-20)$$

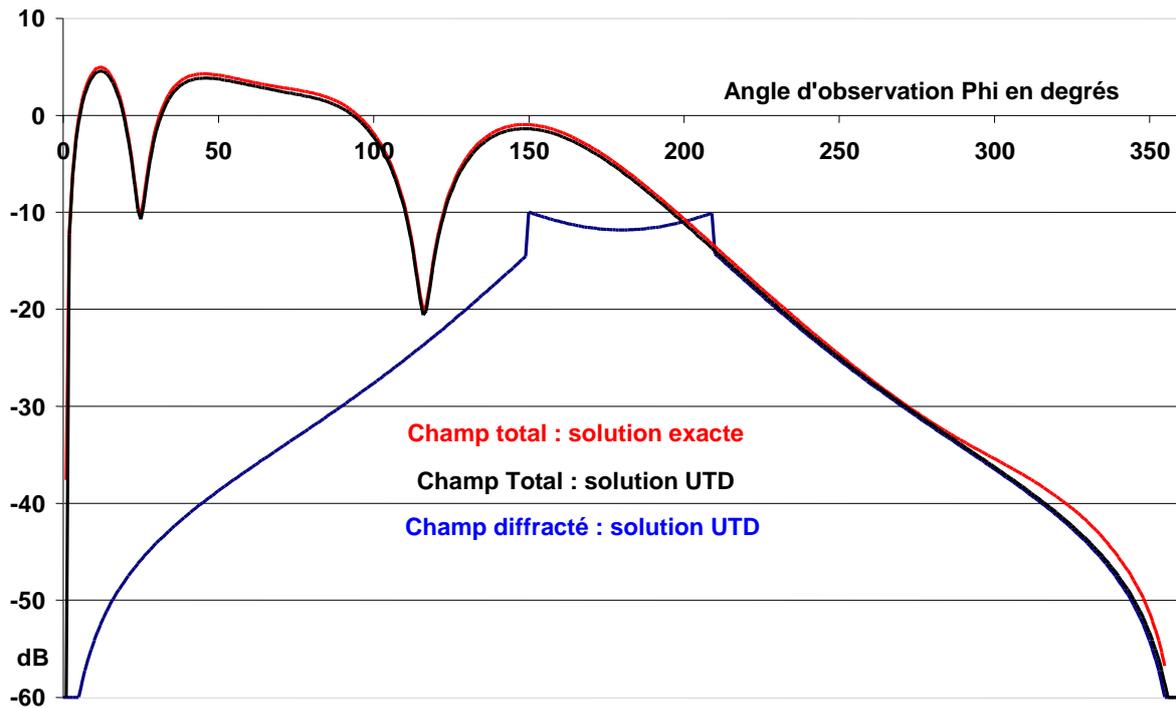


Figure V-4 : Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte. $\rho = 2.5 \lambda$, $\rho_0 = 1.5 \lambda$, $\phi_0 = 30^\circ$, Polarisation Electrique

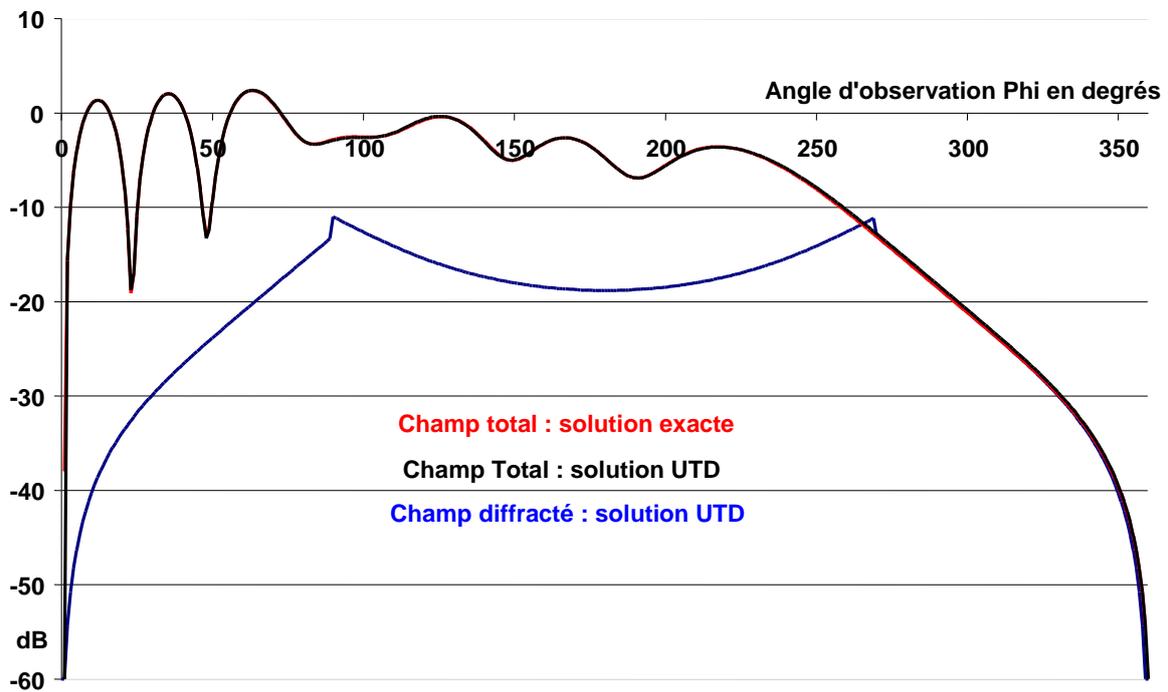


Figure V-5 : Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte. $\rho = 2.5 \lambda$, $\rho_0 = 1.5 \lambda$, $\phi_0 = 90^\circ$, Polarisation Electrique

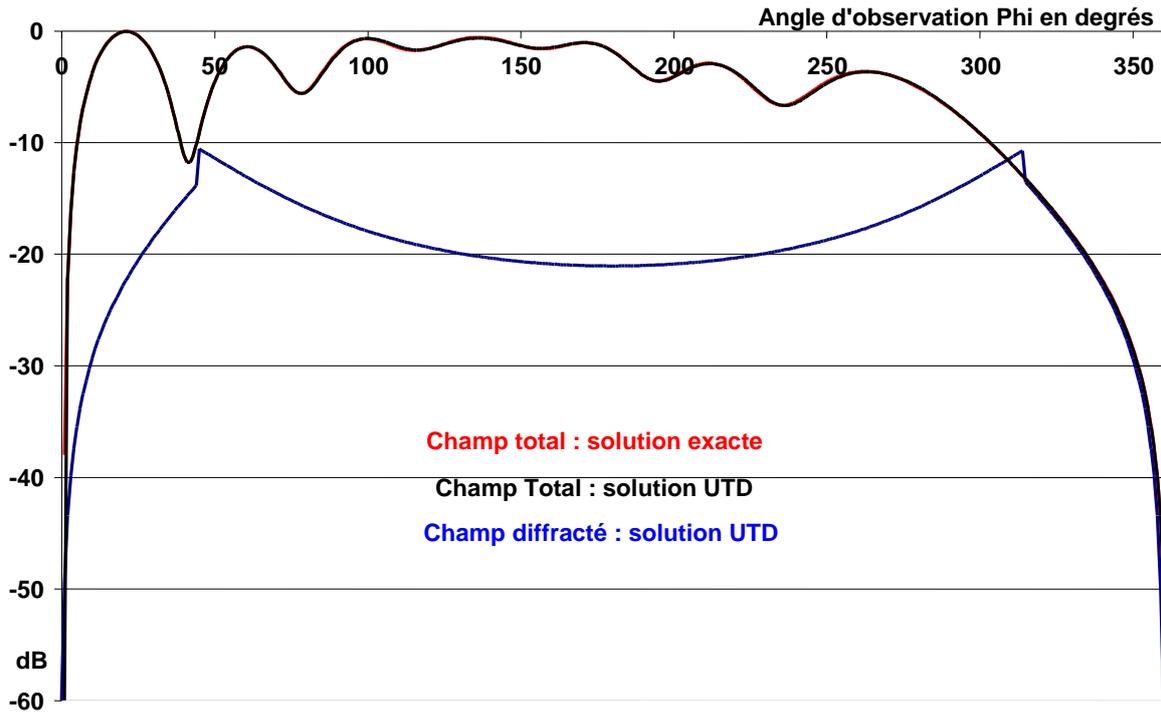


Figure V-6 : Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte. $\rho = 2.5 \lambda$, $\rho_0 = 1.5 \lambda$, $\phi_0 = 135^\circ$, Polarisation Electrique

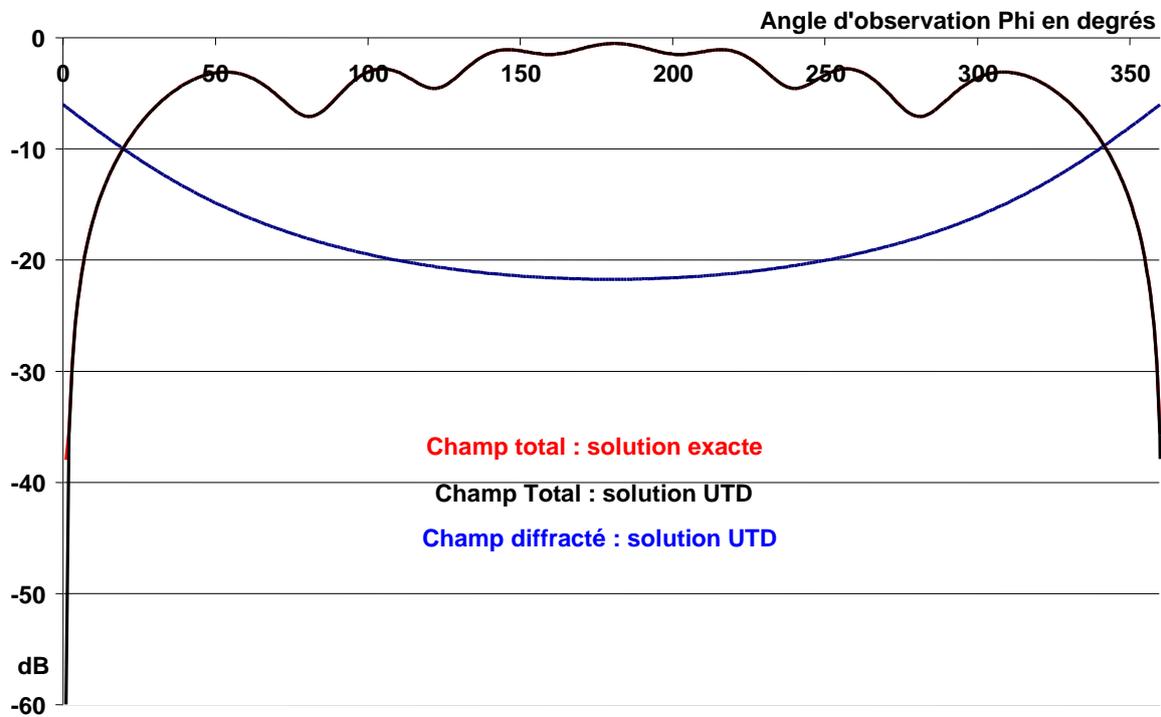


Figure V-7 : Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte. $\rho = 2.5 \lambda$, $\rho_0 = 1.5 \lambda$, $\phi_0 = 180^\circ$, Polarisation Electrique

Les distances ρ et ρ_0 sont faibles en termes de longueur d'onde et à priori peu appropriées à tester une méthode d'autant plus précise que ces distances sont grandes. Elles se justifient pour deux raisons :

- La série (V-2) qui donne la solution exacte converge très lentement lorsque le paramètre des fonctions de BESSEL et HANKEL dépasse 20, et devient difficilement exploitable au-delà.

- Un test à des faibles distances permet d'apprécier les limites de la méthode, et en particulier de sa précision lorsqu'on n'est plus complètement dans les conditions asymptotiques dans lesquelles elle est définie.

Les Figures (V-4,5,6,7) représentent à la fois le champ total obtenu par la solution exacte et la solution UTD, ainsi que le champ diffracté qui peut être extrait de la solution UTD. Elles sont paramétrées par l'angle d'incidence de la source ϕ_0 qui prend respectivement les valeurs 30° , 90° , 135° et 180° .

Le constat immédiat est que les résultats UTD sont pratiquement indiscernables des résultats obtenus à partir de la solution exacte, ce qui semble montrer l'excellence de la méthode proposée par KOUYOUMJAN et PATHAK.

La seconde série propose des comparaisons analogues en polarisation magnétique sur les figures (V-8,9,10,11).

Sur cette série, la comparaison montre un degré d'accord comparable aux comparaisons effectuées en polarisation électrique. Dans certaines régions, la différence est apparente, en particulier au voisinage des incidentes rasantes.

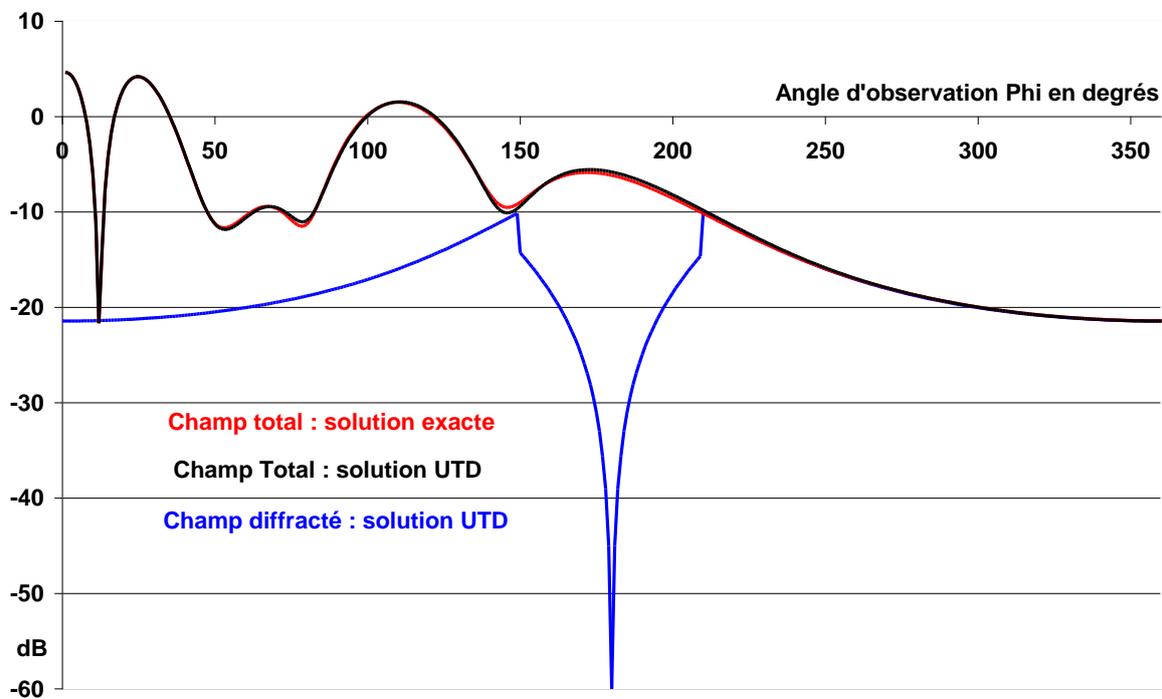


Figure V-8 *Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte. $\rho = 2.5 \lambda$, $\rho_0 = 1.5 \lambda$, $\phi_0 = 30^\circ$, Polarisation Magnétique*

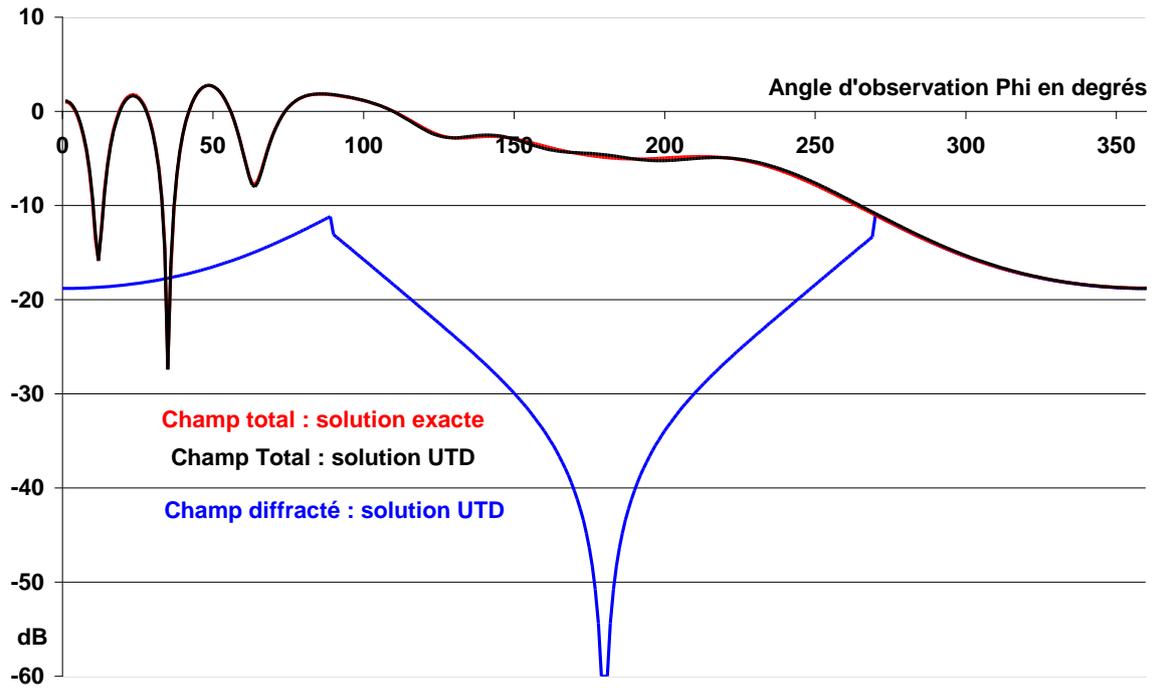


Figure V-9 Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte. $\rho = 2.5 \lambda$, $\rho_0 = 1.5 \lambda$, $\phi_0 = 90^\circ$, Polarisation Magnétique

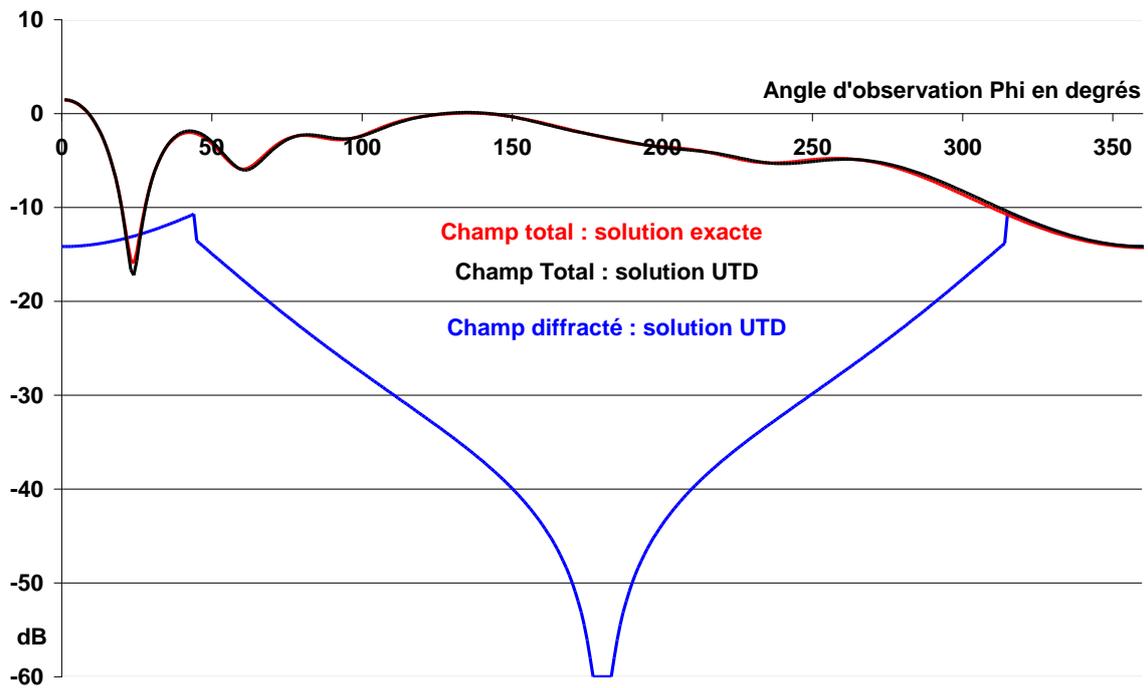


Figure V-10 Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte. $\rho = 2.5 \lambda$, $\rho_0 = 1.5 \lambda$, $\phi_0 = 135^\circ$, Polarisation Magnétique

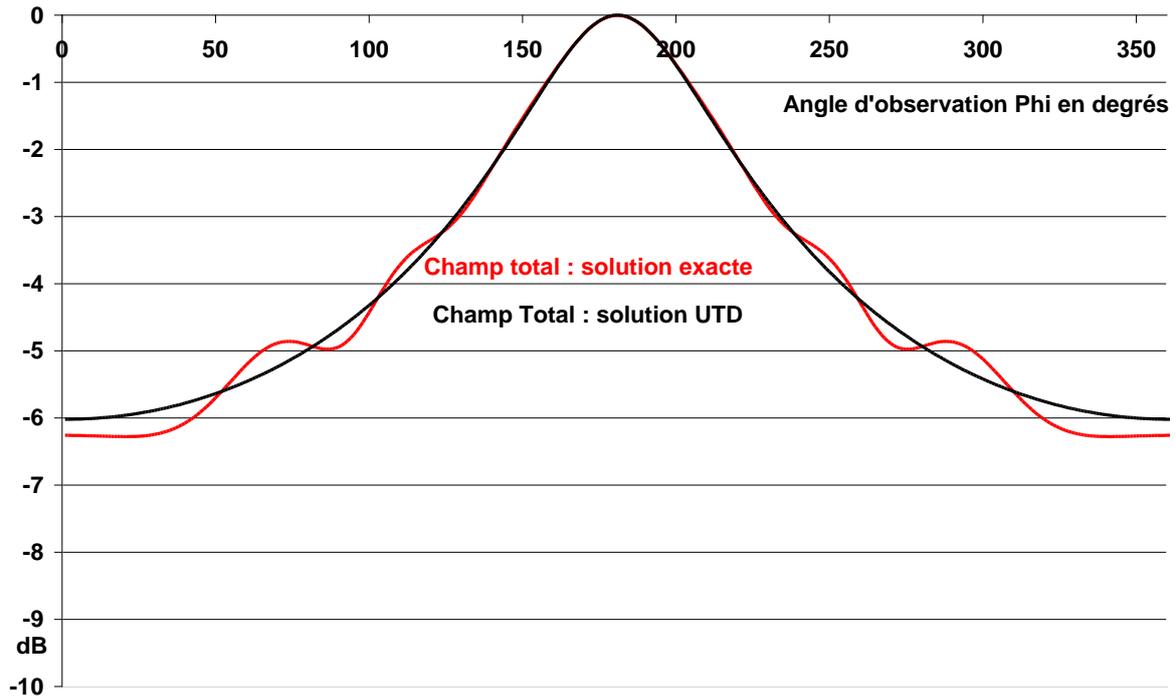


Figure V-11 *Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte.*
 $\rho = 2.5 \lambda$, $\rho_0 = 1.5 \lambda$, $\phi_0 = 180^\circ$, Polarisation Magnétique

L'échelle a été dilatée sur la dernière courbe (Figure V-11). Sous une incidence rasante de 180° , la solution UTD ne prédit pas de champ diffracté, ce qui conduit à un champ total parfaitement lisse.

Les ondulations de la solution exacte montrent qu'une onde cylindrique génère un champ diffracté, même sous incidence rasante.

On note le respect des conditions aux limites de la solution UTD, à la fois en polarisation électrique (tangente verticale) et en polarisation magnétique (tangente horizontale).

VI - Diffraction par une ouverture

En deux dimensions, une ouverture dans un plan infini peut être considérée comme la juxtaposition de deux demi-plans et une telle structure se prête donc bien à une analyse par une théorie de rayons.

Il s'agit d'une structure élémentaire qu'on rencontre fréquemment en compatibilité électromagnétique ou en optique, et il est important de connaître sa réponse lorsqu'elle est soumise à une agression électromagnétique.

Nous considérerons dans ce document à visée essentiellement didactique, uniquement la diffraction par une onde plane, mais l'extension à une onde cylindrique ne pose pas de difficultés particulières.

I- Zones d'espace et rayons

On retrouve sur la figure VI-1 les deux demi-plans numérotés 1 et 2, ainsi que les zones d'espace où sont présents les différentes catégories de rayons.

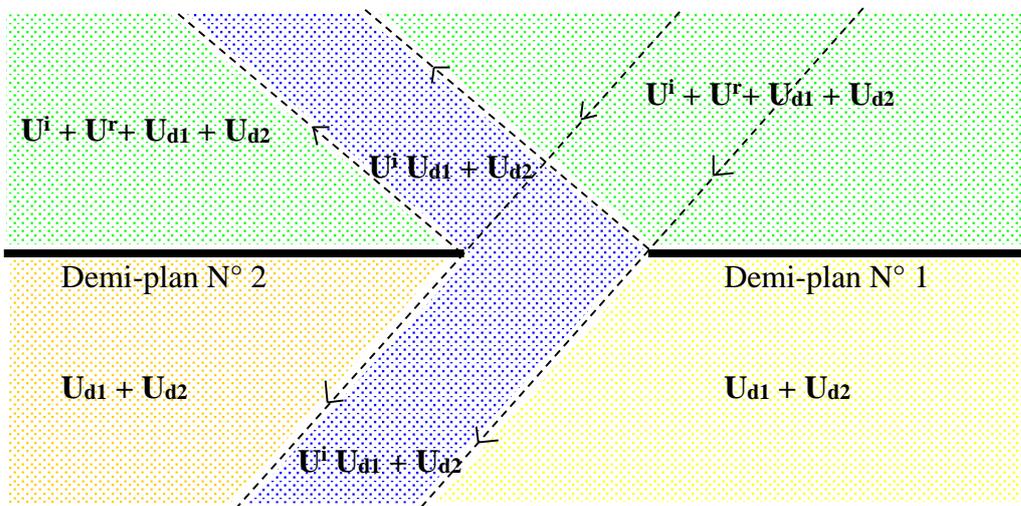


Figure VI-1 : Représentation des régions correspondant aux différentes catégories de rayons

La géométrie est donnée sur la figure VI-2, où P représente le point d'observation repéré par sa distance ρ à l'origine O, et l'angle ϕ que fait la direction OP avec le demi-plan N° 1.

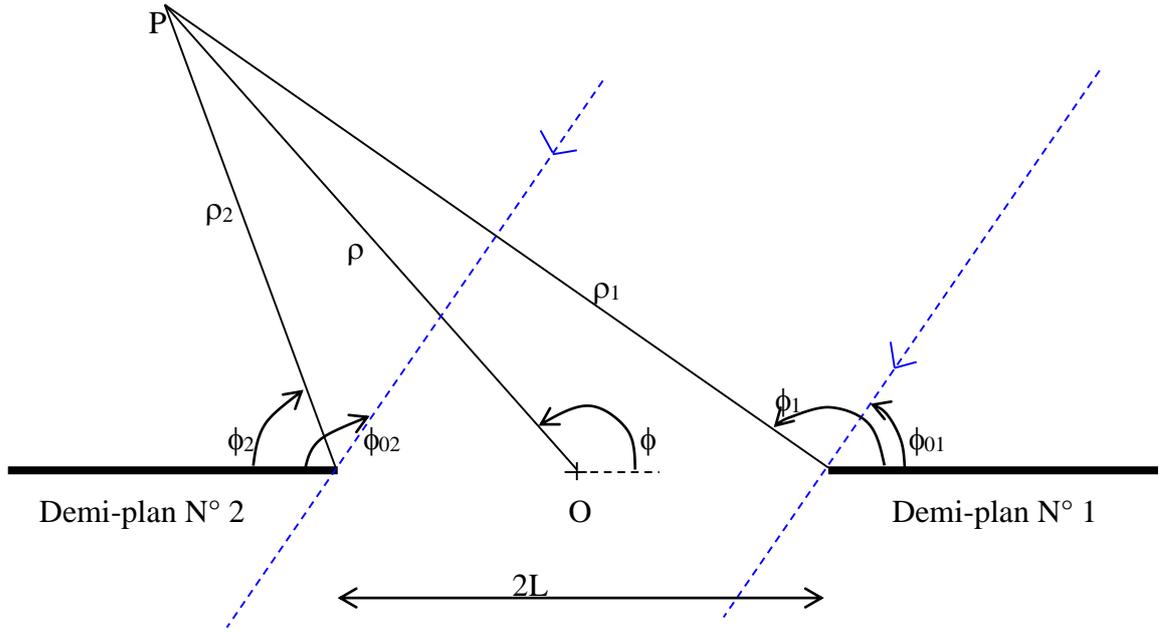


Figure VI-2 : Géométrie des rayons diffractés issus de l'ouverture

Les relations classiques dans un triangle quelconque permettent de calculer les paramètres ρ_1 , ρ_2 , ϕ_1 , ϕ_2 à partir des données du problème qui sont :

- ϕ_{01} : angle d'incidence par rapport au demi-plan N° 1
- ϕ_{02} : angle d'incidence par rapport au demi-plan N° 2
- ρ : distance à l'origine du point d'observation.
- ϕ : direction du point d'observation repérée par rapport au demi-plan N° 2
- $2L$: dimension de l'ouverture.

La seule difficulté se situe dans la détermination des angles ϕ_1 , ϕ_2 qui doit se faire modulo 2π , et qui impose quelques précautions.

Les champs sont calculés à partir des relations établies précédemment :

$$- U^i = U_0 e^{jk\rho \cos(\phi - \phi_0)} \quad (\text{VI-1})$$

$$- U^r = U_0 e^{jk\rho \cos(\phi + \phi_0)} \quad (\text{VI-2})$$

$$U_{d1}^i = -\text{Sgn}\left(\cos \frac{\phi_1 - \phi_{01}}{2}\right) K_- \left(\sqrt{2k\rho_1 \cos^2 \frac{\phi_1 - \phi_{01}}{2}}\right) e^{-jk\rho_1} \quad (\text{VI-3})$$

$$U_{d1}^r = -\text{Sgn}\left(\cos \frac{\phi_1 + \phi_{01}}{2}\right) K_- \left(\sqrt{2k\rho_1 \cos^2 \frac{\phi_1 + \phi_{01}}{2}}\right) e^{-jk\rho_1} \quad (\text{VI-4})$$

$$U_{d2}^i = -\text{Sgn}\left(\cos \frac{\phi_2 - \phi_{02}}{2}\right) K_- \left(\sqrt{2k\rho_2 \cos^2 \frac{\phi_2 - \phi_{02}}{2}}\right) e^{-jk\rho_2} \quad (\text{VI-5})$$

$$U_{d2}^r = -\text{Sgn}\left(\cos\frac{\phi_2 + \phi_{02}}{2}\right) K_- \left(\sqrt{2k\rho_2 \cos^2\frac{\phi_2 + \phi_{02}}{2}}\right) e^{-jk\rho_2} \quad (\text{VI-6})$$

ce qui permet d'écrire le champ total sous la forme :

$$U = Y^i U^i \pm Y^r U^r + \left((U_{d1}^i + U_{d2}^i) \pm (U_{d1}^r + U_{d2}^r) \right) \quad + : (\text{H}), - : (\text{E}) \quad (\text{VI-7})$$

où Y^i et Y^r sont des échelons unités qui traduisent la présence ou l'absence des champs incidents et réfléchis conformément à la figure (VI-1).

II - Exemple de résultats en polarisation magnétique

En polarisation magnétique, il a été vu précédemment qu'il n'y a pas de champ diffracté dans la direction $\phi = 180^\circ$, « en face » du demi-plan.

On en déduit que le champ présent dans l'ouverture est rigoureusement égal au champ incident.

De plus, les deux arêtes de l'ouverture ne présentent aucune interaction entre elles, et la solution construite en théorie géométrique de la diffraction à partir de la solution exacte de chaque demi-plan, constitue donc une solution exacte à ce problème de diffraction.

Le premier exemple (Figure VI-3) est choisi de telle manière que la distance du point d'observation soit supérieure à la moitié de l'ouverture : on peut ainsi observer le comportement du champ au voisinage des demi-plans conducteurs. En choisissant une distance courte en termes de longueur d'onde, on évite l'observation de nombreuses oscillations dues aux interférences entre champ incident et champ réfléchi.

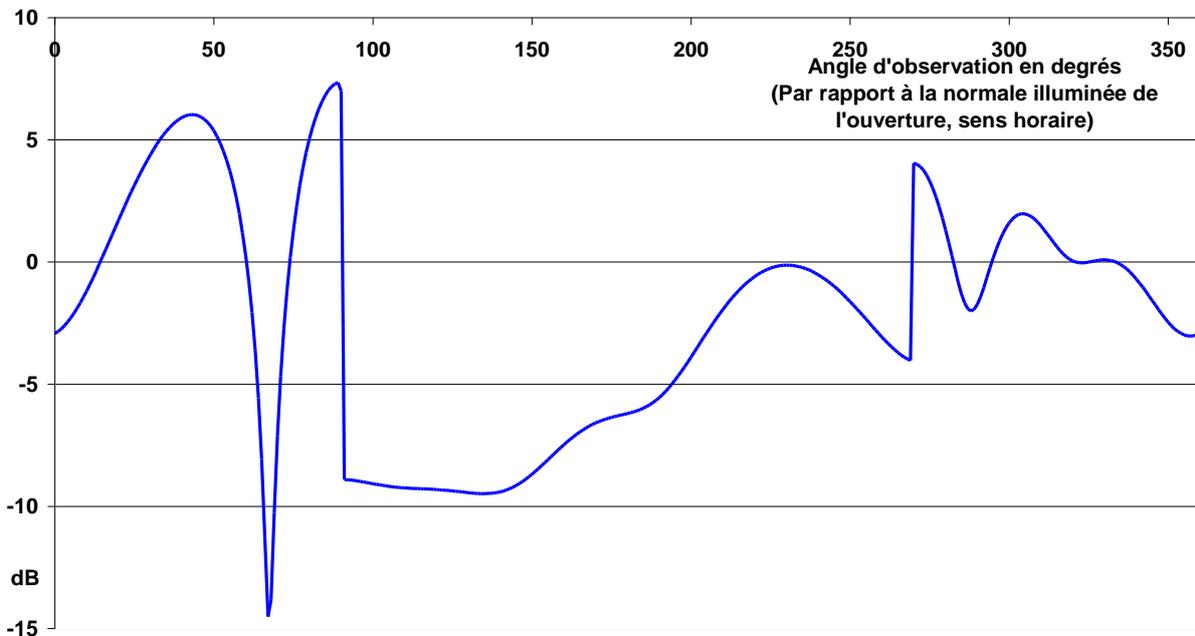


Figure VI-3 : *Champ total entourant une ouverture*
 $\phi_0 = 45^\circ$, $\rho = \lambda$, $L = 0.8 \lambda$, Polarisation magnétique

On note une discontinuité des champs à la traversée des demi-plans conducteurs, mais une continuité parfaite du champ total dans toutes les autres directions.

Cette continuité qui peut être considérée comme une validation de la programmation est confirmée sur la figure VI-4, où la distance du point d'observation est inférieure à la moitié de la dimension de l'ouverture.

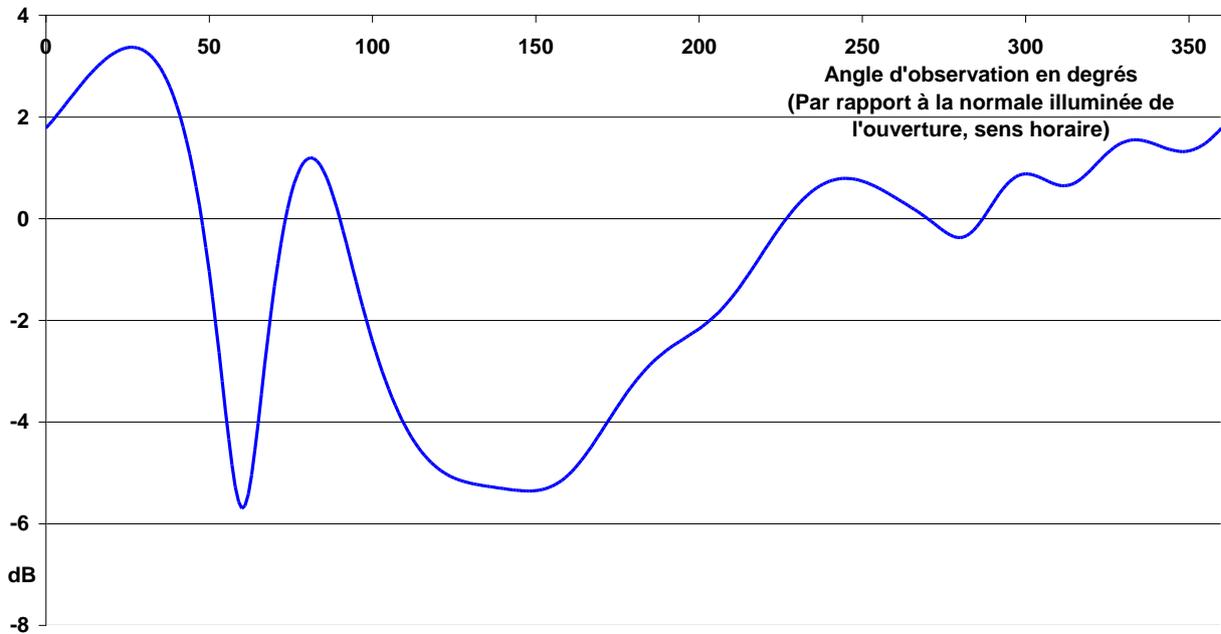


Figure VI-4 : *Champ total entourant une ouverture*
 $\phi_0 = 45^\circ$, $\rho = 0.8 \lambda$, $L = \lambda$, Polarisation magnétique

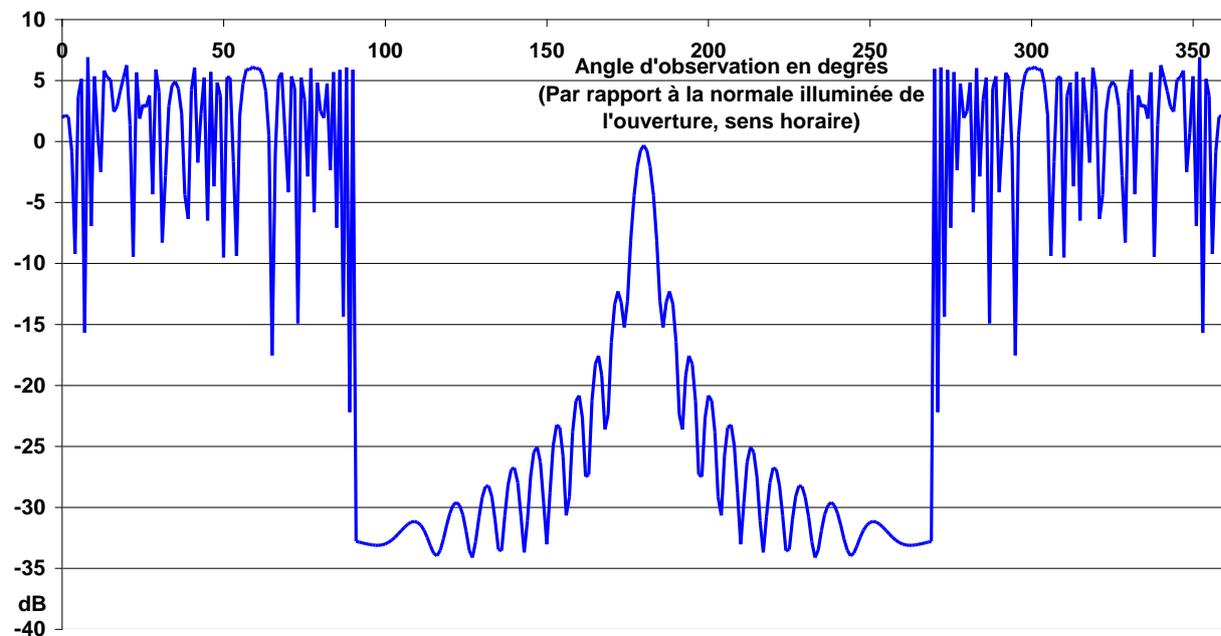


Figure VI-5 : *Champ total entourant une ouverture*
 $\phi_0 = 90^\circ$, $\rho = 100 \lambda$, $L = 5 \lambda$, Polarisation magnétique

La figure VI-5 est obtenue en considérant une large ouverture ($2L = 10 \lambda$), et en se plaçant à une grande distance de cette ouverture (100λ). On se rapproche ainsi de la figure de diffraction obtenue en optique (Sinus cardinal).

II - Exemple de résultats en polarisation électrique

En polarisation électrique, il existe un rayon diffracté par le demi-plan N° 1 qui atteint l'arête du demi-plan N° 2 et réciproquement. Le phénomène ne s'arrête pas là, et chaque rayon diffracté donne naissance à un nouveau rayon qui vient interférer avec l'autre arête.

La description faite en théorie géométrique de la diffraction est donc approximative, puisqu'elle ne prend pas en compte ces multiples interactions.

En particulier, le rayon diffracté par le demi-plan N° 2 est qui revient vers le demi-plan N° 1 n'étant pas nul, il induit une erreur dans le calcul du champ sur le demi-plan parfaitement conducteur N° 1, puisqu'alors la Théorie géométrique de la diffraction donne un champ différent de zéro sur ce plan.

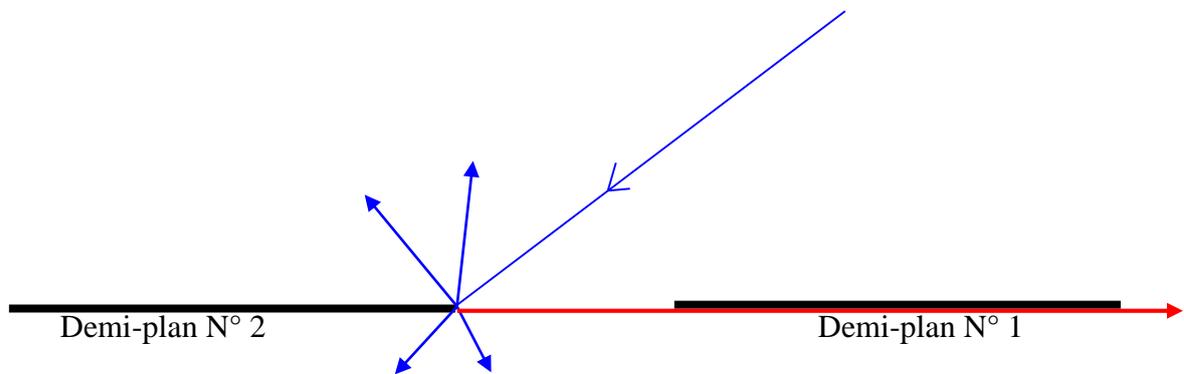


Figure VI-6 : Rayon diffracté par le demi-plan N° 2 qui ne respecte pas les conditions aux limites sur le demi-plan N° 1.

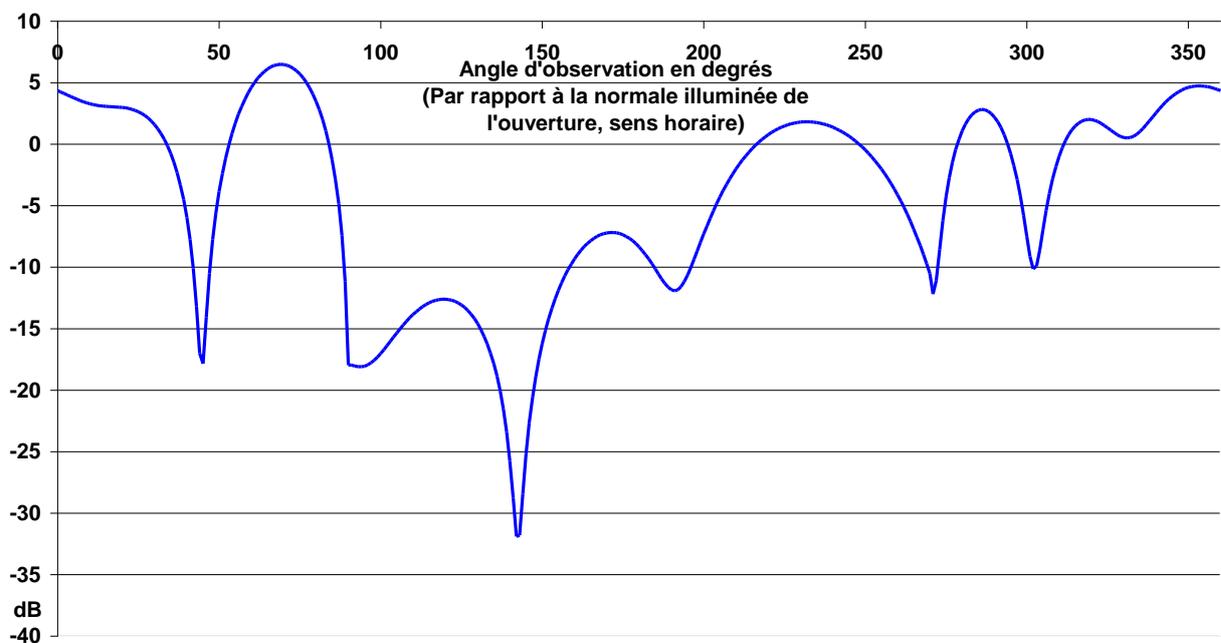


Figure VI-7 : Champ total entourant une ouverture
 $\phi_0 = 45^\circ$, $\rho = \lambda$, $L = 0.8 \lambda$, Polarisation électrique

C'est ce que montre la figure VI-7, où le champ électrique ne s'annule pas sur les faces des demi-plans en 90° et 180° . La précision peut être améliorée en prenant en compte la double diffraction, puis la triple diffraction, mais sans jamais atteindre la solution exacte.

Ce phénomène a peu d'influence pour de larges ouvertures, et une observation dans l'axe de l'ouverture, et on peut considérer que les résultats obtenus dans ces conditions sont satisfaisants (Figure VI-8).

