



HAL
open science

Communications numériques

Johan Aubray

► **To cite this version:**

Johan Aubray. Communications numériques. Licence. Communications numériques (Sp215), France. 2024. hal-04797388

HAL Id: hal-04797388

<https://hal.science/hal-04797388v1>

Submitted on 22 Nov 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Support de cours

SP215
Communications numériques

Promotion : ISESA24

Version : 1.0.3 FR du 18 novembre 2024 / SP215

Écrit par

Johan AUBRAY

Table des matières

Introduction	11
0.1 Vous avez dit signal ?	11
0.2 Les transmissions numériques : mais pourquoi donc ?	11
0.3 Etapes d'une transmission numérique	12
0.4 Le canal de transmission	14
0.5 Considérations (rapides) sur les éléments de la chaîne	16
0.5.1 La source	16
0.5.2 Le codage source	17
0.5.3 Le codage canal	17
0.5.4 Codage en ligne	18
0.5.5 Modulation	18
1 Numérisation	21
1.1 Principe	21
1.2 Conversion analogique numérique	22
1.2.1 Echantillonnage	22
1.2.2 Repliement de spectre	23
1.2.3 Quantification	27
1.3 Conversion numérique analogique	34
1.3.1 Interpolation	35
1.3.2 Filtre de restitution (Filtre de lissage)	37
1.4 Synthèse CAN et CNA	39
1.5 Echantillonnage des signaux passe-bande (ou comment envoyer promener la règle de Shannon)	40
2 Filtrage numérique	47
2.1 Vous avez dit filtre ?	47
2.1.1 Un exemple simple : filtre RC du 1er ordre	48
2.1.2 Filtres linéaires invariants dans le temps (LIT)	48
2.1.3 Et le numérique dans tout ça ?	50
2.2 Caractéristiques importantes d'un filtre	50
2.2.1 Stabilité	50
2.2.2 Causalité	51
2.2.3 Gabarit	51
2.2.4 Temps de propagation de groupe et linéarité de la phase	53
2.3 Les deux familles de filtres numériques	54
2.3.1 Filtres RIF	54
2.3.2 Filtres RII	57
2.4 Transformée en z	57
2.4.1 Propriétés	58
2.4.2 Transformées de signaux fréquemment rencontrés	58
2.4.3 Transformation inverse	59
2.5 Synthèse d'un filtre numérique RIF	59
2.5.1 Problématique	59
2.5.2 Du gabarit idéal aux coefficients réels	59
2.5.3 Influence du fenêtrage : atténuation de l'effet de Gibbs	62
2.6 Synthèse d'un filtre RII	65
2.7 Une très brève introduction à la transformation en z	66
2.8 Comparatif RIF RII	66

3	Codage source, codage canal, codage en ligne	73
4	Réception, décodage en ligne	75
4.1	Réception : les différentes étapes	75
4.1.1	Préambule et problématique	75
4.1.2	Filtrage du bruit	76
4.1.3	Synchronisation des symboles	76
4.1.4	Décodage en ligne	76
4.2	Filtrage adapté	77
4.2.1	Introduction	77
4.2.2	Place dans le récepteur	77
4.2.3	Un petit jeu ?	78
4.2.4	Réponse impulsionnelle, fonction de transfert	80
4.3	Critère de Nyquist, gabarit de Nyquist	83
4.3.1	Introduction	83
5	Modulations	93
	Acronymes	95
	Bibliographie	97

Table des figures

1	Synoptique d'une transmission numérique	13
2	Synoptique simplifié d'une transmission numérique	14
3	Source	16
4	Codage P/NRZ, 1 symbole = 1 bit	18
1.1	Signal analogique (en rouge) échantillonné (en bleu)	22
1.2	Spectre du signal échantillonné	23
1.3	Spectre d'un signal passe-bas réel	23
1.4	Spectre du signal échantillonné avec différentes valeurs de F_e	24
1.5	Echantillonnage respectant la condition de Shannon	24
1.6	Illustration du phénomène de repliement de spectre	25
1.7	Synoptique d'une transmission numérique	26
1.8	Spectre d'un signal physique réel	26
1.9	Quantification sur 1 bit	28
1.10	Quantification sur 2 bits	28
1.11	Densité de probabilité d'une loi de Laplace	31
1.12	Loi μ , loi A	32
1.13	Segments de la loi A	32
1.14	Tableau de codage des valeurs positives	33
1.15	Trame MIC	34
1.16	Principe du Bloqueur d'ordre 0	35
1.17	bloqueur d'ordre 0	36
1.18	Principe du Bloqueur d'ordre 1	36
1.19	Réponse impulsionnelle du bloqueur d'ordre 1	37
1.20	Avant et après le filtre de restitution (en fréquentiel)	37
1.21	Gabarit réel	38
1.22	Avant et après le filtre de restitution (en temporel)	38
1.23	Etapas CAN CNA	39