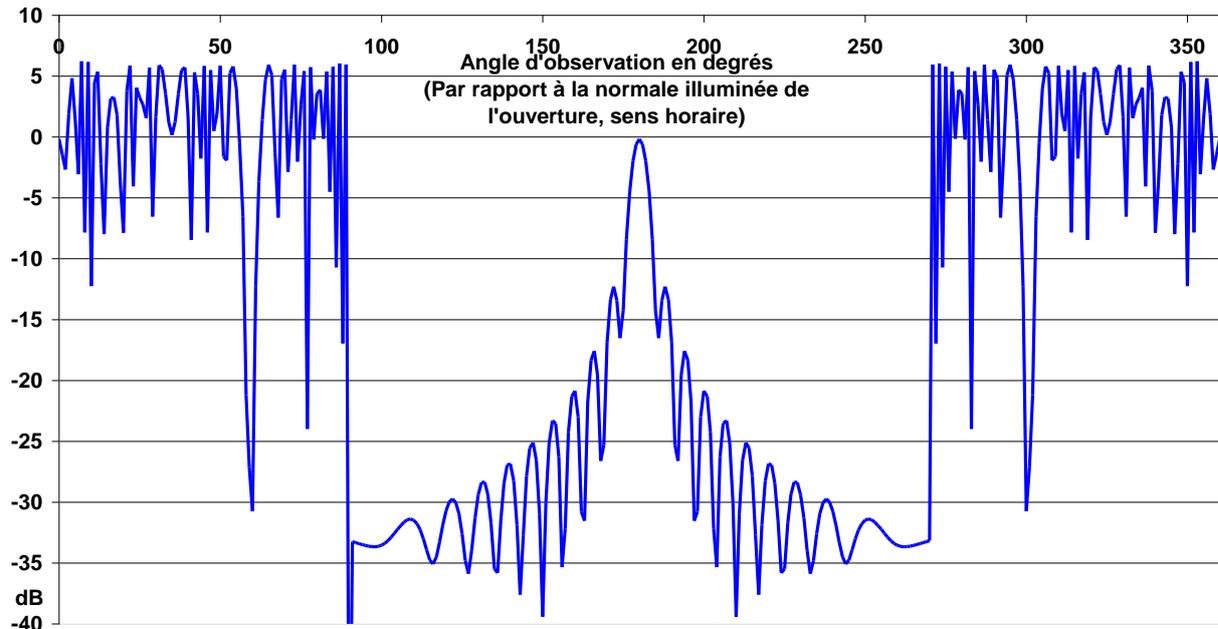


Figure VI-8 : *Champ total entourant une ouverture*
 $\phi_0 = 90^\circ$, $\rho = 100 \lambda$, $L = 5 \lambda$, Polarisation électrique

III – Les zones de champ derrière une ouverture

Une ouverture peut être considérée comme une source de rayonnement pour le demi-espace qui ne contient pas l'illumination.

Le diagramme de rayonnement ne prend sa forme définitive qu'en champ lointain, et on distingue 3 zones de champ en s'éloignant de l'ouverture, soit successivement la zone de RAYLEIGH, la zone de FRESNEL, et la zone de FRAUNHOFER ou zone de champ lointain.

Ces 3 zones sont représentées sur la figure VI-9, où nous avons considéré une ouverture de dimension égale à 8λ illuminée en incidence normale en polarisation magnétique, et représenté le module du champ au carré dans l'axe de l'ouverture en s'éloignant vers l'infini.

La zone proche ou zone de RAYLEIGH est caractérisée par de fortes ondulations du champ total dues aux interférences du champ diffracté par les arêtes avec le champ incident.

La zone de champ lointain est caractérisée par une décroissance du champ en $1/R$ en 3 dimensions, et $1/\text{Racine}(R)$ en 2 dimensions.

Entre les deux, la zone de FRESNEL est une zone de transition qui permet de passer de l'une à l'autre (Voir Chapitre sur le rayonnement des ouvertures pour plus de commentaires)

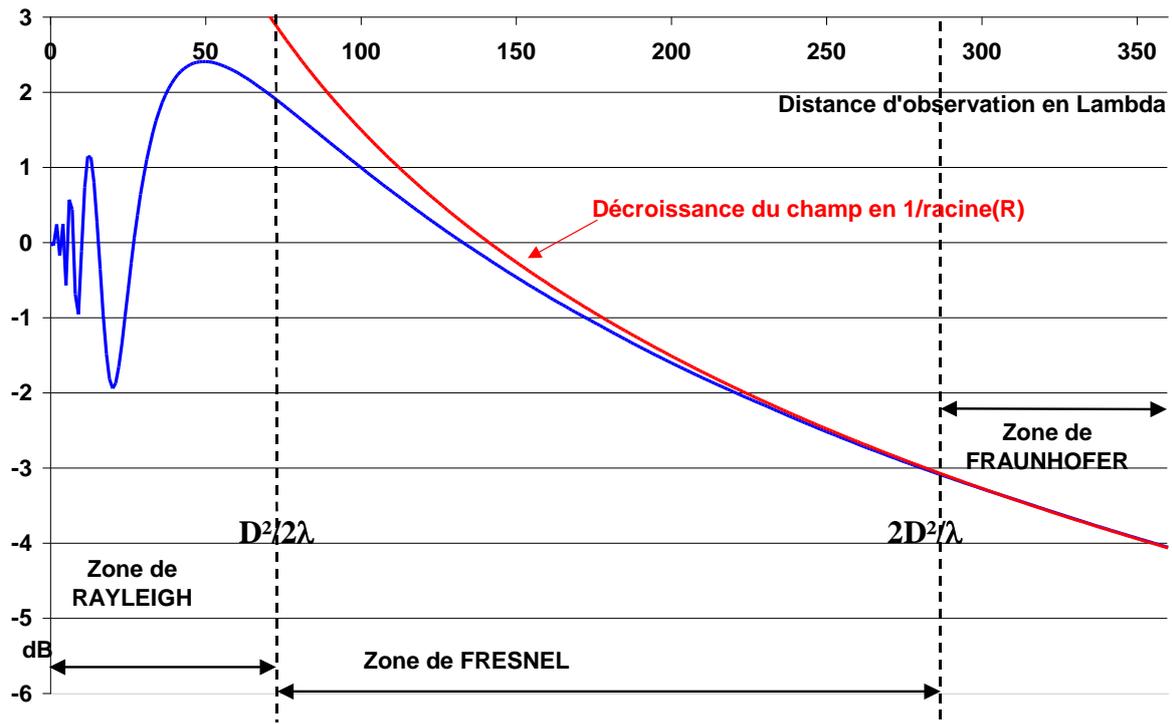


Figure VI-9 : Champ total derrière une fente ($2D$) illuminée par une onde plane en incidence normale et en polarisation magnétique. Largeur de la fente : 12λ .

IV – Illustration du théorème de BABINET

Les exemples d'illustration analytique du théorème de BABINET (Voir Chapitre sur les théorèmes généraux de l'électromagnétisme) sont peu nombreux.

La diffraction par une fente a une situation duale qui est la diffraction par une plaque. De plus, pour être en mesure d'appliquer le théorème de BABINET, nous devons illuminer ces deux objets dans des polarisations complémentaires et nous choisissons celle qui s'apparente à une solution exacte : Diffraction d'une fente en polarisation magnétique et diffraction d'une plaque en polarisation électrique (Figure VI-10).

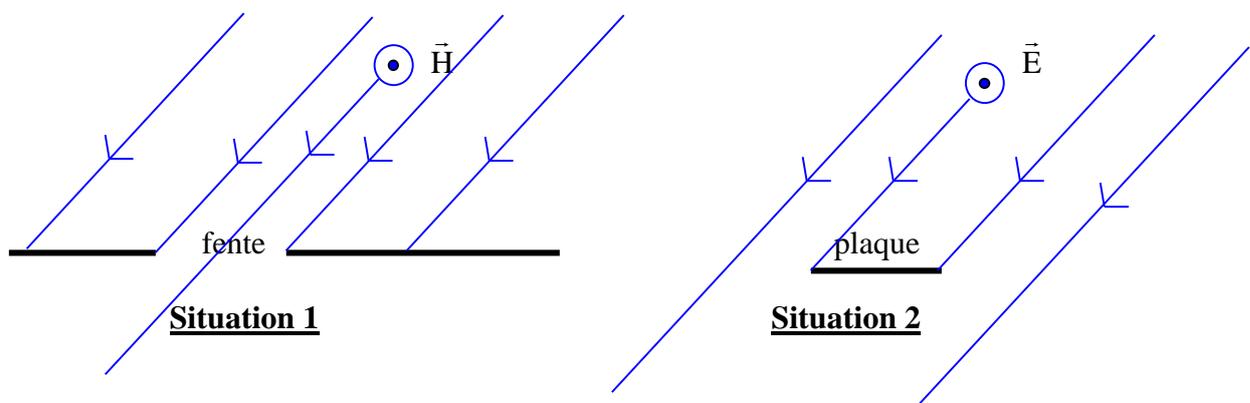


Figure VI-10 : Représentation d'une ouverture illuminée en polarisation magnétique (situation 1), et d'une fente équivalente illuminée en polarisation électrique (situation 2).

Le théorème de BABINET affirme que dans le demi-espace inférieur, le (champ total – champ incident en l’absence de l’obstacle) de la situation 1 est égal au champ total de la situation 2 et réciproquement.

Le (champ total – champ incident en l’absence de l’obstacle) est désigné en français par champ diffracté, et il y a un risque de confusion réel avec le champ diffracté de la Théorie géométrique de la diffraction, alors qu’il ne représente pas en général la même quantité

La terminologie américaine fait explicitement la différence :

- Scattered Field = (Champ total – Champ incident en l’absence de l’obstacle)
- Diffracted Field = Champ diffracté de la TGD.

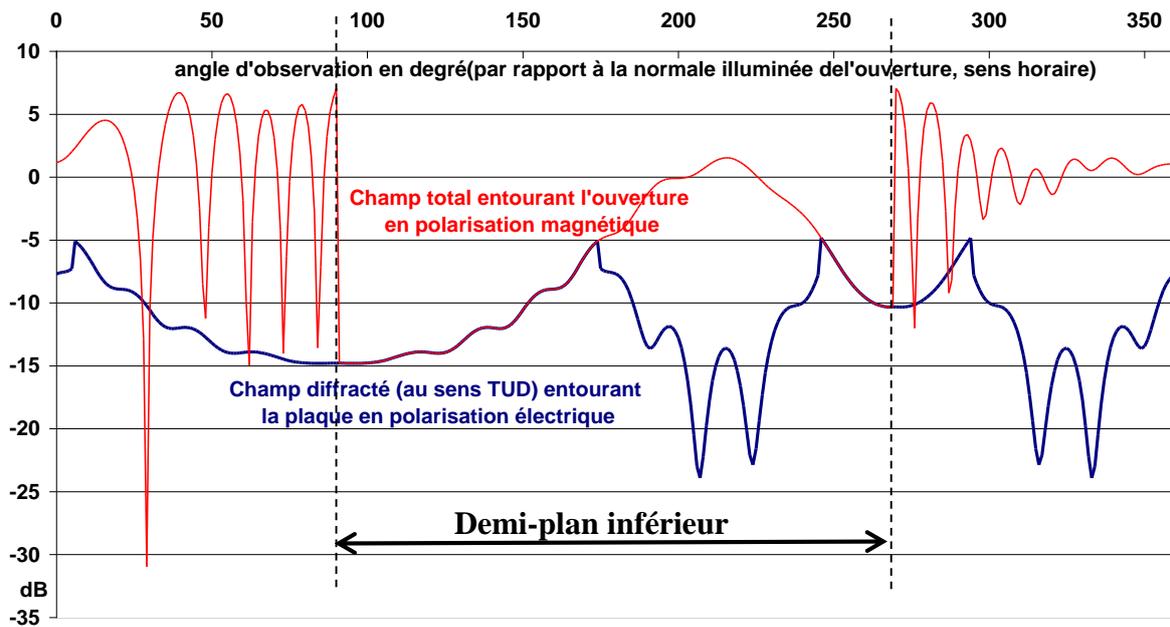


Figure VI-11 : Comparaison du champ total entourant l’ouverture en polarisation magnétique et du champ diffracté (au sens de la théorie uniforme de la diffraction) en polarisation électrique dans les conditions $\phi_0 = 60^\circ$, $\rho = 3 \lambda$, $L = 2 \lambda$.

Sur le premier exemple, nous avons effectué une comparaison avec le « diffracted field ». On constate une égalité rigoureuse des champs calculés dans le demi-plan inférieur, sauf dans la zone où il n’y a un champ incident direct (de 175° à 246°).

En enlevant ce champ incident, on obtient le « scattered field », et l’égalité numérique complète des champs calculés dans le demi-plan inférieur. Cette situation est représentée sur la figure VI-12, qui est illustrée avec des dimensions différentes de la précédente.

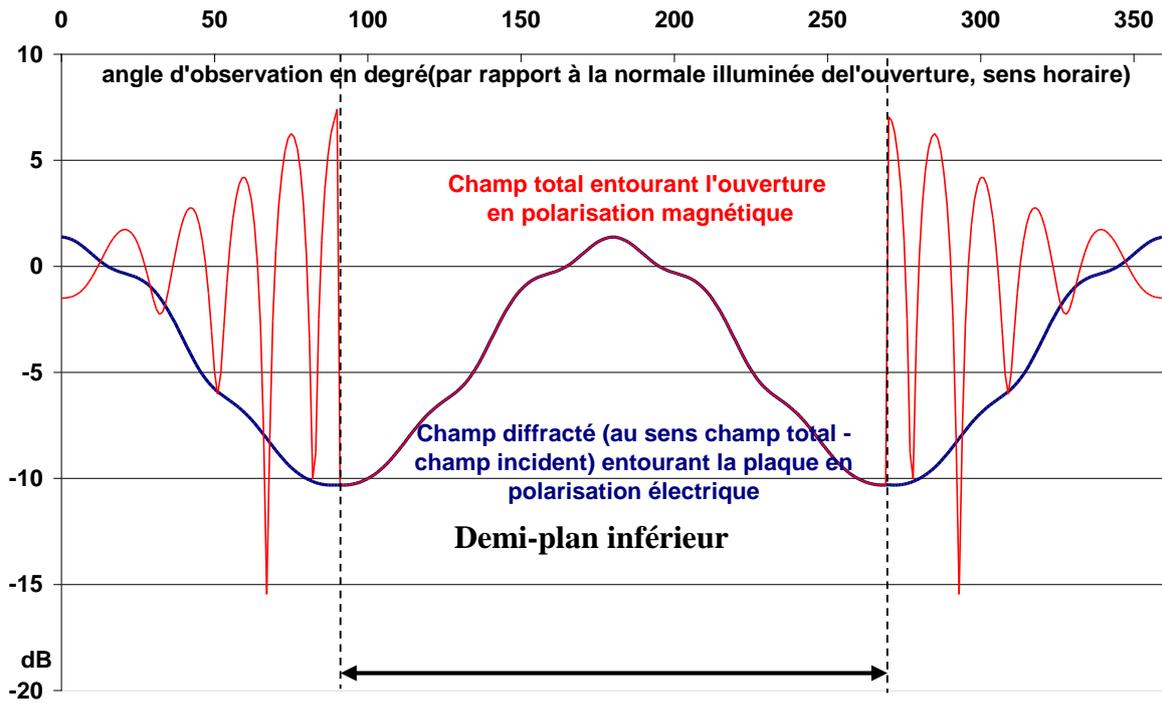


Figure VI-12 : Comparaison du champ total entourant l'ouverture en polarisation magnétique et du champ diffracté (au sens champ total – champ incident sans l'obstacle) en polarisation électrique dans les conditions $\phi_0 = 90^\circ$, $\rho = 2 \lambda$, $L = 1.5 \lambda$.

VII - Antenne sur plan de masse limité

La théorie géométrique de la diffraction, et sa version uniforme sont particulièrement bien adaptées pour traiter la diffraction de structures qui sont grandes devant la longueur d'onde, et pour lesquels il n'y a pas une quantité trop importante de rayons à prendre en compte.

Toujours avec le souci de présenter un exemple simple et didactique, nous allons appliquer cette méthode au calcul du champ diffracté par le support d'une antenne, et ainsi permettre l'analyse de son influence sur le diagramme de rayonnement de l'antenne.

Nous choisissons comme type d'antenne, une antenne imprimée (Voir chapitre relatif à ce sujet pour plus de détails).

Dans le traitement de ce problème, nous ferons certaines approximations qui seront justifiées à posteriori par le fait que les résultats expérimentaux sont correctement prédits par la méthode employée :

- Nous traiterons l'influence sur le diagramme de rayonnement seulement dans un plan. Dans ces conditions, nous pouvons traiter cette structure comme un problème 2D.
- Nous considérerons que le centre de phase de l'antenne est également son centre géométrique, et que le champ rayonné peut être considéré comme issu de ce centre de phase.
- Nous estimerons que le champ issu de l'antenne et qui tombe sur l'arête a une structure localement plane et peut donc être représenté par un rayon de l'optique géométrique.
- Nous supposerons classiquement que le point d'observation est situé en champ lointain, et que par conséquent, tous les rayons qui lui parviennent de la structure sont parallèles.

Dans ces conditions, la géométrie du problème peut être représentée par la figure VII-1. On y retrouve :

- Le centre de phase O
- Les arêtes 2 et 3 situées à une distance D du centre de phase
- Le rayon direct R_1 , issu de l'antenne, qui atteint le point d'observation.
- Les rayons incidents sur les arêtes R_{i2} et R_{i3} .
- Les rayons diffractés R_2 et R_3 , issus de leur arête respective, et dirigés vers le point d'observation.

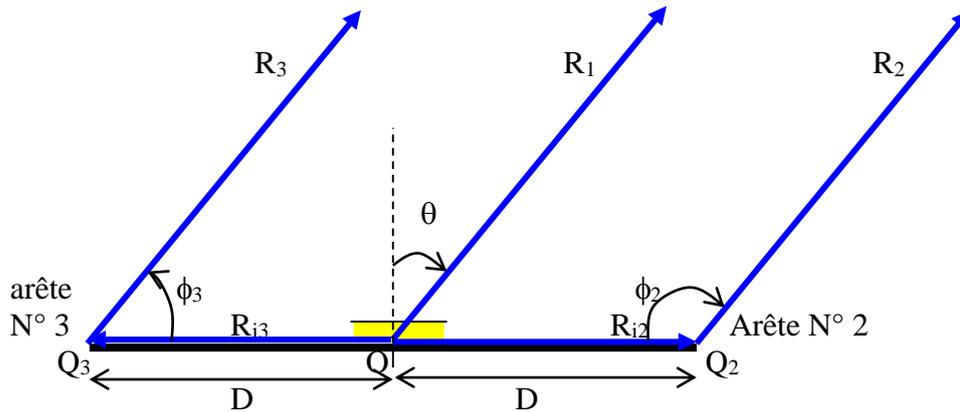


Figure VII-1 : Représentation de la géométrie d'une antenne sur plan de masse limité, et des rayons incidents et diffractés.

Dans cette partie, le plan de coupe considéré pour définir le diagramme de rayonnement sera le plan E de l'antenne, ce qui indique que les rayons incidents sur les arêtes seront en polarisation magnétique.

I – Le rayonnement de l'antenne sur un plan de masse infini

Les rayons incidents sur les arêtes 2 et 3 sont des rayons non perturbés : ils doivent donc être calculés comme issus d'une antenne située sur un plan de masse infini.

Nous avons montré qu'une antenne imprimée excitée sur son mode fondamentale avait un diagramme de rayonnement dans le plan E, sur un plan de masse infini, qui pouvait s'exprimer sous la forme :

$$F(\theta) = \left| \cos \left(\frac{\pi \sin \theta}{2\sqrt{\epsilon_r}} \right) \right| \quad (\text{VII-1})$$

où ϵ_r représente la permittivité électrique du substrat.

Cela conduit à une forme de diagramme, et à une évolution en fonction de ϵ_r , telles qu'elles sont représentées sur la figure VII-2

On note que le champ incident sur les arêtes est d'autant plus élevé que ϵ_r est grand.

Pour $\epsilon_r = 0$, le champ incident sur l'arête est nul, et il n'y a pas de champ diffracté, donc pas d'influence de la taille du plan de masse sur le diagramme de rayonnement.

Puisque nous traitons le problème en dimension 2, le champ incident associé au rayon R_1 (de l'antenne au point d'observation) a une nature cylindrique et s'écrit :

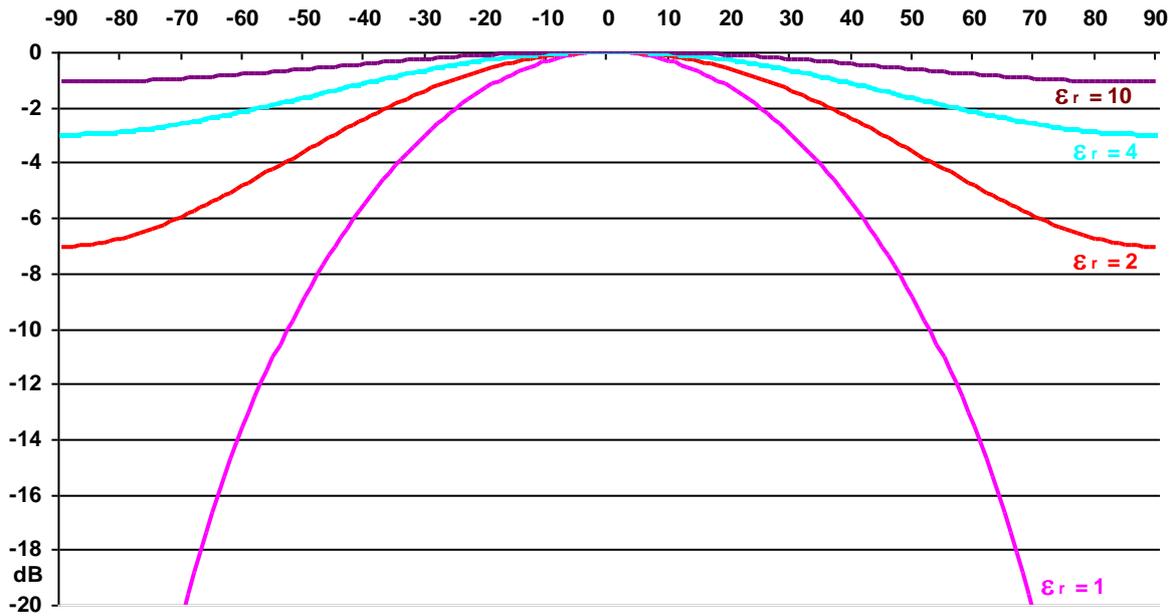


Figure VII-2 : Evolution des diagrammes de rayonnement du plan E sur le mode fondamental lorsque ϵ_r varie

$$\vec{E}_1(\theta) = F(\theta) \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \vec{U}_0 \quad (\text{VII-2})$$

où r représente la distance du centre de phase O au point d'observation P.

II – La construction des rayons diffractés

En adoptant la même démarche que pour le rayon incident au point d'observation, les rayons incidents sur les arêtes 2 et 3 sont associés aux champs suivants :

$$\vec{E}_{i2}(Q_2) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{e^{-jkD}}{\sqrt{D}} \vec{U}_0 \quad (\text{VII-3})$$

$$\vec{E}_{i3}(Q_3) = F\left(-\frac{\pi}{2}\right) \frac{e^{-jkD}}{\sqrt{D}} \vec{U}_0 \quad (\text{VII-4})$$

Dans ce problème, le champ réfléchi n'est pas à considérer car il multiplie simplement le champ incident par 2 d'après le théorème des images. Puisqu'on ne s'intéresse pas à un niveau absolu, mais à un niveau relatif dans chaque direction θ de l'espace, on peut donc simplifier le problème en ne considérant que le champ incident.

En utilisant la solution de SOMMERFELD et la démarche de KOUYOUMJAN et PATHAK pour obtenir une solution uniforme au voisinage de la frontière ombre lumière, on construit le champ diffracté par chacune des arêtes sous la forme :

$$\vec{E}_2(\theta) = -\vec{E}_{i2}(Q_2) \tilde{K} \left[\sqrt{2kL} \cos \frac{\phi_2}{2} \right] \sqrt{L} \frac{e^{-jk(r-D \sin \theta)}}{\sqrt{r - D \sin \theta}} \quad (\text{VII-5})$$

avec :

$$L = \frac{(r - D \sin \theta)D}{(r - D \sin \theta) + D} \quad \text{et} \quad \phi_2 = \frac{\pi}{2} + \theta \quad (\text{VII-6})$$

et où, dans un souci d'allègement de notation, on a condensé le changement de signe qui affecte la fonction K_- au passage des frontières de l'optique géométrique en plaçant un signe « tilde » sur cette fonction et en affectant une valeur absolue à son argument :

$$\tilde{K}_-(x) = \text{Sgn}(x) K_-(|x|) \quad (\text{VII-7})$$

Le point d'observation est situé à une distance r de l'origine, et cette distance tend vers l'infini, d'où on a sensiblement $L \cong D$.

En rassemblant les résultats partiels VII-3,5,6, on obtient le champ diffracté par l'arête N°2 :

$$\bar{E}_2(\theta) = -F\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{-jkD(1-\sin\theta)} \tilde{K}_-\left(\sqrt{2kD} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right) \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \bar{U}_\theta \quad (\text{VII-8})$$

De manière analogue, on obtient le champ diffracté par l'arête N° 3 :

$$\bar{E}_3(\theta) = -F\left(-\frac{\pi}{2}\right)e^{-jkD(1+\sin\theta)} \tilde{K}_-\left(\sqrt{2kD} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right) \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \bar{U}_\theta \quad (\text{VII-9})$$

III – Le champ total rayonné

Le champ total s'obtient en faisant la somme du champ directement rayonné par l'antenne, et du champ diffracté rayonné par chacune des arêtes. En tenant compte de la symétrie du diagramme de rayonnement sur plan de masse infini à $+\pi/2$ ou $-\pi/2$, on obtient :

$$\bar{E}(\theta) = \left\{ \begin{array}{l} F(\theta) \\ - F\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{-jkD(1-\sin\theta)} \tilde{K}_-\left(\sqrt{2kD} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right) \\ - F\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{-jkD(1+\sin\theta)} \tilde{K}_-\left(\sqrt{2kD} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right) \end{array} \right\} \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \bar{U}_\theta \quad (\text{VII-10})$$

Le diagramme de rayonnement perturbé est indépendant de la distance r à laquelle on se situe (pourvu que ce soit en champ lointain). Il s'obtient en prenant le module de l'expression précédente, normalisé par rapport à racine de r :

$$E(\theta) = \left| F(\theta) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{-jkD(1-\sin\theta)} \tilde{K}_-\left(\sqrt{2kD} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{-jkD(1+\sin\theta)} \tilde{K}_-\left(\sqrt{2kD} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right) \right| \quad (\text{VII-11})$$

Les figures VII-3,4,5,6 représentent des comparaisons entre des résultats de mesure et la modélisation théorique obtenue à l'aide de la théorie uniforme de la diffraction. Le substrat est en verre époxy de permittivité $\epsilon_r = 4.5$.

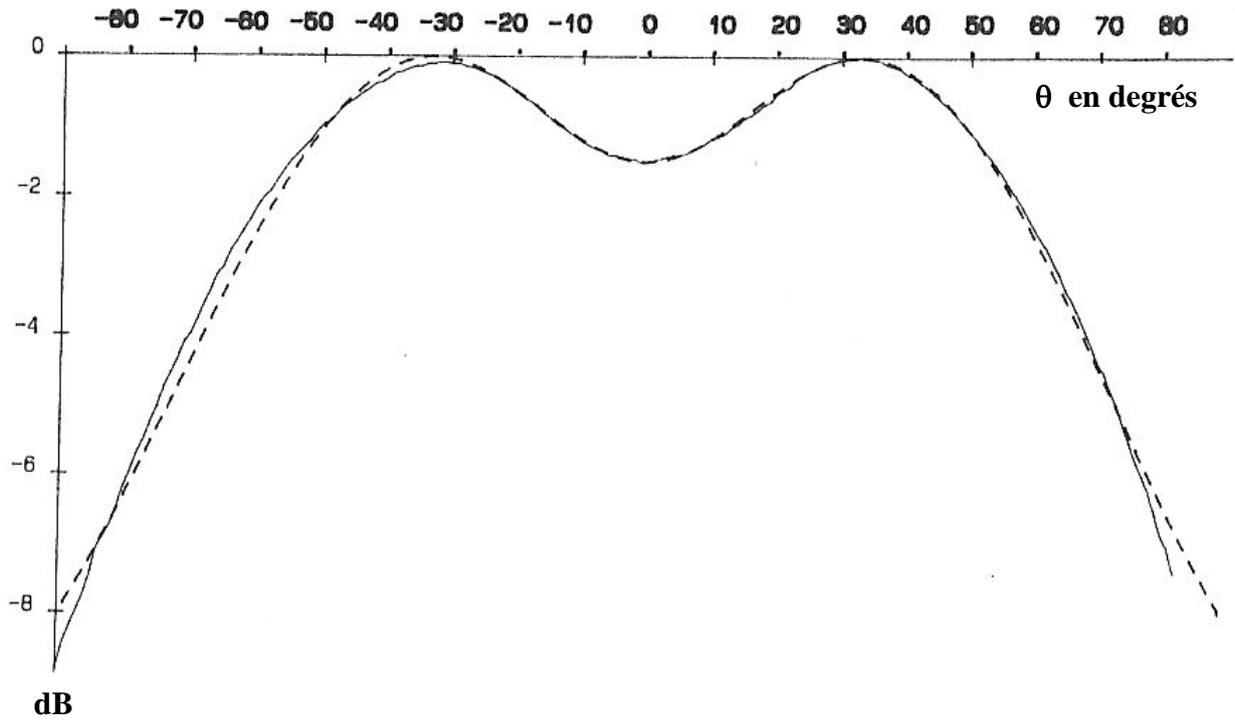


Figure VII-3 : comparaison théorie (- - - -) avec $D = 0.75 \lambda$ et mesure (_____) avec $D = 0.68 \lambda$

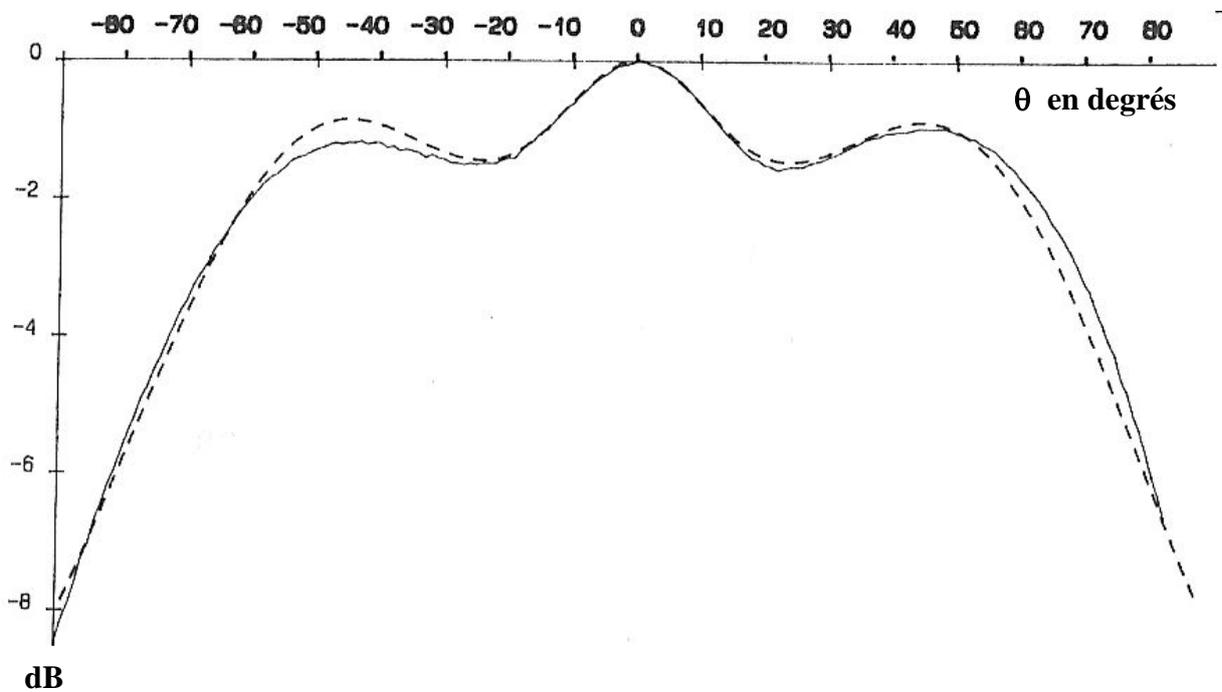


Figure VII-4 : comparaison théorie (- - - -) avec $D = 1.2 \lambda$ et mesure (_____) avec $D = 1.1 \lambda$

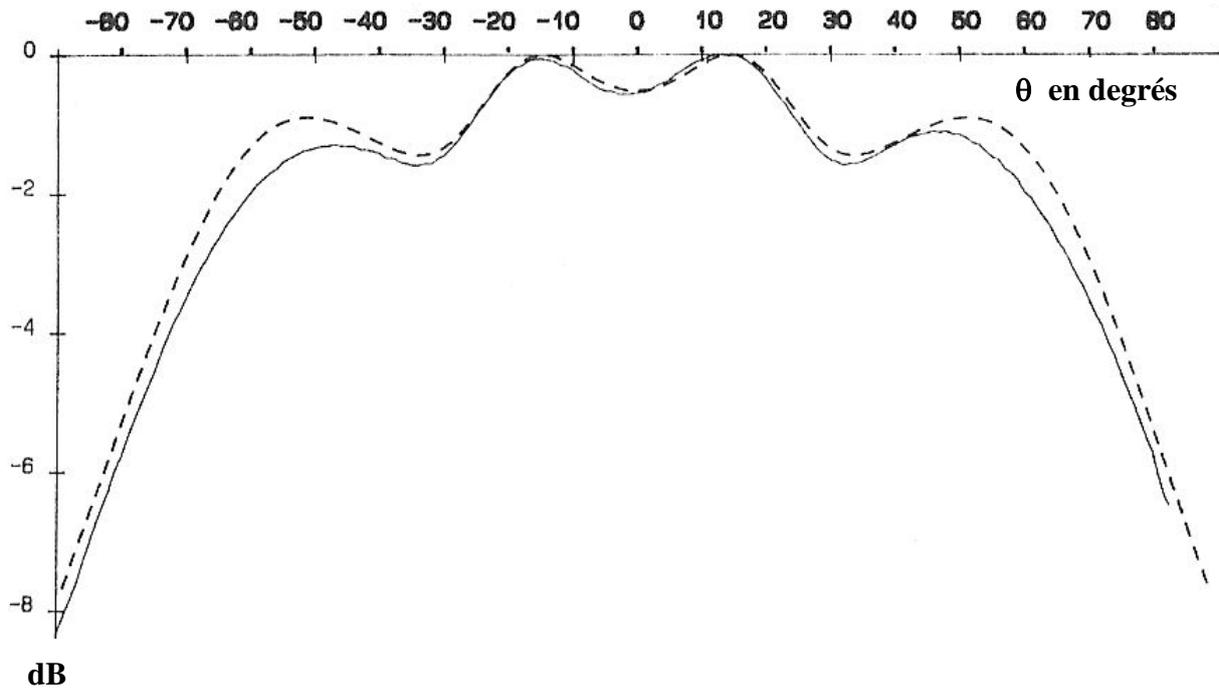


Figure VII-5 : comparaison théorie avec $D = 1.68 \lambda$ et mesure avec $D = 1.53 \lambda$

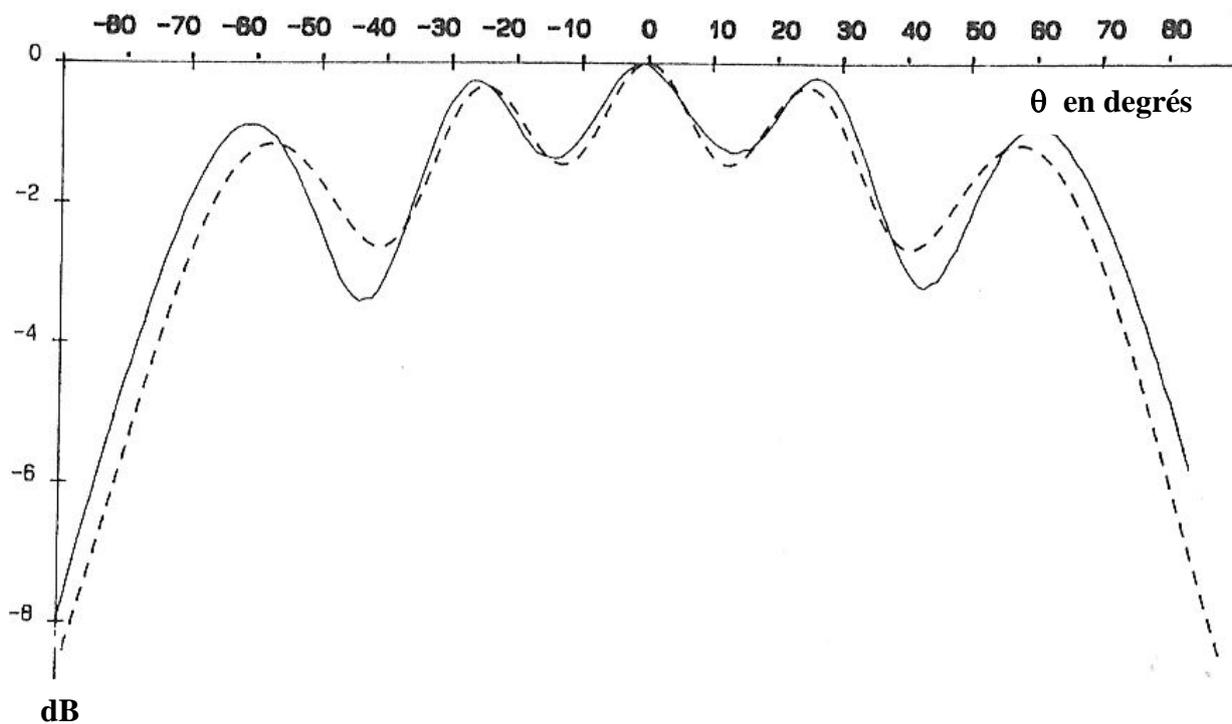


Figure VII-6 : comparaison théorie avec $D = 2.25 \lambda$ et mesure avec $D = 2.25 \lambda$

En ce qui concerne l'utilisation de la relation (VII-10), nous avons recherché la valeur de D qui permettait de retrouver au mieux la courbe expérimentale. Cette valeur de D correspond pas exactement à la valeur réelle, mais diffère souvent d'une faible fraction de longueur d'onde

(environ 0.1λ). On peut raisonnablement attribuer cet écart aux nombreuses approximations faites lors de la modélisation.

L'écart maximum en dB entre les résultats théoriques et expérimentaux reste faible (environ 0.5 dB), ce qui montre que l'analyse théorique rend bien compte des phénomènes fondamentaux qui sont à l'origine de la perturbation du diagramme de rayonnement sur plan de masse infini.

IV – Analyse du rayonnement au voisinage de $\theta = \pm 90^\circ$

D'une manière générale, le champ diffracté est maximum au voisinage des frontières de l'optique géométrique : c'est donc dans ces directions qu'il va perturber le champ rayonné avec le plus d'amplitude.

Pour un demi-plan, et sur l'exemple de la frontière ombre-lumière, le champ diffracté est égal à la moitié du champ incident et change de signe en traversant la frontière, permettant ainsi de compenser exactement la discontinuité due au passage de la zone illuminée à la zone d'ombre et ceci indépendamment de la distance de l'arête à laquelle on se situe.

Pour une antenne située sur un plan de masse limitée, les conséquences sur le diagramme de rayonnement dans le plan E sont les suivantes :

- à $\theta = \pm 90^\circ$ tous les diagrammes de rayonnement passent par un même point, quelle que soit la dimension du plan de masse. En réalité, même d'un point de vue théorique, ils ne passent pas exactement par le même point car l'amplitude du rayon diffracté par l'autre arête dépend de la distance D , mais l'ordre de grandeur de ce rayon n'est pas significatif.

- ce point se situe à -3dB (en champ) ou à -6dB (en puissance) du niveau de champ ou de puissance obtenu sur plan de masse infini à $\theta = \pm 90^\circ$

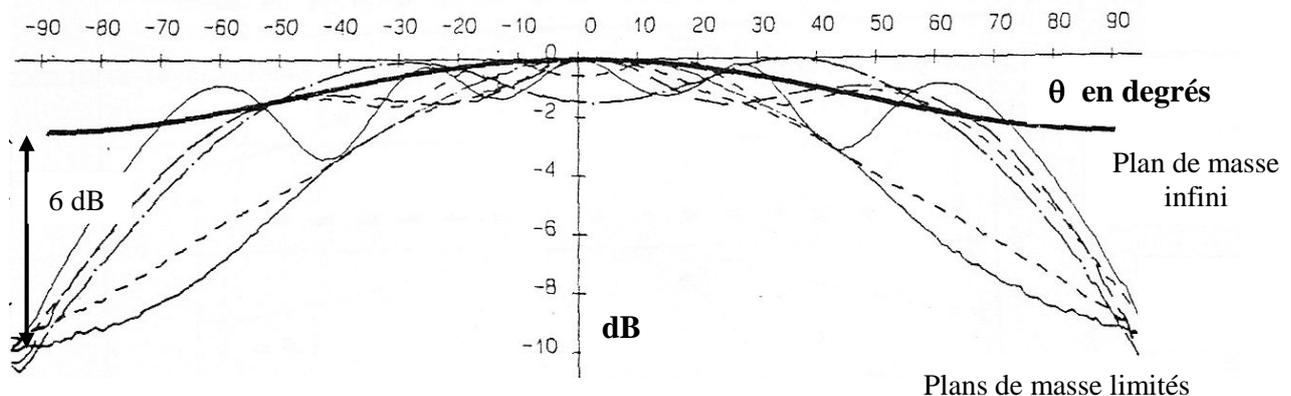


Figure VII-7 : Superpositions des diagrammes de rayonnement pour différentes longueurs de plans de masse

Ce résultat théorique est confirmé expérimentalement sur la figure VII-7, où ont été superposés le diagramme de rayonnement théorique avec plan de masse infini, et plusieurs relevés expérimentaux avec des plans de masse limités de dimensions différentes.

V – Le rayonnement arrière°

Le rayonnement arrière d'une antenne imprimée placée sur un support plan limité est constitué par la somme des champs diffractés par chacune des arêtes dans le demi-espace qui ne contient pas l'antenne. Son niveau fait parfois partie du cahier des charges imposées, sous la forme d'un rapport « Front to back ».

De la relation qui exprime le champ diffracté par une arête et qui est rappelée pour mémoire pour l'arête numéro 2:

$$\vec{E}_2(\theta) = -\vec{E}_{i2}(Q_2) \text{Sgn}\left(\cos \frac{\phi_2}{2}\right) K_{-}\left(\sqrt{2kL}\left|\cos \frac{\phi_2}{2}\right|\right) \sqrt{L} \frac{e^{-jk(r-D \sin \theta)}}{\sqrt{r - D \sin \theta}} \quad (\text{VII-12})$$

On déduit que les champs diffractés dans les zones de rayonnement avant (direction ϕ_2) et arrière (direction $2\pi - \phi_2$) sont en opposition de phase (figure VII-8).

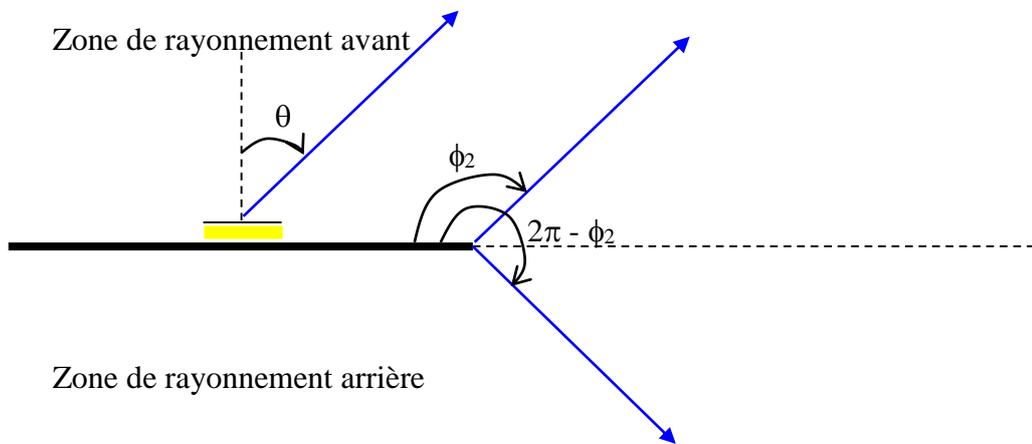


Figure VII-8 : Représentation des zones de rayonnement avant et arrière

Le champ présent en zone arrière se calcule avec la même relation que pour le champ avant, après avoir enlevé le rayon en provenance directe de l'antenne :

$$E(\theta) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) \left| e^{-jkD(1-\sin \theta)} \tilde{K}_{-}\left(\sqrt{2kD} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right) + e^{-jkD(1+\sin \theta)} \tilde{K}_{-}\left(\sqrt{2kD} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right) \right| \quad (\text{VII-12})$$

On peut alors représenter le diagramme de rayonnement global sur 360° (Figure VII-9)

Les frontières de l'optique géométrique se situent à $\theta = -90^\circ$ et $\theta = +90^\circ$. Or contre toute attente, le champ total est discontinu à ces endroits, semblant remettre en question l'uniformité de la solution développée.

En réalité, le problème est ailleurs. D'une manière générale, lorsqu'on utilise la théorie uniforme de la diffraction et qu'une telle discontinuité apparaît, c'est qu'un rayon d'importance significative a été oublié.

Dans le cas présent, examinons comment est construit le champ total dans cette région de l'espace au voisinage de $\theta = +90^\circ$ (Figure VII-10).

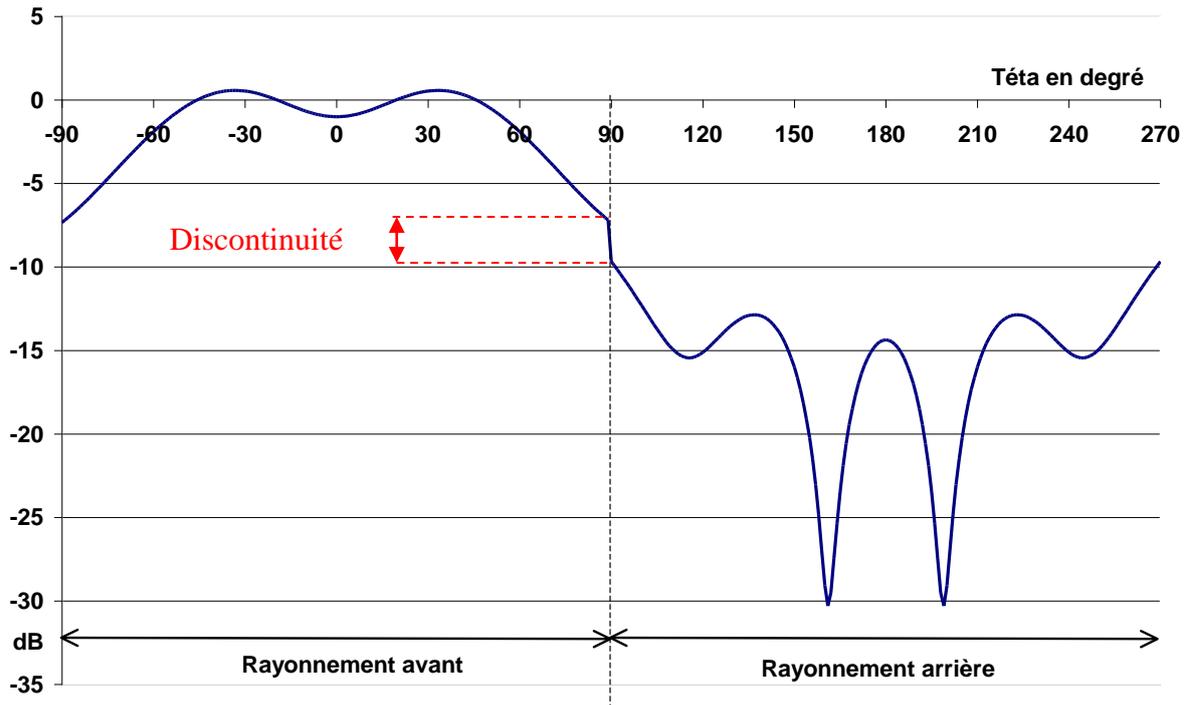


Figure VII-9 : Représentation du diagramme de rayonnement avant et arrière sur 360° , pour une longueur $D = 0.75 \lambda$

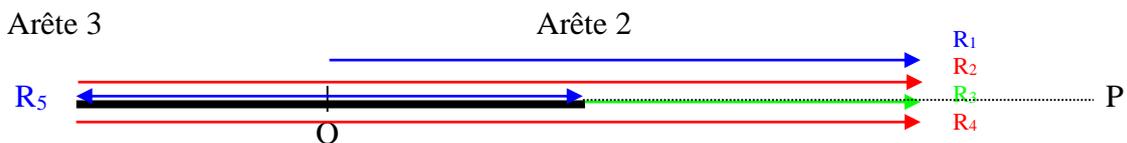


Figure VII-10 : Représentation des rayons incidents et diffractés dans l'alignement du plan de masse.