Table des figures

1.24	Signal analogique en entrée du CAN	40
1.25	Le même signal, une fois passée la 1ère étape du CAN	40
2.1	Filtre RC	47
2.2	Invariance dans le temps	48
2.3	Effet du filtre sur le spectre du signal	49
2.4	Gabarit idéal d'un filtre passe-bas	51
2.5	Gabarits réels des 4 types de filtres	53
2.6	temps de propagation de groupe non constant	54
2.7	Synoptique d'un filtre RIF	54
2.8	Gabarit d'un filtre réel	56
2.9	Synoptique d'un filtre RII	57
2.10	Gabarit fréquentiel et réponse impulsionnelle du filtre passe-bas idéal	60
2.11	Gabarit idéal échantillonné	60
2.12	Différentes fenêtres et leurs spectres respectifs	63
2.13	Schéma de la transformation conforme $p \longleftrightarrow z$	65
4.1	Réception	75
4.2	Diagramme de l'oeil	77
4.3	Charlie	78
4.4	Où est Charlie?	79
4.5	P/NRZ/L avec et sans filtre adapté	82
4.6	Allure d'un signal rectangulaire ayant traversé un canal de bande passante limitée	84
4.7	Notion de canal équivalent	84
4.8	Gabarit répliqué dans le domaine fréquentiel	85
4.9	Addition du gabarit $H(f)$ et de ses répliques	86
4.10	Réponse impulsionnelle et spectre d'amplitude du filtre en cosinus surélevé	87

Liste des tableaux

1	Comparatif codage source et codage canal	18
2.1	Caption	59
2.2	Comparaison des fenêtres couramment utilisées (liste non exhaustive)	64

Avant-propos

Ce cours s'adresse aux futurs Ingénieurs des Systèmes Electroniques de la Sécurité Aérienne. Son but principal est de permettre la compréhension des principes essentiels d'une chaîne de communications numériques. Il n'a pas vocation à se substituer aux nombreux ouvrages de référence du domaine, bien plus exhaustifs, mais il vise à donner une vue générale en étudiant chaque étape d'une chaîne de communication numérique. Notamment, on insistera sur les paramètres qui dimensionnent une liaison.

Il correspond aux objectifs règlementaires Atsep suivants :

- ATSEP_QLF_COM_TRP_1_2_1 - Describe parameters for digital transmission
- ATSEP_QLF_COM_VCE_2_3_3 - Explain conversion analogue-digital, digital-analogue

Ce cours est (bien sûr) lié à un certain nombre d'autres enseignements :

- il a pour pré-requis le cours de mathématiques appliquées au signal,
- il a pour "voisins" certains cours de 1ère année qui donneront des informations complémentaires :
 - sur le canal de transmission :
 - * Lignes (automne)
 - * Hyperfréquences (automne), antennes et propagation (hiver)
 - sur la réalisation de composants haute fréquence :
 - * Composants électroniques RF (hiver)
- il sert de pré-requis à :
 - Réseaux (printemps) : compression, corrections d'erreurs,
 - Microcontrôleurs (hiver) : CAN et CNA,

Enfin, en 2ème année, les enseignements "métier" sur les domaines Communication, Navigation, Surveillance (CNS) feront appel à certaines notions vues ici.

Introduction

- Écouter de la musique sur une enceinte Bluetooth ...
- Naviguer sur Internet avec son ordinateur ou son smartphone ...
- Payer ou retirer de l'argent avec sa carte bancaire ...
- Envoyer un "MP" ou un "vocal" sur une application de messagerie instantanée ...

sont autant de gestes devenus banals aujourd'hui. A priori pas grand chose ne les relie, et pourtant ils se basent tous sur le même principe : une *communication numérique*. Une communication numérique implique la transmission d'une information sous forme numérique à partir d'une source vers un (ou plusieurs) destinataire(s).

0.1 Vous avez dit signal ?

L'Union internationale des télécommunications (UIT), dans sa norme G.711, définit un signal comme *un phénomène physique dont une ou plusieurs caractéristiques peuvent varier pour représenter l'information*. Cette définition fait apparaître plusieurs notions fondamentales :

- "physique" : les signaux réels suivent les lois de la physique : énergie finie, amplitude bornée, pas de discontinuités pour des raisons d'inertie, spectre borné en fréquence
- "information" : l'information et le signal sont 2 notions différentes, car que l'information soit numérique ou analogique, elle est transportée par un signal analogique. Par nature, l'information a un caractère aléatoire et par conséquent, les signaux porteurs d'information sont de type aléatoire. En effet, l'information se trouve dans les variations – a priori inconnues. On conçoit aisément l'inverse : un signal sans variation ne fournit quasiment aucune information.

Par exemple :

- un signal continu d'amplitude constante ne transmet aucune information. En revanche, si on fait varier son amplitude, même selon une règle simple du type $+ 5 \text{ V} = "1"$, $- 5 \text{ V} = "0"$, cette dernière est porteuse d'information.
- une sinusoïde d'amplitude, fréquence et phase à l'origine fixées ne transmet aucune information intéressante. En revanche, on peut faire varier ces 3 grandeurs pour représenter l'information (cela sera étudié dans le chapitre 5 sur les modulations)

L'observation des variations sur une certaine durée est représentée dans l'espace fréquentiel. C'est pourquoi l'espace fréquentiel est si souvent utilisé.

0.2 Les transmissions numériques : mais pourquoi donc ?

Depuis maintenant quelques décennies, un grand nombre de systèmes de communication, dans le domaine civil comme dans le domaine militaire, dans le domaine commercial comme dans le do-

0.3 Etapes d'une transmission numérique

maine régalién, ont été progressivement convertis d'une technologie analogique à des technologies numériques.

Pour autant, ce passage n'est pas nécessairement simple : en effet, une transmission numérique nécessite des étapes supplémentaires par rapport à une transmission analogique. En effet, par définition, les transmissions numériques ont pour but d'acheminer des informations numériques en provenance d'une source vers un destinataire. La source émet à un rythme déterminé une suite de symboles, pris dans un alphabet. L'appellation transmissions "numériques" ne doit pas faire oublier que les phénomènes physiques utilisés pour transmettre un signal (propagation radioélectrique, conduction électrique, ...) ainsi que bon nombre de sources (parole, température, ...) sont par nature analogiques. Ce qui est numérique dans ce type de communication, c'est l'information transmise. Cela sous-entend qu'à différentes étapes de la chaîne de communications, on trouvera des conversions du signal pour le rendre numérique (numérisation), mais également pour le rendre analogique (conversion numérique-analogique) dans le but de l'adapter au support de transmission ou au destinataire. Dès lors, quel est l'intérêt des communications numériques ?

- **Une forme connue à l'avance – et donc plus simple à retrouver** : les circuits numériques, par rapport à leurs équivalents analogiques sont moins sujets à la distorsion et aux interférences : en numérique, l'information étant codée sous formes de "1" et de "0", on n'a que deux états possibles, alors qu'en analogique, la grandeur transmise peut valoir "tout et n'importe quoi", ce qui limite la possibilité de rattraper une erreur par des mécanismes et détection et de correction (cela sera étudié plus précisément dans le chapitre 3)
- **Un coût plus faible** : les circuits numériques sont en général plus fiables et peuvent être produits à un coût de revient moindre que les circuits analogiques
- **Multiplexage** : Les signaux numériques permettent de mettre en œuvre des techniques de multiplexage efficaces (temporel, spectral, par code). Elles sont utilisées dans tous les systèmes de communications modernes (faisceaux hertziens, téléphones cellulaires, ...). La transmission analogique utilise le multiplexage spectral, rarement le multiplexage temporel (car difficile à mettre en œuvre) et jamais le multiplexage par codes
- **Maîtrise des composants** : la numérisation de l'information permet de s'affranchir en partie des dispersions sur les caractéristiques des composants utilisés, ce qui permet une reproduction des circuits plus facile.

Néanmoins, les transmissions numériques présentent un inconvénient :

- **la bande passante qu'elles nécessitent** : souvent plus élevée que les systèmes analogiques comparables. De nombreuses recherches (sur les modulations, les techniques de compression, les codes correcteurs d'erreurs) ont pour but principal d'améliorer la qualité des liaisons en réduisant l'occupation spectrale,
- **"The sky is the limit" ? Oui mais...** le traitement numérique du signal étant basé sur du calcul effectué par un processeur spécialisé en traitement du signal (FPGA, DSP, ...), il peut être gourmand en ressources,
- **Synchronisation** : une partie non négligeable de l'effort en transmissions numériques vient de la nécessité de synchronisation, sans quoi les informations peuvent être décodées de façon erronée, même dans une situation dans laquelle on a un faible bruit perturbateur.

0.3 Etapes d'une transmission numérique

Un synoptique exhaustif d'une transmission numérique est donné en figure 1 extraite de [SH20]