Pour un point d'observation P dans le prolongement du plan de masse, on a les rayons suivants :

- R_1 : rayon incident issu de l'antenne
- R_2 : rayon diffracté issu de l'arête 3 pour $\theta = 90^\circ^-$
- R_3 : rayon diffracté issu de l'arête 2
- R_4 : rayon diffracté issu de l'arête 3 pour $\theta = 90^\circ^+$

Au point P, la somme de R_1 et R_3 donne une fonction continue de θ car nous utilisons une théorie uniforme. Par contre, comme il a été mentionné précédemment, R_2 et R_4 sont deux rayons en opposition de phase. Lorsque la distance D est suffisamment faible (0.75λ), leur importance devient significative et génère une discontinuité parfaitement visible.

Pour traiter cette discontinuité, la solution consiste à faire diffracter ces rayons (qui sont déjà des rayons diffractés par l'arête N° 3) une nouvelle fois par l'arête n° 2 : on prend alors en compte un phénomène de double diffraction.

On obtient le résultat de la figure VII-11, dans laquelle la transition est devenue parfaitement lisse.

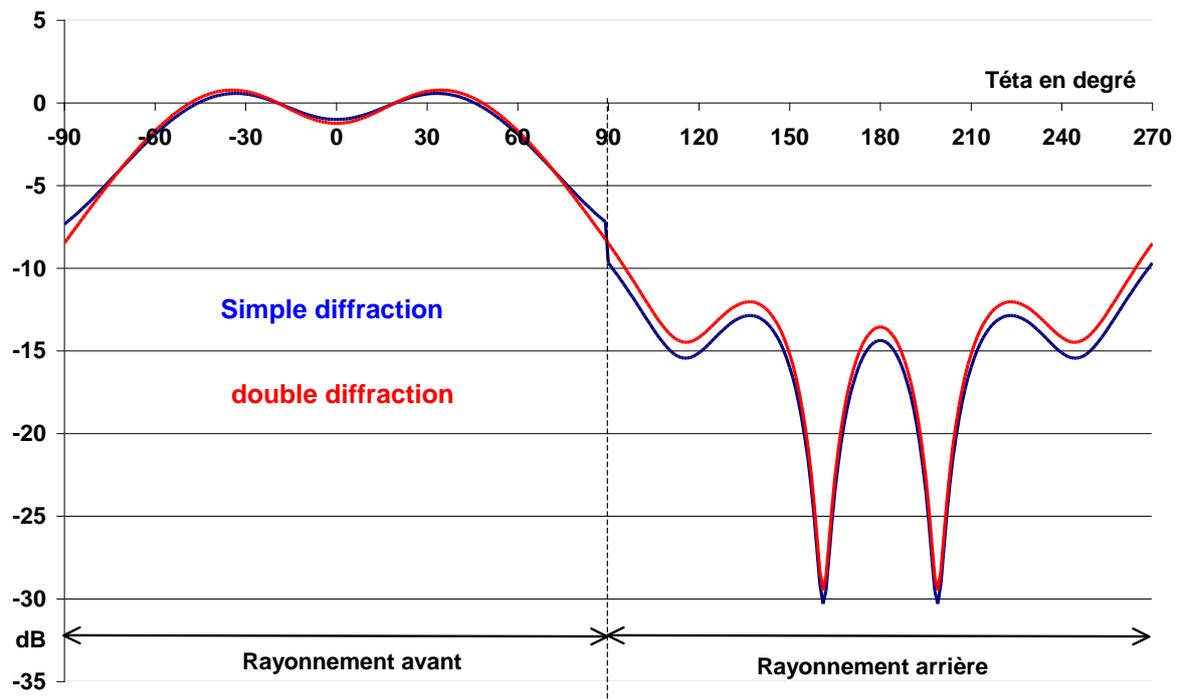


Figure VII-11 : Comparaison des diagrammes en simple diffraction et en double diffraction.

VI –Éléments de conclusion°

Dans l'étude des phénomènes de diffraction, la théorie uniforme de la diffraction est une méthode qui fait appel dans sa conception et dans son utilisation à une connaissance physique approfondie des phénomènes qu'on étudie.

Comme nous avons essayé de le montrer dans ce chapitre et le précédent, l'analyse des résultats conduit souvent à une perception fine des mécanismes mis en jeu, du rôle de la polarisation, des différentes contributions des points de diffraction : en ce sens, elle recueille un avis plutôt favorable de la part des physiciens.

Elle est souvent complétée par des logiciels spécialisés chargés de déterminer, pour une source et une structure donnée, l'ensemble des rayons incidents, réfléchis et diffractés qui parviennent au point d'observation.

Les résultats numériques sont d'autant plus précis que le nombre de diffractions multiples est important. Mais on constate que le nombre de rayons explose avec la prise en compte de multiples diffractions, et les logiciels vont rarement au-delà de la triple diffraction.

D'une manière générale, lorsqu'un problème physique présente un degré de complexité élevé, quelle que soit la solution mise en œuvre, il arrive forcément une étape où la complexité apparaît. Dans le cas de la Théorie uniforme de la diffraction, cette difficulté consiste à déterminer l'ensemble des rayons significatifs qui interviennent dans l'interaction avec une structure complexe.

VIII - Diffraction d'une onde plane par une arête formée par deux demi-plans parfaitement conducteurs

La diffraction étant considérée comme un phénomène local aux très hautes fréquences, la TGD s'appuie sur des solutions connues de diffraction d'ondes planes ou cylindriques sur des obstacles « canoniques » : demi-plan, dièdre, cône, cylindre.

A partir de ces solutions qui sont inexploitable en champ lointain, on construit des évaluations asymptotiques qui convergent d'autant mieux vers la solution exacte qu'on se place loin de l'obstacle.

On attribue ensuite à chaque rayon diffracté une amplitude et phase calculés à partir de ces évaluations en assurant la continuité du champ total sur les frontières de l'optique géométrique grâce au procédé imaginé par KOUYOUJIAN et PATHAK.

Nous allons détailler ce cheminement dans le cas de l'arête d'un dièdre, qui est la structure venant à la suite du demi-plan dans un ordre de difficulté croissant.

Les notations du demi-plan sont reconduites, et sont rappelées sur la figure VIII-1 :

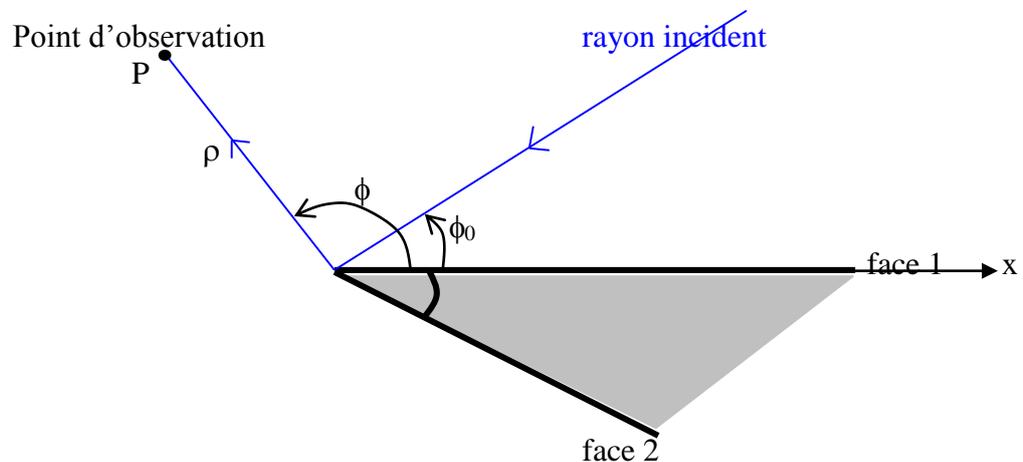


Figure VIII-1 : Représentation d'une onde plane incidente sur l'arête d'un dièdre parfaitement conducteur, et du point d'observation P .

L'angle du dièdre sera noté $(2 - n) \pi$, et nous aurons fréquemment à évoquer les situations suivantes :

- $n = 2$: le dièdre se réduit à un demi-plan dont nous connaissons la solution exacte à ce problème de diffraction.

- $n = 1$: le dièdre se réduit à un plan infini : il n'y a plus de champ diffracté, mais seulement du champ incident et du champ réfléchi, et nous connaissons également la solution exacte à ce problème électromagnétique.

- Pour $0 < n < 1$, le champ total est essentiellement constitué des champs incidents et réfléchis sur les deux parois du dièdre, et le calcul du champ diffracté apporte peu de précision supplémentaire au champ total : nous n'envisagerons pas cette situation dans la suite de cet exposé.

On adoptera par la suite les notations suivantes :

$$\phi^i = \phi - \phi_0 \quad (\text{VIII-1})$$

$$\phi^r = \phi + \phi_0 \quad (\text{VIII-2})$$

ce qui permet d'exprimer le champ incident sous la forme :

$$\vec{U}^i = U_0 e^{jk\rho \cos \phi^i} \vec{e}_z \quad (\text{VIII-3})$$

et le champ réfléchi par la face 1 :

$$\vec{U}^r = U_0 e^{jk\rho \cos \phi^r} \vec{e}_z \quad (\text{VIII-4})$$

I - La solution exacte à la diffraction d'une onde plane par une arête

Le champ total étant périodique en ϕ et en ϕ_0 , on obtient une solution exacte en recherchant les coefficients de la série de FOURIER appropriée :

$$U_z = \frac{2}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m j^m J_{\frac{m}{n}}(k\rho) \begin{cases} \sin\left(\frac{m}{n} \phi\right) \sin\left(\frac{m}{n} \phi_0\right) & (U = E) \\ \cos\left(\frac{m}{n} \phi\right) \cos\left(\frac{m}{n} \phi_0\right) & (U = H) \end{cases} \quad (\text{VIII-5})$$

Dans ces relations :

- ρ et ϕ représentent respectivement la distance du point d'observation par rapport à l'arête et l'angle que fait la direction du point d'observation avec le demi-plan..
- J représente la fonction de BESSEL de première espèce (Ne pas confondre J et j tel que $j^2 = -1$)
- n est lié à l'angle du dièdre conformément à la figure (VIII-1)
- $\varepsilon_m = 1$ pour $m = 0$, $\varepsilon_m = 2$ pour m différent de 0.

Comme dans le cas du demi-plan, cette série converge très lentement lorsque la distance ρ augmente, et devient inexploitable en champ lointain. Elle est par contre fort utile pour évaluer la précision des développements asymptotiques et leur dégradation lorsqu'on les utilise à des distances de l'ordre de quelques longueurs d'onde, voire inférieures à la longueur d'onde.

Après quelques manipulations non triviales décrites par JAMES (pp 66..69), on peut extraire de ces séries le champ diffracté sous la forme d'une intégrale dans le plan complexe :

$$U_d^{i,r} = \frac{1}{2\pi j n} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{\sin\left(\frac{z + \pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{z + \pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\phi^{i,r}}{n}\right)} e^{-jk\rho \cos(z)} dz \quad (\text{VIII-6})$$

où alternativement en notant que :

$$\cot(x + y) + \cot(x - y) = \frac{2 \sin(2x)}{\cos(2y) - \cos(2x)} \quad (\text{VIII-7})$$

$$U_d^{i,r} = g(\phi^{i,r}) + g(-\phi^{i,r}) \quad (\text{VIII-8})$$

avec :

$$g(\phi^{i,r}) = -\frac{1}{4\pi j n} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \cot\left(\frac{z + \pi + \phi^{i,r}}{2n}\right) e^{-jk\rho \cos(z)} dz \quad (\text{VIII-9})$$

Aucune formulation analytique des intégrales (VIII-6) ou (VIII-9) n'a été formulée à ce jour, mais sous cette forme, elles se prêtent bien à une évaluation asymptotique pour de grandes valeurs de $k\rho$.

On trouvera à la rubrique « Théories avancées » une analyse approfondie des différentes méthodes qui permettent d'obtenir ces développements asymptotiques.

En résumé, une évaluation asymptotique met en évidence une fonction de transition qui assure le passage du comportement de l'intégrale au voisinage du pôle (description du champ diffracté au voisinage des frontières de l'optique géométrique) au comportement de l'intégrale loin du pôle.

Cette fonction de transition n'est pas unique, et il en existe même une infinité car on imagine assez bien qu'il n'existe pas qu'une manière de passer, de manière lisse, d'une fonction à une autre.

II – Une première formulation asymptotique du champ diffracté par une arête illuminée par une onde plane.

Dans l'infinité des développements possibles, il faut faire un choix : on peut rechercher la solution qui semble globalement présenter la meilleure précision, y compris pour de faibles valeurs de ρ (de l'ordre de la longueur d'onde) : on peut penser que c'est le choix qui a été fait par KOUYOUMJIAN et PATHAK. Cela conduit à une formulation complexe comprenant l'introduction d'un nouveau paramètre qui est fonction de l'angle du dièdre et des angles d'incidence et de réflexion.

Nous faisons ici le choix d'une formulation la plus simple possible, et proche de la formulation du demi-plan. Ce faisant, nous perdons un peu en précision notamment pour de très faibles valeurs de ρ (inférieure à la longueur d'onde, mais aucune garantie de validité de la TUD ne peut plus être donnée à de telles distances), tout en conservant une formulation qui recouvre de manière exacte le plan ($n = 1$) et le demi-plan ($n = 2$).

$$U_d^{i,r} = \tilde{K} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\phi^{i,r}}{n}\right)}{\frac{2}{n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \sqrt{2k\rho} \right] e^{-jk\rho} \quad (\text{VIII-10})$$

où la fonction de FRESNEL surmontée d'un tilde, condense dans son écriture le changement de signe lorsque son argument passe par 0 :

$$\tilde{K}_-(x) = \text{Sgn}(x) K_-(|x|) = \text{Sgn}(x) \sqrt{\frac{j}{\pi}} e^{jx^2} \int_{|x|}^{\infty} e^{-jt^2} dt \quad (\text{VIII-11})$$

II – 1 Le comportement asymptotique

Pour de grandes valeurs de ρ , et loin des frontières de l'optique géométrique, nous utilisons la forme asymptotique de la fonction K_- :

$$K_-(x \rightarrow \infty) = \frac{1}{2x\sqrt{j\pi}} \quad (\text{VIII-12})$$

et nous obtenons les coefficients de KELLER :

$$U_d^{i,r} = \frac{\frac{2}{n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\phi^{i,r}}{n}\right)} \frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{8\pi j k \rho}} \quad (\text{VIII-13})$$

II – 2 Le comportement pour un demi-plan

Le demi-plan correspond à la valeur $n = 2$. On obtient :

$$U_d^{i,r} = -\tilde{K} \left[\sqrt{2k\rho} \cos\left(\frac{\phi^{i,r}}{2}\right) \right] e^{-jk\rho} \quad (\text{VIII-14})$$

soit donc la solution exacte de SOMMERFELD.

II – 3 Le comportement pour un plan

Le plan correspond à la valeur $n = 1$. On obtient :

$$U_d^{i,r} = \tilde{K}_-(\infty) e^{-jk\rho} = 0 \quad (\text{VIII-15})$$

d'après (VIII-12).

Il s'agit de la solution exacte car une onde plane ne diffracte pas sur un plan infini parfaitement conducteur.

II – 4 Le comportement sur les frontières de l'optique géométrique

Ces frontières sont déterminées par les relations :

$$\phi^i = \phi - \phi_0 = \pi \quad (\text{VIII-16})$$

$$\phi^r = \phi + \phi_0 = \pi \text{ ou } 3\pi \quad (\text{VIII-17})$$

$$U_d^{i,r} = \tilde{K}_-(0) e^{-jk\rho} = \pm \frac{e^{-jk\rho}}{2} \quad (\text{VIII-18})$$

soit donc une variation de la moitié la moitié du champ incident ou réfléchi, et donc une compensation correcte des champs de l'optique géométrique sur ces frontières pour assurer la continuité du champ total.

II – 5 Quelques comparaisons numériques avec la solution exacte

En champ total, la solution asymptotique converge vers la solution exacte lorsque la distance ρ du point d'observation à l'arête augmente et tend vers l'infini.

Pour présenter des comparaisons numériques, nous avons recherché la distance qui permet de différencier raisonnablement les courbes dans différentes situations et avons fait le choix $\rho = 0.25 \lambda$. Même à une distance aussi proche de l'arête, certaines courbes sont quasiment indiscernables l'une de l'autre, ce qui montre l'intérêt de ces formulations, dont le caractère « asymptotique » se manifeste déjà à une distance de l'arête de l'ordre d'une longueur d'onde.

Afin de balayer l'éventail des différentes valeurs pour chaque paramètre, les comparaisons (formulation exacte – formulation asymptotique) suivantes sont présentées en polarisation magnétique (H) et électrique (E) :

- $n = 1.9$: $\phi_0 = 30^\circ, 120^\circ, 235^\circ$
- $n = 1.5$: $\phi_0 = 30^\circ, 120^\circ, 235^\circ$
- $n = 1.1$: $\phi_0 = 30^\circ, 120^\circ$

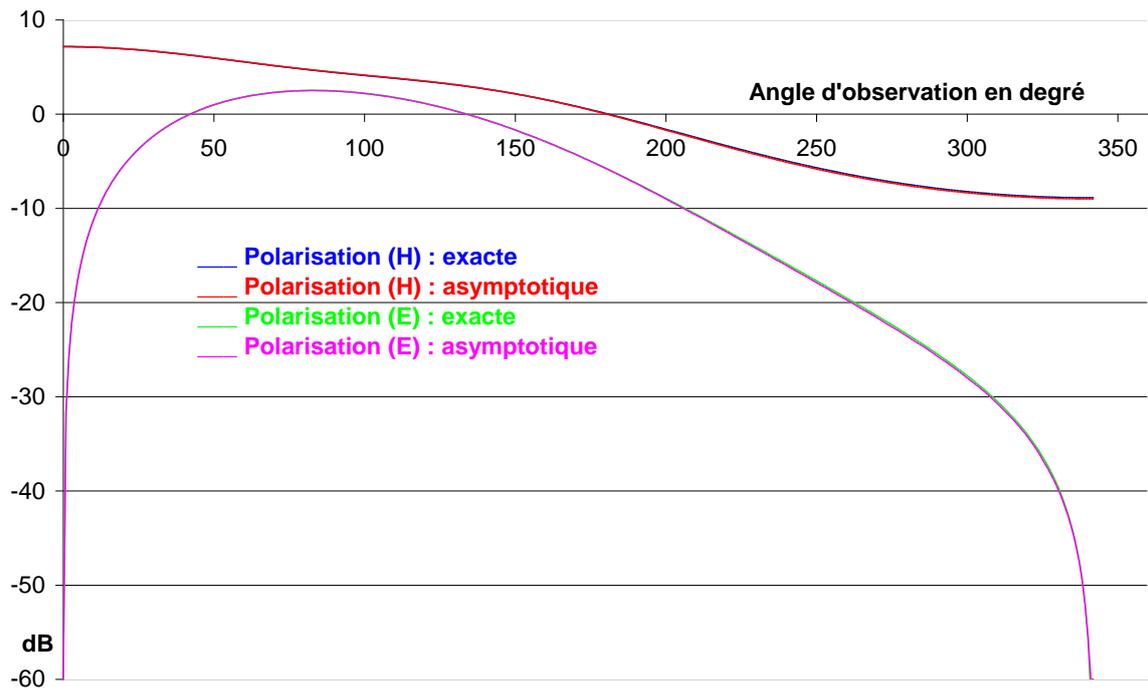


Figure VIII-2 : Comparaison du champ total entourant l'arête obtenu par une solution exacte (VIII-5) et asymptotique avec : $n = 1.9$, $\phi_0 = 30^\circ$, $\rho = 0.25\lambda$

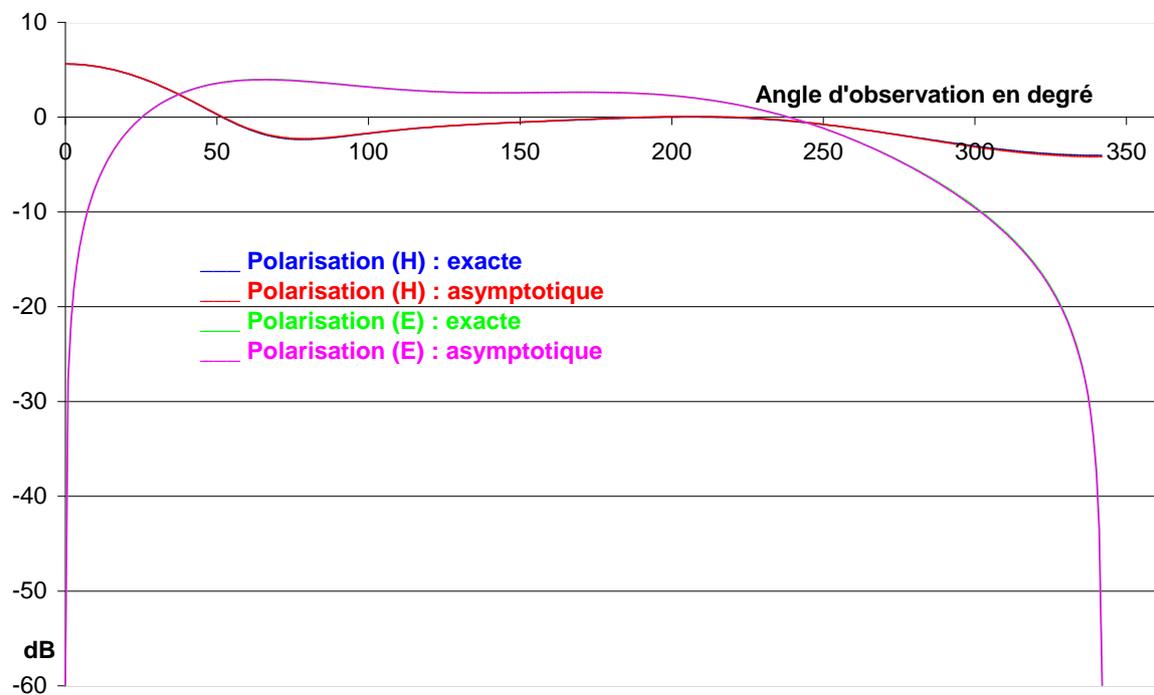


Figure VIII-3 : Comparaison du champ total entourant l'arête obtenu par une solution exacte (VIII-5) et asymptotique (VIII-10) avec : $n = 1.9$, $\phi_0 = 120^\circ$, $\rho = 0.25\lambda$

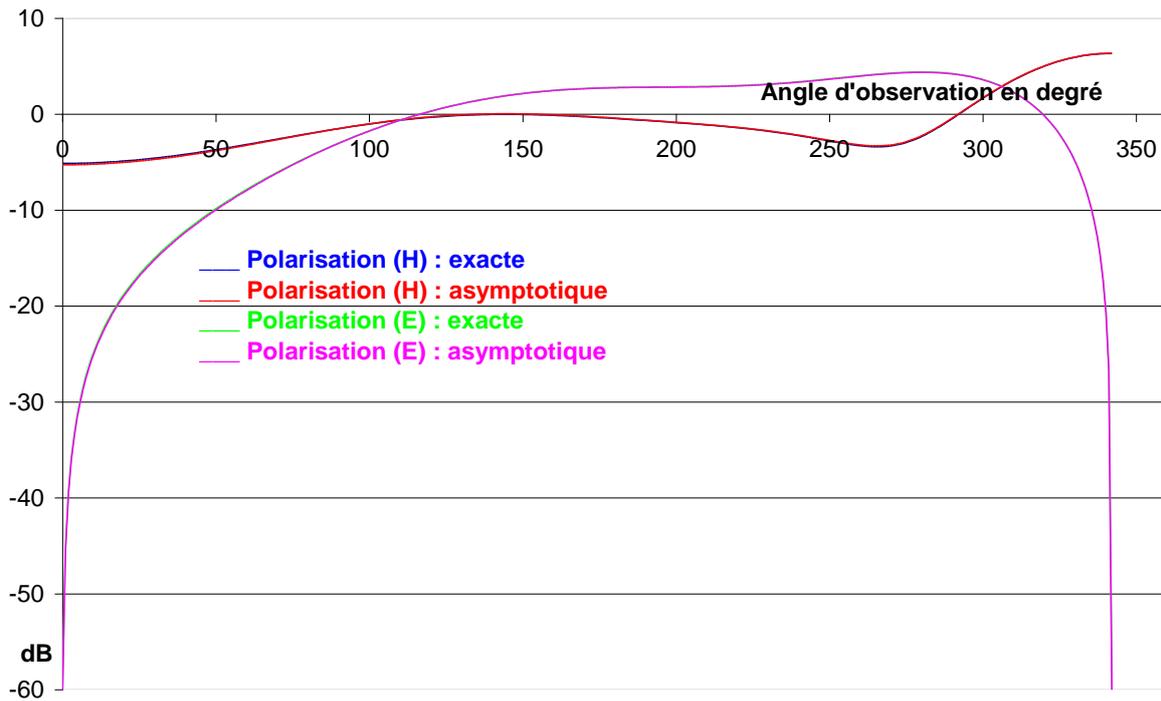


Figure VIII-4 : Comparaison du champ total entourant l'arête obtenu par une solution exacte (VIII-5) et asymptotique (VIII-10) avec : $n = 1.9$, $\phi_0 = 235^\circ$, $\rho = 0.25\lambda$

Pour cette série de comparaisons avec un angle d'ouverture de l'arête de 18° ($n = 1.9$), on constate que même à une distance aussi proche que 0.25λ , la solution asymptotique recouvre parfaitement la solution exacte, quels que soient les angles d'incidence et d'observation.

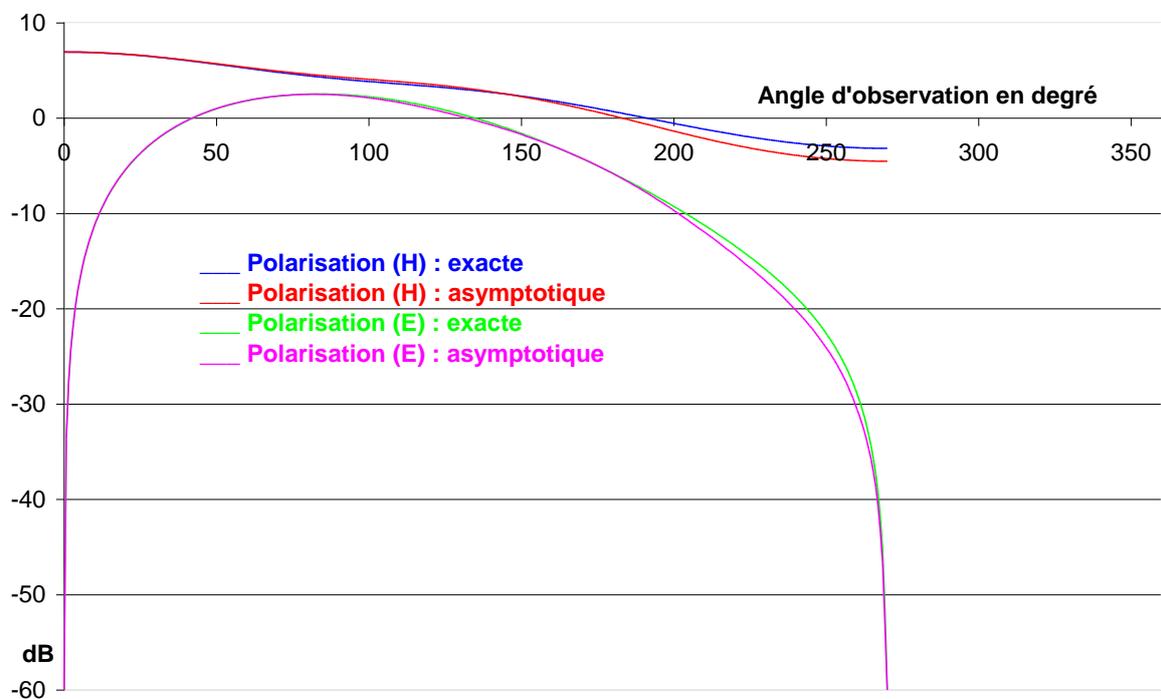


Figure VIII-5 : Comparaison du champ total entourant l'arête obtenu par une solution exacte (VIII-5) et asymptotique (VIII-10) avec : $n = 1.5$, $\phi_0 = 30^\circ$, $\rho = 0.25\lambda$

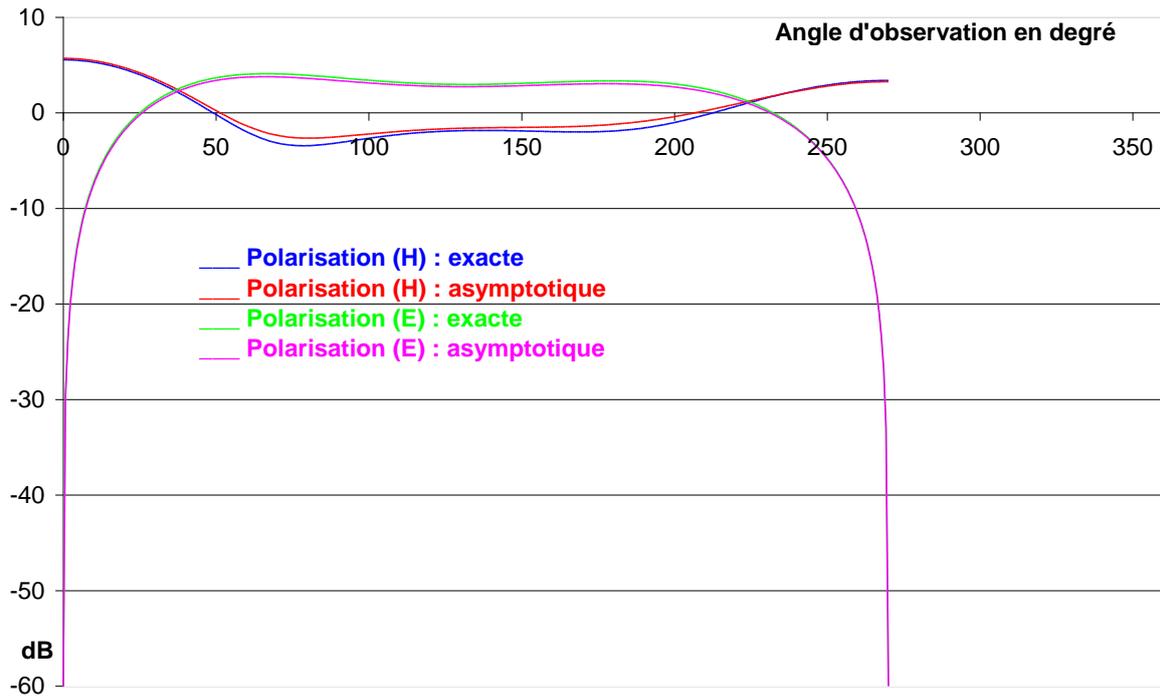


Figure VIII-6 : Comparaison du champ total entourant l'arête obtenu par une solution exacte (VIII-5) et asymptotique (VIII-10) avec : $n = 1.5$, $\phi_0 = 120^\circ$, $\rho = 0.25\lambda$

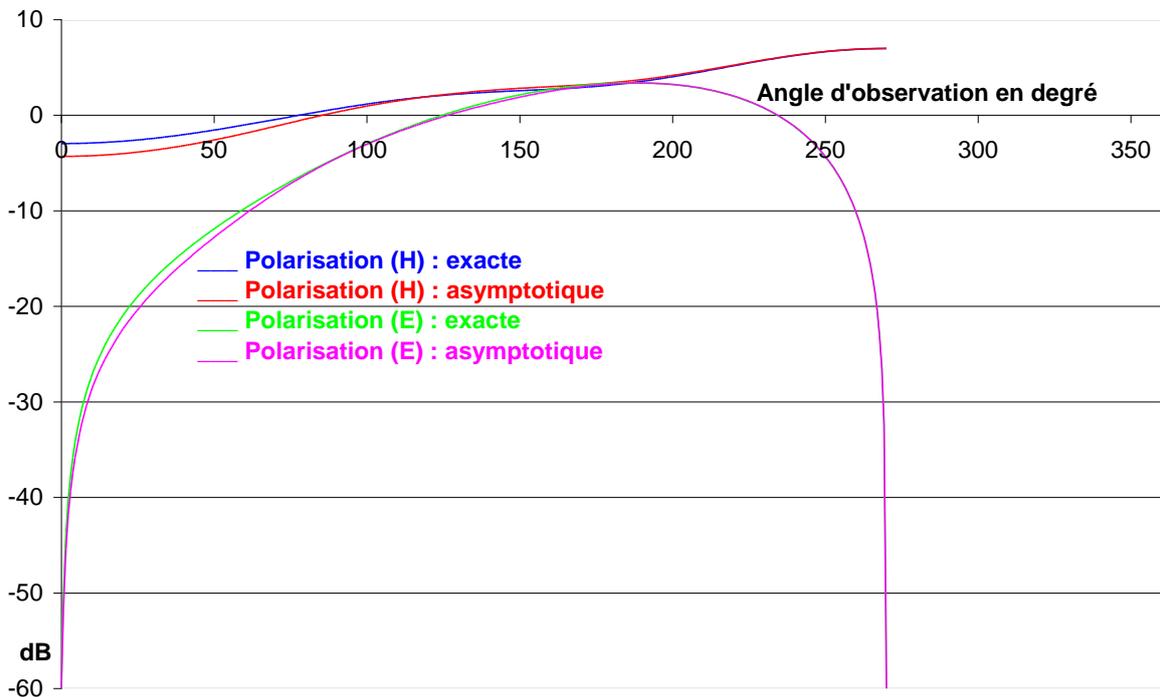


Figure VIII-7 : Comparaison du champ total entourant l'arête obtenu par une solution exacte (VIII-5) et asymptotique (VIII-10) avec : $n = 1.5$, $\phi_0 = 235^\circ$, $\rho = 0.25\lambda$

Pour cette série nouvelle série de comparaisons avec un angle d'ouverture de l'arête de 90° ($n = 1.5$), on constate que de petits écarts apparaissent entre les deux formulations, mais rappelons que nous sommes à 0.25λ de l'arête.

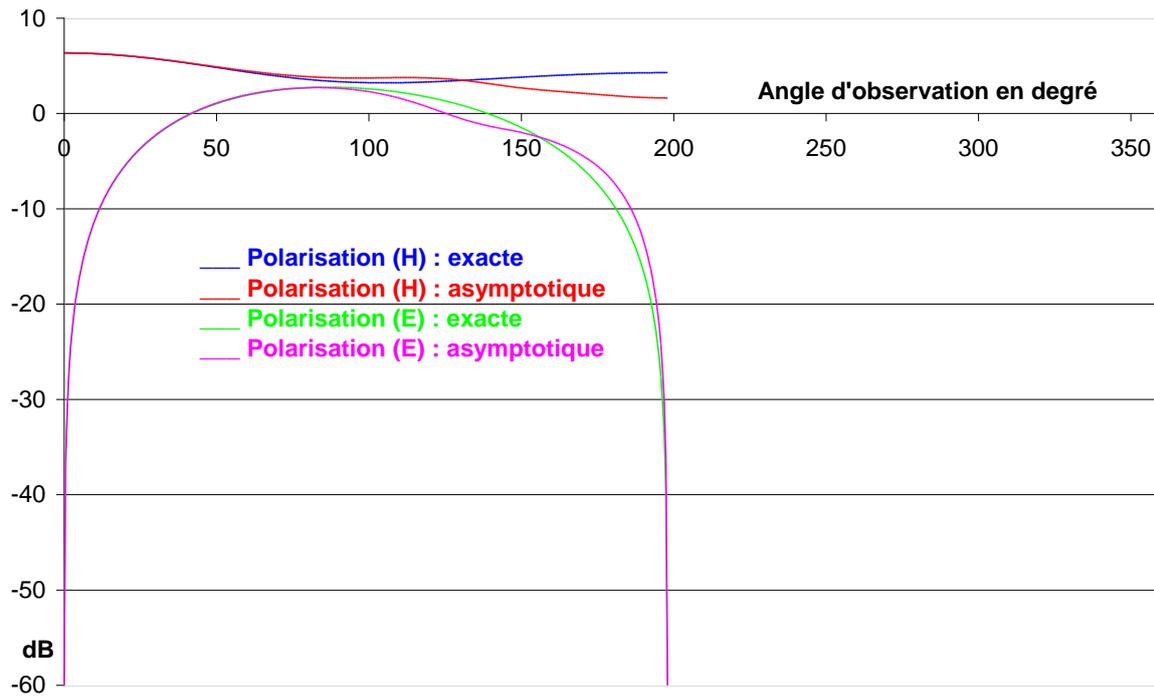


Figure VIII-8 : Comparaison du champ total entourant l'arête obtenu par une solution exacte (VIII-5) et asymptotique (VIII-10) avec : $n = 1.1$, $\phi_0 = 30^\circ$, $\rho = 0.25\lambda$

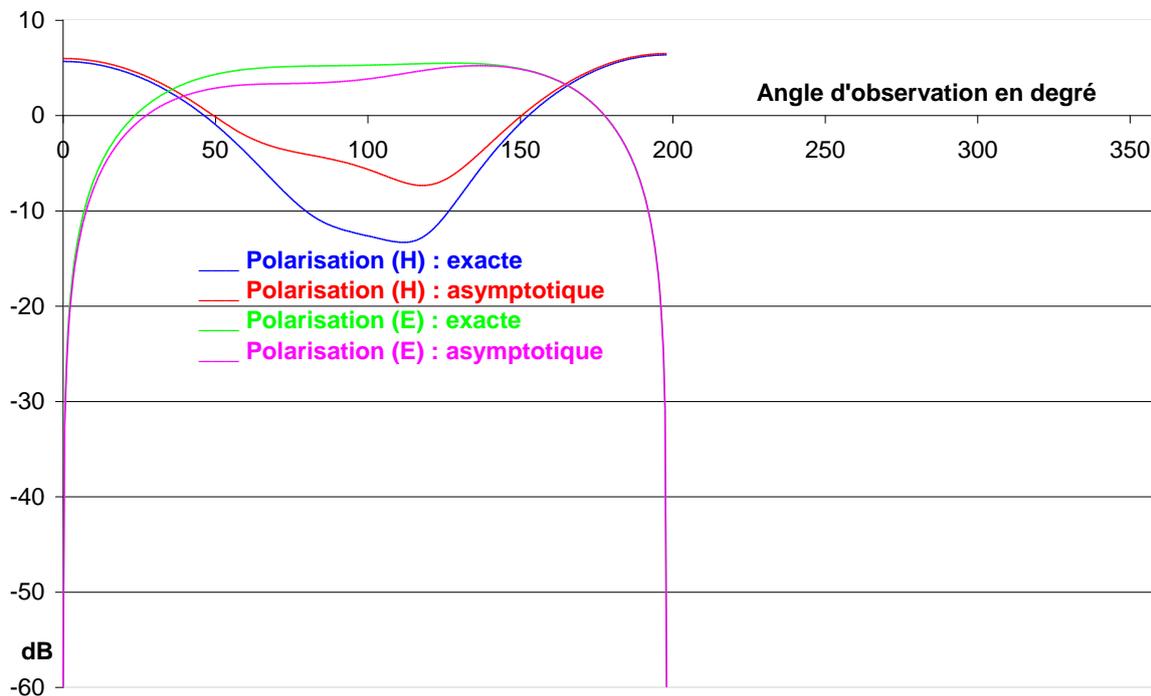


Figure VIII-9 : Comparaison du champ total entourant l'arête obtenu par une solution exacte (VIII-5) et asymptotique (VIII-10) avec : $n = 1.1$, $\phi_0 = 120^\circ$, $\rho = 0.25\lambda$

Pour cette série nouvelle série de comparaisons avec un angle d'ouverture de l'arête de 162° ($n = 1.1$), on constate que des écarts significatifs apparaissent entre les deux formulations.

Afin d’observer de quelle manière ces écarts se réduisent lorsqu’on s’éloigne de l’arête, nous produisons la même comparaison à une distance $d = 2 \lambda$ de l’arête.

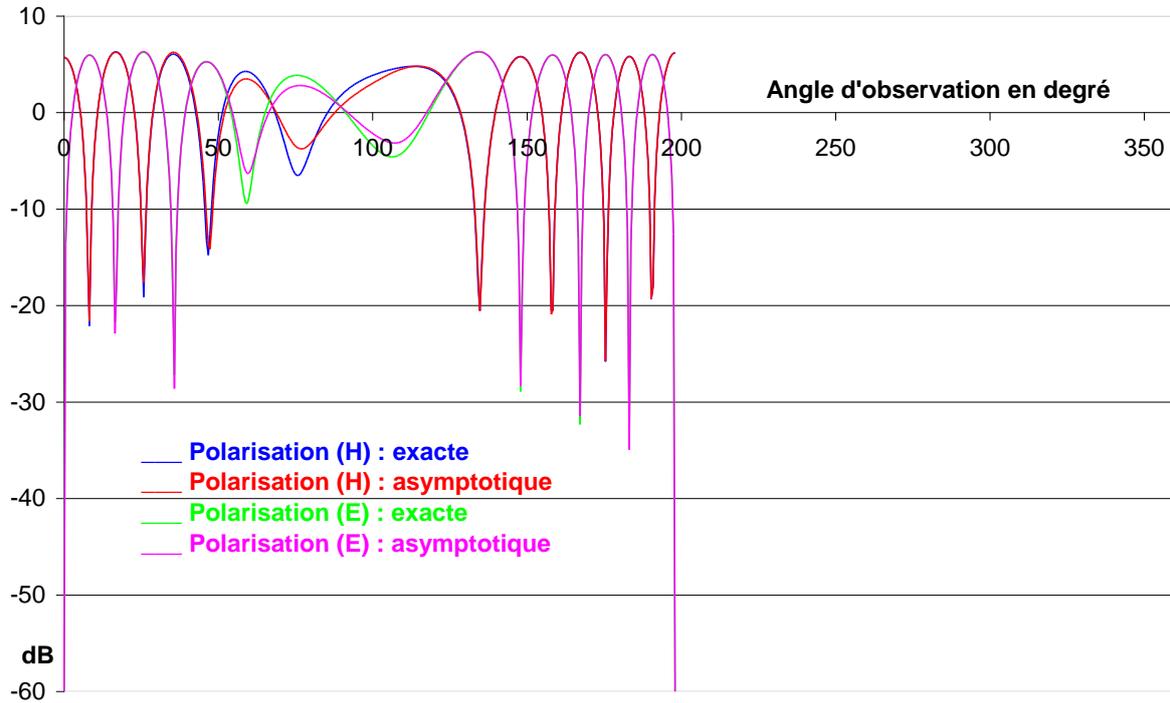


Figure VIII-10 : Comparaison du champ total entourant l’arête obtenu par une solution exacte (VIII-5) et asymptotique (VIII-10) avec : $n = 1.1$, $\phi_0 = 120^\circ$, $\rho = 2\lambda$

Cette dernière figure montre la convergence vers la solution exacte, avec des écarts encore observables à une distance $\rho = 2\lambda$

Ces écarts sont dus au fait que la formulation retenues ne différencie pas les pôles des coefficients de diffraction sur les limites de réflexion de chacune des faces.

Prenant en compte cette difficulté, on peut obtenir une formulation plus précise, dans une forme à peine plus complexe de la précédente.

III – Une deuxième formulation asymptotique du champ diffracté par une arête illuminée par une onde plane.

En utilisant les techniques développées à la rubrique des techniques avancées pour trouver des formulations asymptotiques à l’intégrale (VIII-6), on peut obtenir la formulation suivante du champ diffracté :

$$U_d^{i,r} = \tilde{K} \left[\frac{\frac{2}{n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sqrt{2k\rho}}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\phi^{i,r}}{n}\right) + \frac{1}{\cos\left(\frac{\phi^{i,r}}{2}\right)}} \right] e^{-jk\rho} - \tilde{K} \left[\sqrt{2k\rho} \cos\left(\frac{\phi^{i,r}}{2}\right) \right] e^{-jk\rho} \quad (\text{VIII-19})$$

avec :

$$\phi^i = \phi - \phi_0 \quad (\text{VIII-20})$$

et pour différencier les pôles sur les frontières de réflexion :

$$\phi^r = \phi + \phi_0 \quad \text{si } (\phi + \phi_0) < n\pi \quad (\text{VIII-21})$$

$$\phi^r = 2n\pi - (\phi + \phi_0) \quad \text{si } (\phi + \phi_0) > n\pi \quad (\text{VIII-22})$$

L'expression (VIII-19) est constituée par la somme de deux termes D1 et D2 :

$$D1 = \tilde{K}_- \left[\frac{\frac{2}{n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sqrt{2k\rho}}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\phi^{i,r}}{n}\right) + \frac{1}{\cos\left(\frac{\phi^{i,r}}{2}\right)}} \right] e^{-jk\rho} \quad (\text{VIII-23})$$

$$D2 = -\tilde{K}_- \left[\sqrt{2k\rho} \cos\left(\frac{\phi^{i,r}}{2}\right) \right] e^{-jk\rho} \quad (\text{VIII-24})$$

On reconnaît en D2 la solution exacte au champ diffracté par un demi-plan. On en déduit que D1 représente la modification de ce champ diffracté générée par la présence du deuxième demi-plan formant l'arête.

III – 1 Le comportement asymptotique

Pour de grandes valeurs de ρ , et loin des frontières de l'optique géométrique, nous utilisons la forme asymptotique de la fonction K_- :

$$K_-(x \rightarrow \infty) = \frac{1}{2x\sqrt{j\pi}} \quad (\text{VIII-25})$$

et nous obtenons les coefficients de KELLER :

$$U_d^{i,r} = \frac{\frac{2}{n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\phi^{i,r}}{n}\right)} \frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{8\pi j k \rho}} \quad (\text{VIII-26})$$

III – 2 Le comportement pour un demi-plan

Le demi-plan correspond à la valeur $n = 2$. On obtient $D1 = 0$ et donc :

$$U_d^{i,r} = -\tilde{K} \left[\sqrt{2k\rho} \cos\left(\frac{\phi^{i,r}}{2}\right) \right] e^{-jk\rho} \quad (\text{VIII-27})$$

soit donc la solution exacte de SOMMERFELD.

III – 3 Le comportement pour un plan

Le plan correspond à la valeur $n = 1$. On obtient $D1 = -D2$ et donc :

$$U_d^{i,r} = 0 \quad (\text{VIII-28})$$

Il s'agit de la solution exacte car une onde plane ne diffracte pas sur un plan infini parfaitement conducteur.

III – 4 Le comportement sur les frontières de l'optique géométrique

Ces frontières sont déterminées par les relations :

$$\phi^i = \phi - \phi_0 = \pi \quad (\text{VIII-29})$$

$$\phi^r = \phi + \phi_0 = \pi \text{ ou } 3\pi \quad (\text{VIII-30})$$

Sur ces frontières, $D1$ est continu, et c'est $D2$ qui compense la disparition du champ incident ou du champ réfléchi

$$U_d^{i,r} = D1 - \tilde{K}_-(0) e^{-jk\rho} = D1 \pm \frac{e^{-jk\rho}}{2} \quad (\text{VIII-31})$$

soit donc une variation de plus ou moins la moitié du champ incident ou réfléchi, et donc une compensation correcte des champs de l'optique géométrique sur ces frontières pour assurer la continuité du champ total.

III – 5 Quelques comparaisons numériques avec la solution exacte

Comme précédemment et afin de balayer l'éventail des différentes valeurs pour chaque paramètre, les comparaisons (formulation exacte – formulation asymptotique) suivantes sont présentées en polarisation magnétique (H) et électrique (E), à une distance de 0.25λ de l'arête :

- $n = 1.9$: $\phi_0 = 30^\circ, 120^\circ, 235^\circ$
- $n = 1.5$: $\phi_0 = 30^\circ, 120^\circ, 235^\circ$
- $n = 1.1$: $\phi_0 = 30^\circ, 120^\circ$

On constate que même à une distance de l'arête aussi faible que 0.25λ , les courbes correspondant à la formulation exacte (VIII-5) sont pratiquement indissociables des courbes obtenues à partir de la formulation asymptotique (VIII-19).

On en conclut que la formulation (VIII-19) représente une formulation quasi-exacte pour le champ diffracté par une arête à partir d'une distance de λ , distance en dessous de laquelle le formalisme TUD ne présente plus aucune garantie.

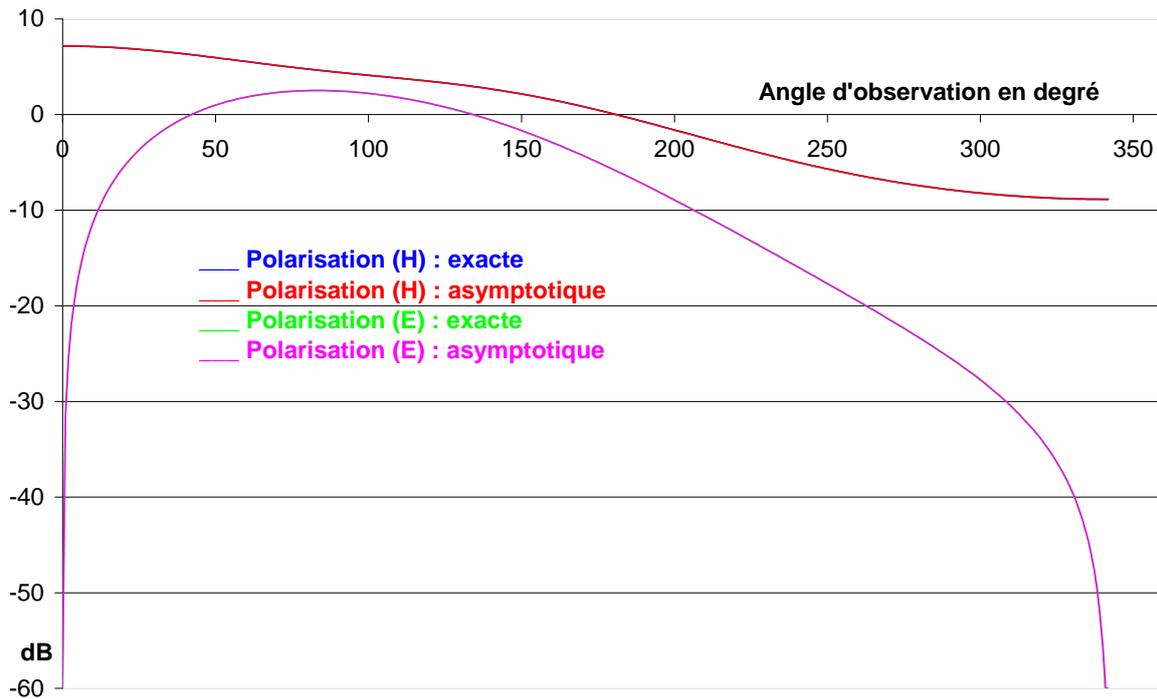


Figure VIII-11 : Comparaison du champ total entourant l'arête obtenu par une solution exacte et asymptotique (VIII-19) avec : $n = 1.9$, $\phi_0 = 30^\circ$, $\rho = 0.25\lambda$

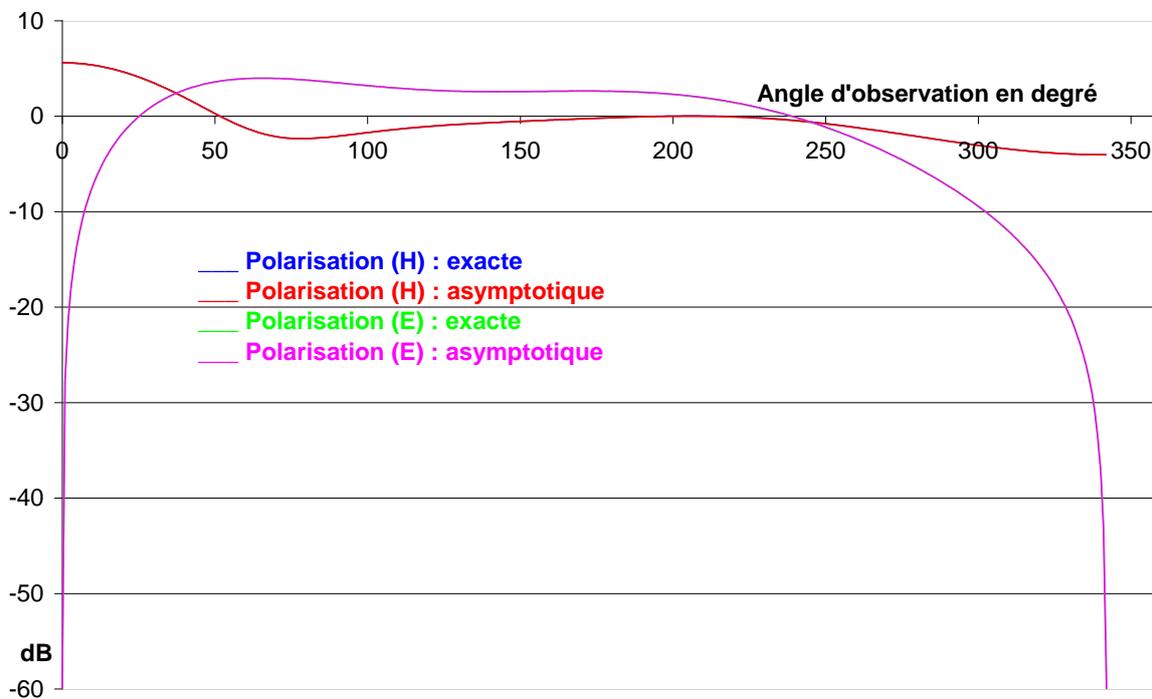


Figure VIII-12 : Comparaison du champ total entourant l'arête obtenu par une solution exacte (VIII-5) et asymptotique (VIII-19) avec : $n = 1.9$, $\phi_0 = 120^\circ$, $\rho = 0.25\lambda$

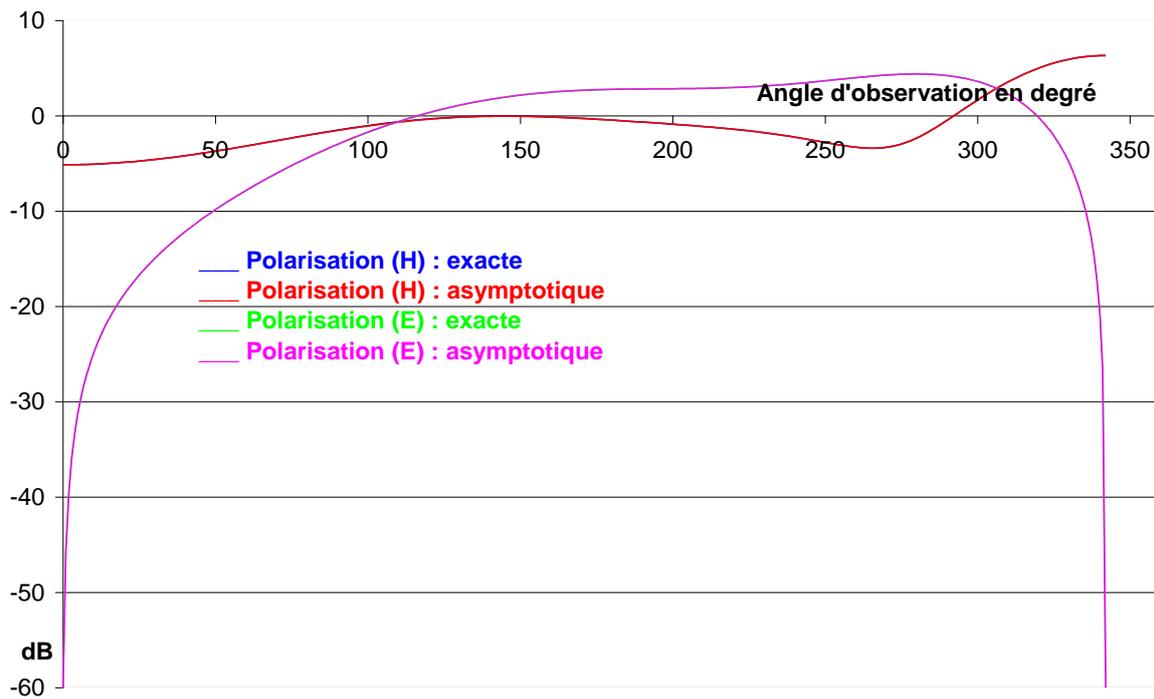


Figure VIII-13 : Comparaison du champ total entourant l'arête obtenu par une solution exacte (VIII-5) et asymptotique (VIII-19) avec : $n = 1.9$, $\phi_0 = 235^\circ$, $\rho = 0.25\lambda$

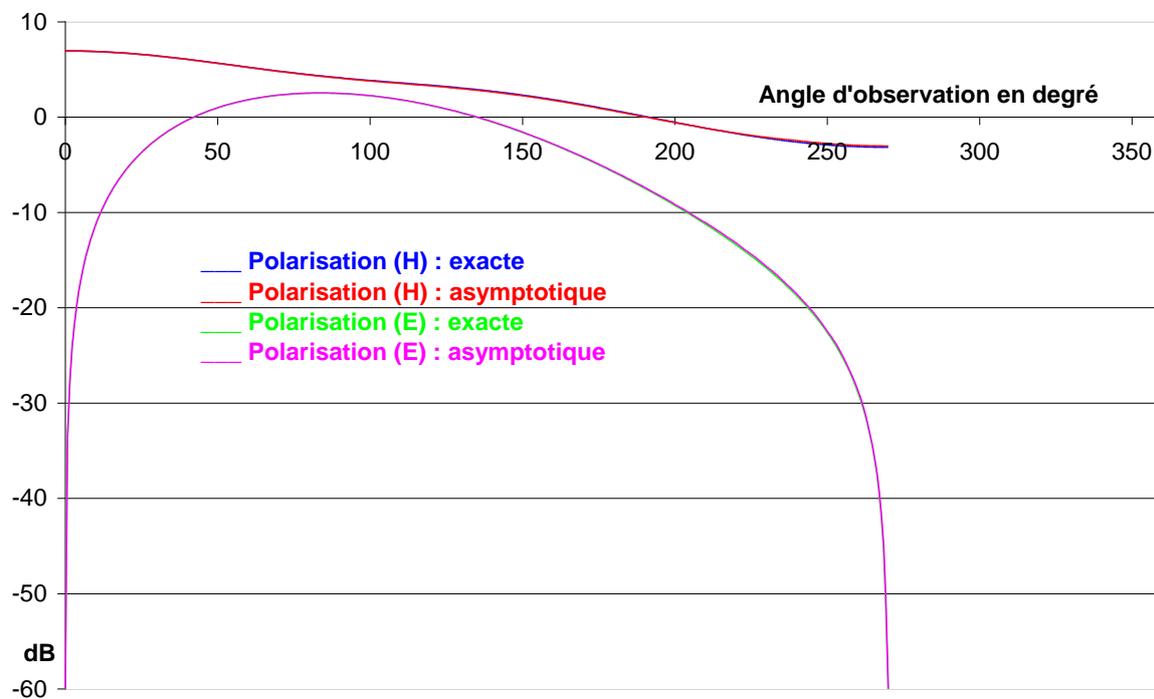


Figure VIII-14 : Comparaison du champ total entourant l'arête obtenu par une solution exacte (VIII-5) et asymptotique (VIII-19) avec : $n = 1.5$, $\phi_0 = 30^\circ$, $\rho = 0.25\lambda$

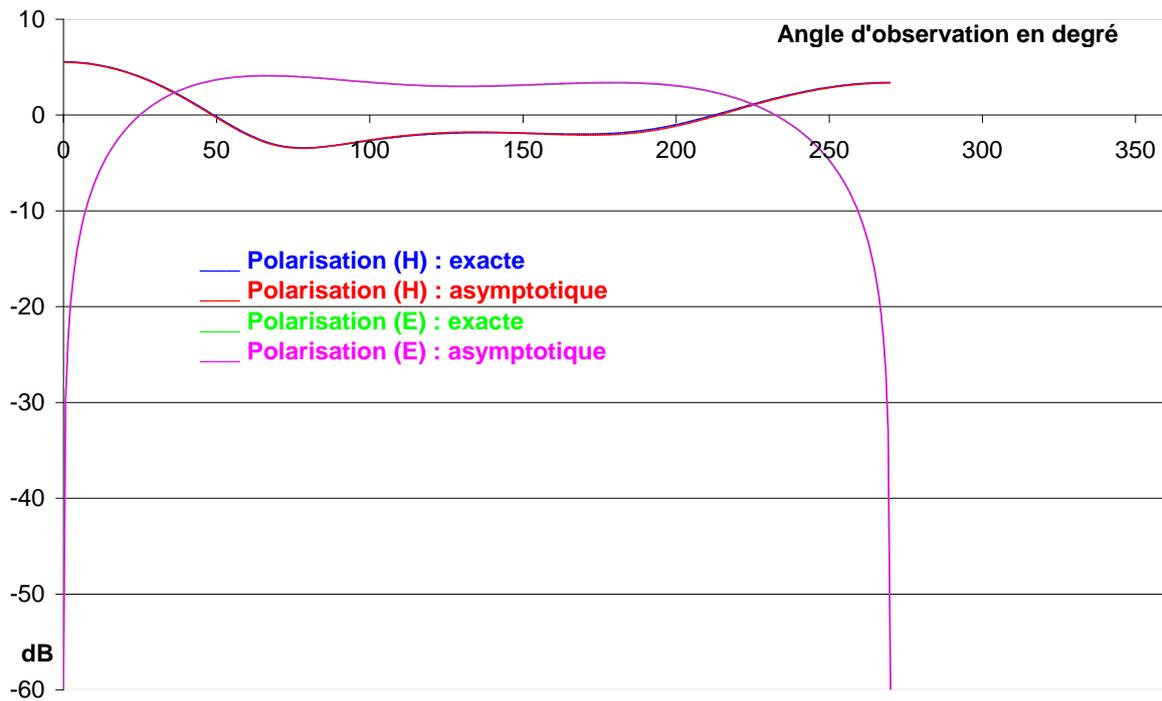


Figure VIII-15 : Comparaison du champ total entourant l'arête obtenu par une solution exacte (VIII-5) et asymptotique (VIII-19) avec : $n = 1.5$, $\phi_0 = 120^\circ$, $\rho = 0.25\lambda$

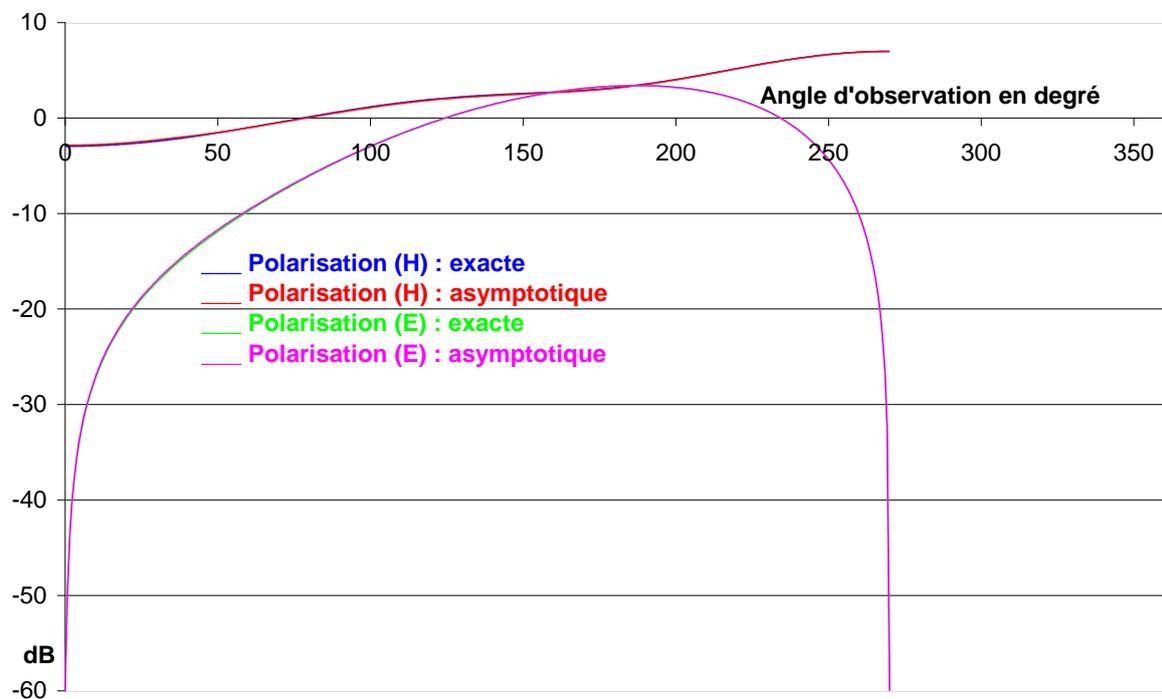


Figure VIII-16 : Comparaison du champ total entourant l'arête obtenu par une solution exacte (VIII-5) et asymptotique (VIII-19) avec : $n = 1.5$, $\phi_0 = 235^\circ$, $\rho = 0.25\lambda$

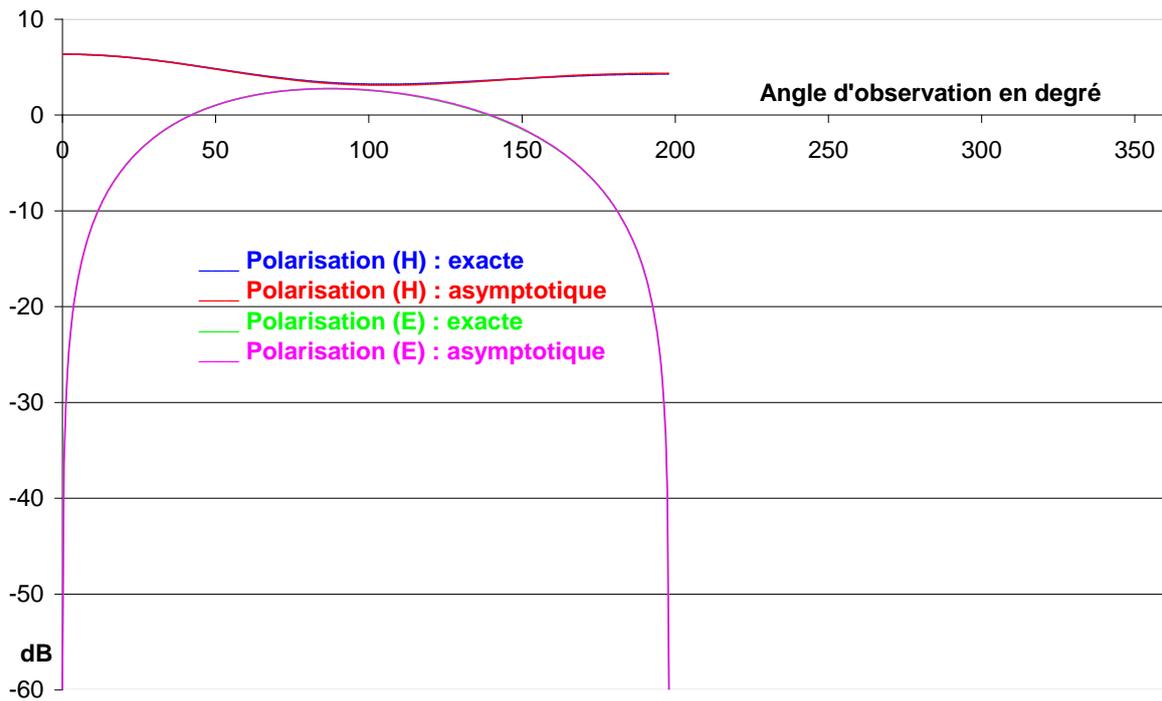


Figure VIII-17 : Comparaison du champ total entourant l'arête obtenu par une solution exacte (VIII-5) et asymptotique (VIII-19) avec : $n = 1.1$, $\phi_0 = 30^\circ$, $\rho = 0.25\lambda$

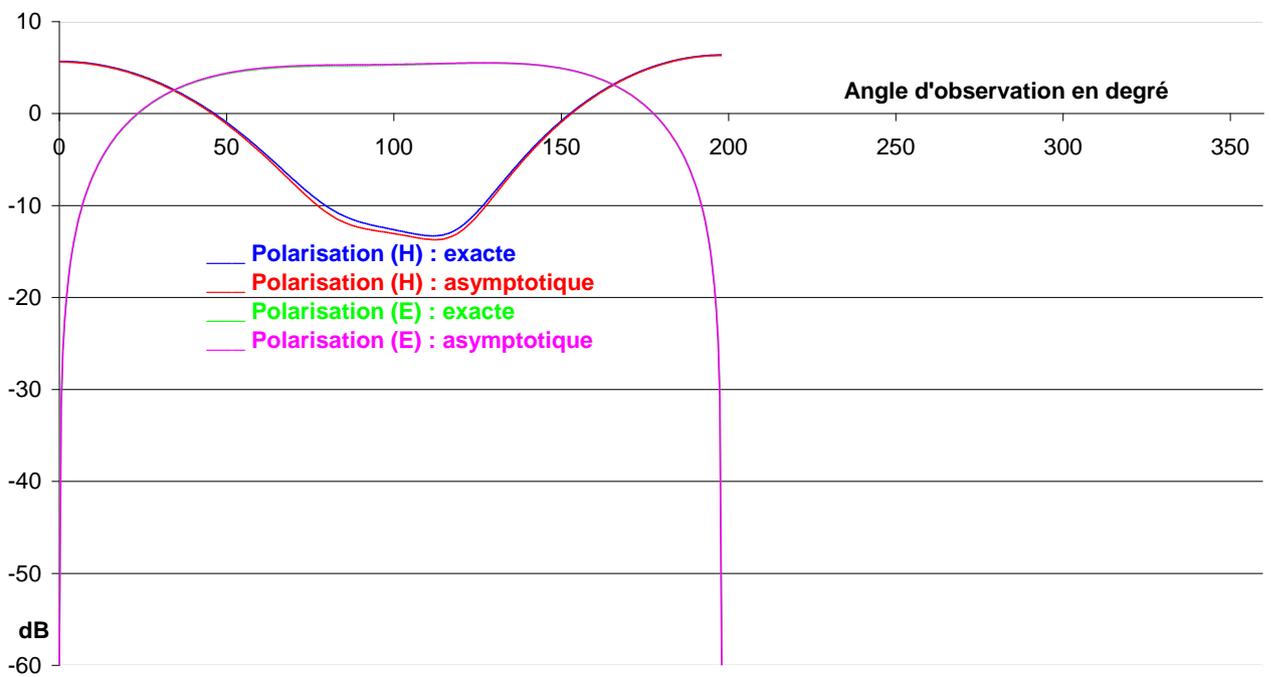


Figure VIII-18 : Comparaison du champ total entourant l'arête obtenu par une solution exacte (VIII-5) et asymptotique (VIII-19) avec : $n = 1.1$, $\phi_0 = 120^\circ$, $\rho = 0.25\lambda$

IX - Diffraction d'une onde cylindrique par une arête

Comme dans le cas du demi-plan, de nombreuses situations concrètes concernent des ondes issues d'une source localisée. En dimension deux, leur surface équiphase est cylindrique. Dans le cas plus général de la dimension trois, l'onde est de nature sphérique où quelquefois astigmatique. Le formalisme mis en œuvre en deux dimensions est alors généralisé aux deux rayons de courbure principaux du front d'onde.

En dimension deux et en incidence normale, si on se réfère aux notations de la figure IX-1, le champ total exact est décrit par les séries suivantes :

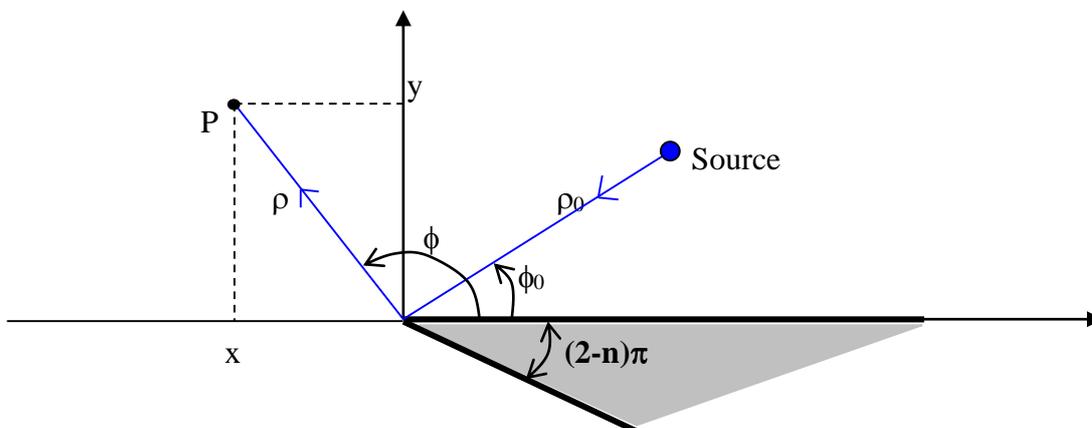


Figure IX-1 : Diffraction d'une onde cylindrique par une arête

$$U_z = \frac{1}{2nj} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_{\frac{m}{n}}(k\rho) H_{\frac{m}{n}}^{(2)}(k\rho_0) \begin{cases} \sin\left(\frac{m}{n}\phi\right)\sin\left(\frac{m}{n}\phi_0\right) (U = E) \\ \cos\left(\frac{m}{n}\phi\right)\cos\left(\frac{m}{n}\phi_0\right) (U = H) \end{cases} \text{ pour } \rho < \rho_0 \quad (\text{IX-1})$$

$$U_z = \frac{1}{2nj} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_{\frac{m}{n}}(k\rho_0) H_{\frac{m}{n}}^{(2)}(k\rho) \begin{cases} \sin\left(\frac{m}{n}\phi\right)\sin\left(\frac{m}{n}\phi_0\right) (U = E) \\ \cos\left(\frac{m}{n}\phi\right)\cos\left(\frac{m}{n}\phi_0\right) (U = H) \end{cases} \text{ pour } \rho > \rho_0 \quad (\text{IX-2})$$

Dans ces relations :

- ρ_0 et ϕ_0 représentent respectivement la distance de la source par rapport à l'arête et l'angle d'incidence sur l'arête de l'onde issue de la source.
- ρ et ϕ représentent respectivement la distance du point d'observation par rapport à l'arête et l'angle que fait la direction du point d'observation avec le demi-plan.
- n représente une grandeur liée à l'angle de l'arête qui vaut $(2-n)\pi$

- J représente la fonction de BESSEL de première espèce (Ne pas confondre J et j tel que $j^2 = -1$)
- $H^{(2)}$ représente la fonction de HANKEL de deuxième type
- $\varepsilon_m = 1$ pour $m = 0$, $\varepsilon_m = 2$ pour m différent de 0.

La formulation asymptotique s'obtient en sommant les contributions du champ incident, du champ réfléchi, et du champ diffracté.

La continuité du champ total est assurée de la même manière que pour le demi-plan, en introduisant dans la fonction de transition K_- , non pas la distance ρ du point d'observation à l'arête, mais le paramètre :

$$L = \frac{\rho\rho_0}{\rho + \rho_0} \quad (IX-3)$$

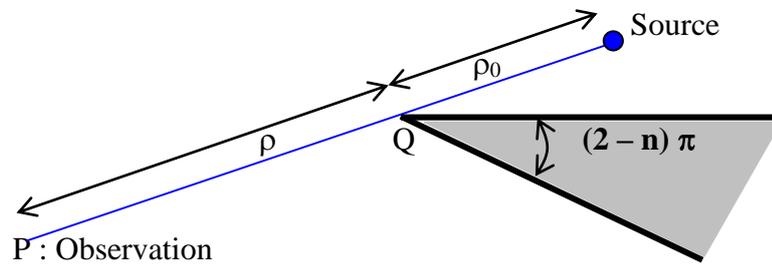


Figure IX-2 : Continuité du champ total sur la frontière ombre-lumière

Sur la frontière ombre-lumière, le champ cylindrique incident s'écrit :

$$U^i = E_0 \frac{e^{-jk(\rho_0 + \rho)}}{\sqrt{\rho_0 + \rho}} \quad (IX-4)$$

et le champ diffracté relatif au champ incident :

$$U_d^i(P) = U^i(Q) D \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho + \rho_0}} e^{-jk\rho} \quad (IX-5)$$

dans la quelle :

$$U^i(Q) = \left[E_0 \frac{e^{-jk\rho_0}}{\sqrt{\rho_0}} \right] \text{représente le champ incident au point de diffraction } Q \quad (IX-6)$$

$$D = -\text{Sgn} \left(\cos \frac{\phi - \phi_0}{2} \right) K_- \left(\sqrt{2k \frac{\rho\rho_0}{\rho + \rho_0} \cos^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} \right) + \text{Sgn} (B^i) K_- \left(\sqrt{2k \frac{\rho\rho_0}{\rho + \rho_0} |B^i|} \right) \quad (IX-7)$$

avec :

$$B^{i,r} = \frac{1}{\frac{2}{n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\phi^{i,r}}{n}\right) + \frac{1}{\cos\left(\frac{\phi^{i,r}}{2}\right)}} \quad (\text{IX-8})$$

représente la partie du coefficient de diffraction au point Q associée au champ incident.

Dans l'expression (IX-8), la deuxième partie (affectée du signe +), est continue sur la frontière de l'optique géométrique. On conclut que la continuité du champ total est assurée exactement comme dans le cas du demi-plan, par la première partie de l'expression (IX-8).

Sur la frontière de champ réfléchi, la continuité est assurée de manière analogue. Par rapport au demi-plan, l'arête est susceptible de faire apparaître une deuxième frontière de réflexion, liée à la deuxième face, et pour certaines incidences seulement (Figure IX-3).

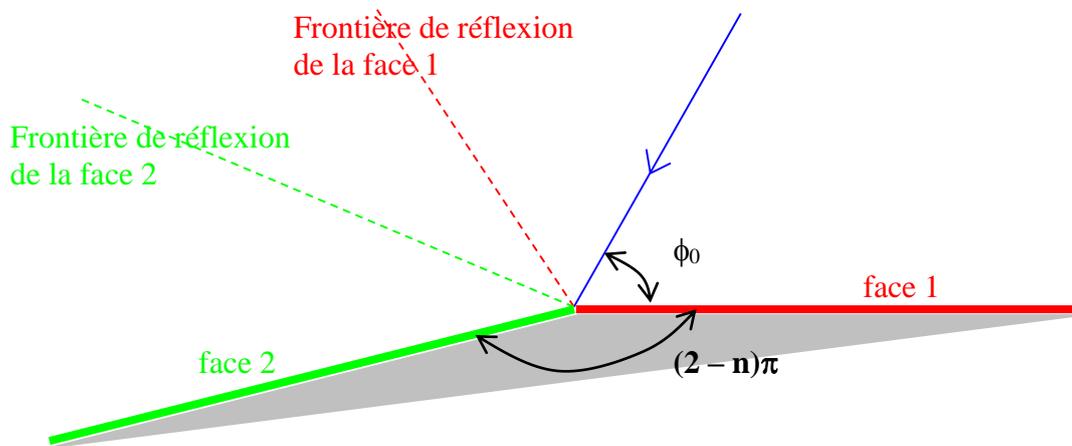


Figure IX-3 : Représentation des frontières de réflexions associées à chaque face

Il convient de traiter la présence ou non du champ réfléchi par les échelons de Heaviside adéquats.

Le champ diffracté associé au champ réfléchi sera traité en posant :

$$\phi^r = \phi + \phi_0 \quad \text{si } (\phi + \phi_0) < n \pi \quad (\text{IX-10})$$

$$\phi^r = 2n\pi - (\phi + \phi_0) \quad \text{si } (\phi + \phi_0) > n \pi \quad (\text{IX-11})$$

Comme pour le demi-plan, rien ne permet d'affirmer que le raisonnement heuristique que nous avons fait pour assurer la continuité du champ total conduite à une formulation rigoureuse du champ diffracté par un demi-plan sous une incidence cylindrique. C'est la comparaison de cette formulation avec la solution exacte sous forme de séries qui va permettre de juger de sa validité.

Sur le même graphique sont comparées, pour les mêmes paramètres, la polarisation électrique, et la polarisation magnétique.

Dans chaque série les paramètres suivants sont conservés constants :

- La distance ρ du point d'observation à l'arête qui est fixée à 2.5λ

- La distance ρ_0 de la source à l'arête qui est fixée à 1.5λ

Le champ est calculé sur un cercle de rayon constant ρ autour de l'arête (Figure IX-4), en fonction de l'angle d'observation ϕ .

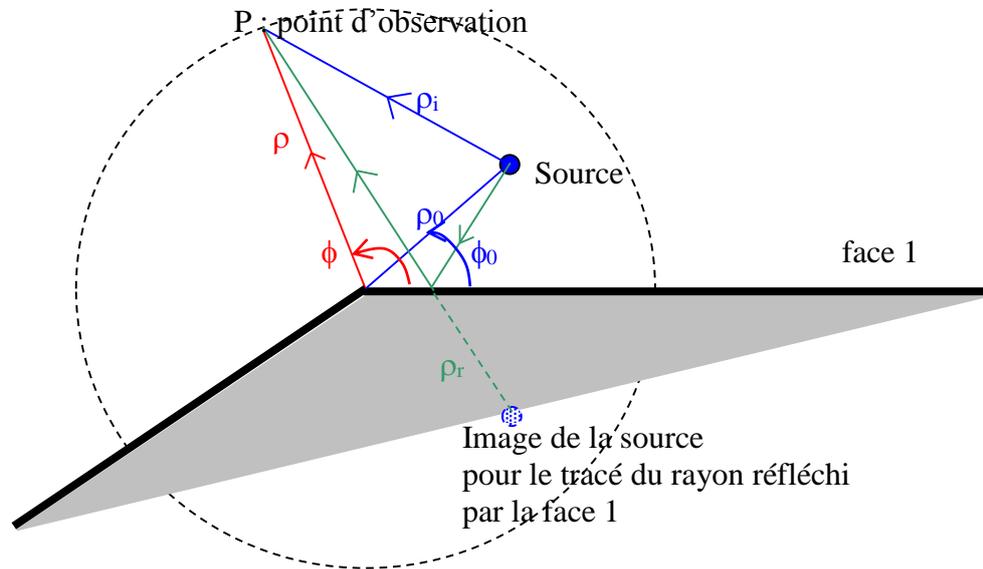


Figure IX-4 : Représentation des notations pour le calcul du champ électromagnétique autour d'une arête illuminée par une onde cylindrique.

Les champs sont calculés de la manière suivante par la Théorie Géométrique de la diffraction :

- Champ incident U^i :

$$U^i = E_0 \frac{e^{-jk\rho_i}}{\sqrt{\rho_i}} \quad (IX-12)$$

- Champ Réfléchi U^r :

$$U^r = \pm E_0 \frac{e^{-jk\rho_r}}{\sqrt{\rho_r}} \quad + : (H) \quad \text{et} \quad - : (E) \quad (IX-13)$$

où ρ_r représente la distance de la source image au point d'observation.

- Champ Diffracté U_d :

$$U_d^i = \begin{pmatrix} -\text{Sgn}\left(\cos\frac{\phi^i}{2}\right)\mathbf{K}\left[\sqrt{2k\frac{\rho\rho_0}{\rho+\rho_0}}\cos\frac{\phi^i}{2}\right] \\ +\text{Sgn}(B^i)\mathbf{K}\left[\sqrt{2k\frac{\rho\rho_0}{\rho+\rho_0}}|B^i|\right] \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \frac{e^{-jk\rho_0}}{\sqrt{\rho_0}} \\ \sqrt{\frac{\rho\rho_0}{(\rho+\rho_0)}} \frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \end{bmatrix} \quad (\text{IX-14})$$

$$U_d^r = \begin{pmatrix} -\text{Sgn}\left(\cos\frac{\phi^r}{2}\right)\mathbf{K}\left[\sqrt{2k\frac{\rho\rho_0}{\rho+\rho_0}}\cos\frac{\phi^r}{2}\right] \\ +\text{Sgn}(B^r)\mathbf{K}\left[\sqrt{2k\frac{\rho\rho_0}{\rho+\rho_0}}|B^r|\right] \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \frac{e^{-jk\rho_0}}{\sqrt{\rho_0}} \\ \sqrt{\frac{\rho\rho_0}{(\rho+\rho_0)}} \frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \end{bmatrix} \quad (\text{IX-15})$$

avec :

$$B^{i,r} = \frac{1}{\frac{2}{n}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\phi^{i,r}}{n}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\phi^{i,r}}{2}\right)}} \quad (\text{IX-16})$$

$$\phi^i = \phi - \phi_0 \quad (\text{IX-17})$$

$$\phi^r = \phi + \phi_0 \quad \text{si } (\phi + \phi_0) < n\pi \quad (\text{IX-18})$$

$$\phi^r = 2n\pi - (\phi + \phi_0) \quad \text{si } (\phi + \phi_0) > n\pi \quad (\text{IX-19})$$

On obtient le champ diffracté U_d en sommant (polarisation H) ou soustrayant (polarisation E) les contributions associées au champ incident et au champ réfléchi :

$$U_d = U_d^i \pm U_d^r \quad + : (\text{H}) \quad \text{et} \quad - : (\text{E}) \quad (\text{IX-20})$$

Les comparaisons proposées balayent les valeurs suivantes pour chaque paramètre :

- angle d'observation ϕ : de 0° à $n\pi$
- angle d'incidence ϕ_0 : 30° , 120° , 180° , 235° (sauf pour $n = 1.2$)
- angle formé par l'arête pour les valeurs $n = 1.9$, $n = 1.5$, $n = 1.2$

Les courbes sont proposées sans commentaires car les résultats obtenus par la théorie uniforme de la diffraction sont très proches des solutions exactes, avec un décalage constant du à une différence de puissance de la source, qui a été compensé.

On peut conclure que le formalisme développé, à la fois dans l'évaluation asymptotique, et dans la continuité du champ total permet l'élaboration d'une formulation simplifiée, complémentaire de l'optique géométrique, et qui fournit des résultats d'une grande précision dans les situations où elle peut être comparée à des formulations exactes.