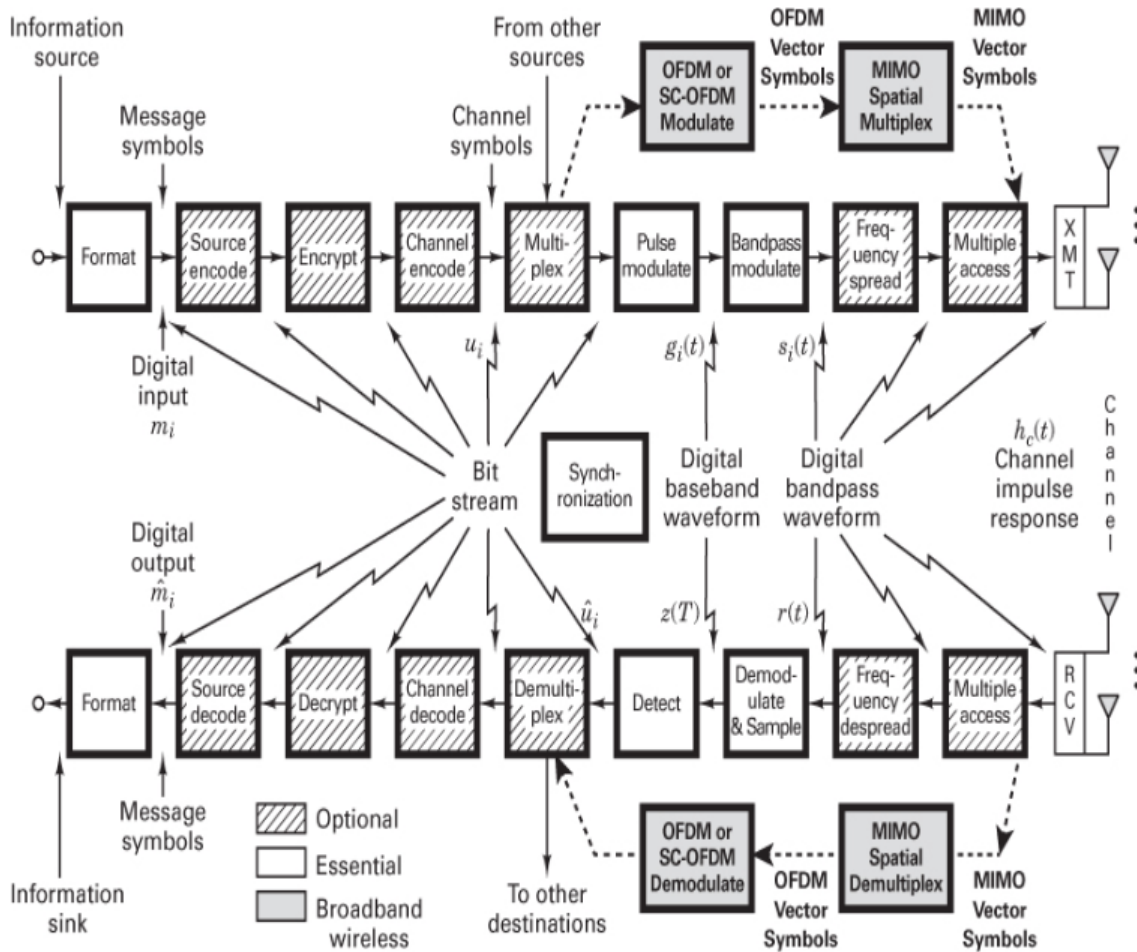


FIGURE 1 – Synoptique d'une transmission numérique

0.4 Le canal de transmission

Ce synoptique est peut paraître un peu abrupt au premier abord, mais il montre que la structure d'une transmission numérique peut différer de manière sensible de la structure d'une autre transmission numérique : les blocs hachurés sont optionnels, et donc peuvent être présents ou non selon leur nécessité. Bien sûr, plus une transmission numérique comporte d'étapes, plus elle est complexe, et donc plus elle coûte cher à mettre en place.

Dans la suite, nous nous "contenterons" de suivre le synoptique plus simple de la figure 2 :

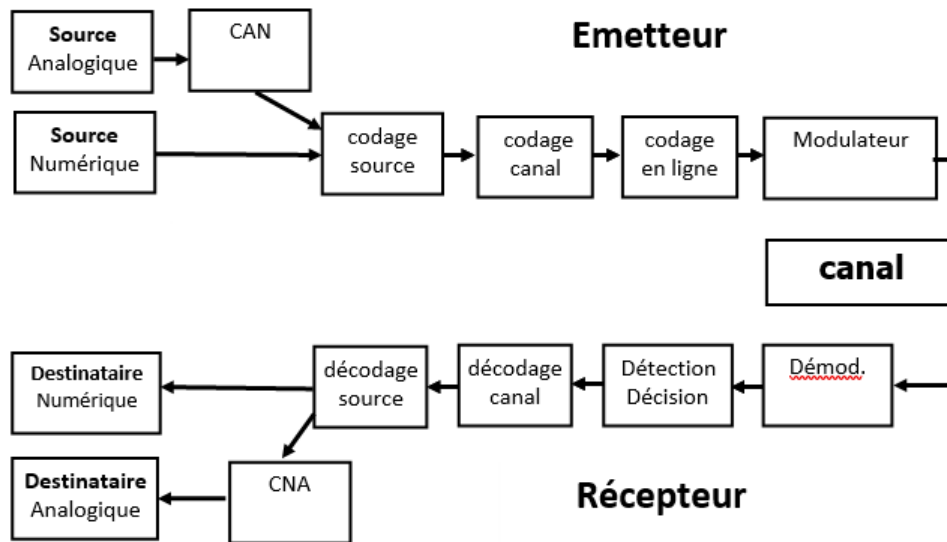


FIGURE 2 – Synoptique simplifié d'une transmission numérique

- la source fournit les informations à transmettre,
- l'émetteur fournit un signal électrique porteur des informations et adapté au canal de transmission,
- le canal de transmission est le support liant l'émetteur et le récepteur,
- le récepteur restitue le message pour le destinataire,
- le destinataire traite le signal reçu

Ces 5 éléments (source, émetteur, canal de transmission, récepteur, destinataire) sont présents dans toute chaîne de communications mais peuvent avoir des structures très différentes en fonction des applications, par exemple il peut manquer le codage source, le modulateur...

0.4 Le canal de transmission

Le canal de transmission correspond au milieu physique permettant à l'émetteur et au récepteur d'établir la liaison. Ses caractéristiques doivent donc être compatibles avec le type de signal que l'on veut transmettre. Comme exemples de canaux de transmission, on peut citer les câbles coaxiaux, les câbles téléphoniques, les fibres optiques, les paires torsadées, l'espace libre, la ionosphère,...

Le canal de transmission est une donnée du problème des communications : on cherche en général à l'utiliser au mieux. Les paramètres essentiels d'un canal de transmission sont les suivants :

Sa bande passante :

- le canal ne laisse pas passer toutes les fréquences
- le signal émis doit donc avoir un gabarit spectral inclus dans la bande passante du canal

La bande passante peut être fixée par les caractéristiques physiques du canal :

- en réseaux locaux, la catégorie des câbles utilisés fixe la bande passante : par exemple, un câble RJ45 de catégorie 5 a une bande passante d'environ 100 MHz,
- l'air a une très large bande passante, permettant aisément la transmission par ondes électromagnétiques

D'autres cours (lignes, antennes, ...) traiteront de façon approfondie le canal de transmission lorsque celui-ci est une ligne, ou l'air.

Le bruit qu'il génère :

- parasites, bruit de fond, ...
- ce bruit viendra se superposer au signal vu par le récepteur, et peut compliquer la détection

Quelle que soit sa bande passante, un canal génère du bruit qui cause des distorsions sur le signal. La réponse d'un canal réel est en général difficile à modéliser précisément.

Un modèle est pourtant très utilisé car il permet de simplifier les calculs : le canal à bruit blanc additif gaussien, appelé Bruit Blanc Additionnel Gaussien (BBAG) (en anglais *Additive White Gaussian Noise (AWGN)*). C'est un modèle fondamental qui permet d'obtenir des résultats théoriques intéressants, que l'on peut parfois extrapoler lorsque cette hypothèse n'est plus vérifiée. Examinons la signification des différents termes :

Bruit blanc : En théorie, un bruit blanc a une densité spectrale de puissance constante. En pratique, on considère le bruit blanc uniquement dans la bande passante du canal de transmission (ce qui se passe en dehors du canal de transmission ne nous intéresse pas puisqu'on considère que le signal ne passe pas du tout). Ce bruit s'ajoute aux autres bruits de la chaîne : interférences (volontaires ou non) dans notre bande passante, bruit thermique, bruit de grenaille, bruit de quantification, non-linéarité des amplificateurs... Pour simplifier le modèle, on additionne tous les bruits et on les considère uniquement comme le bruit du canal de transmission.

Bruit additif : on additionne ce bruit au signal, donc le signal reçu par le récepteur est le signal émis par l'émetteur plus le bruit.

Bruit gaussien : la densité de probabilité de l'amplitude du signal suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = P_{moy})$

Une atténuation :

- par exemple, un signal se propageant dans un câble coaxial sera d'autant plus atténué que la longueur du câble est importante
- autre exemple, les molécules présentes dans l'atmosphère peuvent apporter une atténuation qui s'ajoute à celle due à la propagation en espace libre,

Un temps de propagation :

- ce temps implique un retard,
- ce retard peut lui-même varier dans le temps (phénomène de "gigue")

0.5 Considérations (rapides) sur les éléments de la chaîne

Capacité d'un canal En 1948, Claude Shannon ([Sha48]) établit un certain nombre de fondements mathématiques de la théorie de l'information. Parmi ceux-ci, il démontre un certain nombre de limites théoriques à la capacité de transmission de l'information. On lui doit la formule suivante dont on pourra trouver la démonstration par exemple dans [Pro08] :

Capacité théorique d'un canal

La capacité théorique d'un canal de transmission de bande passante B , en présence d'un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance N_0 , sur lequel est envoyé un signal à la puissance P est donnée par :

$$C = B \times \log_2 \left(1 + \frac{P}{BN_0} \right) \text{ bits/s} \quad (1)$$

$$= B \times \log_2 (1 + SNR) \text{ bits/s} \quad (2)$$

avec

$$\log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2} \text{ (logarithme binaire)}$$

Exercice 1 Capacité

1. Vérifier l'homogénéité de la formule 1
2. Une ligne téléphonique a une bande passante d'environ 3 kHz. Si on suppose $SNR = 3000$, calculer le débit théorique maximal.
3. Une liaison Asymmetric Digital Subscriber Line (ADSL), utilise une bande passante d'environ 1 MHz. On suppose que la ligne entre l'abonné et le fournisseur d'accès est suffisamment courte pour assurer un $SNR = 10^4$. Calculer le débit théorique maximal.

0.5 Considérations (rapides) sur les éléments de la chaîne

0.5.1 La source

Comme son nom l'indique, elle fournit les informations à transmettre. Les informations peuvent être numériques dès le départ (exemple : fichier texte), mais parfois elles sont analogiques. Le synoptique suivant présente ces deux possibilités :

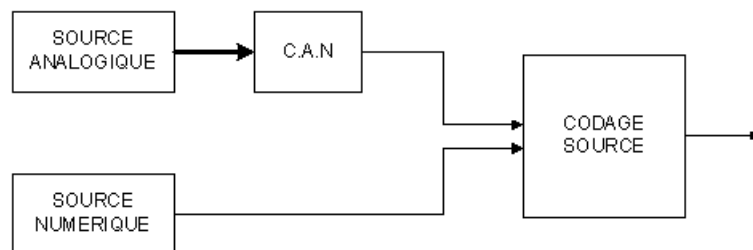


FIGURE 3 – Source

Hypothèses sur les informations entrantes dans le codage source :

- les transmissions sont synchrones : l'émission d'éléments binaires s'effectue à cadence constante,
- les symboles sont indépendants,
- les symboles sont équiprobables, ce qui implique $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(0) = 0.5$.

La conversion analogique numérique inclut notamment l'échantillonnage et la quantification. L'échantillonnage consiste à prélever à des instants discrets des valeurs du signal. La quantification consiste à choisir un nombre fini de valeurs parmi l'infinité de valeurs possibles du signal. Cette opération n'est donc pas anodine et altère le signal.

Par exemple, la parole est couramment échantillonnée à 8 kHz, et quantifiée sur 8 bits (on ne garde que 256 niveaux). Le débit de la source est donc de $8000 \times 8 = 64$ kbits/s. C'est une valeur de référence en téléphonie.

Pour la musique, on échantillonne en général à plus haute fréquence, par exemple 44.1 kHz pour le format .wav des CD audio, avec une quantification sur 16 bits, le débit est de 700 kbits/s pour une voie, soit 1,4 Mbps en stéréo.