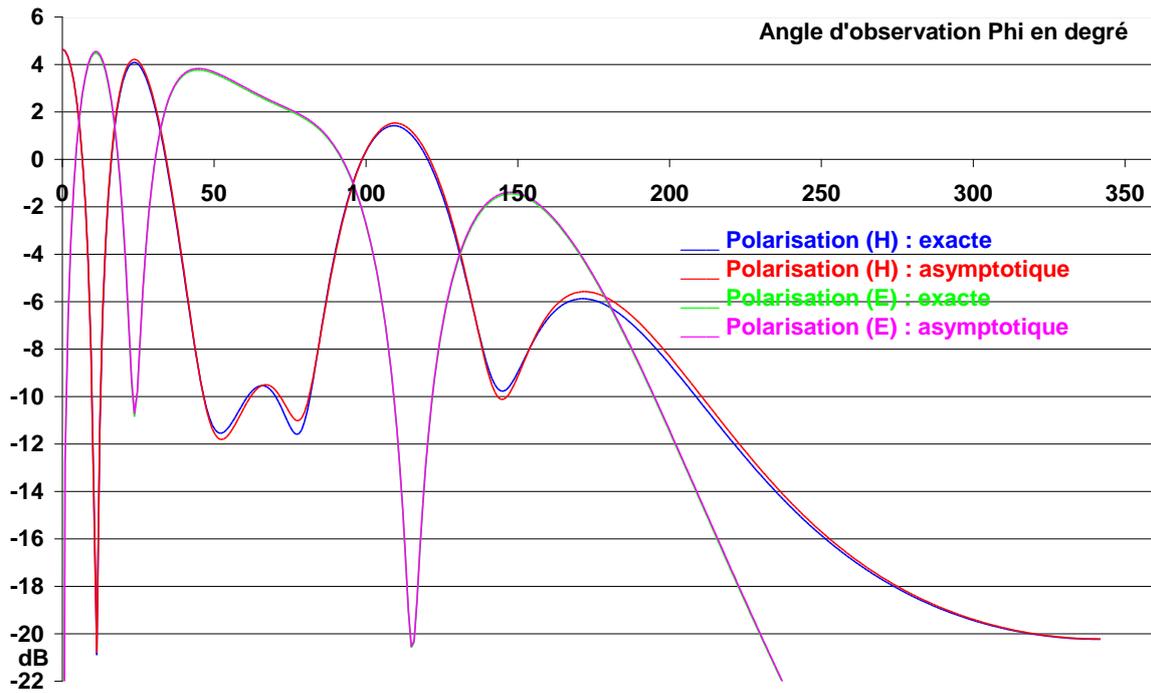


Figure IX-5 : Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte.
 $n = 1.9$, $\rho = 2.5 \lambda$, $\rho_0 = 1.5 \lambda$, $\phi_0 = 30^\circ$

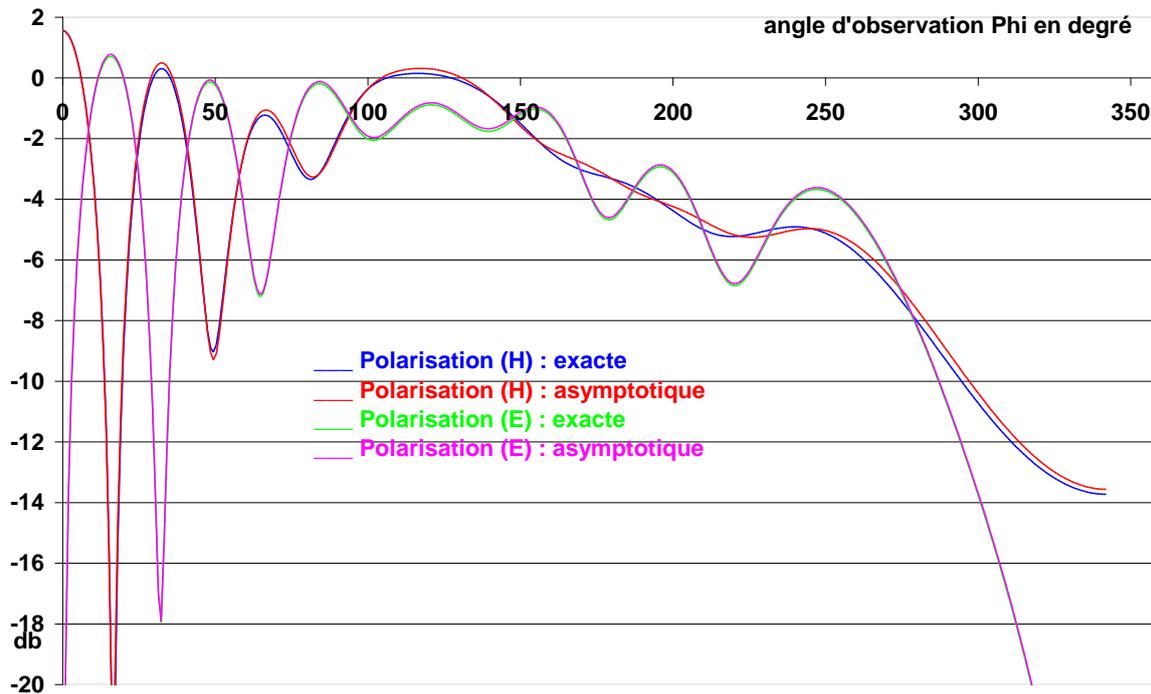


Figure IX-6 : Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte.
 $n = 1.9$, $\rho = 2.5 \lambda$, $\rho_0 = 1.5 \lambda$, $\phi_0 = 120^\circ$

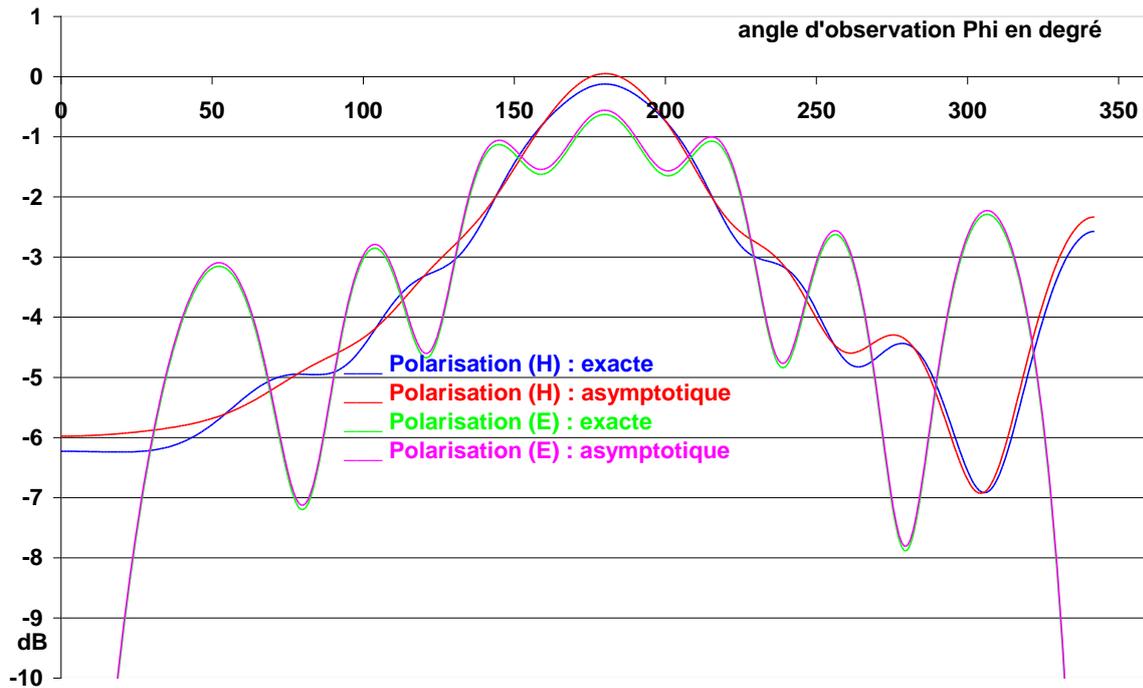


Figure IX-7 : Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte.
 $n = 1.9$, $\rho = 2.5 \lambda$, $\rho_0 = 1.5 \lambda$, $\phi_0 = 180^\circ$

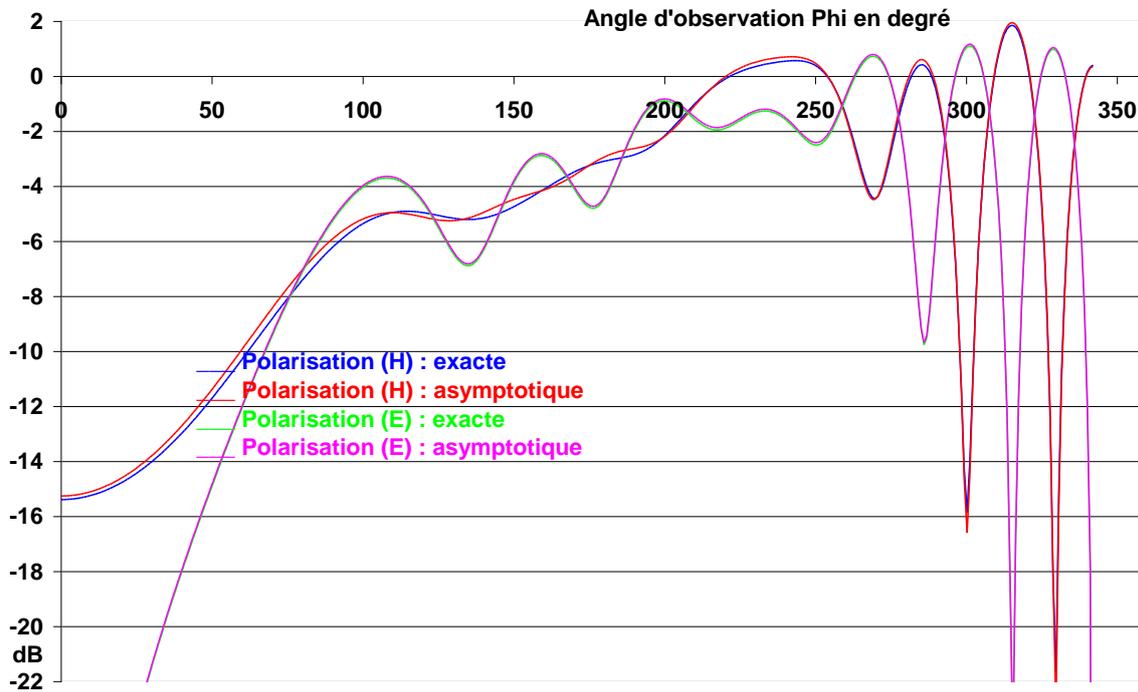


Figure IX-8 : Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte.
 $n = 1.9$, $\rho = 2.5 \lambda$, $\rho_0 = 1.5 \lambda$, $\phi_0 = 235^\circ$

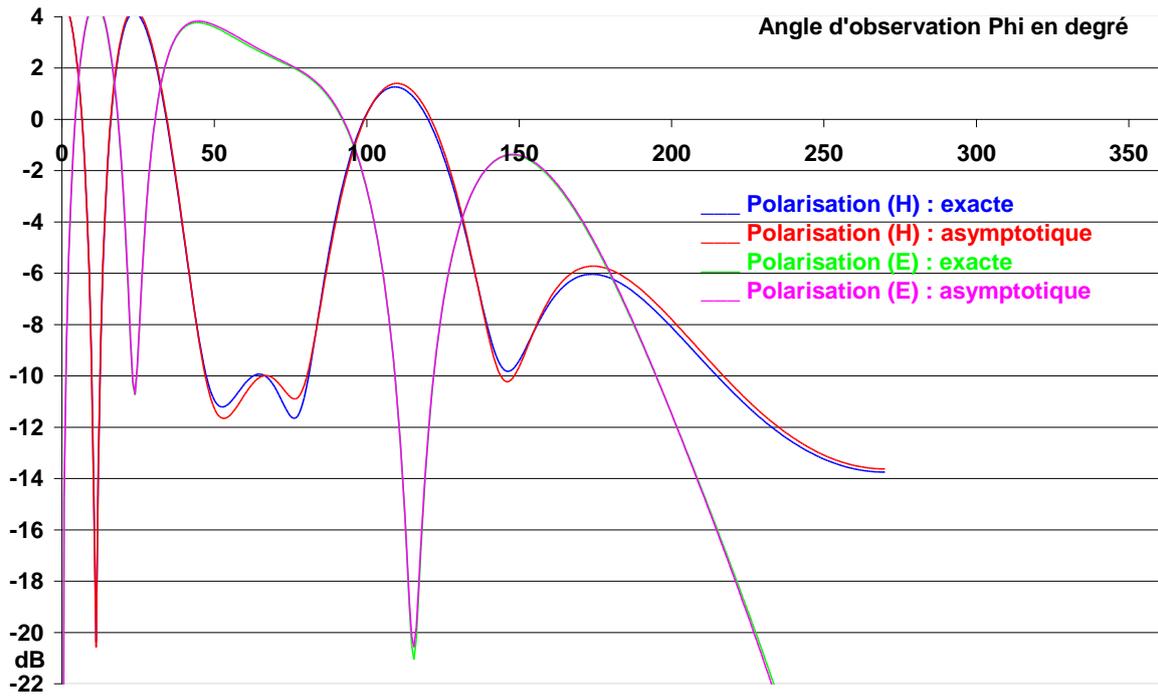


Figure IX-9 : Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte.
 $n = 1.5, \rho = 2.5 \lambda, \rho_0 = 1.5 \lambda, \phi_0 = 30^\circ$

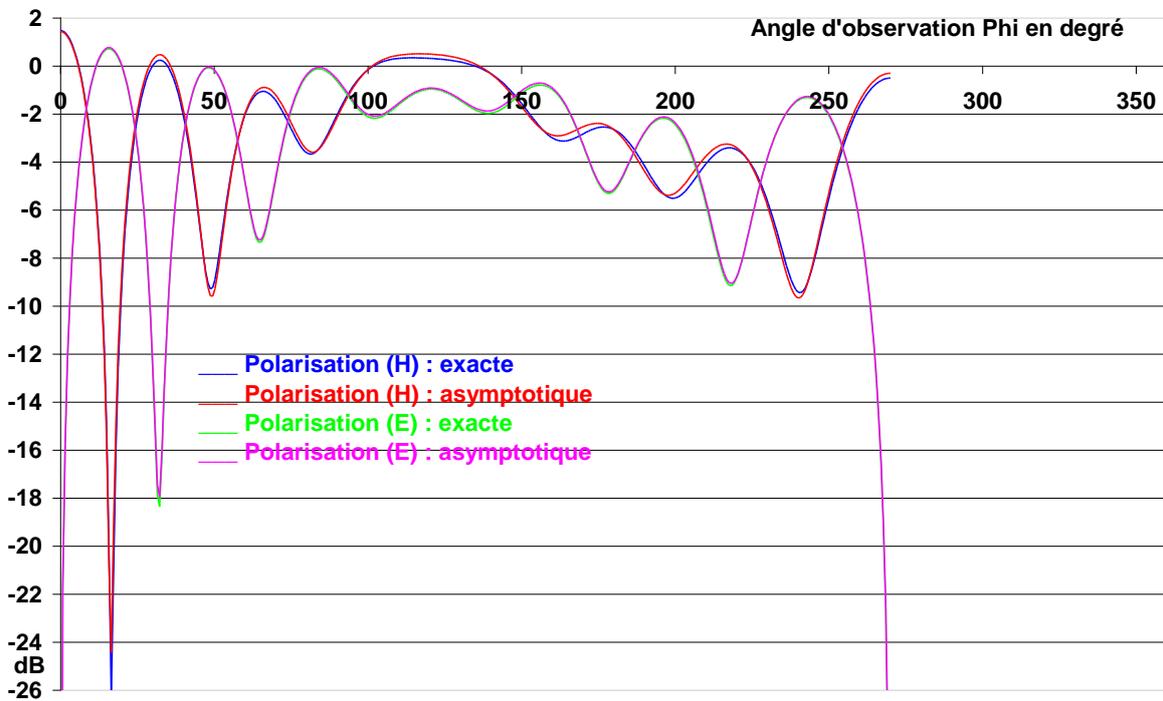


Figure IX-9 : Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte.
 $n = 1.5, \rho = 2.5 \lambda, \rho_0 = 1.5 \lambda, \phi_0 = 120^\circ$

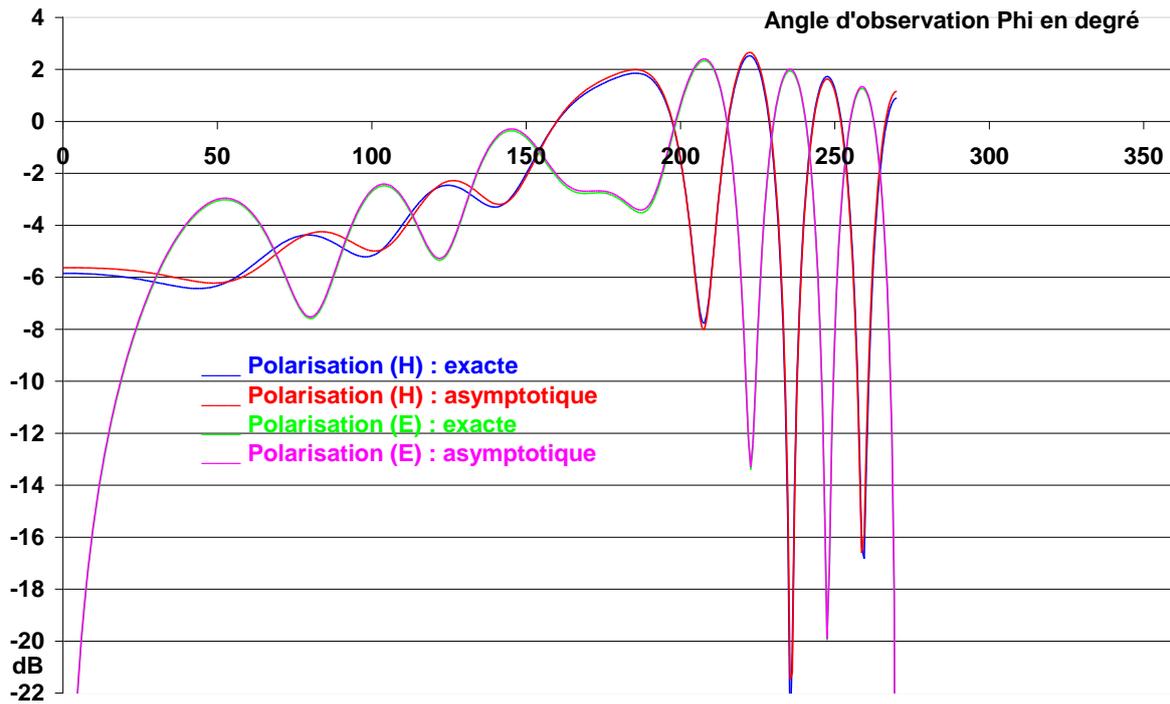


Figure IX-10 : Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte.
 $n = 1.5, \rho = 2.5 \lambda, \rho_0 = 1.5 \lambda, \phi_0 = 180^\circ$

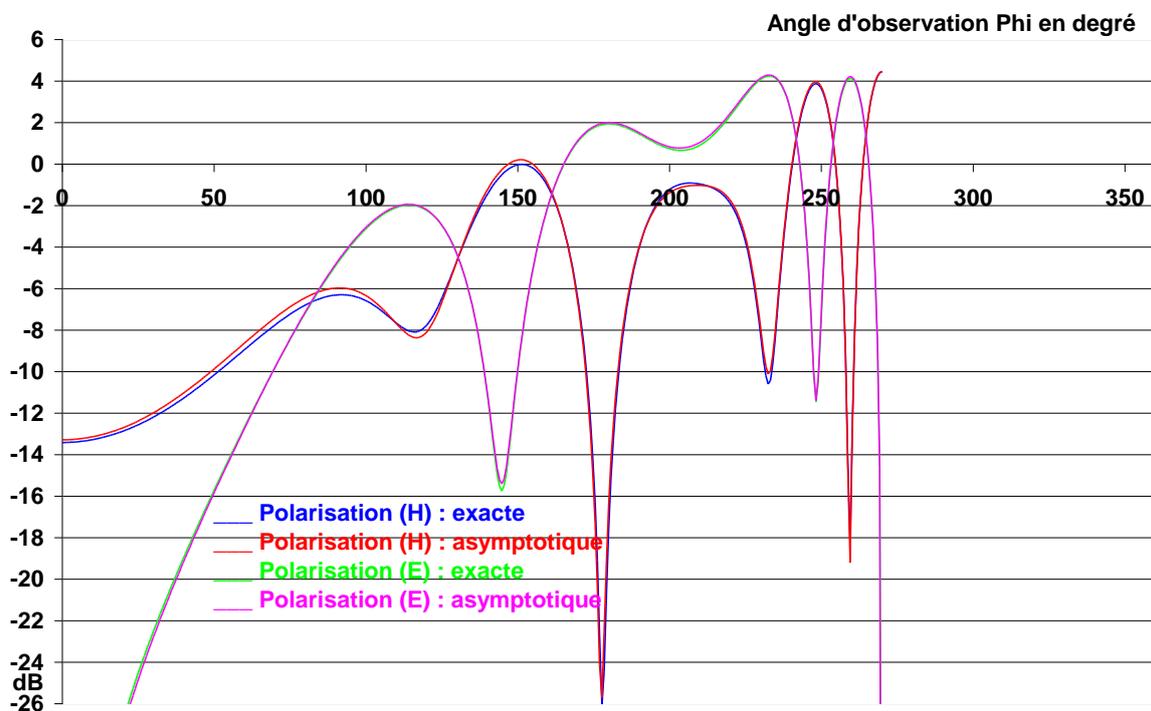


Figure IX-11 : Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte.
 $n = 1.5, \rho = 2.5 \lambda, \rho_0 = 1.5 \lambda, \phi_0 = 235^\circ$

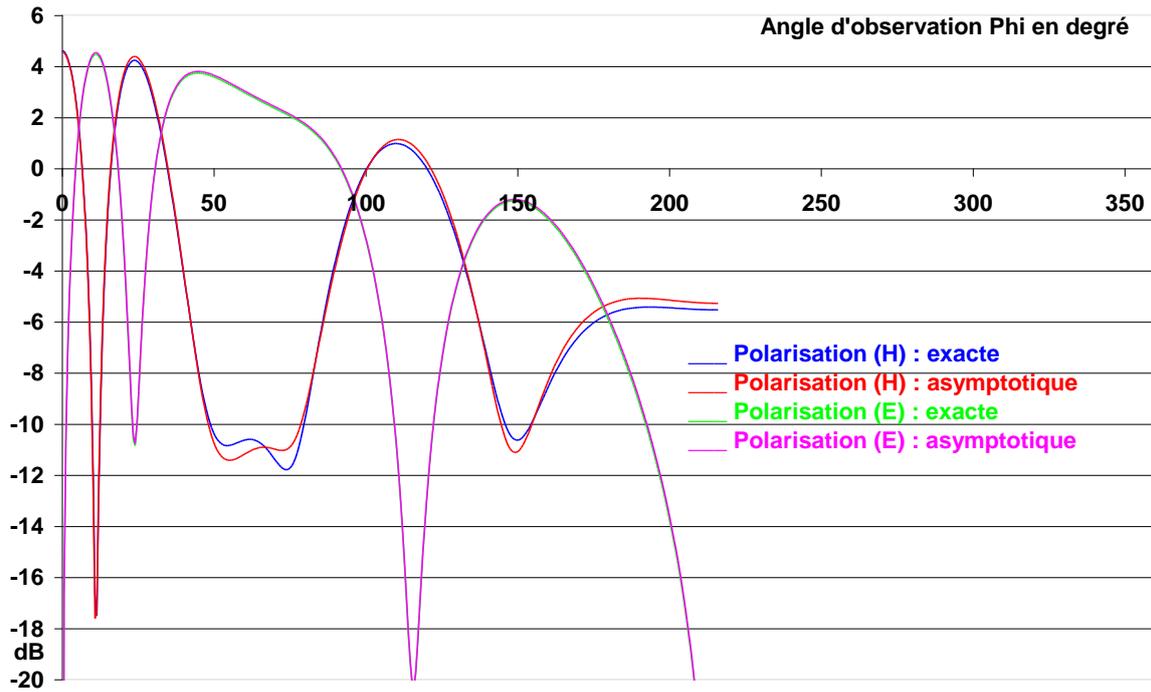


Figure IX-12 : Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte.
 $n = 1.2, \rho = 2.5 \lambda, \rho_0 = 1.5 \lambda, \phi_0 = 30^\circ$

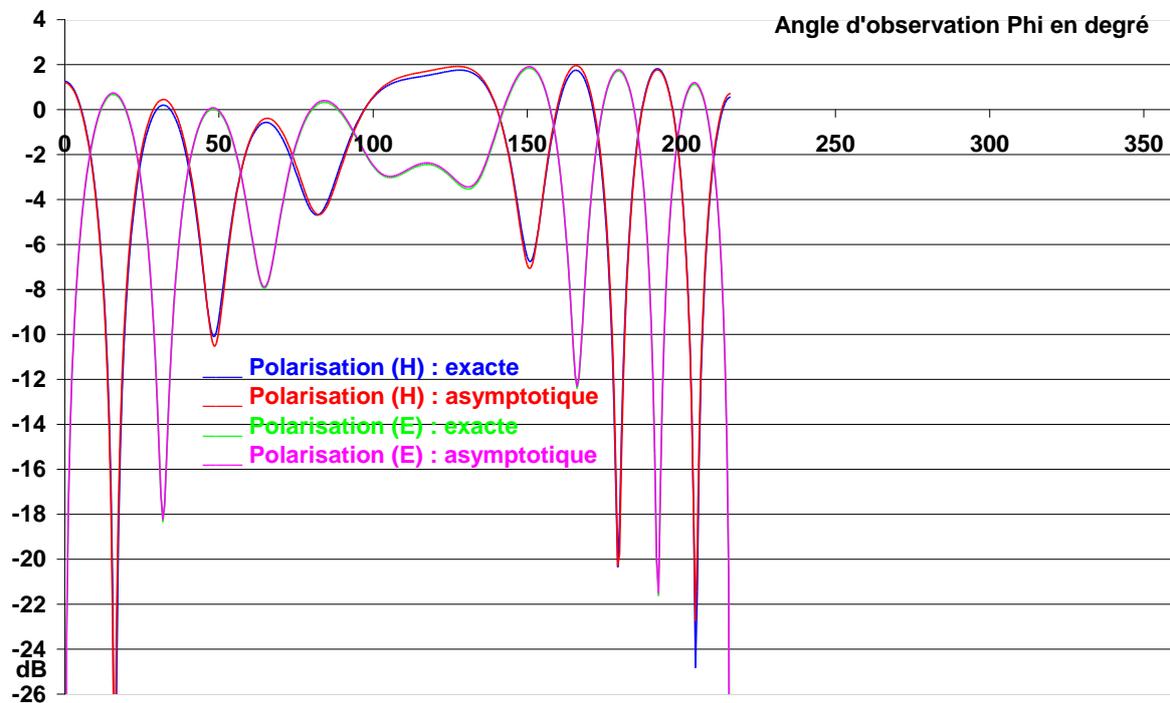


Figure IX-13 : Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte.
 $n = 1.2, \rho = 2.5 \lambda, \rho_0 = 1.5 \lambda, \phi_0 = 120^\circ$

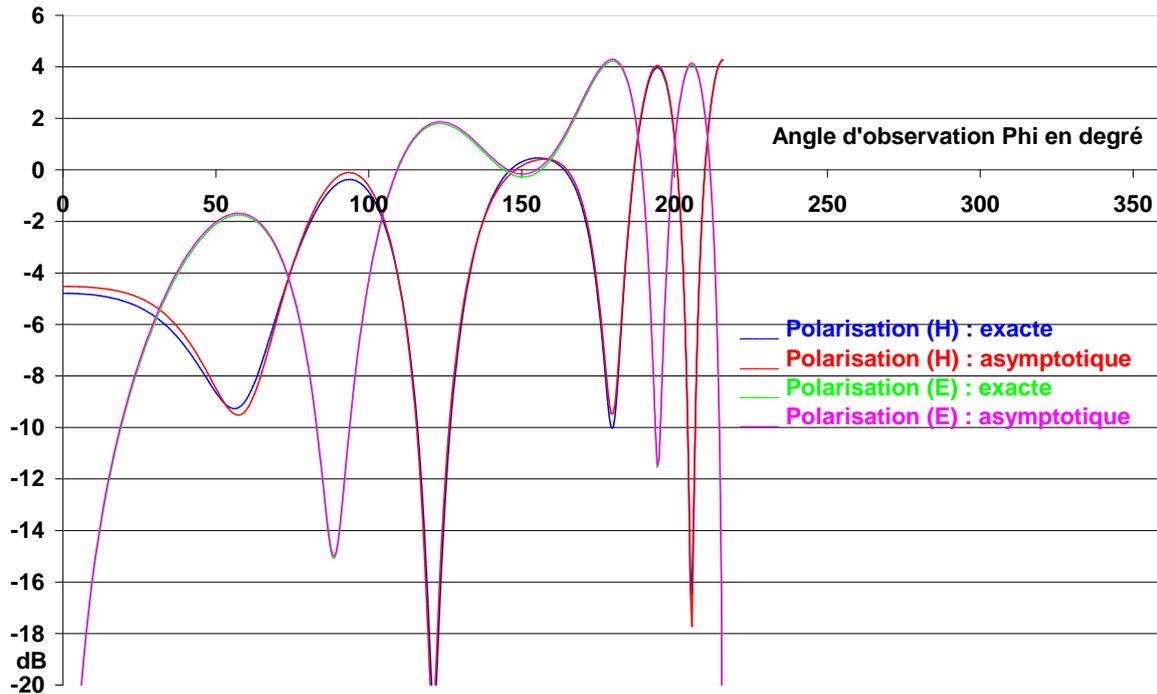


Figure IX-14 : Comparaison de la Théorie Uniforme de la Diffraction avec la solution exacte.
 $n = 1.2, \rho = 2.5 \lambda, \rho_0 = 1.5 \lambda, \phi_0 = 180^\circ$

Le prolongement des relations établies en 2D aux situations 3D nécessite la prise en compte des incidences obliques.

On réserve la notation ρ et ρ_0 au problème 2D (ou à l'incidence normale) et on désigne en général par s^i la distance de la source S au point de diffraction Q , et par s^d la distance du point de diffraction Q au point d'observation P (Figure IX-15).

En incidence normale, le champ incident ou réfléchi s'écrit comme une fonction de 3 variables :

$$U^{i,r}(k\rho, \phi^{i,r}) = \exp(jk\rho \cos(\phi^{i,r})) \quad (IX-21)$$

Lorsque la direction d'incidence fait un angle β_0 avec la droite tangente à l'arête portée par l'axe des z , on déduit la nouvelle expression des champs incidents et réfléchis :

$$\exp(jk\{\rho \cos \phi^{i,r} \sin \beta_0 - z \cos \beta_0\}) = U^{i,r}(k\rho \sin \beta_0, \phi^{i,r}) \exp(-jkz \cos \beta_0) \quad (IX-22)$$

En incidence normale, le champ diffracté est de la forme :

$$U_d^{i,r}(k\rho, \phi^{i,r}) \exp(-jk\rho) \quad (IX-23)$$

Il devient d'après (IX-22) :

$$U_d^{i,r}(k\rho \sin \beta_0, \phi^{i,r}) \exp\{-jk(\rho \sin \beta_0 + z \cos \beta_0)\} \quad (IX-24)$$

soit encore en adoptant les notations 3D :

$$\rho = s^d \sin \beta_0 \quad \text{et} \quad z = s^d \cos \beta_0 \quad (\text{IX-25})$$

$$U_d^{i,r}(ks^d \sin^2 \beta_0, \phi^{i,r}) \exp(-jks^d) \quad (\text{IX-26})$$

qui est la formulation retenue pour l'extension d'une incidence oblique au cas 3D. Les coefficients de diffraction se déduisent du cas 2D en remplaçant ρ par $s^d \sin^2 \beta_0$ dans le terme d'amplitude, et par s^d dans le terme de propagation exponentiel.

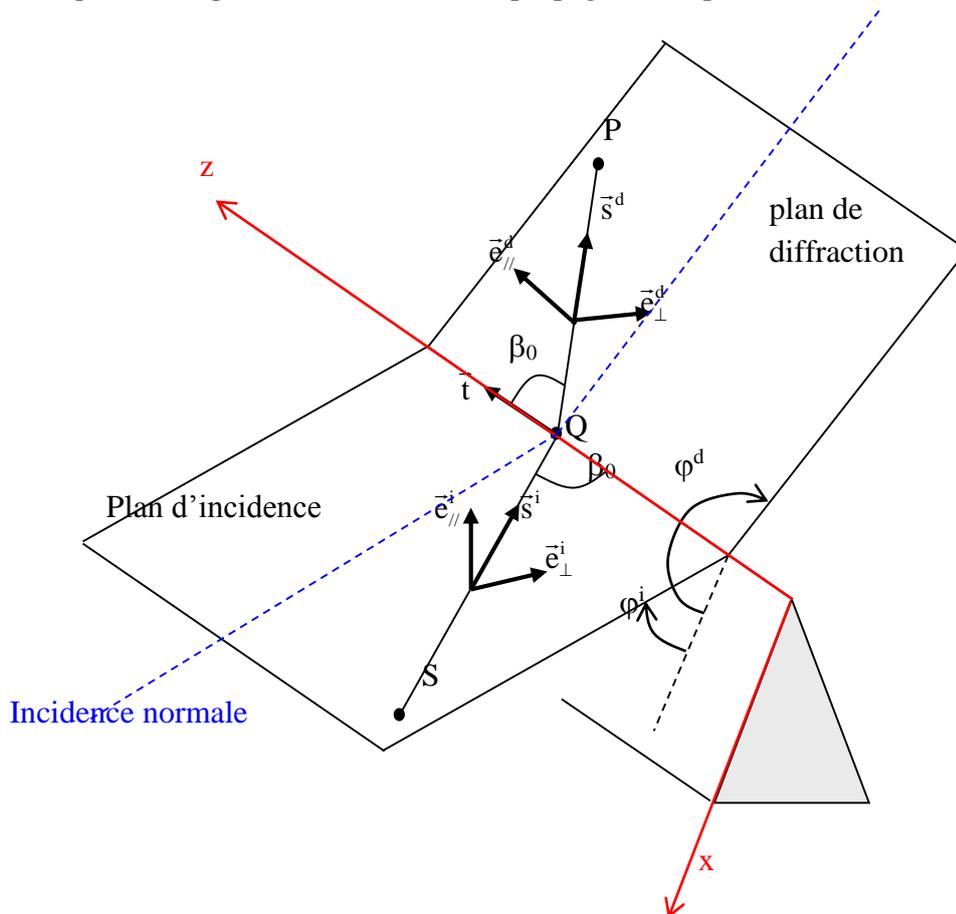


Figure IX-15 : Représentation des bases locales associées aux rayons incidents et diffractés en incidence oblique

En 3D, et en incidence oblique, le paramètre introduit dans les intégrales de FRESNEL et qui permet d'assurer la continuité du champ total sera de la forme :

$$L = s^d \sin^2 \beta_0 \quad \text{pour une onde incidente plane.}$$

$$L = \frac{s^d r}{s^d + r} \quad \text{pour une onde incidente cylindrique}$$

$$L = \frac{s^d r}{s^d + r} \sin^2 \beta_0 \quad \text{pour une onde incidente sphérique}$$

X - Diffraction d'une onde plane par un cylindre parfaitement conducteur

Les obstacles qui diffractent les ondes électromagnétiques ne présentent pas tous des arêtes anguleuses. Une classe particulière de ces obstacles présente au contraire une surface parfaitement lisse à l'illumination (Figure X-1).

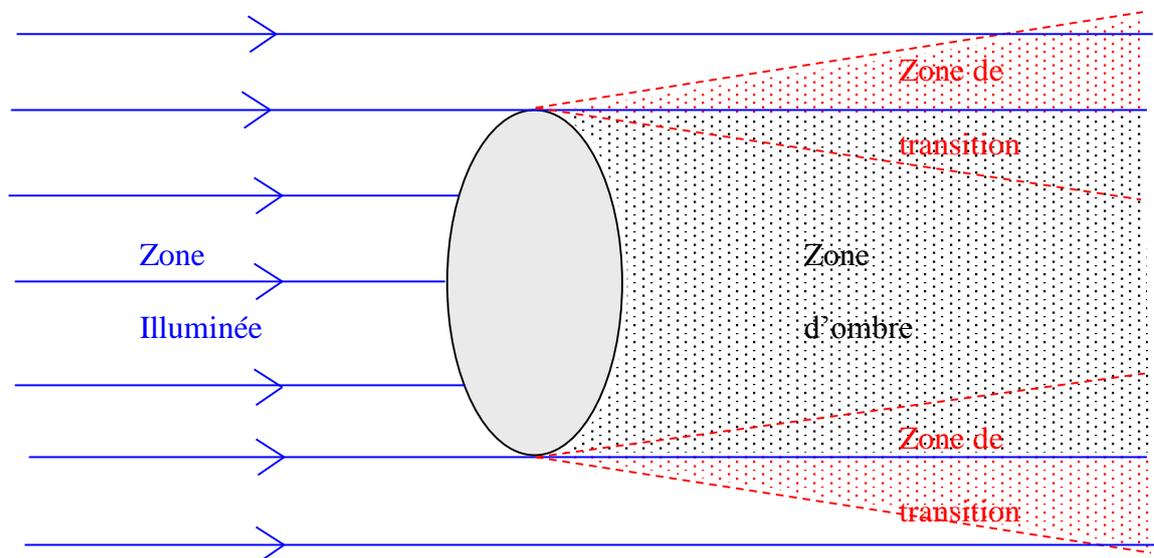


Figure (X-1) : Représentation des zones de champ lors de la diffraction d'une onde électromagnétique par une surface elliptique (2D).

On distingue alors de manière naturelle une zone illuminée et une zone d'ombre. C'est cette dernière zone qui met en évidence l'existence de champ diffracté : puisque l'obscurité n'y est pas totale, c'est qu'il existe, en termes asymptotiques, des rayons lumineux qui parviennent dans cette région.

Dans la zone illuminée, le champ est constitué par des rayons incidents et réfléchis : on admet que, dans cette zone, les rayons diffractés ont une amplitude négligeable par rapport aux deux précédents et que par conséquent, leur prise en compte n'est pas nécessaire.

Dans la zone d'ombre, il n'y a plus de rayons incidents, ni réfléchis, et subsistent seuls des rayons diffractés dont il faudra définir le comportement.

Entre ces deux zones, il existe une région dans laquelle les rayons passent de manière continue de la première situation à la seconde : cette région où les phénomènes électromagnétiques sont complexes est appelée zone de transition.

Considérant à nouveau que la diffraction est un phénomène local aux très hautes fréquences, les solutions élaborées pour exprimer le champ diffracté par une surface vont s'appuyer sur l'exemple canonique du cylindre. Les résultats déduits de ce problème spécifiques seront transposés à une surface quelconque, en approximant localement la surface par un cylindre ayant le même rayon de courbure.

Le cylindre est la surface canonique sur laquelle à partir de laquelle sont établies les relations qui permettent de décrire le comportement des rayons diffractés par une surface. Il importe donc de bien connaître son comportement lorsqu'il est illuminé par une onde plane ou cylindrique.

I – Solution exacte à la diffraction d'une onde plane par un cylindre parfaitement conducteur

La solution exacte fut publiée pour la première fois par REYLEIGH. Il en donne une formulation sous la forme d'une série infinie telle que nous allons la décrire.

Soit une onde plane incidente sur un cylindre parfaitement conducteur en polarisation électrique figure (X-2).

La direction d'incidence est parallèle à l'axe des x et le champ incident est donné par la relation :

$$E_z^i = e^{-jkx} = e^{-jk\rho \cos\phi} \quad (X-1)$$

Une exponentielle complexe telle que (X-1) peut être décomposée sous la forme d'une série infinie de fonctions de BESSEL J_n :

$$E_z^i = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} j^{-n} J_n(k\rho) e^{jn\phi} \quad (X-2)$$

où il faut différencier j tel que $j^2 = -1$, et J_n fonction de BESSEL d'ordre n.

Le champ total est donné par la somme d'un champ incident et d'un champ diffracté (au sens de « scattered field »), et puisque ce dernier ne peut être constitué que par des ondes qui vont se propager vers l'infini, on le recherche sous la forme d'un spectre de fonctions de HANKEL de deuxième espèce qui décrivent la propagation de ce type d'ondes cylindriques :

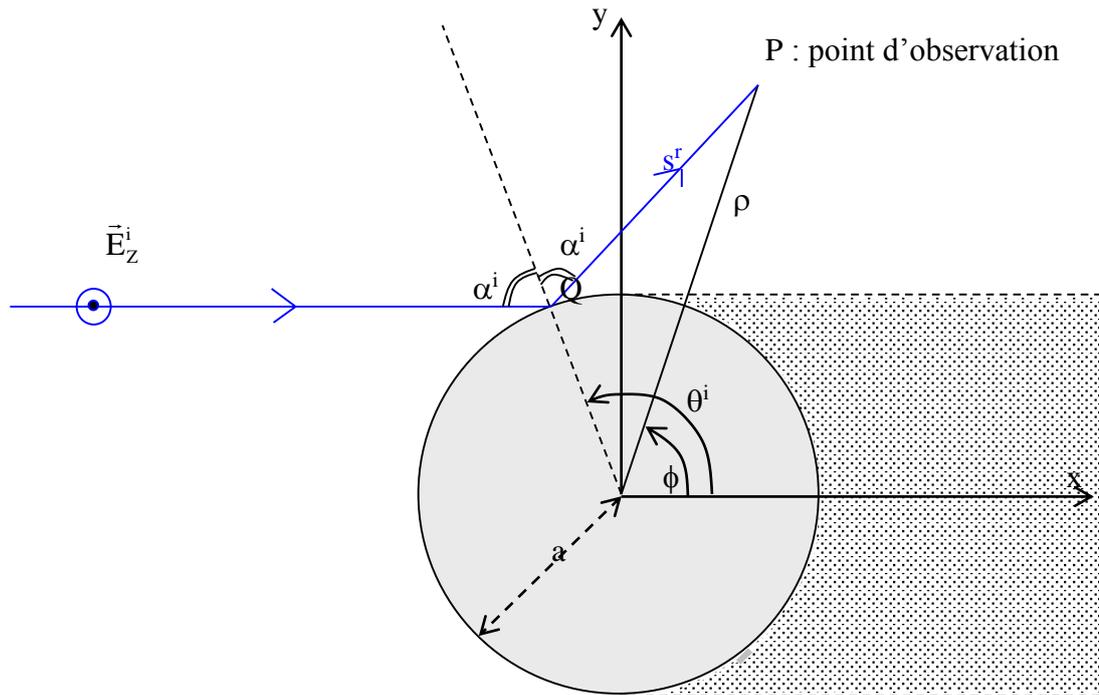


Figure (X-2) : Représentation de la géométrie du cylindre, du champ incident et du point d'observation.

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a'_n H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\phi} \quad (\text{X-3})$$

Pour des raisons d'homogénéité avec la relation (X-2), on extrait en général le terme j^{-n} de la constante a'_n :

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n j^{-n} H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\phi} \quad (\text{X-4})$$

ce qui permet d'exprimer le champ total de la façon suivante :

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} j^{-n} \{ J_n(k\rho) + a_n H_n^{(2)}(k\rho) \} e^{jn\phi} \quad (\text{X-5})$$

Les valeurs des coefficients a_n sont déterminées à l'aide des conditions aux limites sur le cylindre ($\rho = a$) où le champ total doit être nul en polarisation électrique. On déduit de (X-5) dans ces conditions :

$$a_n = - \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \quad (\text{X-6})$$

En introduisant ce coefficient dans (X-5), on obtient le champ total entourant le cylindre sous la forme :

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{j^{-n} e^{jn\phi}}{H_n^{(2)}(ka)} \{ H_n^{(2)}(ka) J_n(k\rho) - J_n(ka) H_n^{(2)}(k\rho) \} \quad (\text{X-7})$$

Lorsque l'onde incidente est en polarisation magnétique, les conditions aux limites imposent l'annulation de la dérivée normale du champ magnétique (X-5) sur le cylindre, soit donc ici la dérivée par rapport à ρ . On déduit dans ces conditions :

$$a_n = - \frac{[J_n]'(ka)}{[H_n^{(2)}]'(ka)} \quad (X-8)$$

et l'expression correspondante du champ total en polarisation magnétique :

$$H_z = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{j^{-n} e^{in\phi}}{[H_n^{(2)}]'(ka)} \{ [H_n^{(2)}]'(ka) J_n(k\rho) - [J_n]'(ka) H_n^{(2)}(k\rho) \} \quad (X-9)$$

Les séries (X-7,9) expriment le champ total entourant un cylindre illuminé par une onde plane de manière relativement simple à l'aide des fonctions de BESSEL et de HANKEL. Elles convergent très lentement lorsque le rayon du cylindre a , et donc la distance du point d'observation au centre du cylindre ρ dépassent quelques longueurs d'onde, et deviennent pratiquement inexploitables.

Elles permettent néanmoins un calcul exact et précis du champ au voisinage d'un cylindre de rayon inférieur ou égal à la longueur d'onde, et peuvent donc servir de référence pour des formulations approchées, et en particulier des formulations asymptotiques.

Elles permettent également d'illustrer, sur quelques exemples le comportement du champ qui entoure le cylindre (Figures X-3).

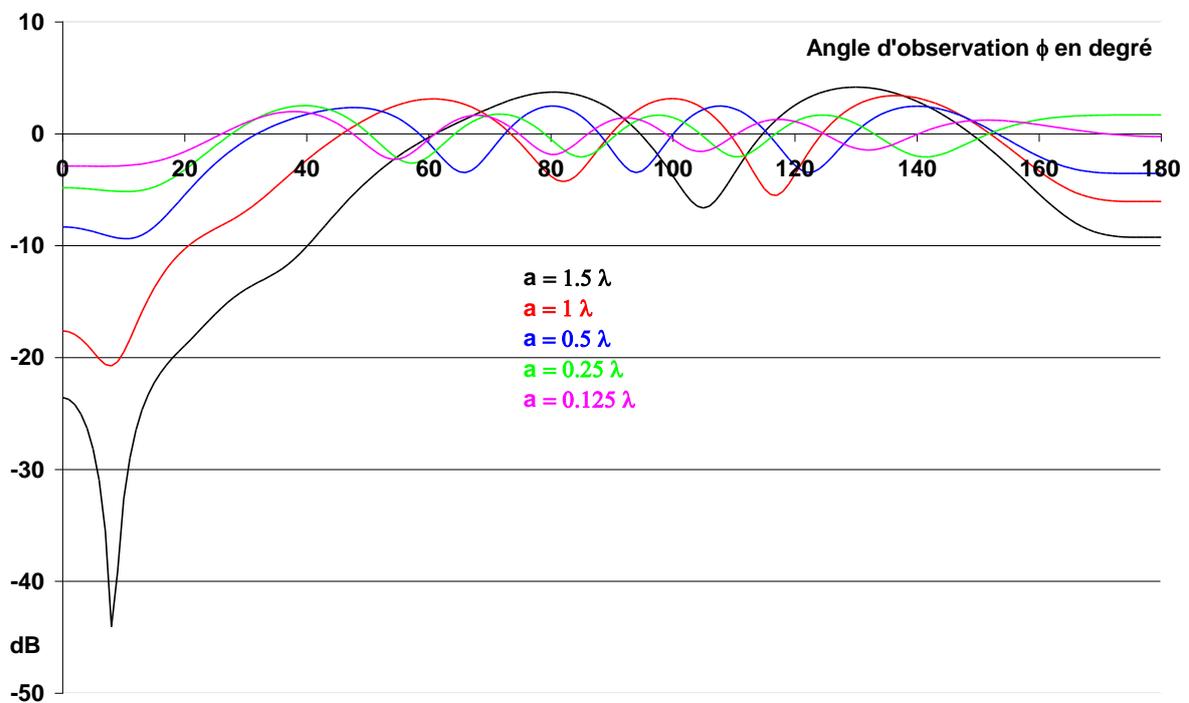


Figure (X-3) : Représentation du champ total entourant le cylindre à une distance de 2.5λ , en polarisation électrique, pour différents rayons de cylindre.

On observe sur la figure (X-3) une zone de pénombre (au voisinage de $\phi = 0$) d'autant plus prononcée que le rayon du cylindre est important.

Lorsqu'on rentre dans la zone illuminée, les ondulations traduisent les interférences entre champ incident et réfléchi.

La valeur du champ dans l'axe d'illumination ($\phi = 180^\circ$) s'interprète de la manière suivante :

- pour $a = 1.5 \lambda, \lambda, 0.5\lambda$, le champ réfléchi se trouve en opposition de phase avec le champ incident car il s'est propagé sur une distance aller-retour égale à un multiple entier de la longueur d'onde, mais a subi une inversion de phase au niveau du cylindre à cause des conditions aux limites. Que cette interférence en opposition de phase ne donne pas un champ nul est dû au fait que le champ réfléchi (onde cylindrique) a une amplitude inférieure au champ incident (onde plane) au point d'interférence.

- pour $a = 0.25 \lambda$, le champ réfléchi se retrouve en phase, et on se trouve alors à un maximum d'ondulation.

Une illumination en polarisation magnétique donne les résultats suivants (Figure X-4) :

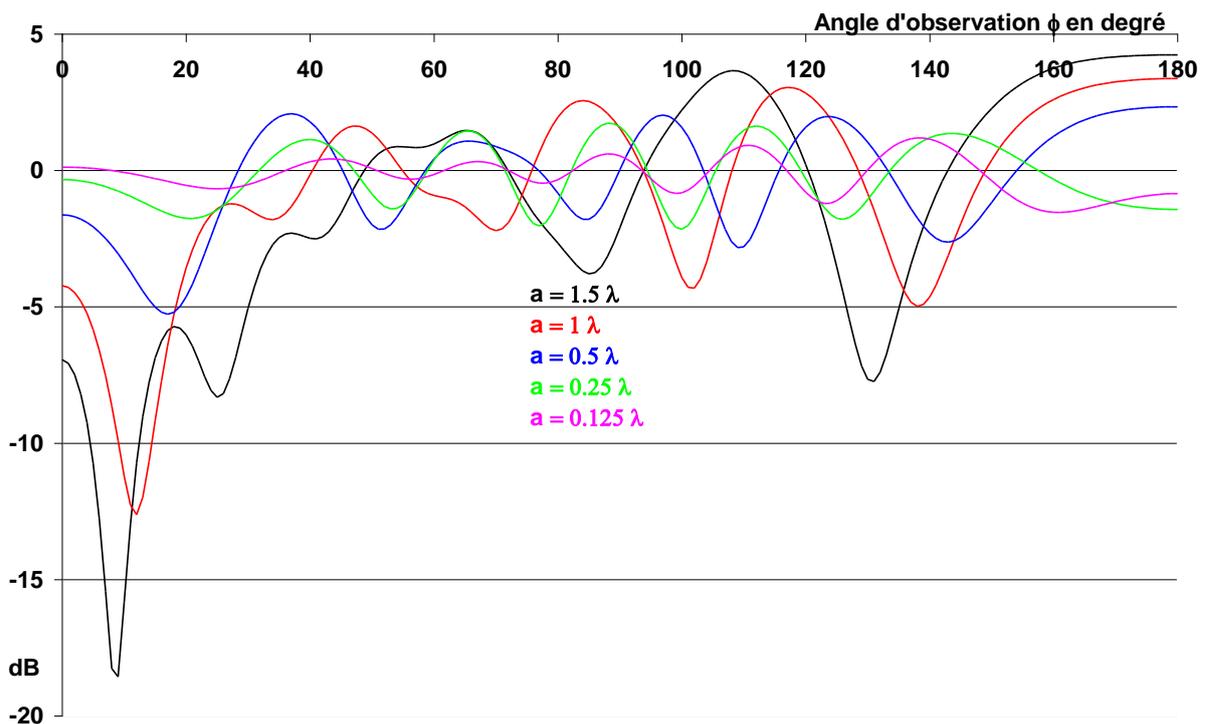


Figure (X-4) : Représentation du champ total entourant le cylindre à une distance de 2.5λ , en polarisation magnétique, pour différents rayons de cylindre.

Les commentaires sont analogues et duaux par rapport à la polarisation électrique.

II – Solution asymptotique dans la zone illuminée en termes d'optique géométrique

Si on estime que le champ diffracté dans la zone illuminée est négligeable, le champ total dans cette zone peut être calculé uniquement en termes d'optique géométrique, c'est à dire en sommant le champ incident et le champ réfléchi.