Ce dernier exemple montre que le débit obtenu peut être rapidement important dès que l'on souhaite une quantification précise.

Remarque : la conversion analogique-numérique est soit placée dans l'émetteur, soit placée dans la source.

0.5.2 Le codage source

Le codage de source élimine au maximum la redondance du signal de la source pour ne transférer que les éléments nécessaires et ainsi réduire le nombre de bits à transmettre (ou à stocker).

L'exemple historique est le code MORSE, pour lequel les caractères les plus fréquents possédaient les codes les plus courts, permettant ainsi de réduire la durée de manipulation de l'opérateur et donc la durée de la transmission.

Il existe deux techniques de codage de source ; la compression sans perte et la compression avec pertes :

La compression sans perte est utilisée lorsque l'on souhaite récupérer exactement les données. Exemple : ZIP, RAR...

Pour certaines applications (image, audio et vidéo en particulier), il n'est pas nécessaire de récupérer exactement le signal original, mais un signal suffisamment proche pour que les différences soient indécélables (ou supportables) par l'utilisateur. Exemple : MP3, JPEG, MPEG3,...

0.5.3 Le codage canal

Le codage canal ajoute une redondance structurée au signal pour le protéger des erreurs de transmission que le canal pourrait provoquer. Il s'agit des codes correcteurs d'erreurs.

L'interleaver (entrelaceur) : permet de disperser les erreurs, les erreurs non consécutives sont plus faciles à corriger.

Le scrambler (mélangeur/embrouilleur/brasseur) : mélange les bits. Le scrambler a plusieurs fonctions qui ne sont pas forcément en lien avec le codage canal (exemple : cryptage), dans la littérature il ne se trouve donc pas toujours inclus dans le chapitre codage canal.

0.5 Considérations (rapides) sur les éléments de la chaîne

Dans le décodage canal nous retrouvons ces 3 étapes en ordre inverse : Descrambler – Deinterleaveur – Correcteur d’erreur

Le tableau 1 présente de manière synthétique la différence entre codage source et codage canal. Codage source et codage canal ne sont pas systématiquement présents, mais lorsqu’ils le sont, alors un décodage source et/ou canal doit être mis en place côté récepteur.

	Codage source	Codage canal
But	Optimiser le débit binaire	Protection contre le bruit et les perturbations
Moyen	Suppression de la redondance	Diminuer la probabilité d’erreur par bit
Techniques	Codage "sans pertes" ou "avec pertes"	Codes détecteurs ou correcteurs d’erreurs

TABLE 1 – Comparatif codage source et codage canal

0.5.4 Codage en ligne

Le rôle de l’émetteur est de fournir un signal électrique capable de véhiculer l’information dans le canal disponible.

Le codage en ligne consiste à transformer la suite de bits (ou de symboles) en une suite d’impulsions électriques (ou optique). Les signaux obtenus ont en général une répartition de la puissance concentrée dans les basses fréquences, on les nomme signaux bande de base, et peuvent donc être transmis directement sur un canal de type passe-bas (câble réseau, coaxial,...).

Exemple : codage P/NRZ : un "1" est matérialisé par un niveau constant positif $+V$, un "0" est matérialisé par un niveau constant négatif $-V$.

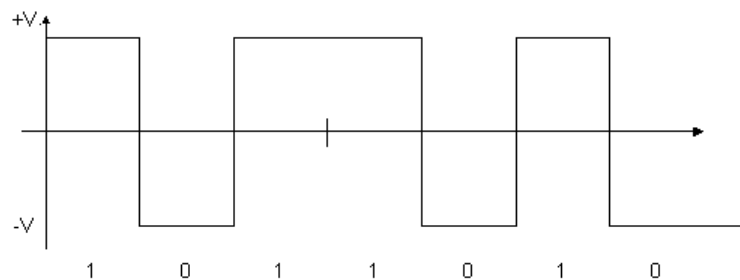


FIGURE 4 – Codage P/NRZ, 1 symbole = 1 bit

Dès que l’on a effectué ce codage, le signal est à nouveau analogique (l’information véhiculée reste numérique).

Les signaux utilisés pour matérialiser les bits peuvent être orthogonaux, antipodaux, bi-orthogonaux,...

0.5.5 Modulation

Pour les transmissions hertziennes, le signal est émis par une antenne sous forme d’onde électromagnétique dans l’espace libre, ce signal est reçu par une (des) antenne(s), il est nécessaire de

transposer le spectre dans le canal alloué par l'ANFR (Agence Nationale des Fréquences), car plusieurs signaux émis à la même fréquence se brouilleraient.

La modulation permet également le multiplexage : regroupement, sur une voie unique, de signaux issus de plusieurs voies. Il existe notamment les multiplexages temporel (les différents signaux sont émis tour à tour) et fréquentiel (une bande de fréquence est partagée entre plusieurs canaux de fréquences, chaque canal transporte une information différente des autres canaux).