En se référant à la figure (X-2), le champ incident au point d'observation P situé à une distance ρ de l'origine O, et dont la direction OP fait un angle ϕ avec l'axe des x s'écrit :

$$U^i(\mathbf{P}) = e^{-jk\rho \cos \phi} \quad (\text{X-10})$$

Le rayon réfléchi est issu de la surface au point Q, et on déduit de (X-10) le champ incident au point Q :

$$U^i(\mathbf{Q}) = e^{-jka \cos \theta^i} \quad (\text{X-11}) ;$$

Le rayon de courbure du faisceau réfléchi ρ^r s'exprime en fonction du rayon de courbure de la surface a par la relation donnée dans le chapitre concernant l'optique géométrique :

$$\rho^r = \frac{a \cos(\alpha^i)}{2} \quad (\text{X-12})$$

Le champ réfléchi au point d'observation P a pour expression :

$$U^r(\mathbf{P}) = U^i(\mathbf{Q}) \sqrt{\frac{\rho^r}{\rho^r + s^r}} e^{-jks^r} = e^{-jk(s^r + a \cos \theta^i)} \sqrt{\frac{\rho^r}{\rho^r + s^r}} \quad (\text{X-13})$$

d'où on déduit le champ total au point P sous la forme d'un champ incident plus un champ réfléchi :

$$U(\mathbf{P}) = U^i(\mathbf{P}) \pm U^r(\mathbf{P}) \quad (\text{X-14})$$

Le signe plus s'applique pour la polarisation magnétique ($U = H$), et le signe moins pour la polarisation électrique ($U = E$).

$$U(\mathbf{P}) = e^{-jk\rho \cos \phi} \pm e^{-jk(s^r + a \cos \theta^i)} \sqrt{\frac{\rho^r}{\rho^r + s^r}} \quad (\text{X-15})$$

Cette expression ne s'applique que dans la zone illuminée, soit donc lorsque :

$$\phi > \frac{\pi}{2} - \text{Arc cos}\left(\frac{a}{\rho}\right) \quad (\text{X-16})$$

Elle est d'autant plus précise que l'on s'enfonce dans la zone illuminée (lorsque ϕ s'approche de 180°). Par contre elle devient incorrecte au voisinage de la frontière ombre-lumière (lorsque ϕ s'approche de la valeur X-16).

III – Solution asymptotique en termes de fonctions de PEKERIS

A partir des solutions exactes (X-7,9), des transformations non triviales, décrites en détail par JAMES, permettent d'exprimer le champ lointain à l'aide de fonctions spéciales, appelées fonctions de PEKERIS.

La difficulté est due au fait qu'aucun compromis ne peut être fait concernant les valeurs de ρ et de n , car tous deux sont susceptibles de tendre vers l'infini, séparément ou en même temps.

On est donc amené à remplacer les fonctions de HANKEL H_n par leur expression asymptotique uniforme quelle que soit la valeur de n . Ces expressions font intervenir les fonctions d'Airy qui vont être incluses dans les sommes infinies, et quelques manipulations supplémentaires seront encore nécessaires pour obtenir des expressions viables pour le calcul numérique.

III-1 La fonction d'AIRY

Pour un argument x réel, la fonction d'AIRY réelle est définie par la relation :

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt \quad (\text{X-17})$$

Elle est solution de l'équation différentielle :

$$y'' - xy = 0 \quad (\text{X-18})$$

Toujours, pour un argument réel, mais généralisée à sa forme complexe, elle devient :

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\pm j\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)\right\} dt \quad (\text{X-19})$$

et enfin pour un argument complexe z :

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_c \exp\left(\frac{t^3}{3} - zt\right) dt \quad (\text{X-20})$$

ou, alternativement, après changement de variable $\eta = t \exp\left(j\frac{\pi}{3}\right)$ (X-21)

$$\text{Ai}\left(z \exp\left(-j\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(j\frac{\pi}{6}\right) W_1(z) \quad (\text{X-22})$$

avec :

$$W_1(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} \exp\left(z\eta - \frac{\eta^3}{3}\right) d\eta \quad (\text{X-23})$$

Les chemins d'intégration (C) et (Γ) sont représentés sur la figure (X-5) :

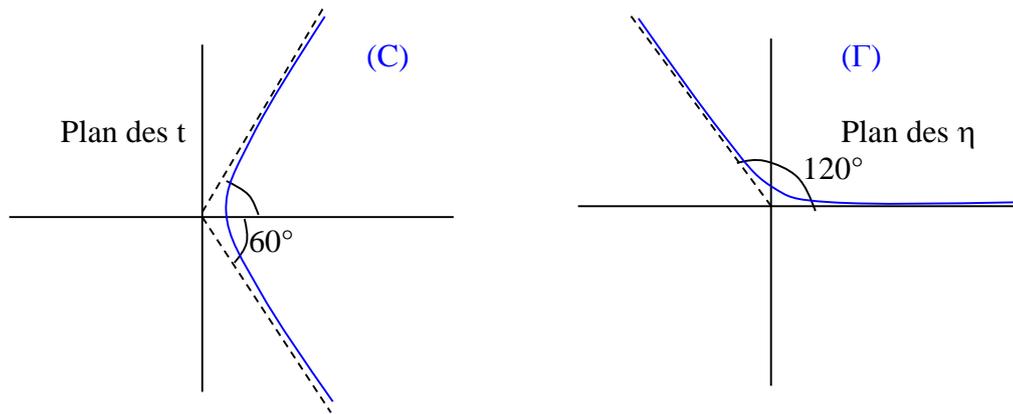


Figure X-5 : Contours d'intégrations utilisés pour définir la fonction d'AIRY.

Elle possède les propriétés suivantes :

- $Ai(0) = 0.355$ (X-24)

- lorsque z tend vers l'infini :

$$Ai(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right) \quad \text{pour } |\arg z| < \pi \quad \text{(X-25)}$$

$$Ai(z) = \frac{j}{2\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right) \quad \text{pour } \pi < \arg z < 3\pi \quad \text{(X-26)}$$

- pour un argument réel négatif :

$$Ai(-x) = \frac{\sqrt{x}}{3} \left\{ J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right) + J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right) \right\} \quad \text{(X-27)}$$

où J représente la fonction de BESSEL de première espèce.

- tableau des zéros de la fonction d'AIRY, et des zéros de sa dérivée :

n	$Ai(-\alpha_n) = 0$		$Ai'(-\alpha'_n) = 0$	
	α_n	α'_n	$Ai(-\alpha'_n)$	$Ai'(-\alpha_n)$
1	2.33811	1.01879	0.53566	0.70121
2	4.08795	3.24820	-0.41902	-0.80311
3	5.52055	4.82009	0.38041	0.86520
4	6.78670	6.16330	-0.35791	-0.91085
5	7.94413	7.37217	0.94734	0.34230
6	9.023	8.488	-0.330	-0.978
7	10.040	9.535	0.321	1.004
8	11.009	10.528	-0.313	-1.028
9	11.936	11.475	0.307	1.049
10	12.829	12.835	-0.300	-1.068

II – Les fonctions de PEKERIS

Il n'y a pas unité d'appellation sur ces fonctions, et nous reprenons ici le choix effectué par JAMES.

Elles peuvent être définies à partir de la fonction d'AIRY par les relations :

$$\hat{p}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\text{Ai}(t)}{W_1(t)} \exp(-jxt) dt \quad (\text{X-28})$$

$$\hat{q}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\text{Ai}'(t)}{W_1'(t)} \exp(-jxt) dt \quad (\text{X-29})$$

où Γ est le contour donné à la figure X-5, et où Ai' et W_1' désignent les dérivées des fonctions Ai et W_1 .

Elles ont une représentation pour x positif sous la forme d'une série des résidus obtenus lors de l'intégration dans le plan complexe :

$$\hat{p}(x) = -\frac{\exp\left(j\frac{\pi}{6}\right)}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left\{x \alpha_n \exp\left(-j\frac{5\pi}{6}\right)\right\}}{\{\text{Ai}'(-\alpha_n)\}^2} \quad x > 0 \quad (\text{X-30})$$

$$\hat{q}(x) = -\frac{\exp\left(j\frac{\pi}{6}\right)}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left\{x \alpha'_n \exp\left(-j\frac{5\pi}{6}\right)\right\}}{\alpha'_n \{\text{Ai}(-\alpha'_n)\}^2} \quad x > 0 \quad (\text{X-31})$$

et une expression asymptotique lorsque x tend vers moins l'infini :

$$\hat{p}(x) \approx \frac{\sqrt{-x}}{2} \exp\left\{j\left(\frac{x^3}{12} + \frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad x \rightarrow -\infty \quad (\text{X-32})$$

$$\hat{q}(x) \approx -\frac{\sqrt{-x}}{2} \exp\left\{j\left(\frac{x^3}{12} + \frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad x \rightarrow -\infty \quad (\text{X-33})$$

Les courbes représentatives de la partie réelle de ces deux fonctions sont données en figures X-6 et X-7. On trouvera la partie imaginaire, identique à celle des fonctions de FOCK, sur les figures X-8 et X-9.

On note que la partie réelle des fonctions de PEKERIS diverge au voisinage de l'origine. On peut montrer que cette divergence est asymptote à la fonction :

$$-\frac{1}{2x\sqrt{\pi}} \quad (\text{X-34})$$

Cette propriété sera utilisée pour construire des fonctions non divergentes au voisinage de 0, appelées fonctions de FOCK.

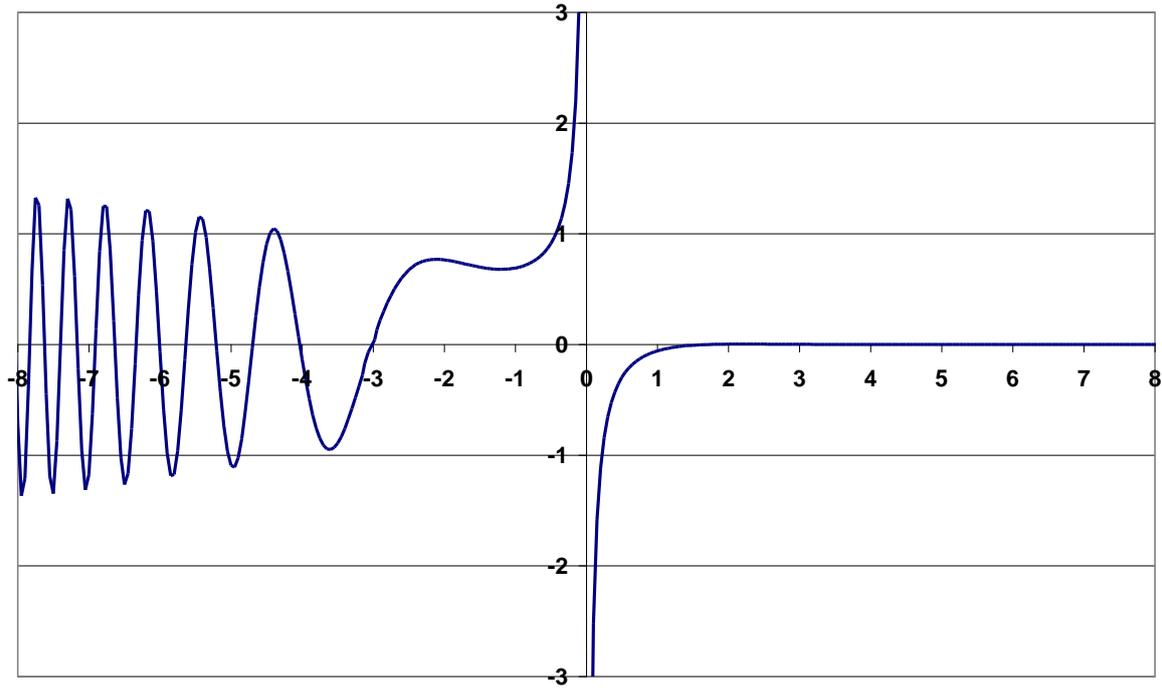


Figure X-6 : Représentation de la partie réelle de la fonction de PEKERIS $\hat{p}(x)$

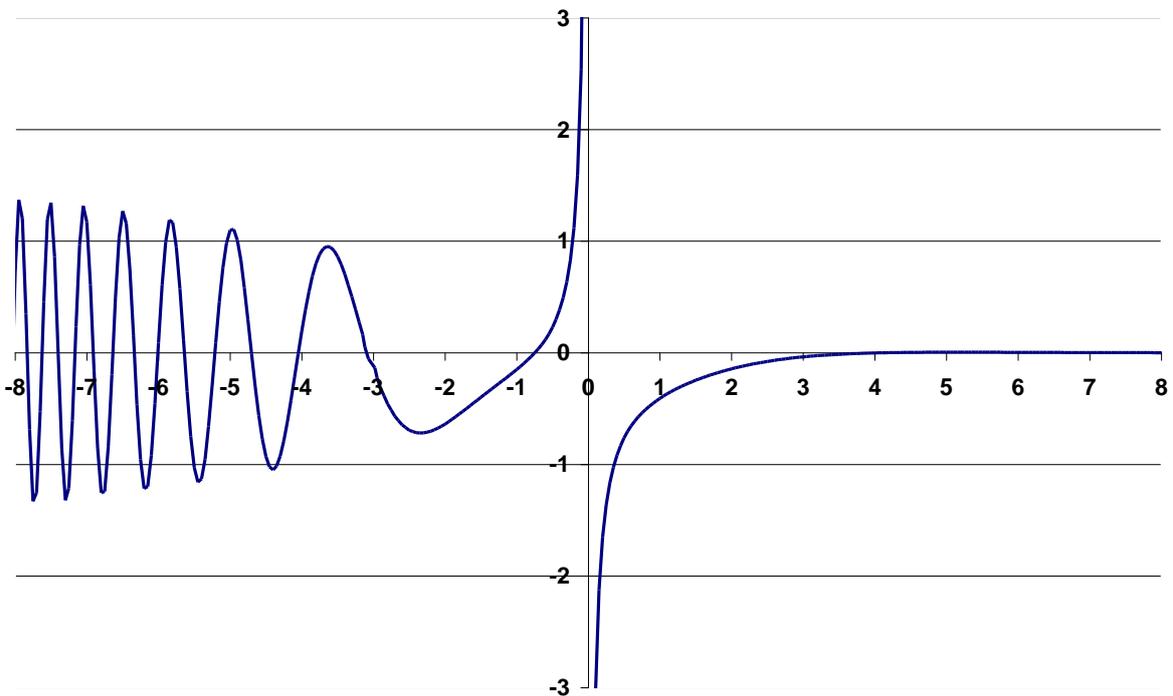


Figure X-7 : Représentation de la partie imaginaire de la fonction de PEKERIS $\hat{q}(x)$

III-3 Formulation asymptotique du champ diffracté par un cylindre parfaitement conducteur à l'aide des fonctions de PEKERIS

Dans cette partie, le champ diffracté sera au sens de « scattered field » dans la zone illuminée et sera indicé par la lettre s dans cette région. La même formulation permet d'exprimer le champ diffracté au sens « diffracted field » dans la zone d'ombre et sera indicé par la lettre d dans cette région. Afin de formuler les choses le plus clairement possible, nous affecterons les champs des deux indices, s s'entendant pour la zone illuminée, d pour la zone d'ombre.

Après quelques calculs un peu laborieux, l'évaluation asymptotique de la formulation exacte conduit aux expressions suivantes du champ diffracté, exprimées à l'aide des fonctions de PEKERIS décrites ci-dessus. Les angles θ_1 et θ_2 , le rayon du cylindre a et la distance s sont représentés figure (X-10).

M est appelé paramètre de courbure et s'exprime en fonction du rayon du cylindre a sous la forme : $M = \left(\frac{ka}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

En polarisation électrique :

$$E_{s,d} = -4 M\sqrt{\pi} \left\{ e^{-jka\theta_1} \hat{p}(M\theta_1) + e^{-jka\theta_2} \hat{p}(M\theta_2) \right\} \frac{e^{-jks}}{\sqrt{8\pi jks}} \quad (X-35)$$

En polarisation magnétique :

$$H_{s,d} = -4 M\sqrt{\pi} \left\{ e^{-jka\theta_1} \hat{q}(M\theta_1) + e^{-jka\theta_2} \hat{q}(M\theta_2) \right\} \frac{e^{-jks}}{\sqrt{8\pi jks}} \quad (X-36)$$

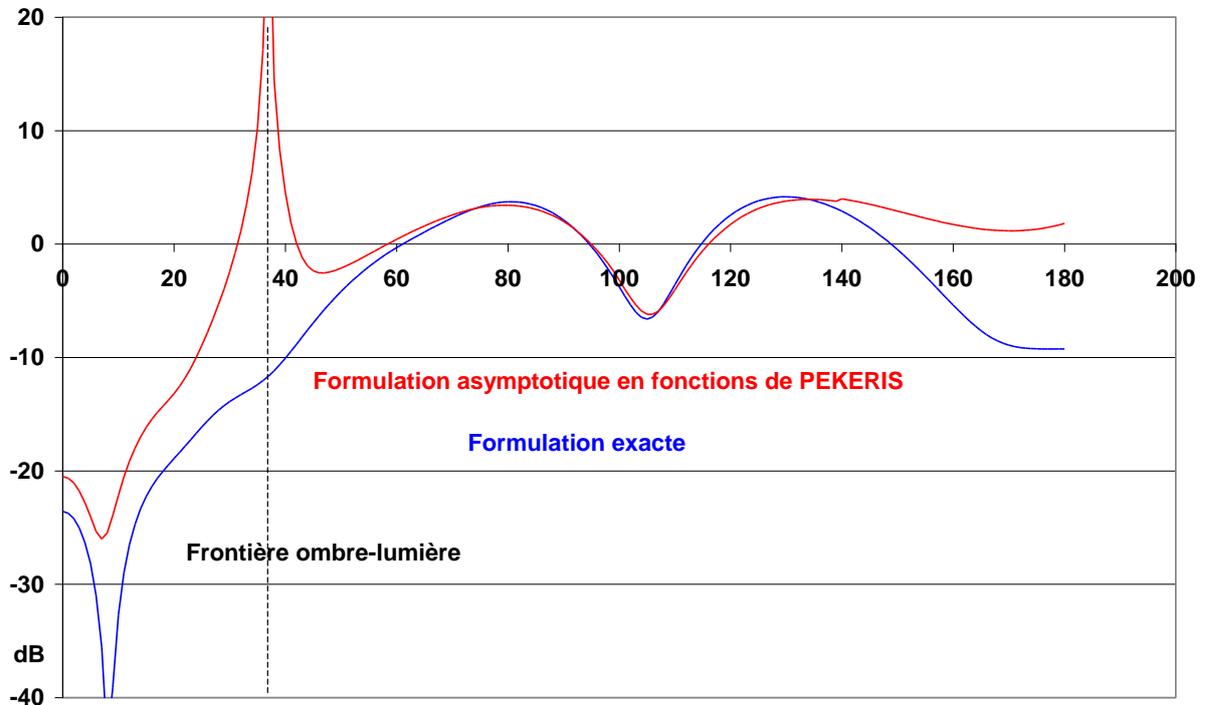


Figure X-8 : Comparaison de la formulation asymptotique en termes de fonctions de PEKERIS (X-35) avec la formulation exacte pour $a = 1.5 \lambda$, $\rho = 2.5 \lambda$, polarisation électrique.

Deux exemples vont permettre d'illustrer les problèmes de convergence de cette formulation.

Le champ total est calculé dans la zone illuminée en sommant le champ incident avec la formulation (X-26) ; dans la zone d'ombre en considérant seulement cette même relation.

La figure X-8 montre la divergence de la formulation asymptotique sur la frontière ombre-lumière, divergence qui présente une analogie avec celle des coefficients de KELLER sur les frontières de l'optique géométrique, dans le cas de l'arête.

On note également un défaut de convergence dans la zone d'illumination profonde, lorsque ϕ s'approche de 180° . Ce problème est confirmé par la figure X-9 où les paramètres de distance ont été augmentés afin de mieux évaluer l'effet asymptotique.

Puisqu'on se situe à une distance supérieure à 3λ , il n'est plus possible d'utiliser la formulation exacte, et la comparaison est effectuée avec la formulation de l'optique géométrique (X-15). On rappelle que dans cette formulation, le champ est supposé nul dans la zone d'ombre.

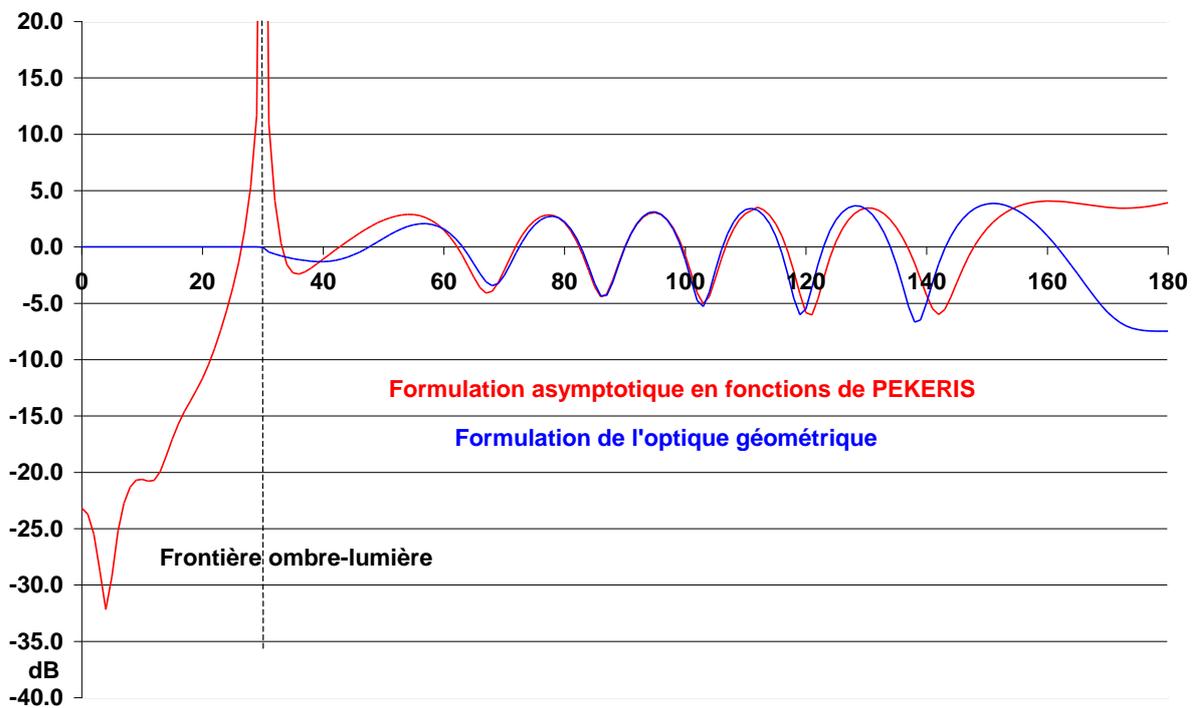


Figure X-9 : Comparaison de la formulation asymptotique en termes de fonctions de PEKERIS (X-35) avec la formulation de l'optique géométrique pour $a = 3\lambda$, $\rho = 6\lambda$, polarisation électrique.

On constate que l'augmentation de la distance du point d'observation et du rayon du cylindre n'accroît pas la convergence dans la zone d'illumination profonde, pour laquelle on sait que l'optique géométrique est déjà relativement précise. On en conclut que cette formulation ne peut pas être utilisée dans cette région.

La divergence sur la frontière ombre-lumière peut être compensée de la même manière que lors d'une évaluation asymptotique au voisinage d'un pôle, pour donner une solution uniforme de la zone d'ombre à la zone illuminée.

Les formulations (X-35) et (X-36) rappelées pour mémoire ci-dessous, sont à l'origine de la notion de rayon rampant sur une surface parfaitement conductrice (Figure X-10)

Polarisation électrique :

$$E_{s,d} = -4 M\sqrt{\pi} \left\{ e^{-jka\theta_1} \hat{p}(M\theta_1) + e^{-jka\theta_2} \hat{p}(M\theta_2) \right\} \frac{e^{-jks}}{\sqrt{8\pi jks}} \quad (X-37)$$

Polarisation magnétique :

$$H_{s,d} = -4 M\sqrt{\pi} \left\{ e^{-jka\theta_1} \hat{q}(M\theta_1) + e^{-jka\theta_2} \hat{q}(M\theta_2) \right\} \frac{e^{-jks}}{\sqrt{8\pi jks}} \quad (X-38)$$

avec $M = \left(\frac{ka}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$

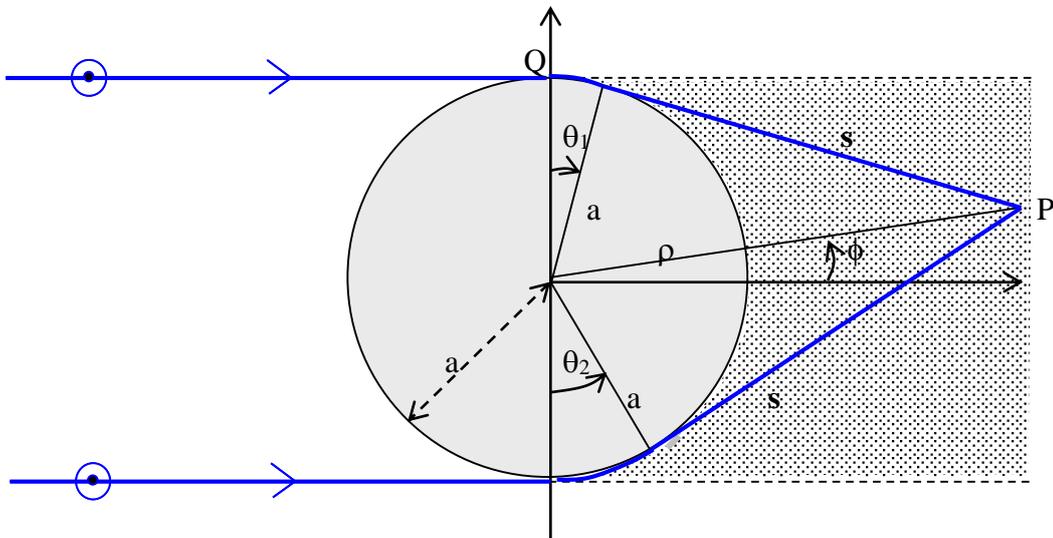


Figure X-10 : Trajectoire des rayons qui parviennent à un point d'observation situé dans la zone d'ombre.

L'examen des relations (X-37,38) montre que tout se passe comme si le rayon supérieur « rampait » sur la surface du cylindre sur la distance $a\theta_1$ (terme de propagation $e^{-jka\theta_1}$) avant d'être éjecté sous la forme d'une onde cylindrique (terme $\frac{e^{-jks}}{\sqrt{8\pi jks}}$) se propageant sur la distance s jusqu'au point d'observation, avec une amplitude donnée par le terme $-4M\sqrt{\pi}\hat{q}(M\theta_1)$

Le rayon inférieur subit une transformation analogue.

Le champ total dans la zone d'ombre est donc constitué par la somme des contributions des deux rayons rampants issus des points de tangence supérieur et inférieur.

III – Solution asymptotique en termes de fonctions de FOCK modifiées

La divergence de la partie réelle de la fonction de PEKERIS au voisinage de $x = 0$ est asymptote à la fonction :

$$-\frac{1}{2x\sqrt{\pi}} \quad (\text{X-39})$$

si bien qu'en retranchant ce terme à la fonction de PEKERIS, on obtient une nouvelle fonction définie et continue au voisinage de 0 que nous désignerons par fonction de FOCK :

III-1 Les fonctions de FOCK

Elles sont définies à partir des fonctions de PEKERIS par les relations :

$$p(x) = \hat{p}(x) + \frac{1}{2x\sqrt{\pi}} \quad (\text{X-40})$$

$$q(x) = \hat{q}(x) + \frac{1}{2x\sqrt{\pi}} \quad (\text{X-41})$$

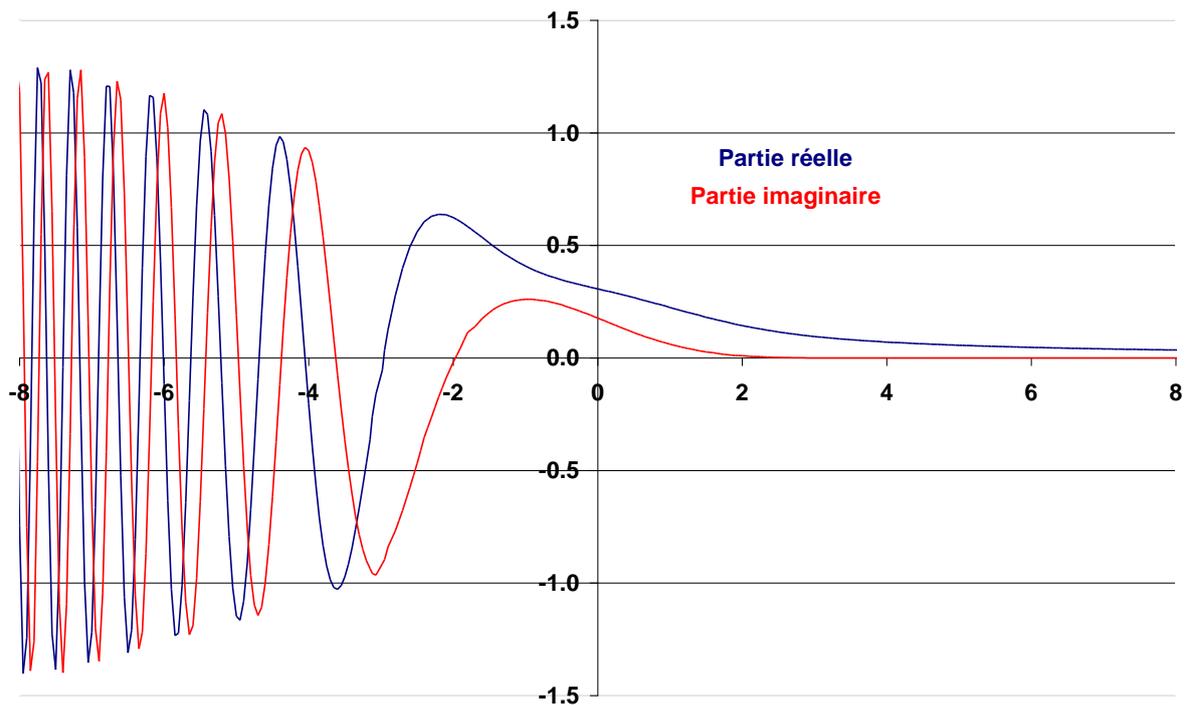


Figure X-11 : représentation de la partie réelle et imaginaire de la fonction de FOCK $p(x)$

Elles sont définies au voisinage de 0 où elles prennent la valeur :

$$p(0) = 0.354 \exp\left(j \frac{\pi}{6}\right) = 0.309 + j1.785 \quad (\text{X-42})$$

$$q(0) = -0.307 \exp\left(j \frac{\pi}{6}\right) = -(0.265 + j1.53) \quad (\text{X-43})$$

Leur courbe représentative en fonction réelle et imaginaire sont données figure X-11 et X-12.

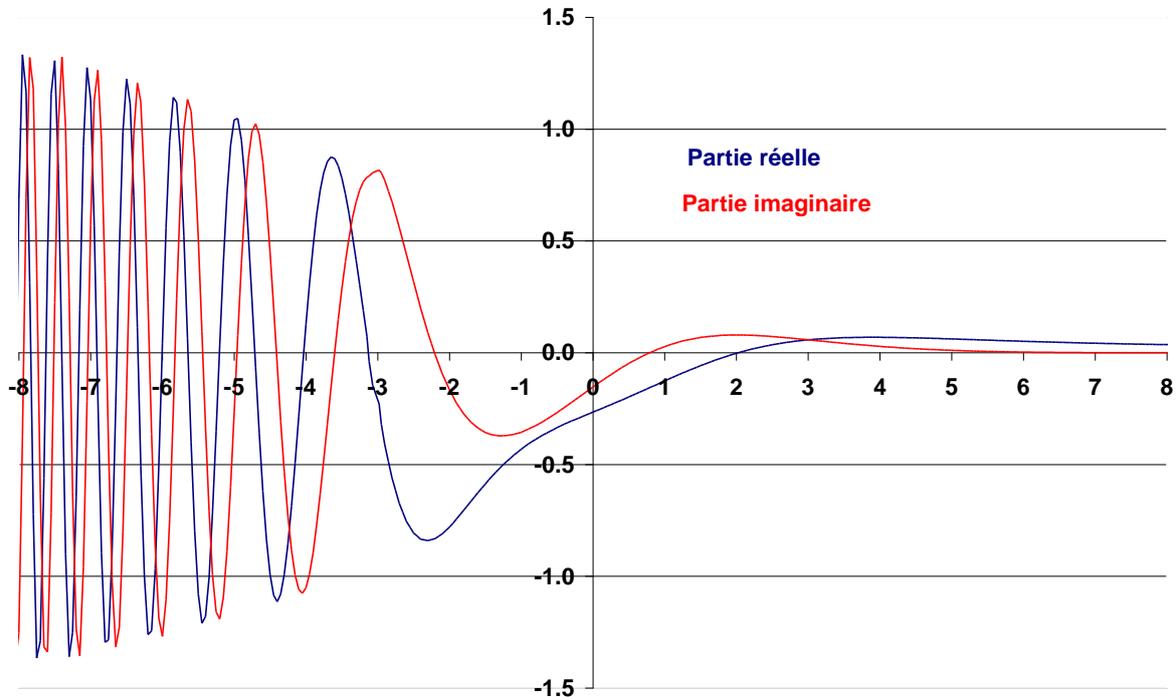


Figure X-12 : représentation de la partie réelle et imaginaire de la fonction de FOCK $q(x)$

III-2 Formulation d'une solution uniforme en termes de fonctions de FOCK

Il semble que la première formulation de ce type ait été élaborée par WAIT et CONDA en 1959. Elle est reprise en détail par JAMES.

Elle consiste à remarquer que la divergence qui apparaît au voisinage du pôle est analogue à la divergence qui apparaît dans les évaluations asymptotiques classiques au voisinage d'un pôle.

Les fonctions de PEKERIS s'expriment à l'aide des fonctions de FOCK qui sont définies et continuent en 0 :

$$\hat{p}(x) = p(x) - \frac{1}{2x\sqrt{\pi}} \quad \hat{q}(x) = q(x) - \frac{1}{2x\sqrt{\pi}} \quad (\text{X-44})$$

$$p(0) = 0.354 \exp\left(j \frac{\pi}{6}\right) \quad q(0) = -0.307 \exp\left(j \frac{\pi}{6}\right) \quad (\text{X-45})$$

Le champ diffracté doit être discontinu à la frontière ombre-lumière pour assurer la continuité du champ total. Puisque les fonctions p et q sont continues en 0, on peut penser que la discontinuité doit être introduite par le terme divergent de (X-40,41).

Or la fonction de FRESNEL modifiée décrit précisément ce comportement à une constante multiplicative près (\sqrt{j}) :

$$K_{-}(x) \approx \frac{1}{2x\sqrt{j\pi}} \quad K_{-}(0) = 1/2 \quad (X-46)$$

Sur la frontière ombre lumière, le champ diffracté doit être de la forme :

$$E_{s,d} = \mp \frac{1}{2} E^i + \text{termes en } p(0) \text{ et termes en } \theta_2 \quad (X-47)$$

$$H_{s,d} = \mp \frac{1}{2} H^i + \text{termes en } q(0) \text{ et termes en } \theta_2 \quad (X-48)$$

le signe moins s'appliquant à la zone illuminée, le signe plus à la zone d'ombre.

Dès lors, en ajustant convenablement le paramètre de la fonction de FRESNEL par un facteur multiplicatif α , on peut construire, à partir des fonctions de FOCK, une fonction qui présente la discontinuité attendue en 0, et qui se réduit aux fonctions de PEKERIS lorsqu'on s'éloigne de cette frontière.

$$\tilde{p}(\alpha, x) = p(x) - \alpha \sqrt{j} \operatorname{sgn}(x) K_{-}(\alpha|x|) = p(x) - \alpha \sqrt{j} \tilde{K}_{-}(\alpha|x|) \quad (X-49)$$

$$\tilde{q}(\alpha, x) = q(x) - \alpha \sqrt{j} \operatorname{sgn}(x) K_{-}(\alpha|x|) = q(x) - \alpha \sqrt{j} \tilde{K}_{-}(\alpha|x|) \quad (X-50)$$

Ces nouvelles fonctions seront désignées par fonctions de FOCK modifiées.

Elles sont asymptotes aux fonctions de PEKERIS lorsque l'argument x tend vers l'infini, et au voisinage de cette limite on a :

$$\tilde{p}(\alpha, x) \approx p(x) - \frac{1}{2x\sqrt{\pi}} = \hat{p}(x) \quad \tilde{q}(\alpha, x) \approx q(x) - \frac{1}{2x\sqrt{\pi}} = \hat{q}(x) \quad (X-51)$$

α est un réel positif qui permet d'ajuster les fonctions (X-49,50) aux évaluations asymptotiques (X-37,38) :

$$\alpha = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{ks}{2}} \quad (X-52)$$

La formulation uniforme du champ diffracté est alors déduite directement des formulations asymptotiques (X-37,38), en remplaçant les fonctions de PEKERIS (avec un \wedge) par les fonctions de FOCK modifiées (avec un \sim) :

En polarisation électrique :

$$E_{s,d} = -4 M \sqrt{\pi} \left\{ e^{-jk\alpha\theta_1} \tilde{p}(M\theta_1) + e^{-jk\alpha\theta_2} \tilde{p}(M\theta_2) \right\} \frac{e^{-jks}}{\sqrt{8\pi jks}} \quad (X-53)$$

En polarisation magnétique :

$$H_{s,d} = -4 M\sqrt{\pi} \left\{ e^{-jka\theta_1} \tilde{q}(M\theta_1) + e^{-jka\theta_2} \tilde{q}(M\theta_2) \right\} \frac{e^{-jks}}{\sqrt{8\pi jks}} \quad (\text{X-54})$$

Le raisonnement qui a conduit à cette formulation comporte des parties heuristiques, et il est nécessaire de vérifier numériquement le comportement asymptotique de ces relations.

Cette dernière relation (X-53,54) ne converge pas vers la solution exacte dans la zone d'illumination profonde.

Nous verrons au prochain chapitre, dans le cadre plus général, comment construire une solution uniforme qui converge à la fois dans la zone d'ombre et dans la zone illuminée.

IV – Solution asymptotique : formulation de PATHAK

Il n'y a pas une manière unique de formuler une évaluation asymptotique, il y en a même une infinité comme il est montré à la rubrique des théories avancées.

Le choix de PATHAK consiste à élaborer une solution qui converge vers la solution de l'optique géométrique dans la zone illuminée, vers les fonctions de PEKERIS dans la zone d'ombre, et qui soit uniforme sur la frontière ombre lumière, c'est à dire qui assure la continuité du champ total dans cette région. Cette continuité est assurée de manière empirique par les paramètres introduits dans la fonction de FRESNEL.

La liberté de choix de l'argument de la fonction de FRESNEL permet une telle solution, sous réserve de présenter deux formulations, une pour la zone illuminée et une pour la zone d'ombre.

La formulation de PATHAK pour la zone d'ombre est identique à la formulation en termes de fonctions de FOCK modifiées. Pour la zone illuminée, il change de formulation, ce qui permet d'effectuer une transition douce vers l'optique géométrique.

PATHAK utilise une forme légèrement différente de l'intégrale de FRESNEL, qu'il note F et qui est définie de la manière suivante :

$$F(x) = 2j\sqrt{x} e^{jx} \int_{\sqrt{x}}^{\infty} e^{-jt^2} dt \quad (\text{X-55})$$

Elle est reliée à la fonction K_- , habituellement utilisée dans les chapitres précédents, par la relation :

$$F(x^2) = \sqrt{4\pi j} x \tilde{K}_-(x) \quad (\text{X-56})$$

Elle présente le comportement suivant :

- lorsque son argument x tend vers l'infini, sa partie réelle tend vers 1 et sa partie imaginaire vers 0.

- lorsque son argument tend vers 0, les parties réelle et imaginaire tendent vers 0, avec un argument qui tend vers $\pi/4$.

Ces propriétés sont utilisées par PATHAK pour commuter de manière lisse d'une solution dans une région de l'espace, à une autre forme de solution dans une autre région de l'espace.

Dans le cas simplifié du cylindre illuminé par une onde plane, la formulation asymptotique de PATHAK se présente sous la forme suivante, qui utilise les notations de la figure (X-2) pour la zone illuminée, et celles de la figure (X-10) pour la zone d'ombre :

IV.1 - Dans la zone illuminée (Figure X-2) :

$$U(P) = U^i(P) + U^i(Q) R_{e,m} \sqrt{\frac{\rho^r}{\rho^r + s^s}} e^{-jks^r} \quad (X-57)$$

ρ^r désigne le rayon de courbure du front d'onde du faisceau réfléchi, qui s'exprime en fonction du rayon du cylindre a , dans le cas d'une incidence en onde plane :

$$\rho^r = \frac{a \cos \alpha^i}{2} \quad (X-58)$$

Le coefficient R est indicé par la lettre e pour une incidence en polarisation électrique, par la lettre m pour une incidence en polarisation magnétique.

$$R_e = -\sqrt{\frac{-4}{\zeta^r}} e^{-j\left(\frac{(\zeta^r)^3}{12} + \frac{\pi}{4}\right)} \left\{ \frac{[1 - F(X^r)]}{2\zeta^r \sqrt{\pi}} + \hat{p}(\zeta^r) \right\} \quad (X-60)$$

$$R_m = -\sqrt{\frac{-4}{\zeta^r}} e^{-j\left(\frac{(\zeta^r)^3}{12} + \frac{\pi}{4}\right)} \left\{ \frac{[1 - F(X^r)]}{2\zeta^r \sqrt{\pi}} + \hat{q}(\zeta^r) \right\} \quad (X-61)$$

$$\zeta^r = -2M \cos \alpha^i \quad M = \left(\frac{ka}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad X^r = 2ks^r \cos^2 \alpha^i \quad (X-62)$$

- Dans la zone d'illumination profonde :

X^r prend des valeurs importantes, et donc $F(X^r)$ tend vers 1.

α^i s'approche de 0, $\cos(\alpha^i)$ prend une valeur proche de 1 et ζ^r prend donc une valeur négative, que l'on suppose suffisante pour que l'on puisse utiliser la forme asymptotique des fonctions de PEKERIS :

$$\hat{p}(x) \approx \frac{\sqrt{-x}}{2} \exp\left\{j\left(\frac{x^3}{12} + \frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad x \rightarrow -\infty \quad (X-63)$$

$$\hat{q}(x) \approx -\frac{\sqrt{-x}}{2} \exp\left\{j\left(\frac{x^3}{12} + \frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad x \rightarrow -\infty \quad (X-64)$$

Dans ces conditions, les coefficients R_e et R_m tendent respectivement vers -1 et 1 , et la relation (X-57) se réduit à la formulation du champ réfléchi de l'optique géométrique.

- Au voisinage de la frontière ombre-lumière, côté zone illuminée :

α^i tend vers $\pi/2$, $\cos(\alpha^i)$, ζ^r , X^r , et donc $F(X^r)$ tendent vers 0.

On retrouve les fonctions de FOCK p et q , plus un terme indéterminé en $0/0$, dans les termes entre accolades (X-60,61) ; et les coefficients R_e et R_m se réduisent à :

$$R_e = -\sqrt{\frac{-4}{\zeta^r}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \left\{ p(0) - \frac{F(X^r)}{2\zeta^r\sqrt{\pi}} \right\} \quad (X-65)$$

$$R_m = -\sqrt{\frac{-4}{\zeta^r}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \left\{ q(0) - \frac{F(X^r)}{2\zeta^r\sqrt{\pi}} \right\} \quad (X-66)$$

Le champ total (X-57) est rappelé pour mémoire :

$$U(P) = U^i(P) + U^i(Q) R_{e,m} \sqrt{\frac{\rho^r}{\rho^r + s^r}} e^{-jks^r} \quad (X-67)$$

Au voisinage de la frontière ombre-lumière, outre les relations (X-65) et (X-66), on a également :

$$U^i(P) = e^{-jks^r} \quad U^i(Q) = 1 \quad (X-68)$$

$$\theta^i \approx \alpha^i \approx \frac{\pi}{2} \quad \rho^r = \frac{a \cos \alpha^i}{2} \approx 0 \quad \zeta^r = -2M \cos \alpha^i \approx 0 \quad (X-69)$$

On en déduit que sur cette frontière, le champ total prend la valeur :

$$U(P) = e^{-jks^r} - \sqrt{\frac{-4}{-2M \cos(\pi/2)}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \left\{ p(0) - \frac{F(X^r)}{2\zeta^r\sqrt{\pi}} \right\} \sqrt{\frac{a \cos(\pi/2)}{2s^r}} e^{-jks^r} \quad (X-70)$$

La divergence en $\cos(\pi/2)$ est compensée, et on obtient sur la frontière ombre-lumière, en polarisation électrique :

$$U(P) = e^{-jks^r} - \sqrt{\frac{a}{Ms^r}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \left\{ p(0) - \frac{F(X^r)}{2\zeta^r\sqrt{\pi}} \right\} e^{-jks^r} = e^{-jks^r} \left(1 - M \sqrt{\frac{2}{jks^r}} \left\{ p(0) - \frac{F(X^r)}{2\zeta^r\sqrt{\pi}} \right\} \right) \quad (X-71)$$

L'indétermination en $0/0$ peut être levée en notant qu'au voisinage de 0 :

$$F(x) \approx \sqrt{j\pi x} e^{ix} \quad (X-72)$$

et donc :

$$\frac{F(X^r)}{2\zeta^r\sqrt{\pi}} \approx \frac{\sqrt{j\pi 2ks^r \cos^2(\pi/2)} e^{j2ks^r \cos^2(\pi/2)}}{2(-2M \cos(\pi/2))\sqrt{\pi}} \approx \frac{\sqrt{j2ks^r}}{-4M} \quad (X-73)$$

soit pour conclure, l'expression du champ total sur la frontière ombre-lumière, en polarisation électrique :

$$U(P) = e^{-jks^r} \left(\frac{1}{2} - M \sqrt{\frac{2}{jks^r}} p(0) \right) \quad (X-74)$$

IV.2 - Dans la zone d'ombre (Figure X-10) :

Le champ dans la zone d'ombre, du seulement à la diffraction par la partie supérieure du cylindre, s'exprime sous la forme :

$$U(P) = U^i(Q) T_{e,m} \frac{e^{-jks}}{\sqrt{s}} \quad (X-75)$$

$$T_e = -M \sqrt{\frac{2}{jk}} e^{-jka\theta_1} \left\{ \frac{[1 - F(X^d)]}{2\zeta^d \sqrt{\pi}} + \hat{p}(\zeta^d) \right\} \quad (X-76)$$

$$T_m = -M \sqrt{\frac{2}{jk}} e^{-jka\theta_1} \left\{ \frac{[1 - F(X^d)]}{2\zeta^d \sqrt{\pi}} + \hat{q}(\zeta^d) \right\} \quad (X-77)$$

$$\zeta^d = M\theta_1 \quad M = \left(\frac{ka}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad X^d = \frac{ks(\theta_1)^2}{2} \quad (X-78)$$

- Dans la zone d'ombre profonde :

X^d prend des valeurs importantes, et donc $F(X^d)$ tend vers 1. De plus $U^i(Q) = 1$.

On obtient en polarisation électrique :

$$U(P) = -M \sqrt{\frac{2}{jk}} e^{-jka\theta_1} \hat{p}(M\theta_1) \frac{e^{-jks}}{\sqrt{s}} = -4M\sqrt{\pi} e^{-jka\theta_1} \hat{p}(M\theta_1) \frac{e^{-jks}}{\sqrt{8\pi jks}} \quad (X-79)$$

et en polarisation magnétique :

$$U(P) = -M \sqrt{\frac{2}{jk}} e^{-jka\theta_1} \hat{p}(M\theta_1) \frac{e^{-jks}}{\sqrt{s}} = -4M\sqrt{\pi} e^{-jka\theta_1} \hat{p}(M\theta_1) \frac{e^{-jks}}{\sqrt{8\pi jks}} \quad (X-80)$$

soit donc exactement les formulations relatives aux fonctions de PEKERIS obtenues en (X-35) et (X-36) dont on sait qu'elles convergent vers la solution exacte dans la zone d'ombre.

Dans le cas du cylindre, les contributions supérieures et inférieures devront être prises en compte pour un calcul correct du champ dans la zone d'ombre profonde.

- Sur la frontière ombre-lumière, côté zone d'ombre :

θ_1 , X^d et ζ^d tendent vers 0. $F(X^d)$ tend vers 0, et on retrouve entre les accolades les fonctions de FOCK et un terme indéterminé en 0/0 :

$$U(P) = -M \sqrt{\frac{2}{jk}} \left\{ p(0) - \frac{F(X^d)}{2\zeta^d \sqrt{\pi}} \right\} \frac{e^{-jks}}{\sqrt{s}} \quad (X-81)$$

Comme au paragraphe précédent, l'indétermination en 0/0 peut être levée en notant qu'au voisinage de 0 :

$$F(x) \approx \sqrt{j\pi x} e^{jx} \quad (X-83)$$

et donc :

$$\frac{F(X^d)}{2\zeta^d \sqrt{\pi}} \approx \frac{\sqrt{j\pi \frac{ks(\zeta^d)^2}{2M^2}} e^{j \frac{ks(\zeta^d)^2}{2M^2}}}{2\zeta^d \sqrt{\pi}} \approx \frac{\sqrt{jks}}{2M\sqrt{2}} \quad (X-84)$$

soit pour conclure, l'expression du champ total sur la frontière ombre-lumière, côté ombre, en polarisation électrique :

$$U(P) = e^{-jks} \left(\frac{1}{2} - M \sqrt{\frac{2}{jks}} p(0) \right) \quad (X-85)$$

Cette expression est identique à celle qui a été obtenue sur la frontière, côté lumière (X-74), ce qui assure la continuité du champ total à la traversée de cette frontière.

On peut noter également que cette valeur du champ sur la frontière est identique à celle obtenue de manière plus immédiate à partir de la formulation de JAMES (X-53,54).

V – Comparaisons numériques des différentes formulations

Les comparaisons numériques prennent en compte, pour les formulations asymptotiques, les rayons diffractés par la partie supérieure et inférieure du cylindre.

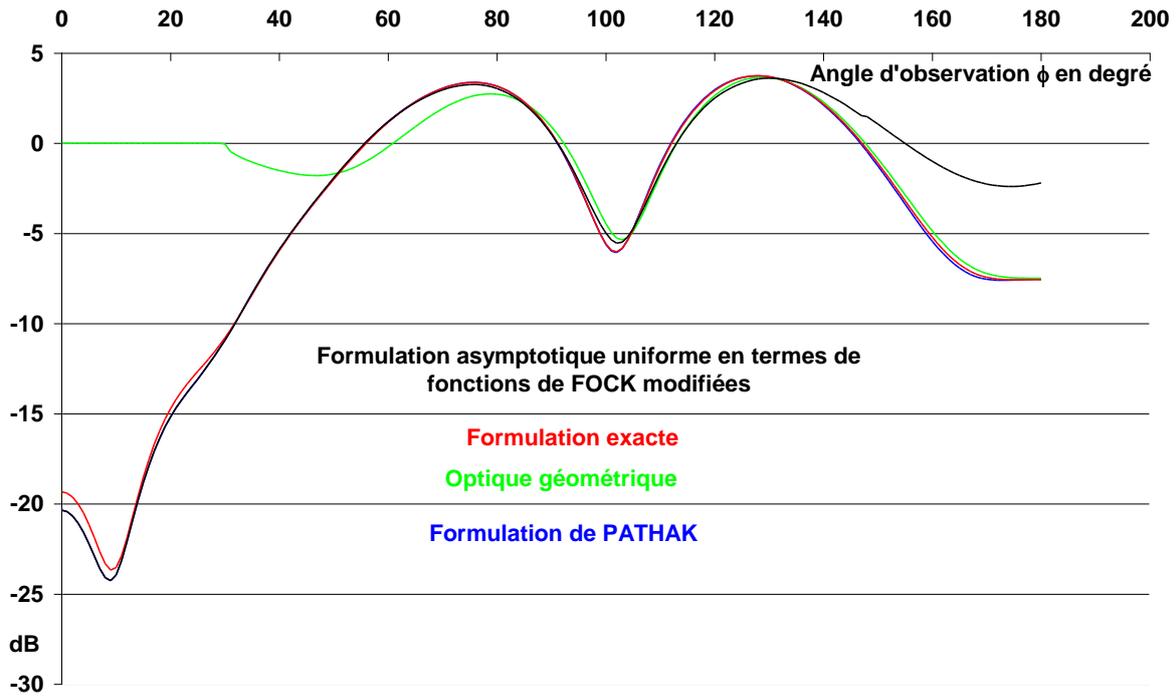


Figure X-13 : Comparaison de la formulation asymptotique (X-53), de la solution donnée par l'optique géométrique (X-15), de la formulation exacte (X-7) et de la formulation de PATHAK (X-57,75) pour $a = \lambda$, $\rho = 2 \lambda$, polarisation électrique.

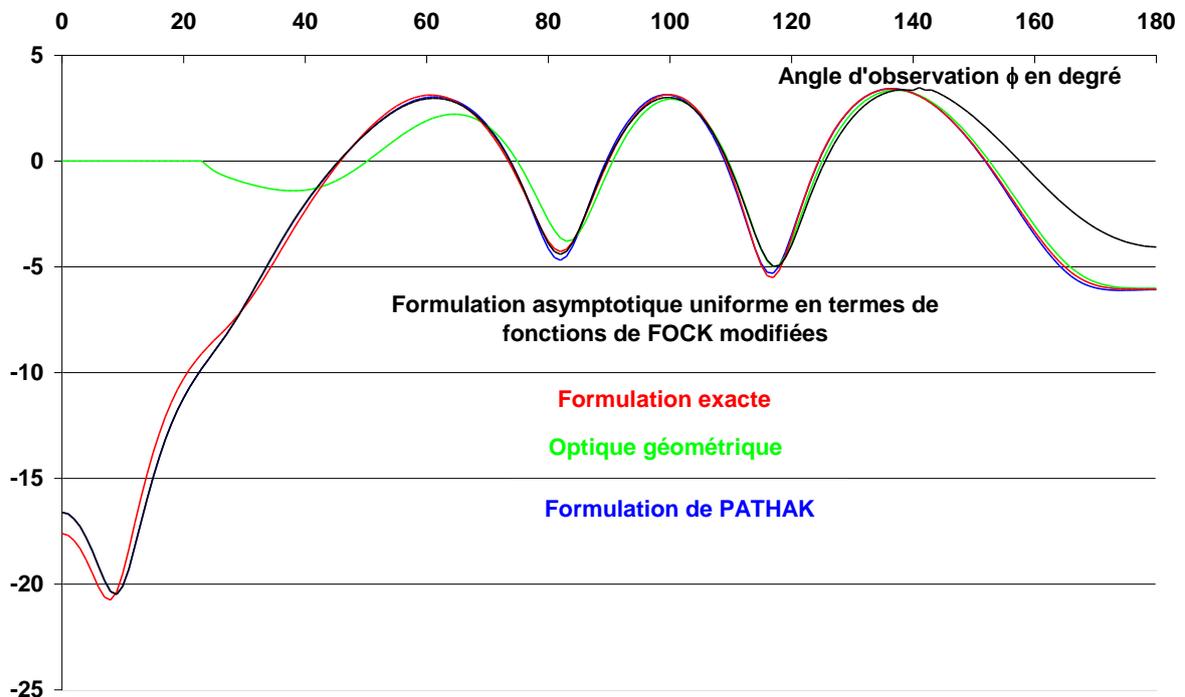


Figure X-14 : Comparaison de la formulation asymptotique (X-53), de la solution donnée par l'optique géométrique (X-15), de la formulation exacte (X-7) et de la formulation de PATHAK (X-57,75) pour $a = \lambda$, $\rho = 2.5 \lambda$, polarisation électrique.

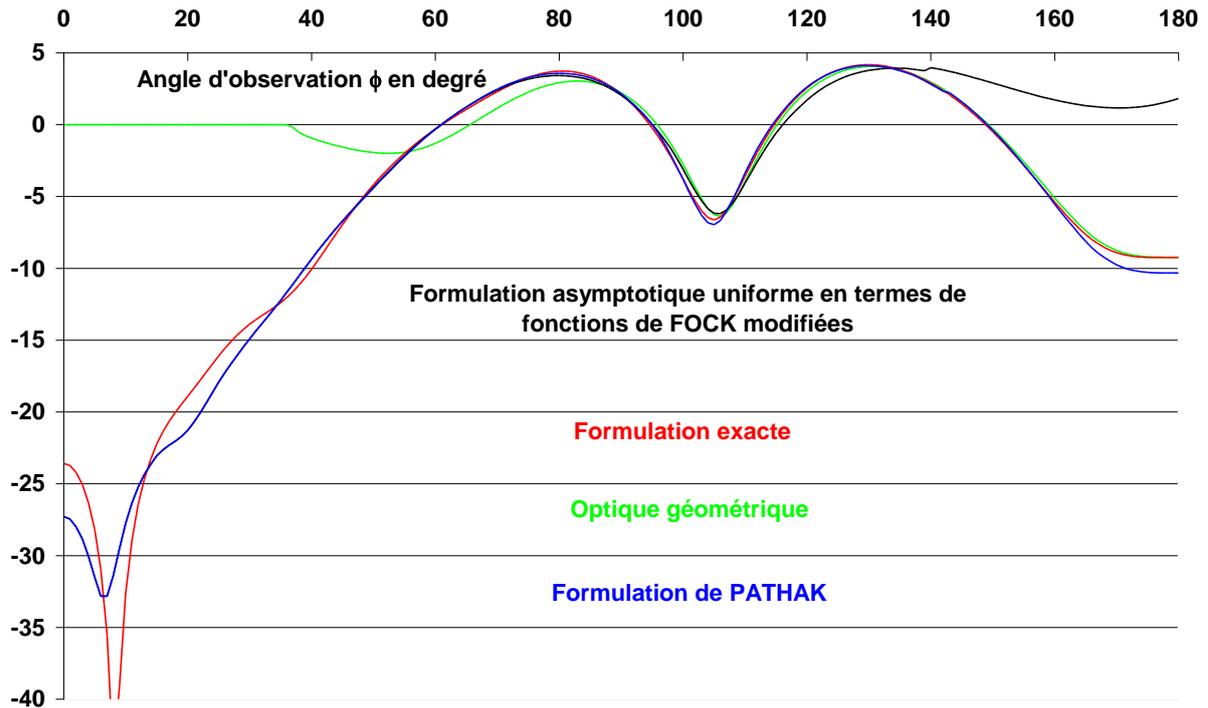


Figure X-15 : Comparaison de la formulation asymptotique (X-53), de la solution donnée par l'optique géométrique (X-15), de la formulation exacte (X-7) et de la formulation de PATHAK (X-57,75) pour $a = 1.5 \lambda$, $\rho = 2.5 \lambda$, polarisation électrique.

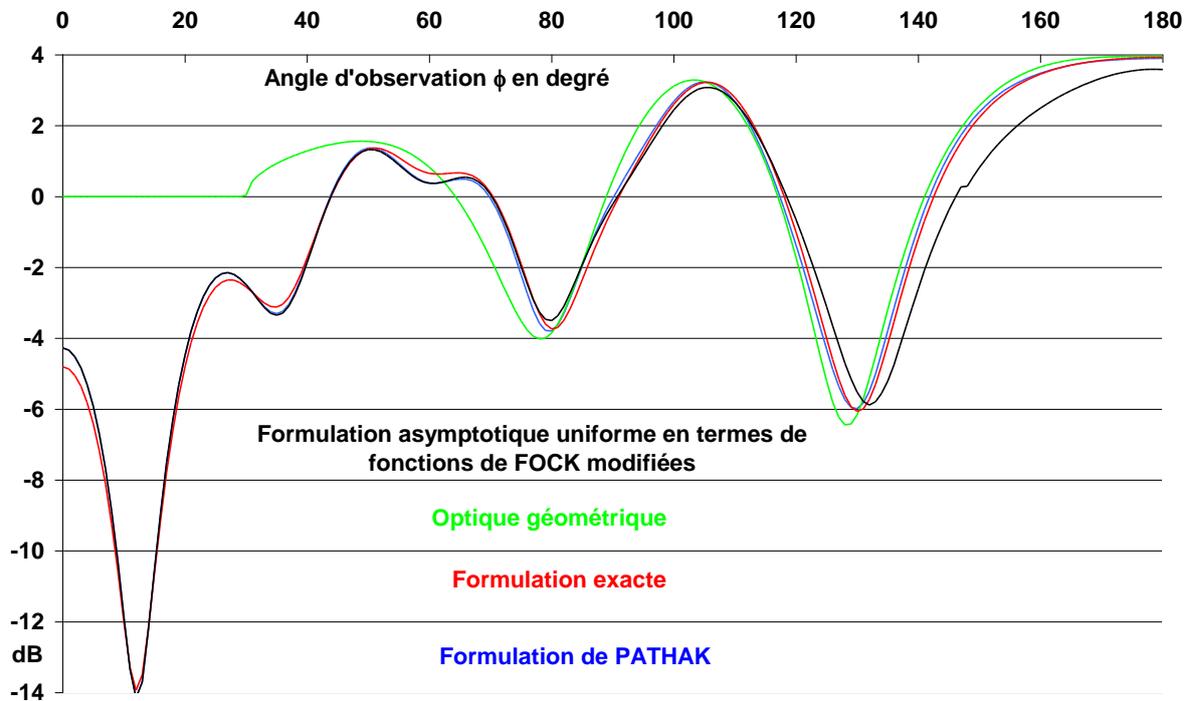


Figure X-16 : Comparaison de la formulation asymptotique (X-54), de la solution donnée par l'optique géométrique (X-15), de la formulation exacte (X-9) et de la formulation de PATHAK (X-57,75) pour $a = \lambda$, $\rho = 2 \lambda$, polarisation magnétique.

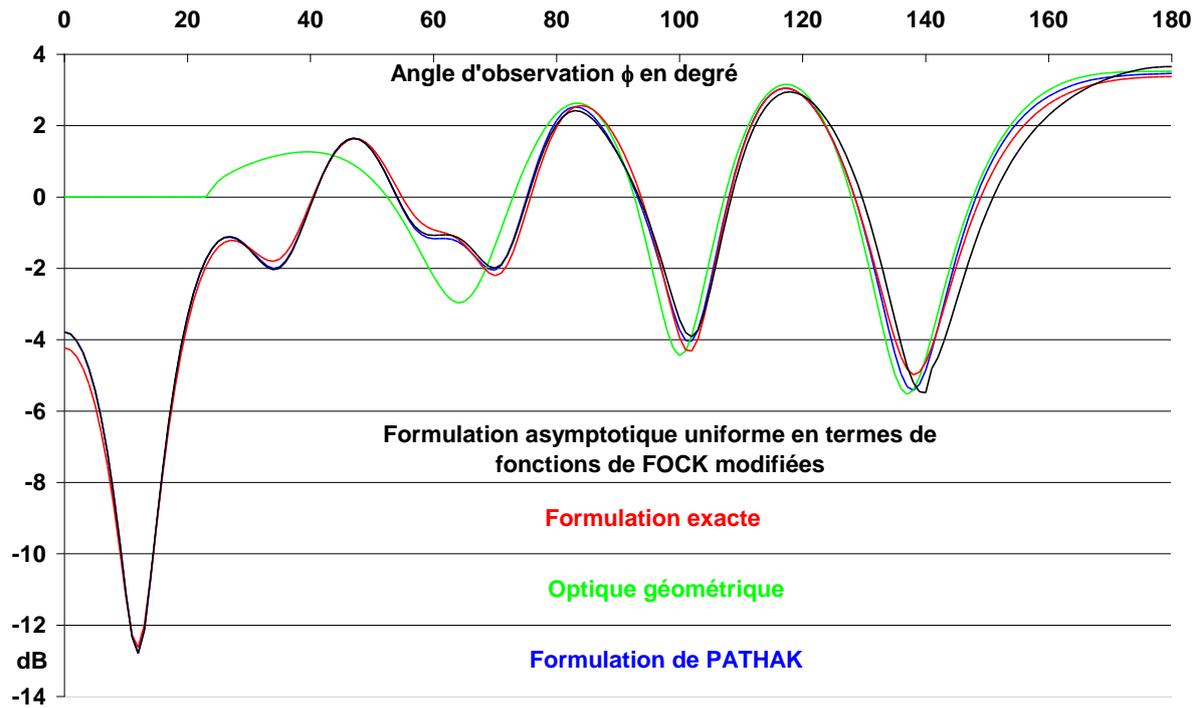


Figure X-17 : Comparaison de la formulation asymptotique (X-54), de la solution donnée par l'optique géométrique (X-15), de la formulation exacte (X-9) et de la formulation de PATHAK (X-57,75) pour $a = \lambda$, $\rho = 2.5 \lambda$, polarisation magnétique.

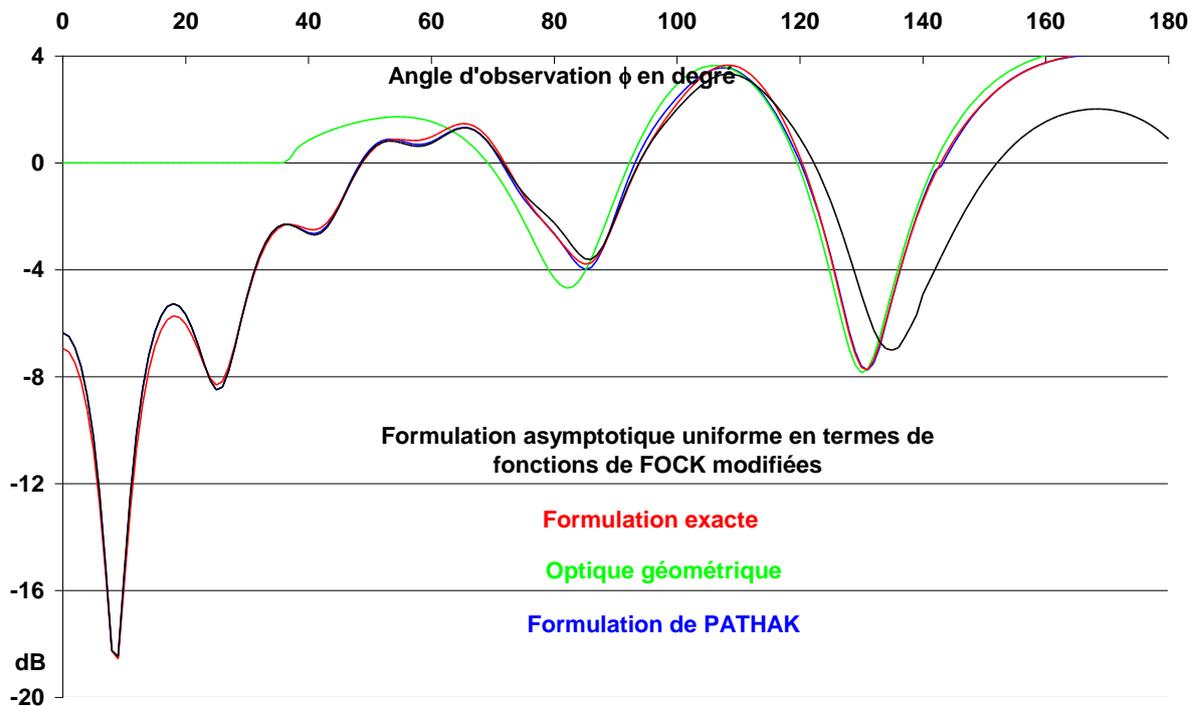


Figure X-18 : Comparaison de la formulation asymptotique (X-54), de la solution donnée par l'optique géométrique (X-15), de la formulation exacte (X-9) et de la formulation de PATHAK (X-57,75) pour $a = 1.5 \lambda$, $\rho = 2.5 \lambda$, polarisation magnétique.

Les comparaisons avec la formulation exacte sont proposées pour des valeurs du rayon du cylindre et du point d'observation inférieures à 2.5λ , car au-delà, la convergence numériques de la solution exacte sous forme de série de fonctions de HANKEL est difficile à assurer. Il est clair que nous sommes loin des conditions asymptotiques, mais cela permet justement de mettre en relief l'accord ou le désaccord entre les deux formulations.

Commentaires sur la formulation de JAMES :

Sur les comparaisons avec la formulation exactes des figures (X-13,14,15,16,17,18) on peut faire essentiellement deux constatations, valides à la fois en polarisation électrique et en polarisation magnétique :

- La formulation asymptotique est parfaitement uniforme sur la frontière ombre lumière. Elle converge vers la solution exacte dans la zone d'ombre et assez largement lorsque l'on pénètre dans la zone illuminée (disons jusqu'à un angle d'observation $\phi = 90^\circ$, pour fixer les idées).

- La formulation asymptotique ne converge pas vers la solution exacte dans la zone d'illumination profonde, c'est à dire lorsque l'angle d'observation ϕ s'approche de 180° . Dans cette région, la convergence vers la solution exacte doit être assuré en reprenant le formalisme de l'optique géométrique.

Puisque la formulation asymptotique uniforme ne converge pas vers la solution correcte dans la zone d'illumination profonde, JAMES propose de commuter vers l'optique géométrique dans cette zone.

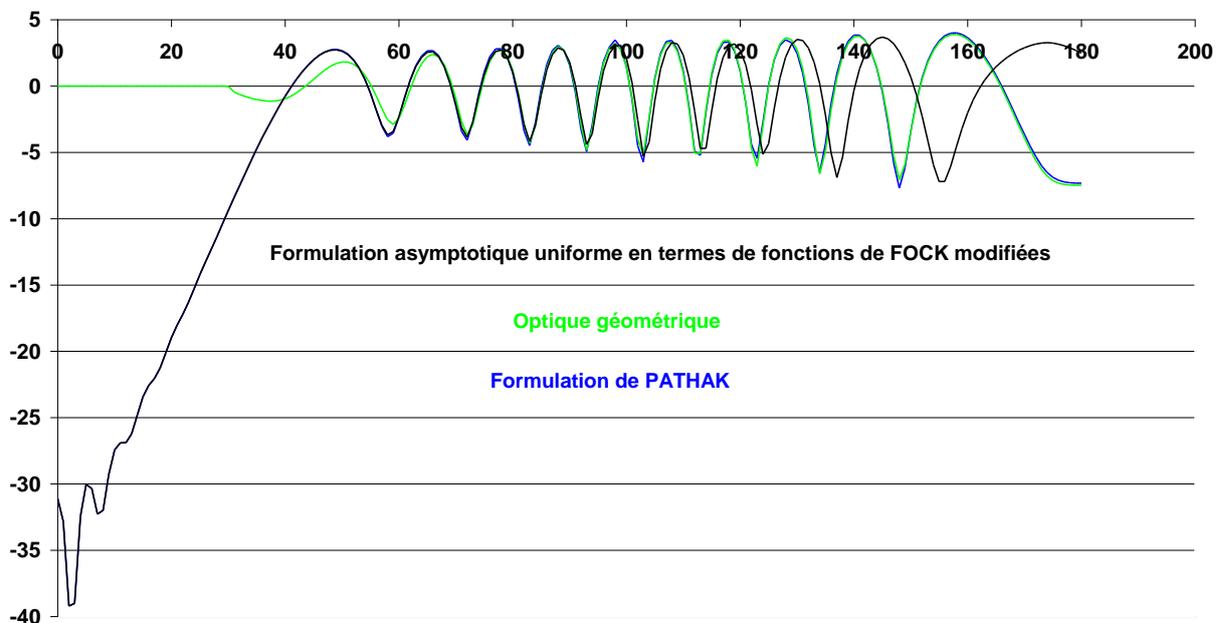


Figure X-19 : Comparaison de la formulation asymptotique (X-53), de la solution donnée par l'optique géométrique (X-15), de la formulation exacte (X-7) et de la formulation de PATHAK (X-57,75) pour $a = 5 \lambda$, $\rho = 10 \lambda$, polarisation électrique.

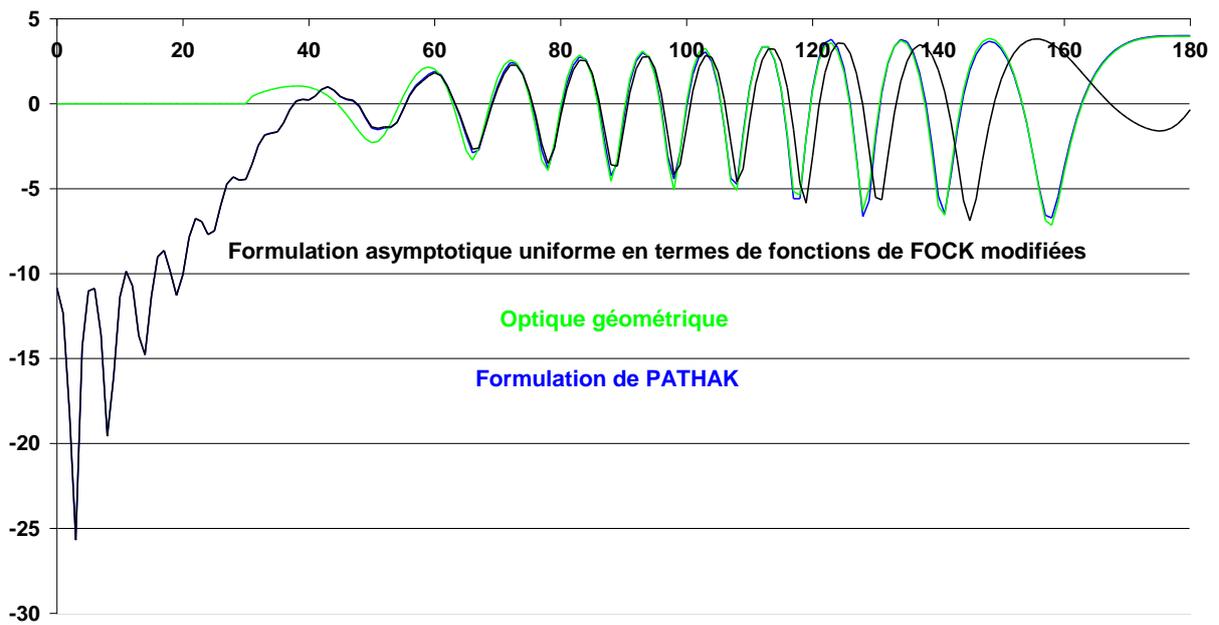


Figure X-20 : Comparaison de la formulation asymptotique (X-54), de la solution donnée par l'optique géométrique (X-15), de la formulation exacte (X-9) et de la formulation de PATHAK (X-57,75) pour $a = 5 \lambda$, $\rho = 10 \lambda$, polarisation magnétique.

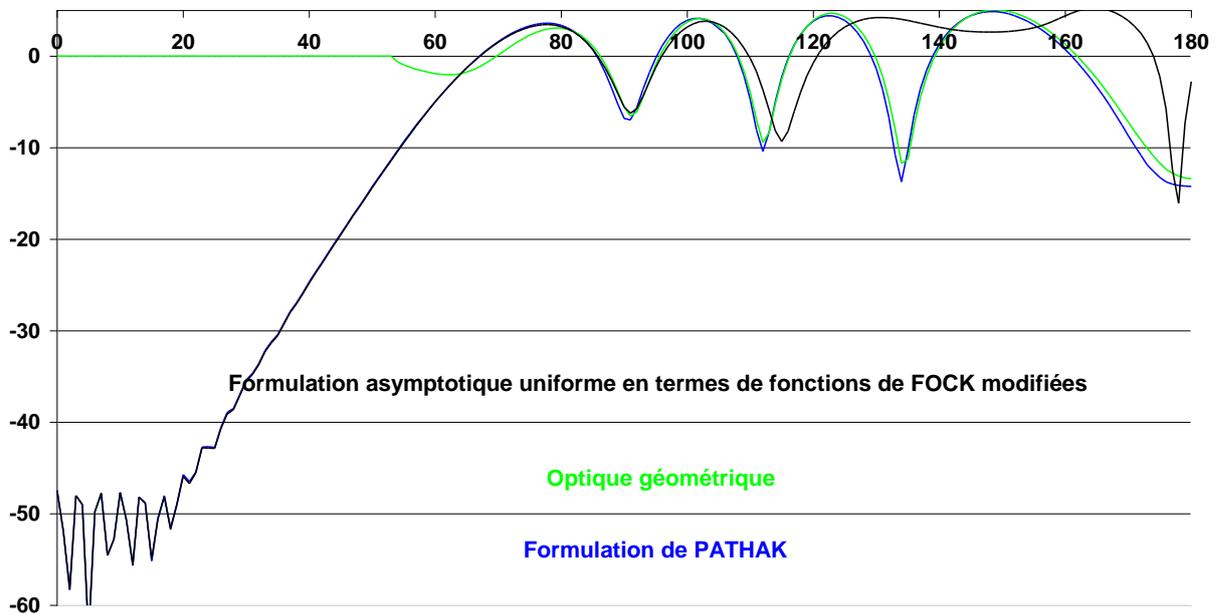


Figure X-21 : Comparaison de la formulation asymptotique (X-53), de la solution donnée par l'optique géométrique (X-15), de la formulation exacte (X-7) et de la formulation de PATHAK (X-57,75) pour $a = 8 \lambda$, $\rho = 10 \lambda$, polarisation électrique.

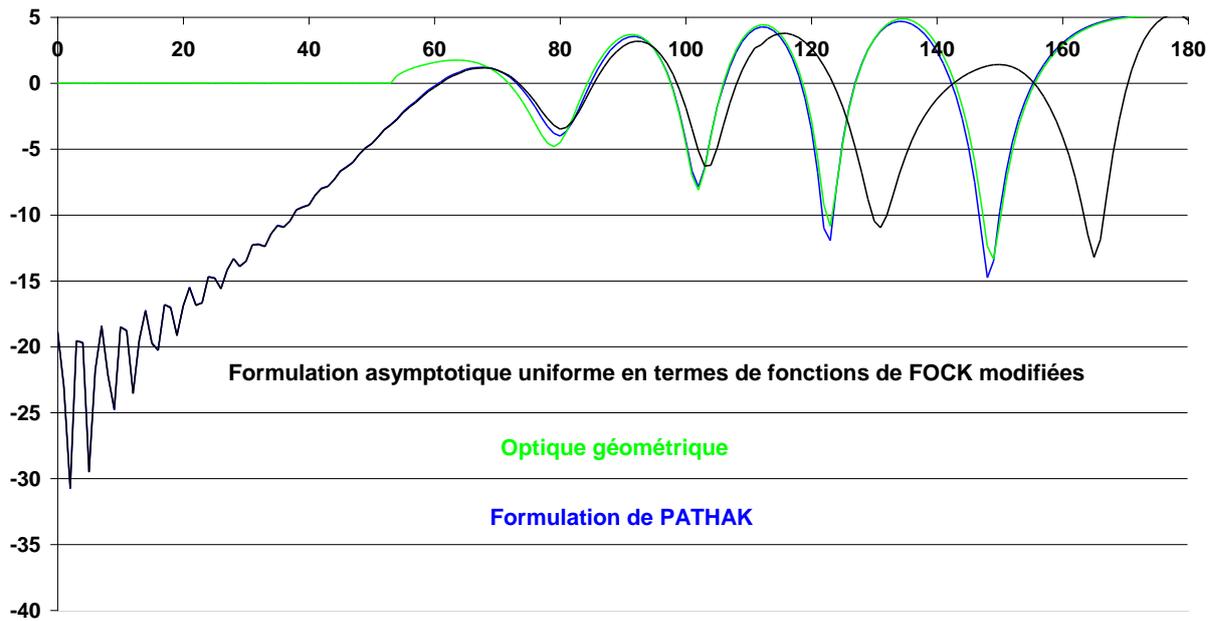


Figure X-22 : Comparaison de la formulation asymptotique (X-54), de la solution donnée par l'optique géométrique (X-15), de la formulation exacte (X-9) et de la formulation de PATHAK (X-57,75) pour $a = 8 \lambda$, $\rho = 10 \lambda$, polarisation magnétique.

Commentaires sur la formulation de PATHAK :

Elle donne des résultats identiques à la formulation de JAMES dans la zone d'ombre, mais elle présente l'avantage de converger vers la formulation de l'optique géométrique dans la zone d'illumination profonde.

Dans la zone d'ombre, la formulation de PATHAK (X-76,77) est rigoureusement identique à la formulation de JAMES (X-53,54) (Voir chapitre suivant), ce qui rend les deux courbes indiscernables dans cette région.

XI - Diffraction d'une onde cylindrique par un cylindre parfaitement conducteur

Il est encore possible de donner une formulation exacte à la diffraction d'une onde cylindrique par un cylindre parfaitement conducteur, en suivant une procédure analogue à celle qui a été décrite pour une onde plane (Figure XI-1).

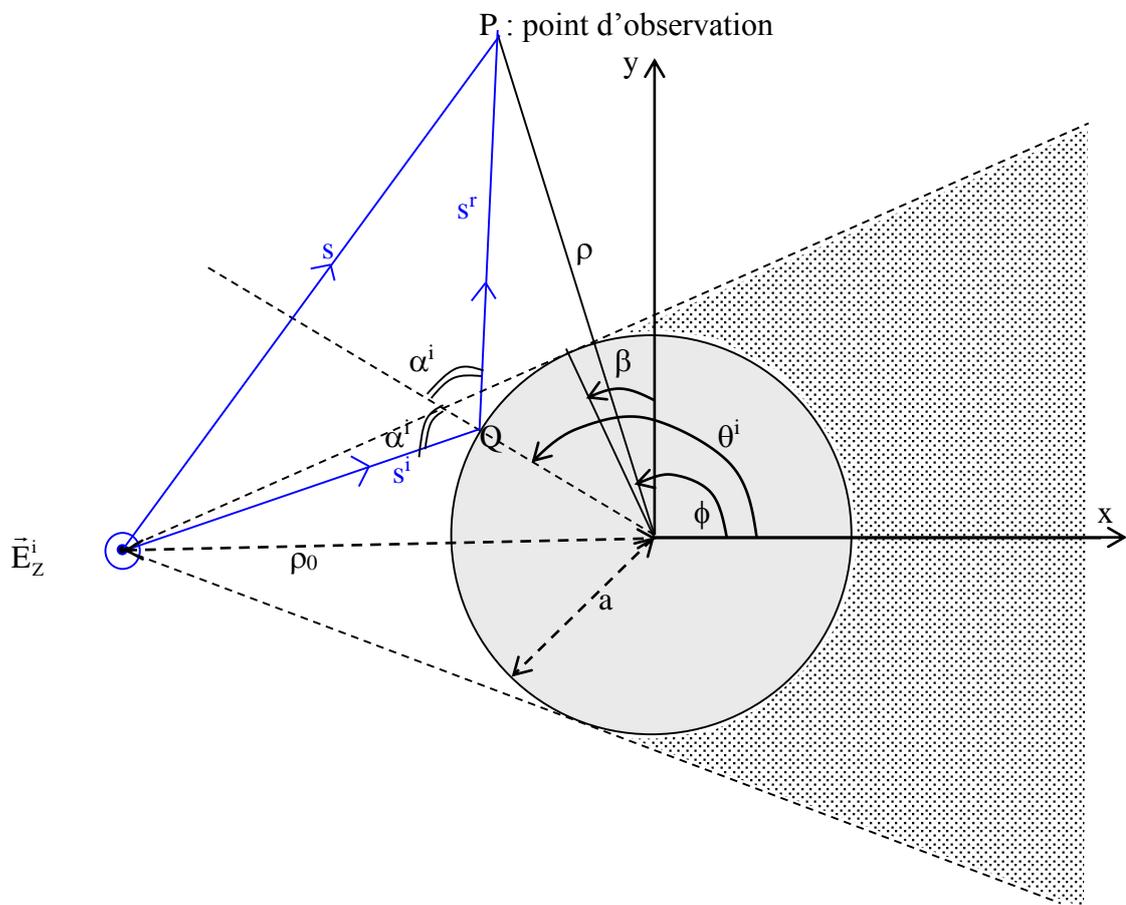


Figure (XI-1) : Représentation de la géométrie du cylindre, de l'onde incidente cylindrique et du point d'observation.

I – Solution exacte de la diffraction d'une onde cylindrique par un cylindre

La source est située à une distance ρ_0 de l'origine située au centre du cylindre, et dans une direction faisant un angle ϕ_0 avec l'axe des x . Par la suite, nous prendrons, comme sur la figure (XI-1), $\phi_0 = \pi$.

En deux dimensions, le champ émis par la source ponctuelle a une symétrie cylindrique : il est donc indépendant de la direction ϕ dans laquelle on regarde. Il peut être représenté, à une constante près par la fonction de HANKEL de deuxième espèce :

$$E_Z^i = H_0^{(2)}(k|\rho - \rho_0|) \quad (\text{XI-1})$$

Cette fonction se développe suivant le théorème d'addition de HANKEL en une série infinie :

$$E_Z^i = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} H_n^{(2)}(k\rho_0) J_n(k\rho) e^{jn(\phi - \phi_0)} \quad \rho < \rho_0 \quad (\text{XI-2})$$

$$E_Z^i = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} H_n^{(2)}(k\rho) J_n(k\rho_0) e^{jn(\phi - \phi_0)} \quad \rho > \rho_0 \quad (\text{XI-3})$$

Le champ diffracté peut être recherché sous la forme d'un spectre d'ondes cylindriques représentées par des fonctions de HANKEL de deuxième espèce, obtenu en changeant les fonctions d'ondes incidentes J_n en fonctions d'ondes se propageant vers l'infini :

$$E_Z^s = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n H_n^{(2)}(k\rho) H_n^{(2)}(k\rho_0) e^{jn(\phi - \phi_0)} \quad \rho < \rho_0 \quad (\text{XI-4})$$

Le champ total pour $\rho < \rho_0$ est obtenu en sommant les relations (XI-2) et (XI-4) :

$$E_Z = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} H_n^{(2)}(k\rho_0) e^{jn(\phi - \phi_0)} \{ J_n(k\rho) + C_n H_n^{(2)}(k\rho) \} \quad \rho < \rho_0 \quad (\text{XI-5})$$

Les conditions aux limites imposent un champ total nul sur le cylindre en polarisation électrique, soit donc :

$$J_n(ka) + C_n H_n^{(2)}(ka) = 0 \quad (\text{XI-6})$$

On en déduit la constante C_n :

$$C_n = -\frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \quad (\text{XI-7})$$

et l'expression du champ total entourant le cylindre en polarisation électrique :

$$E_Z = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} H_n^{(2)}(k\rho_0) e^{jn(\phi - \phi_0)} \left\{ J_n(k\rho) - \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(k\rho) \right\} \quad \rho < \rho_0 \quad (\text{XI-8})$$

$$E_Z = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn(\phi - \phi_0)} \left\{ J_n(k\rho_0) - \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(k\rho_0) \right\} \quad \rho > \rho_0 \quad (\text{XI-9})$$

Lorsque l'onde incidente est en polarisation magnétique, les conditions aux limites imposent l'annulation de la dérivée normale du champ magnétique sur le cylindre, soit donc ici la dérivée par rapport à ρ . On déduit dans ces conditions :

$$C_n = - \frac{[J_n]'(ka)}{[H_n^{(2)}]'(ka)} \quad (\text{XI-10})$$

et l'expression correspondante du champ total en polarisation magnétique :

$$H_Z = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} H_n^{(2)}(k\rho_0) e^{jn(\phi-\phi_0)} \left\{ J_n(k\rho) - \frac{[J_n]'(ka)}{[H_n^{(2)}]'(ka)} H_n^{(2)}(k\rho) \right\} \quad \rho < \rho_0 \quad (\text{XI-11})$$

$$H_Z = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn(\phi-\phi_0)} \left\{ J_n(k\rho_0) - \frac{[J_n]'(ka)}{[H_n^{(2)}]'(ka)} H_n^{(2)}(k\rho_0) \right\} \quad \rho > \rho_0 \quad (\text{XI-12})$$

Comme pour l'illumination par une onde plane, ces séries convergent très lentement lorsque le rayon du cylindre a , la distance de la source ρ_0 , ou la distance du point d'observation au centre du cylindre ρ dépassent quelques longueurs d'onde ; et deviennent pratiquement inexploitable.

II – Solution par l'optique géométrique

Les champs sont évalués à l'aide de l'optique géométrique de la manière suivante :

Champ incident au point d'observation P :

$$U^i(\mathbf{P}) = \frac{e^{-jks}}{\sqrt{s}} \quad (\text{XI-13})$$

Champ réfléchi au point P

$$U^r(\mathbf{P}) = U^i(\mathbf{Q}) e^{-jks^r} \sqrt{\frac{\rho^r}{s^r + \rho^r}} = \frac{e^{-jks^i}}{\sqrt{s^i}} e^{-jks^r} \sqrt{\frac{\rho^r}{s^r + \rho^r}} = e^{-jk(s^i + s^r)} \sqrt{\frac{\rho^r}{s^i(s^r + \rho^r)}} \quad (\text{XI-14})$$

Dans ces expressions, s^i et s^r sont calculés par un algorithme utilisant le principe de fermat.

La distance entre la source et le point d'observation s s'obtient par la relation :

$$s = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 + 2\rho\rho_0 \cos(\phi)} \quad (\text{XI-15})$$

et le champ total au point d'observation s s'exprime sous la forme :

$$U(\mathbf{P}) = U^i(\mathbf{P}) \pm U^r(\mathbf{P}) \quad \begin{array}{l} + : \text{polarisation magnétique} \\ - : \text{polarisation électrique.} \end{array} \quad (\text{XI-16})$$

III - Formulation d'une solution uniforme en termes de fonctions de FOCK

Lorsque l'onde incidente est cylindrique au lieu d'être plane comme au chapitre précédent, cela génère un comportement différent du champ diffracté sur la frontière ombre-lumière.

Ce comportement a été analysé en détail au chapitre V relatif à la diffraction d'une onde cylindrique par un demi-plan, et il a fait l'objet d'une solution élégante par sa simplicité de la part de KOUYOUMJIAN et PATHAK. Cette solution consiste à utiliser la liberté de choix sur le paramètre de la fonction de FRESNEL de manière à ce qu'il décrive correctement ce comportement au voisinage de la frontière.

L'introduction du même artifice dans la solution uniforme en termes de fonctions de FOCK modifiées conduit à l'expression des champs suivante :

En polarisation électrique, zone illuminée :

$$E(P) = \frac{e^{-jks}}{\sqrt{s}} - \frac{e^{-jks^i}}{\sqrt{s^i}} 4M\sqrt{\pi} \left\{ \tilde{p}(M\theta_1) + e^{-jka\theta_2} \tilde{p}(M\theta_2) \right\} \frac{e^{-jks^r}}{\sqrt{8\pi jks^r}} \quad (XI-17)$$

En polarisation électrique, zone d'ombre :

$$E(P) = -\frac{e^{-jks^i}}{\sqrt{s^i}} 4M\sqrt{\pi} \left\{ e^{-jka\theta_1} \tilde{p}(M\theta_1) + e^{-jka\theta_2} \tilde{p}(M\theta_2) \right\} \frac{e^{-jks^d}}{\sqrt{8\pi jks^d}} \quad (XI-18)$$

L'expression de la fonction de FOCK modifiée est rappelée pour mémoire :

$$\tilde{p}(\alpha, x) = p(x) - \alpha \sqrt{j} \operatorname{sgn}(x) K_-(\alpha|x|) = p(x) - \alpha \sqrt{j} \tilde{K}_-(\alpha|x|) \quad (XI-19)$$

avec :

$$\alpha = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{ks^r s^i}{2(s^r + s^i)}} \quad \text{en zone illuminée} \quad (XI-20)$$

$$\alpha = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{ks^d s^i}{2(s^d + s^i)}} \quad \text{en zone d'ombre} \quad (XI-21)$$

Comme dans le cas de l'incidence en onde plane, cette formulation ne donne pas le champ correct dans la zone d'illumination profonde.

Elle doit son appellation uniforme au fait qu'elle permet une description correcte du champ lors de la traversée de la frontière de l'optique géométrique.

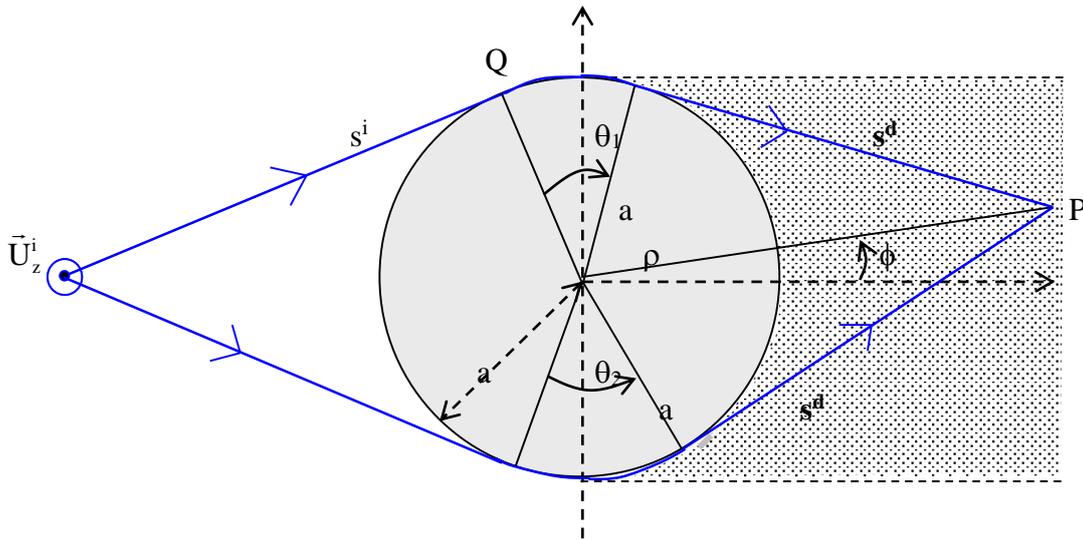


Figure XI-2 : Trajectoire des rayons qui parviennent à un point d'observation situé dans la zone d'ombre.

En polarisation magnétique, les relations correspondantes sont obtenues en changeant la fonction de FOCK p en q .

IV – La formulation de PATHAK

Elle est identique à la description qui en a été faite pour une onde incidente plane, à l'exception du coefficient de l'intégrale de FRESNEL qui est modifié pour assurer la continuité du champ total sur la frontière ombre-lumière.