0.5 Considérations (rapides) sur les éléments de la chaîne

Chapitre 1

Numérisation

1.1 Principe

Avant d'effectuer un quelconque traitement numérique sur un signal... une condition nécessaire est que ce dernier soit numérique (*digital* en anglais). Soit il l'est par nature, soit alors il est analogique, ce qui impose de passer par une phase dite de numérisation, qui consiste à transformer un signal analogique en un signal numérique. Elle est réalisée avec un Convertisseur Analogique Numérique (CAN) (en anglais *Analog to Digital Converter (ADC)*). Nous étudierons 3 étapes :

1. Filtre anti-repliement : pour éviter l'enchevêtrement des spectres
2. Echantillonnage : discrétisation du signal en temps
3. Quantification : discrétisation des valeurs du signal (on distingue parfois deux opérations dans cette dernière : la quantification et le codage)

L'opération inverse existe, et est effectuée par un Convertisseur Numérique Analogique (CNA) (en anglais *Digital to Analog Converter (DAC)*). Nous étudierons 2 étapes :

1. Faire correspondre les valeurs numériques aux valeurs analogiques et relier les impulsions (interpolation)
2. Filtre de restitution : donne une forme naturelle au signal

Chacune des étapes d'un CAN et d'un CNA modifie le signal, il faut donc les paramétrer convenablement. Nous trouvons des CAN et des CNA dans de nombreux systèmes, pas uniquement les chaînes de transmission numérique.

Souvent, avant un CAN, se trouve un transducteur transformant une grandeur physique en une grandeur électrique (exemples : microphone, hydrophone, thermorésistance, photodiode,...).

Après un CNA se trouve souvent un transducteur transformant une grandeur électrique en une autre grandeur physique (exemple : un haut-parleur, des écouteurs, un casque audio, une LED, un tube cathodique,...)

1.2 Conversion analogique numérique

1.2.1 Échantillonnage

1.2.1.1 Définitions et paramètres

L'échantillonnage prélève les valeurs d'un signal continu à des instants discrets. Ces instants discrets sont généralement régulièrement espacés d'une valeur T_e appelée période d'échantillonnage. L'échantillonnage effectue donc la discrétisation de l'échelle temporelle.

On appelle fréquence d'échantillonnage du signal l'inverse de la période d'échantillonnage :

$$F_e = \frac{1}{T_e} \quad (1.1)$$

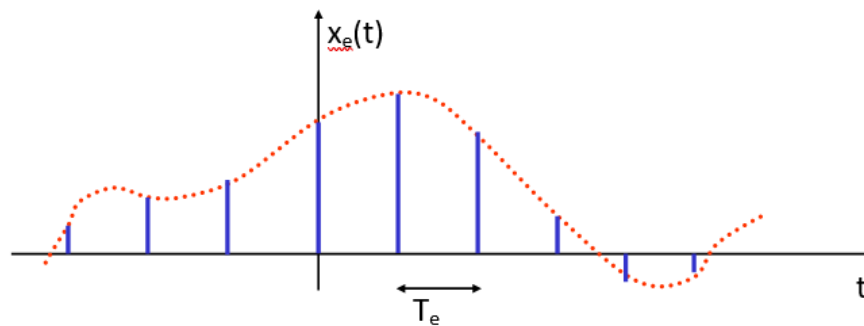


FIGURE 1.1 – Signal analogique (en rouge) échantillonné (en bleu)

Un signal temporel échantillonné est :

- un signal analogique $x(t)$...
- multiplié par un peigne de Dirac $\sum_k \delta(t - kT_e)$

Le résultat étant donc le produit $x(t) \times \sum_k \delta(t - kT_e)$.

$$x_e(t) = x(t) \times \sum_n \delta(t - nT_e) \Leftrightarrow X_e(f) = X(f) * \sum_n \delta(f - nF_e) \quad (1.2)$$

La période de répétition du spectre $X(f)$ est F_e , la fréquence d'échantillonnage, comme on le voit sur la figure 1.2

Or les signaux physiques (réels) sont à spectre borné, c'est à dire que l'énergie du signal devient négligeable au-delà d'une fréquence F_{max} .

L'échantillonnage peut alors donner des résultats différents suivant le rapport entre F_{max} et F_e , comme le montre la figure 1.4 :

- Dans le premier cas, les spectres sont enchevêtrés : le spectre de $X_e(f)$ étant la somme des motifs, on ne retrouve pas dans le spectre du signal échantillonné le spectre initial $X(f)$
- Dans le deuxième cas, la fréquence d'échantillonnage est supérieure, et les spectres sont adjacents. C'est un cas limite.
- Dans le troisième cas, la fréquence d'échantillonnage est suffisamment élevée pour que les motifs soient disjoints.