IV.1 - Dans la zone illuminée (Figure XI-1) :

$$U(P) = U^i(P) + U^i(Q) R_{e,m} \sqrt{\frac{\rho^r}{\rho^r + s^s}} e^{-jks^r} \quad (XI-22)$$

Pour une onde cylindrique en dimension 2, on obtient :

$$U(P) = \frac{e^{-jks}}{\sqrt{s}} + \frac{e^{-jks^i}}{\sqrt{s^i}} R_{e,m} \sqrt{\frac{\rho^r}{\rho^r + s^s}} e^{-jks^r} = \frac{e^{-jks}}{\sqrt{s}} + R_{e,m} \sqrt{s^i(\rho^r + s^s)} e^{-jk(s^i + s^r)} \quad (XI-23)$$

ρ^r désigne le rayon de courbure du front d'onde du faisceau réfléchi, qui s'exprime en fonction du rayon du cylindre a , et de la distance ρ^i de la source au point de réflexion Q sur le cylindre :

$$\frac{1}{\rho^r} = \frac{1}{\rho^i} + \frac{2}{a \cos \alpha^i} \quad (XI-24)$$

Le coefficient R est indiqué par la lettre e pour une incidence en polarisation électrique, par la lettre m pour une incidence en polarisation magnétique.

$$R_e = -\sqrt{\frac{-4}{\zeta^r}} e^{-j\left(\frac{(\zeta^r)^3}{12} + \frac{\pi}{4}\right)} \left\{ \frac{[1 - F(X^r)]}{2\zeta^r \sqrt{\pi}} + \hat{p}(\zeta^r) \right\} \quad (XI-25)$$

$$R_m = -\sqrt{\frac{-4}{\zeta^r}} e^{-j\left(\frac{(\zeta^r)^3}{12} + \frac{\pi}{4}\right)} \left\{ \frac{[1 - F(X^r)]}{2\zeta^r\sqrt{\pi}} + \hat{q}(\zeta^r) \right\} \quad (\text{XI-26})$$

$$\zeta^r = -2M \cos \alpha^i \quad M = \left(\frac{ka}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad X^r = 2k \cos^2(\alpha^i) \frac{s^r s^i}{s^r + s^i} \quad (\text{XI-27})$$

IV.2 - Dans la zone d'ombre (Figure XI-2) :

Le champ dans la zone d'ombre, du seulement à la diffraction par la partie supérieure du cylindre, s'exprime sous la forme :

$$U(P) = U^i(Q) T_{e,m} \frac{e^{-jk s^d}}{\sqrt{s^d}} = T_{e,m} \frac{e^{-jk(s^i + s^d)}}{\sqrt{s^i s^d}} \quad (\text{XI-28})$$

$$T_e = -M \sqrt{\frac{2}{jk}} e^{-jka\theta_1} \left\{ \frac{[1 - F(X^d)]}{2\zeta^d\sqrt{\pi}} + \hat{p}(\zeta^d) \right\} \quad (\text{XI-29})$$

$$T_m = -M \sqrt{\frac{2}{jk}} e^{-jka\theta_1} \left\{ \frac{[1 - F(X^d)]}{2\zeta^d\sqrt{\pi}} + \hat{q}(\zeta^d) \right\} \quad (\text{XI-30})$$

$$\zeta^d = M\theta_1 \quad M = \left(\frac{ka}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad X^d = \frac{k(\theta_1)^2}{2} \frac{s^i s^d}{s^i + s^d} \quad (\text{XI-31})$$

Comme dans le cas de l'incidence en onde plane, cette formulation est rigoureusement identique à celle qui est obtenue à l'aide des fonctions de FOCK modifiées. Pour le montrer, réécrivons explicitement, dans le cas d'une polarisation électrique, la relation (XI-28) qui donne le champ diffracté derrière le cylindre :

$$E(P) = -M \sqrt{\frac{2}{jks^i s^d}} e^{-jk(a\theta_1 + s^i + s^d)} \left\{ \frac{\left[1 - F\left(\frac{k(\theta_1)^2 s^i s^d}{2(s^i + s^d)}\right) \right]}{2M\theta_1\sqrt{\pi}} + \hat{p}(M\theta_1) \right\} \quad (\text{XI-32}) :$$

Introduisons la fonction de FOCK $p(x)$:

$$p(x) = \hat{p}(x) + \frac{1}{2x\sqrt{\pi}} \quad (\text{XI-33})$$

$$E(P) = -M \sqrt{\frac{2}{jks^i s^d}} e^{-jk(a\theta_1 + s^i + s^d)} \left\{ -\frac{F\left(\frac{k(\theta_1)^2 s^i s^d}{2(s^i + s^d)}\right)}{2M\theta_1 \sqrt{\pi}} + p(M\theta_1) \right\} \quad (XI-34)$$

Introduisons l'expression qui relie les deux formes particulières de l'intégrale de FRESNEL K_- en fonction de F :

$$F(x^2) = \sqrt{4\pi j} x \tilde{K}_-(x) \quad (XI-35)$$

$$E(P) = -M \sqrt{\frac{2}{jks^i s^d}} e^{-jk(a\theta_1 + s^i + s^d)} \left\{ p(M\theta_1) - \frac{\theta_1 \sqrt{\frac{4\pi jks^i s^d}{2(s^i + s^d)}} \tilde{K}_-\left(\theta_1 \sqrt{\frac{ks^i s^d}{2(s^i + s^d)}}\right)}{2M\theta_1 \sqrt{\pi}} \right\} \quad (XI-36)$$

soit encore après réduction :

$$E(P) = -M \sqrt{\frac{2}{jks^i s^d}} e^{-jk(a\theta_1 + s^i + s^d)} \left\{ p(M\theta_1) - \frac{\sqrt{j}}{M} \sqrt{\frac{ks^i s^d}{2(s^i + s^d)}} \tilde{K}_-\left(\theta_1 \sqrt{\frac{ks^i s^d}{2(s^i + s^d)}}\right) \right\} \quad (XI-37)$$

On retrouve alors exactement la formulation précédente :

$$E(P) = -\frac{e^{-jks^i}}{\sqrt{s^i}} 4 M \sqrt{\pi} e^{-jk a \theta_1} \left\{ p(M\theta_1) - \alpha \sqrt{j} \tilde{K}_-(\alpha |M\theta_1|) \right\} \frac{e^{-jks^d}}{\sqrt{8\pi jks^d}} \quad (XI-38)$$

après avoir posé, comme au paragraphe précédent :

$$\alpha = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{ks^i s^d}{2(s^i + s^d)}} \quad (XI-39)$$

V – La construction d'une solution qui converge progressivement vers l'optique géométrique dans la zone d'illumination profonde

Nous proposons l'élaboration d'une telle solution à partir des fonctions de FOCK, en polarisation électrique.

Le raccordement avec l'optique géométrique sera effectuée à l'aide d'une fonction à déterminer notée G , et on recherche donc une relation du type :

$$E(P) = -\frac{e^{-jks^i}}{\sqrt{s^i}} 4 M \sqrt{\pi} G \left\{ p(M\theta_1) - \alpha \sqrt{j} \tilde{K}_-(\alpha |M\theta_1|) \right\} \frac{e^{-jks^d}}{\sqrt{8\pi jks^d}} \quad (XI-40)$$

Loin de la frontière ombre-lumière, le champ diffracté par la partie supérieure du cylindre (XI-17) prend la forme suivante en introduisant les comportements asymptotiques de la fonction de FOCK p et de la fonction de FRESNEL K₋ :

$$E(P) \approx -\frac{e^{-jks^i}}{\sqrt{s^i}} 4 M\sqrt{\pi}G \left\{ \frac{\sqrt{-M\theta_1}}{2} \exp\left(j \frac{(M\theta_1)^3}{12} + j \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2M\theta_1\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2M\theta_1\sqrt{\pi}} \right\} \frac{e^{-jks^r}}{\sqrt{8\pi jks^r}} \quad (XI-41)$$

$$E(P) \approx -\frac{e^{-jks^i}}{\sqrt{s^i}} 2M\sqrt{\pi}G \left\{ \sqrt{-M\theta_1} \exp\left(j \frac{(M\theta_1)^3}{12} + j \frac{\pi}{4} \right) \right\} \frac{e^{-jks^r}}{\sqrt{8\pi jks^r}} \quad (XI-42)$$

Cette formulation doit converger vers la formulation de l'optique géométrique, soit vers :

$$E^r(P) = -\frac{e^{-jks^i}}{\sqrt{s^i}} \sqrt{\frac{\rho^r}{s^r + \rho^r}} e^{-jks^r} \quad (XI-43)$$

On doit donc réaliser la condition :

$$-\frac{M}{\sqrt{2ks^r}} G \sqrt{-M\theta_1} \exp\left(j \frac{(M\theta_1)^3}{12} \right) = -\sqrt{\frac{\rho^r}{s^r + \rho^r}} \quad (XI-44)$$

Soit encore :

$$G = \frac{1}{M\sqrt{-M\theta_1}} \sqrt{\frac{2ks^r\rho^r}{s^r + \rho^r}} \exp\left(-j \frac{(M\theta_1)^3}{12} \right) \quad (XI-45)$$

En résumé, une formulation qui se réduit à l'optique géométrique loin de la frontière ombre-lumière, c'est à dire dans la zone d'illumination profonde, peut s'écrire en fonction de la fonction de FOCK modifiée :

$$E(P) = -\frac{e^{-jks^i}}{\sqrt{s^i}} 4 M\sqrt{\pi} G \tilde{p}(M\theta_1) \frac{e^{-jks^r}}{\sqrt{8\pi jks^r}} \quad \text{en polarisation électrique} \quad (XI-46)$$

$$H(P) = -\frac{e^{-jks^i}}{\sqrt{s^i}} 4 M\sqrt{\pi} G \tilde{q}(M\theta_1) \frac{e^{-jks^r}}{\sqrt{8\pi jks^r}} \quad \text{en polarisation magnétique} \quad (XI-47)$$

Il faut maintenant examiner le comportement de cette formulation sur la frontière de l'optique géométrique, et en particulier, le comportement de la fonction G.

Sur la frontière ombre-lumière, θ_1 et ρ^r tendent vers 0, on en déduit que G tend vers :

$$G \rightarrow \frac{\sqrt{2k}}{M^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\rho^r}{-\theta_1}} \rightarrow \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{\frac{ka}{2}}} \sqrt{\frac{a \cos(\alpha_1)}{-2\theta_1}} \quad (XI-48)$$

En notant qu'au voisinage de cette frontière $\cos(\alpha_i)$ est équivalent à $\theta_1/2$, on déduit ce résultat remarquable que G prend la valeur 1 : il n'y a donc aucune adaptation supplémentaire pour que cette formulation recouvre la solution uniforme sur la frontière de l'optique géométrique.

Les relations (XI-45,46,47) constituent donc une formulation uniforme originale, qui se réduit à la formulation de l'optique géométrique dans la zone d'illumination profonde. Cette formulation fait référence aux notations de la figure (XI-3).

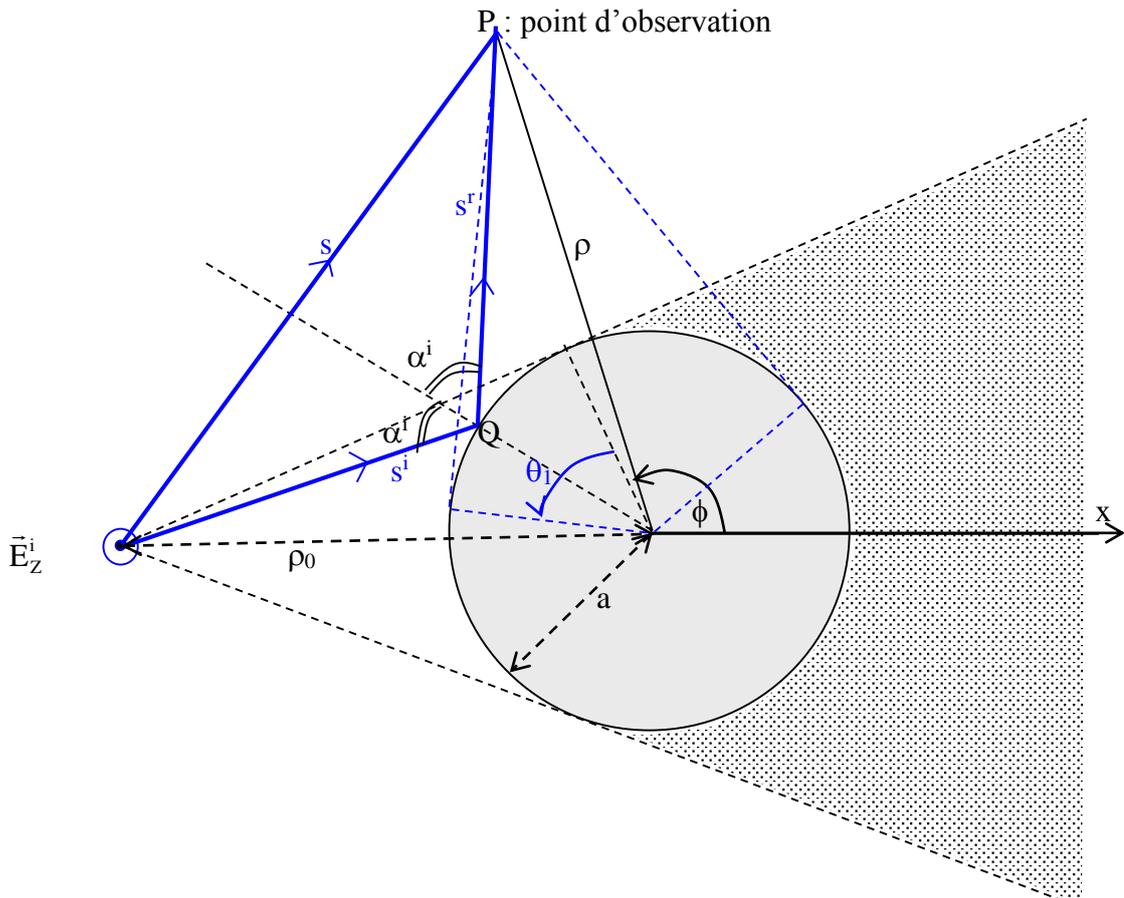


Figure (XI-3) : Représentation de la géométrie du cylindre, de l'onde incidente cylindrique et du point d'observation avec les notations utilisées pour décrire la solution uniforme en termes de fonctions de FOCK.

L'angle θ_1 qui intervient dans cette relation est peu commode car il n'est pas relié aux grandeurs habituelles qui interviennent en optique géométrique. Loin de la frontière ombre-lumière, son rôle est annihilé, comme on peut le constater par un examen des relations (XI-42) et (XI-45).

Il devient alors judicieux de le remplacer par son équivalent en fonction de α_i au voisinage de la frontière ombre-lumière :

$$\theta_1 = -2 \cos(\alpha_i) \tag{XI-49}$$

On obtient alors la formulation suivante dans la zone illuminée :

$$G = \frac{1}{M\sqrt{-2M \cos \alpha_i}} \sqrt{\frac{2ks^r \rho^r}{s^r + \rho^r}} \exp\left(-j \frac{(2M \cos \alpha_i)^3}{12}\right) \quad (\text{XI-50})$$

$$E(P) = -\frac{e^{-jks^i}}{\sqrt{s^i}} 4 M\sqrt{\pi} G \tilde{p}(2M \cos \alpha_i) \frac{e^{-jks^r}}{\sqrt{8\pi jks^r}} \quad \text{en polarisation électrique} \quad (\text{XI-51})$$

$$H(P) = -\frac{e^{-jks^i}}{\sqrt{s^i}} 4 M\sqrt{\pi} G \tilde{q}(2M \cos \alpha_i) \frac{e^{-jks^r}}{\sqrt{8\pi jks^r}} \quad \text{en polarisation magnétique} \quad (\text{XI-52})$$

Cette dernière formulation (XI-50,51,52) recouvre exactement la formulation de PATHAK, mais sous une écriture différente.

Sur la frontière ombre-lumière, le paramètre de la fonction de transition est nulle, et puisque $G=1$, le champ électrique prend la valeur :

$$E(P)_{\text{Frontière}} = -4 M\sqrt{\pi} \left\{ p(0) - \frac{1}{2M} \sqrt{\frac{jks^i s^r}{2(s^i + s^r)}} \right\} \frac{e^{-jk(s^i + s^r)}}{\sqrt{8\pi jks^i s^r}} \quad (\text{XI-53})$$

$$E(P)_{\text{Frontière}} = -4 M\sqrt{\pi} \left\{ p(0) \frac{e^{-jk(s^i + s^r)}}{\sqrt{8\pi jks^i s^r}} - \frac{1}{2M} \sqrt{\frac{1}{16\pi}} \frac{e^{-jk(s^i + s^r)}}{\sqrt{(s^i + s^r)}} \right\} \quad (\text{XI-54})$$

$$E(P)_{\text{Frontière}} = -4 M\sqrt{\pi} p(0) \frac{e^{-jk(s^i + s^r)}}{\sqrt{8\pi jks^i s^r}} + \frac{1}{2} \frac{e^{-jk(s^i + s^r)}}{\sqrt{(s^i + s^r)}} \quad (\text{XI-55})$$

On reconnaît dans le second terme de cette expression la moitié du champ incident, ce qui justifie à nouveau l'uniformité de la solution.

VI – Quelques comparaisons numériques des différentes formulations

Le premier test consiste à vérifier que l'hypothèse que nous avons formulée en (XI-49) qui consiste à affirmer que l'on peut substituer le terme équivalent à $[\theta_1]$, soit donc $[-2\cos(\alpha_i)]$, dans les formulations asymptotiques de la zone illuminée, ne conduit pas à des écarts importants.

Les quatre figures (XI-4,5,6,7), choisies pour tester à la fois la polarisation électrique et magnétique, confirment cette hypothèse.

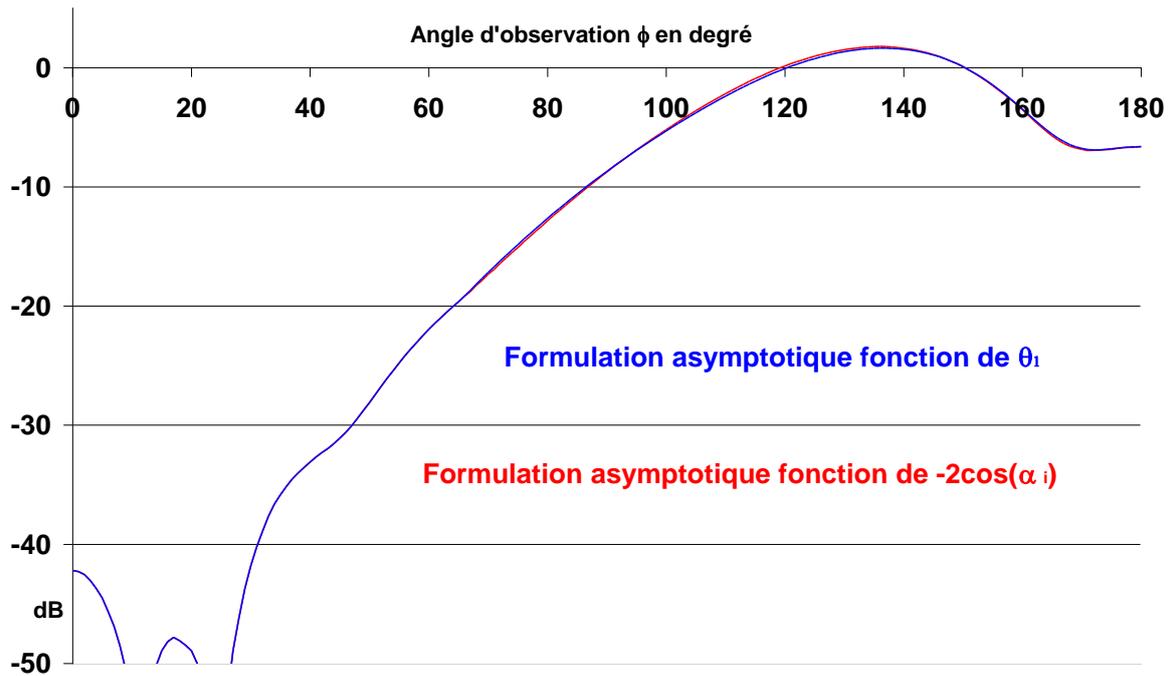


Figure XI-4 : Influence du paramètre de la formulation asymptotique pour $a = \lambda$, $\rho = 1.5 \lambda$, $\rho_0 = 2.5 \lambda$, polarisation électrique.

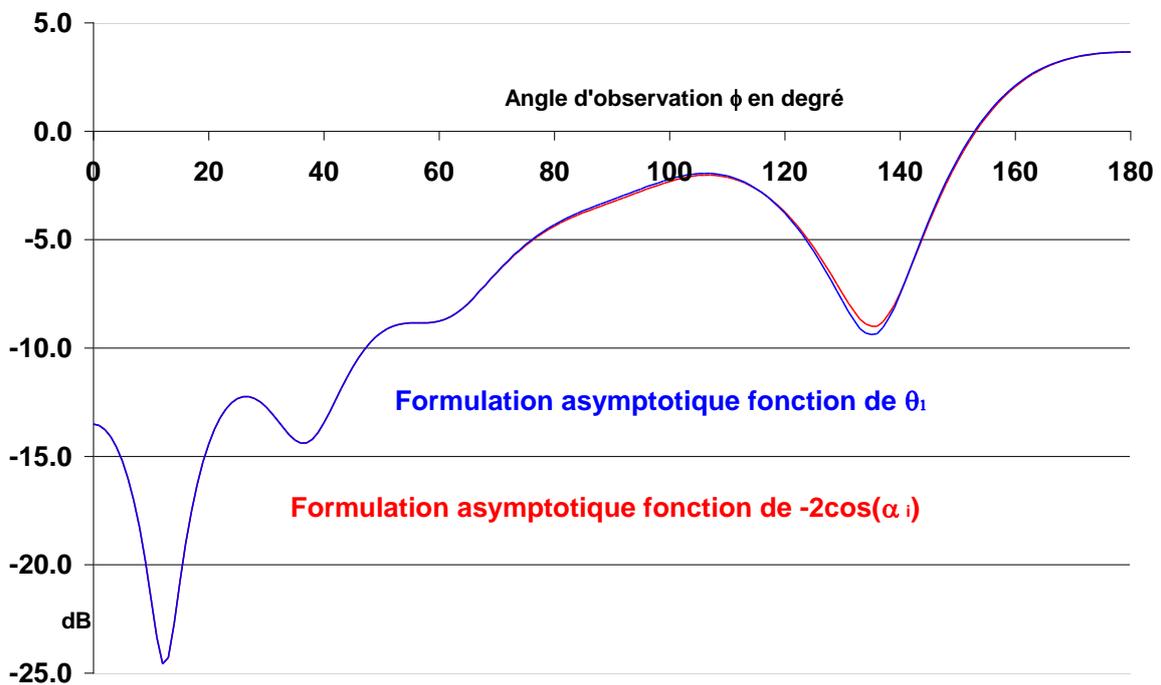


Figure XI-5 : Influence du paramètre de la formulation asymptotique pour $a = \lambda$, $\rho = 1.5 \lambda$, $\rho_0 = 2.5 \lambda$, polarisation magnétique.

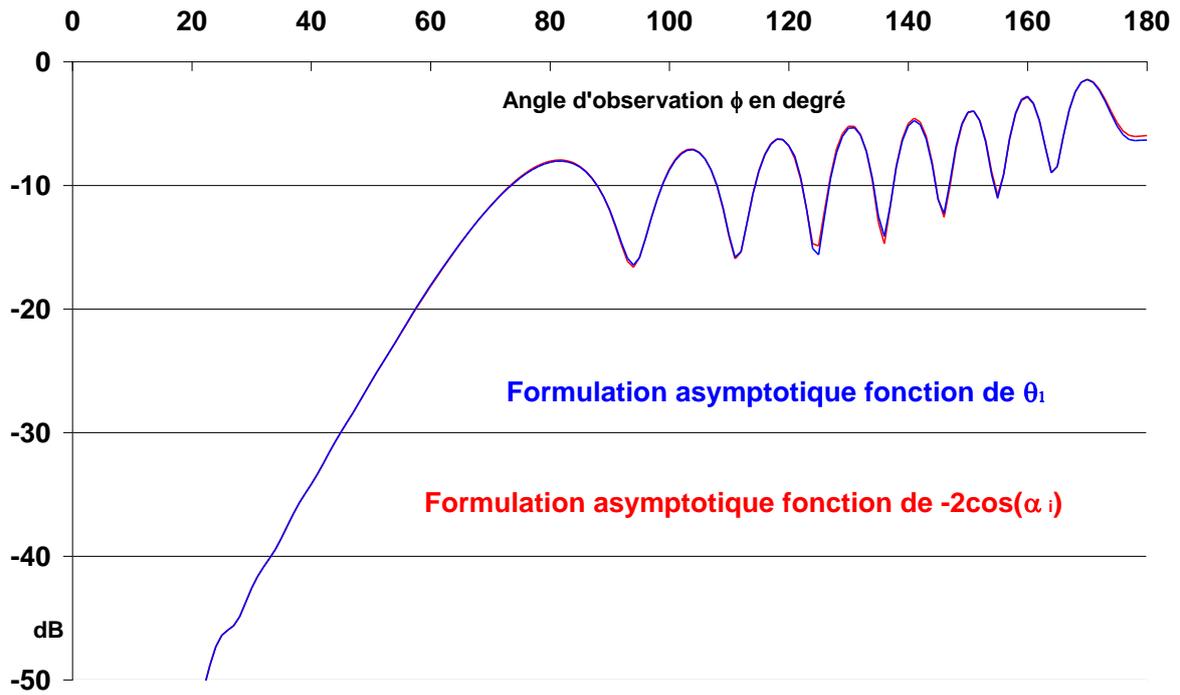


Figure XI-6 : Influence du paramètre de la formulation asymptotique pour $a = 4\lambda$, $\rho = 8\lambda$, $\rho_0 = 10\lambda$, polarisation électrique.

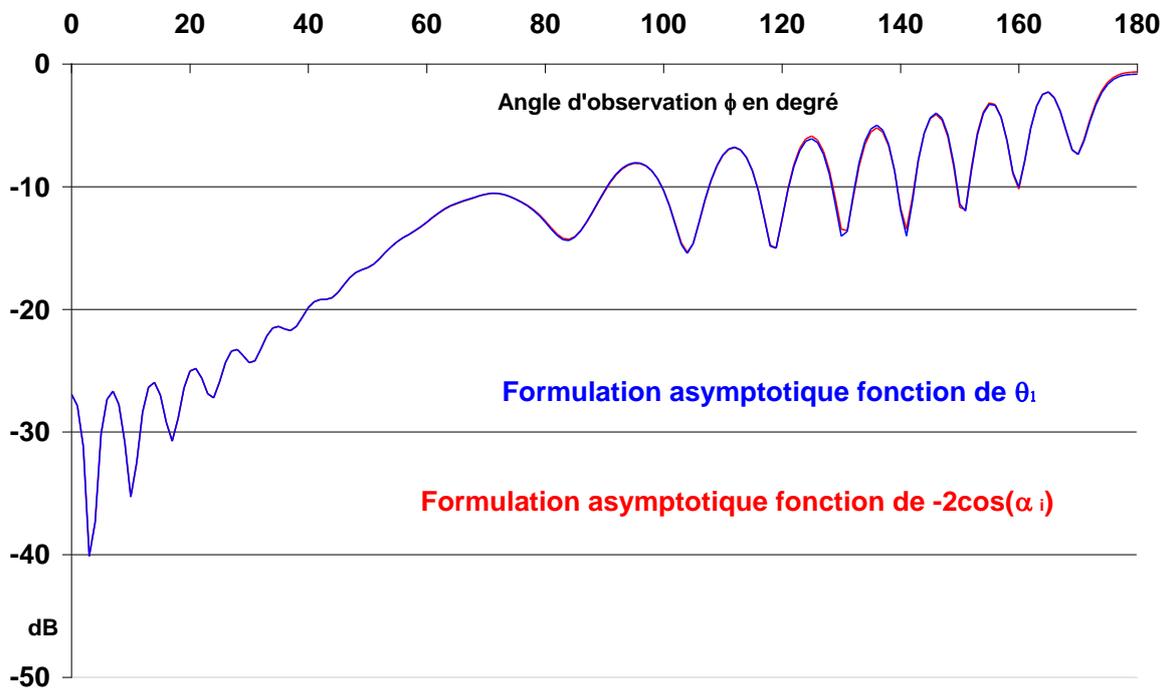


Figure XI-7 : Influence du paramètre de la formulation asymptotique pour $a = 4\lambda$, $\rho = 8\lambda$, $\rho_0 = 10\lambda$, polarisation magnétique.

Dans un deuxième temps, nous proposons de tester la formulation asymptotique en la comparant avec la formulation exacte lorsque cette dernière converge, et également avec l'optique géométrique dont on sait qu'elle est d'autant plus précise que les distances sont grandes devant la longueur d'onde.

Les simulations ont été effectuées en prenant en compte les rayons diffractés par les parties supérieures et inférieures du cylindre.

Les comparaisons montrent un accord excellent de la formulation asymptotique et de l'optique géométrique avec la solution exacte dans la zone illuminée, y compris pour des rayons de cylindre, des distances de la source et du point d'observation, de l'ordre de la longueur d'onde. La formulation asymptotique a été programmée en utilisant le paramètre :

$[-2\cos(\alpha_i)]$.

Des écarts plus importants apparaissent, notamment en polarisation électrique, dans la zone d'ombre, mais à des distances comprises entre λ et 2.5λ , ce qui explique la difficulté de la formulation asymptotique à converger vers la solution exacte dans ces conditions.

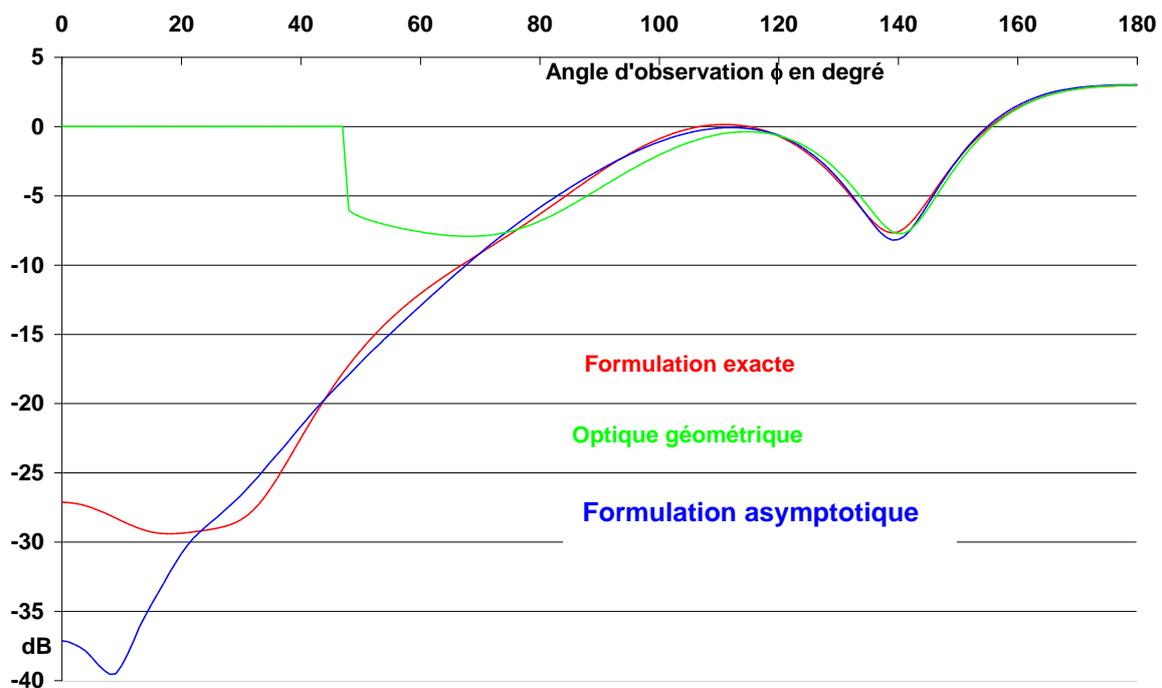


Figure XI-8 : Comparaison des trois formulations pour $a = 0.75 \lambda$, $\rho = 1.5 \lambda$, $\rho_0 = 2.5 \lambda$ polarisation électrique.

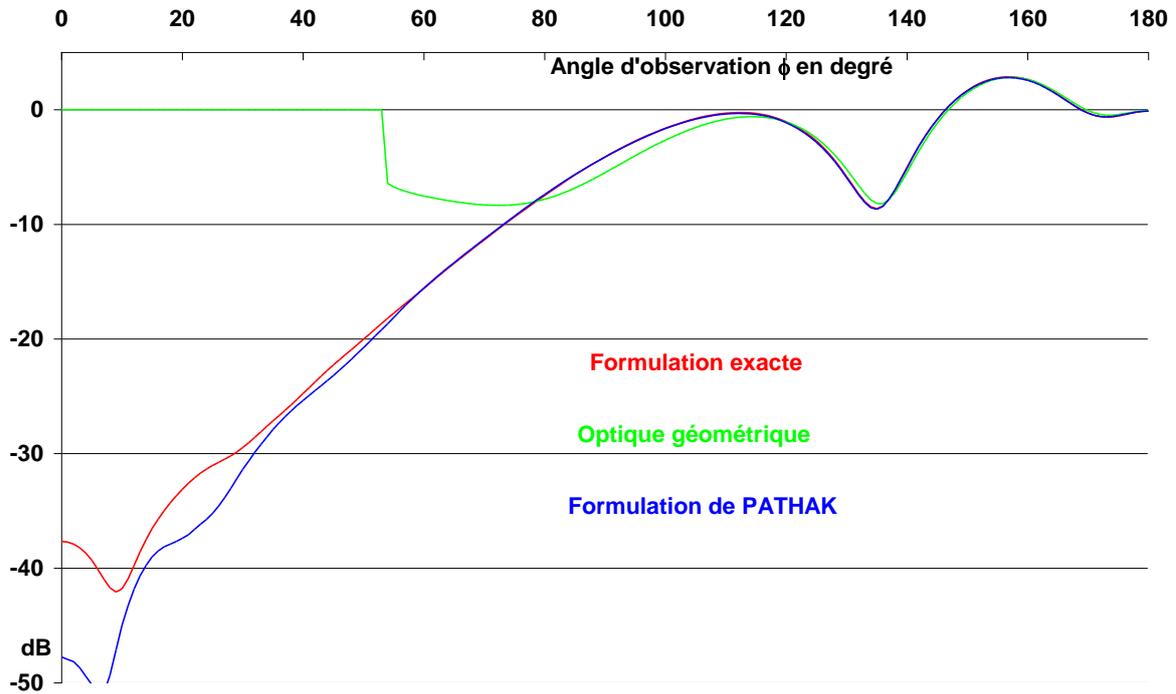


Figure XI-9 : Comparaison des trois formulations pour $a = \lambda$, $\rho = 2 \lambda$, $\rho_0 = 2.5 \lambda$ polarisation électrique.

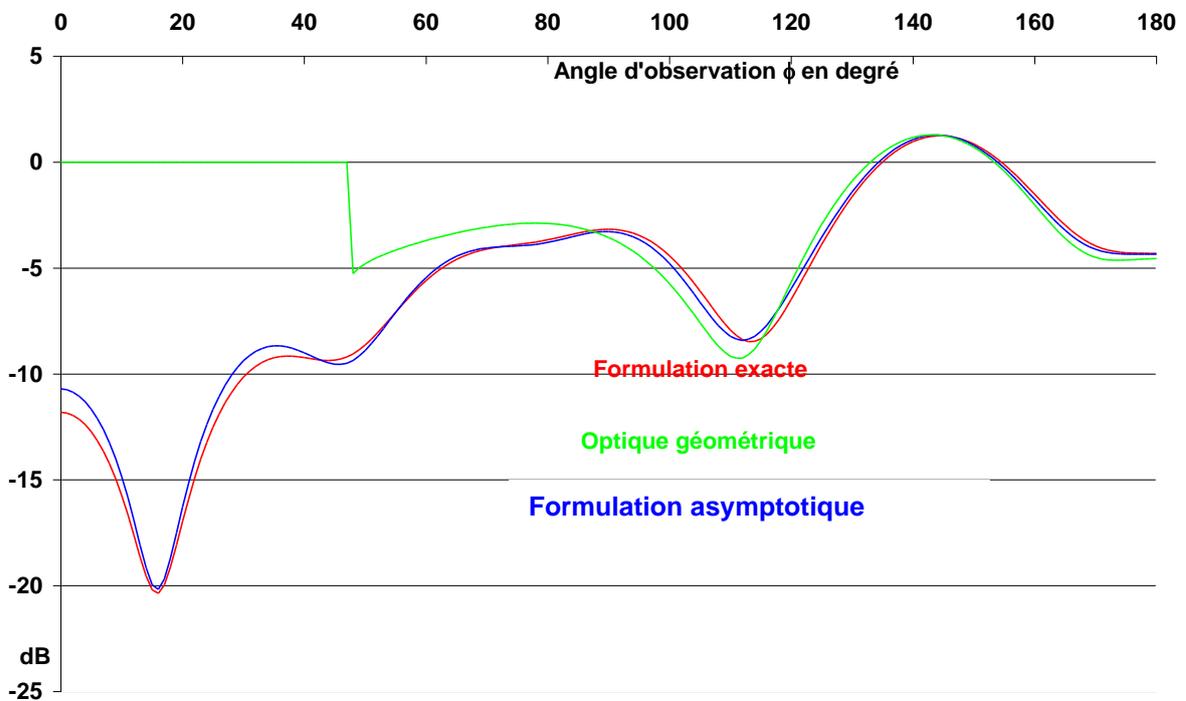


Figure XI-10 : Comparaison des trois formulations pour $a = 0.75 \lambda$, $\rho = 1.5 \lambda$, $\rho_0 = 2.5 \lambda$ polarisation magnétique.

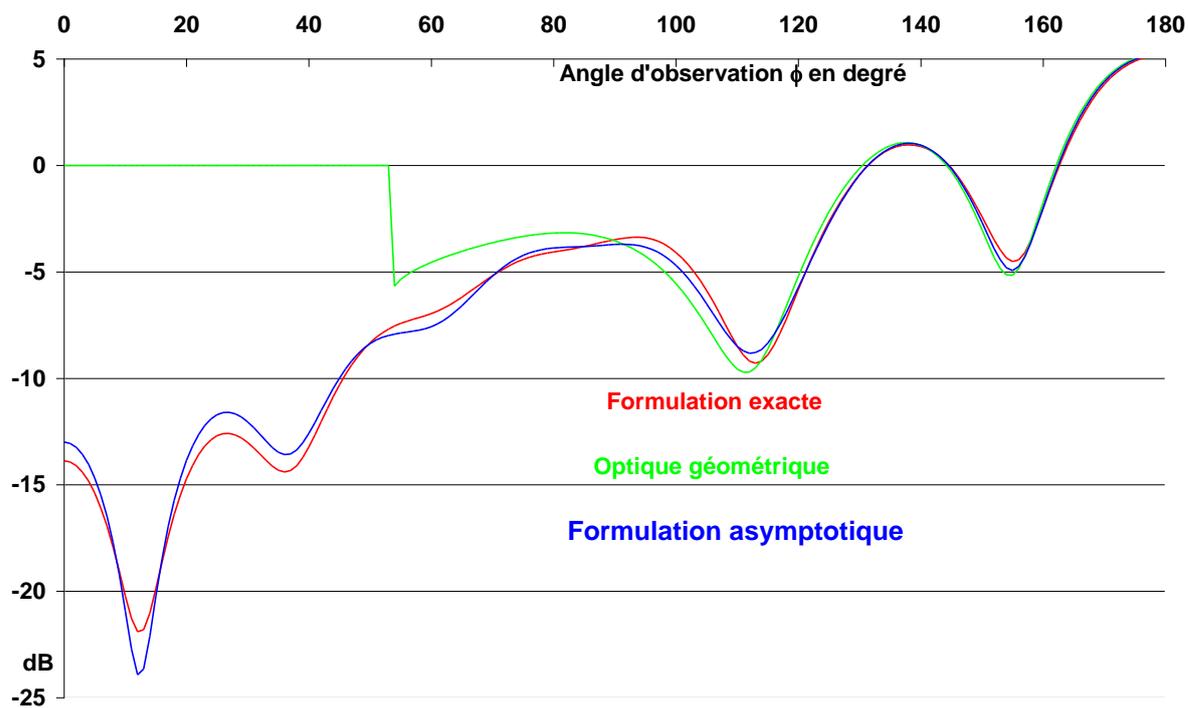


Figure XI-11 : Comparaison des trois formulations pour $a = \lambda$, $\rho = 2 \lambda$, $\rho_0 = 2.5 \lambda$ polarisation magnétique.

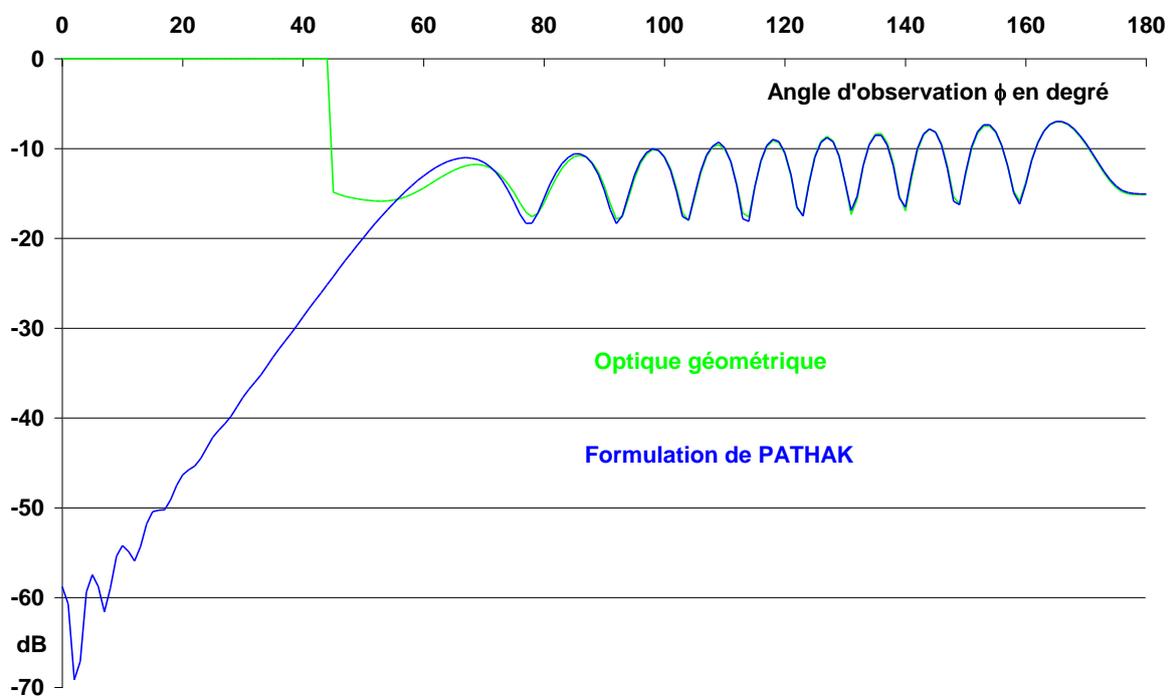


Figure XI-12 : Comparaison de deux formulations pour $a = 5 \lambda$, $\rho = 10 \lambda$, $\rho_0 = 20 \lambda$ polarisation électrique.

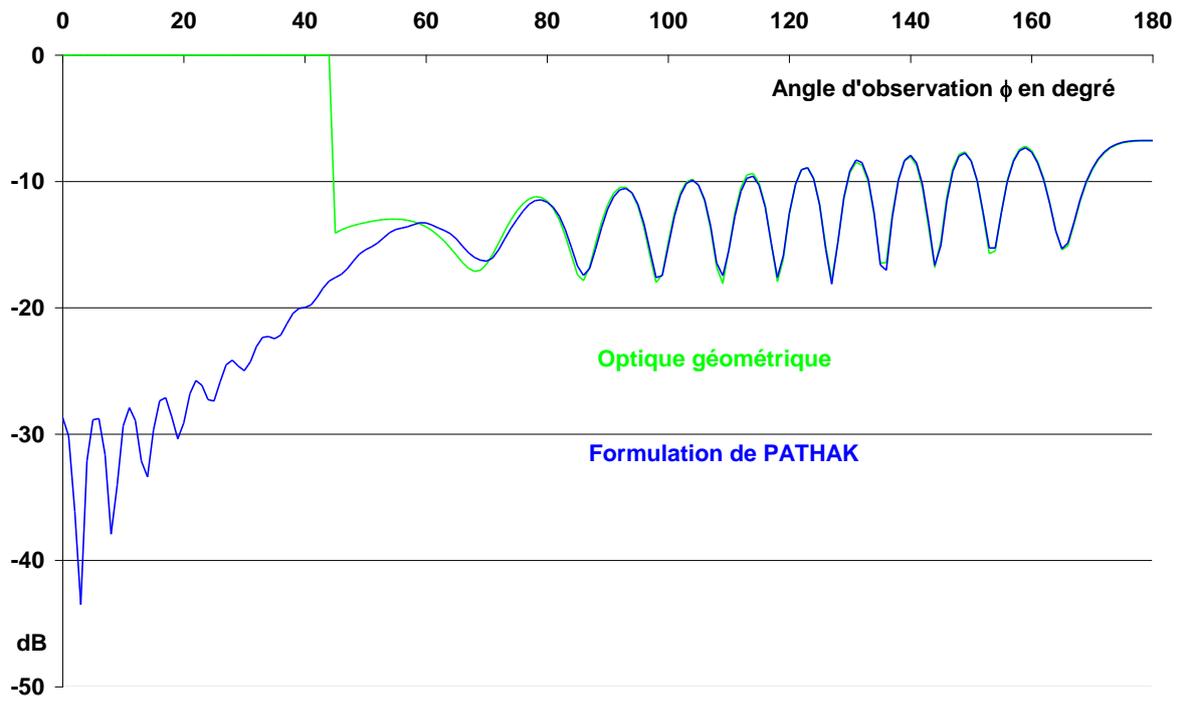


Figure XI-13 : Comparaison de deux formulations pour $a = 5\lambda$, $\rho = 10\lambda$, $\rho_0 = 20\lambda$ polarisation magnétique.

Bibliographie

D. BOUCHE, F. MOLINET : Méthodes asymptotiques en électromagnétisme - Springer Editeur - 1994

P.H. PATHAK : Techniques for High-Frequency Problems dans le livre : Y.T. LO and S.W. LEE : Antenna Handbook - Van Nostrand Reinhold Book - 1988

R.G. KOUYOUMJAN, P.H. PATHAK : A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface - Proc. IEEE - Vol.62 - n° 11 - November 1974 - pp. 1448-1461

G.L. JAMES : Geometrical theory of diffraction for electromagnetic waves - Peter Peregrinus ltd - 1976

P.C. CLEMMOW : The plane wave spectrum representation of electromagnetic fields - Pergamon Press ltd - 1966

D.A. McNAMARA, C.W.I. PISTORIUS, J.A.G. MALHERBE : Introduction to the uniform geometrical theory of diffraction - Artech House - Boston - London - 1990