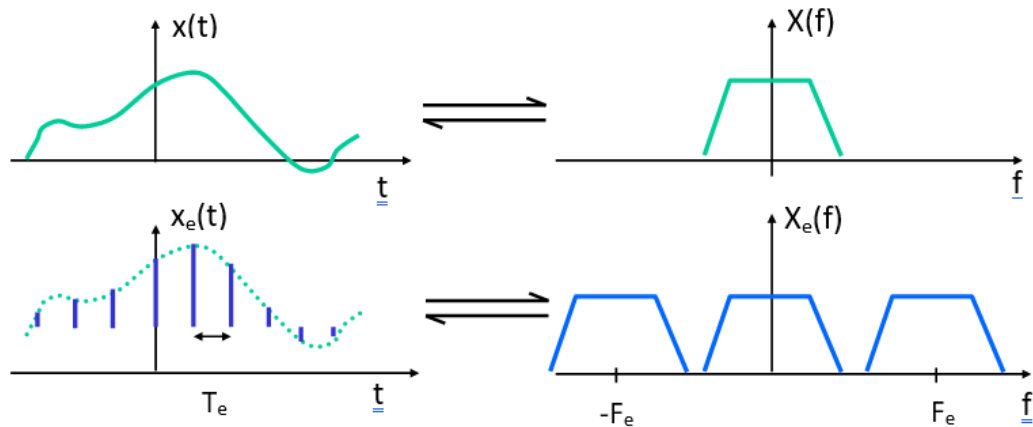


FIGURE 1.2 – Spectre du signal échantillonné

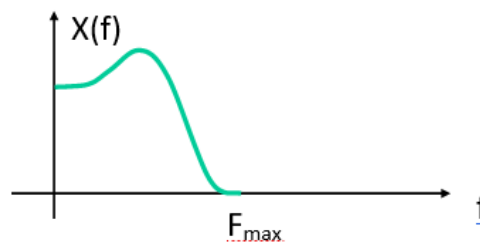


FIGURE 1.3 – Spectre d'un signal passe-bas réel

1.2.1.2 Condition de Shannon

La question que l'on doit se poser lorsqu'on échantillonne un signal est de savoir si on saura ensuite le reconstituer convenablement. La figure 1.4 donne une indication importante. En effet, si la fréquence d'échantillonnage est suffisamment élevée pour que les motifs soient disjoints, on peut facilement récupérer par filtrage passe-bas le signal initial. Par contre, si les motifs se superposent, un filtrage passe-bas (ou autre!) ne peut pas redonner le signal initial : on appelle ce phénomène le *repliement* de spectre (*aliasing* en anglais).

Pour pouvoir reconstituer le signal d'origine, il y a donc deux conditions :

- Que le spectre du signal initial soit borné ($X(f) \approx 0$ pour $f \geq F_{max}$)
- Que la fréquence d'échantillonnage F_e soit au moins égale à 2 fois la fréquence maximum F_{max} du signal, pour que le spectre du signal échantillonné présente des motifs disjoints.

La condition de Shannon résume ces conditions :

$$F_e \geq 2 \times F_{max} \quad (1.3)$$

La valeur limite $2 \times F_{max}$ se nomme fréquence de Nyquist, ou éventuellement fréquence de Shannon-Nyquist... mais pas fréquence de Shannon.

1.2.2 Repliement de spectre

Comme vu précédemment, ce phénomène arrive lorsque $F_e < 2F_{max}$. Tâchons d'en comprendre la conséquence en temporel.

1.2 Conversion analogique numérique

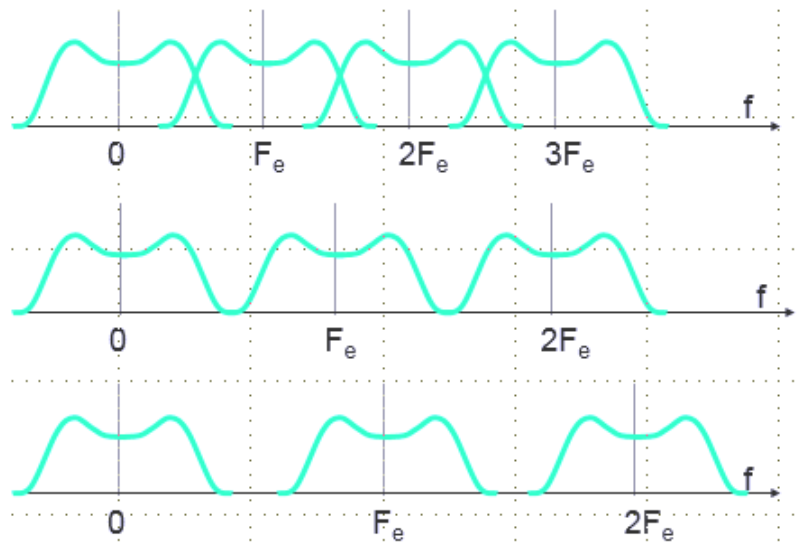


FIGURE 1.4 – Spectre du signal échantillonné avec différentes valeurs de F_e

La figure 1.5 montre un cas dans lequel on a respecté la condition de Shannon : la reconstruction du signal en pointillés à partir des échantillons en bleu doit pouvoir se faire sans problème.

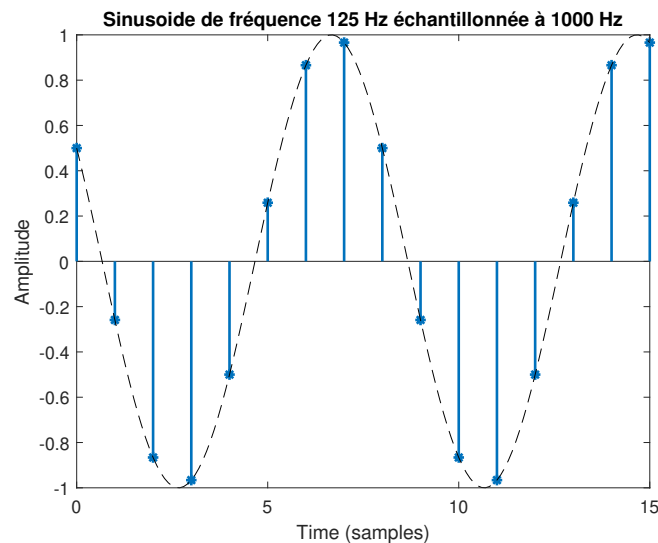


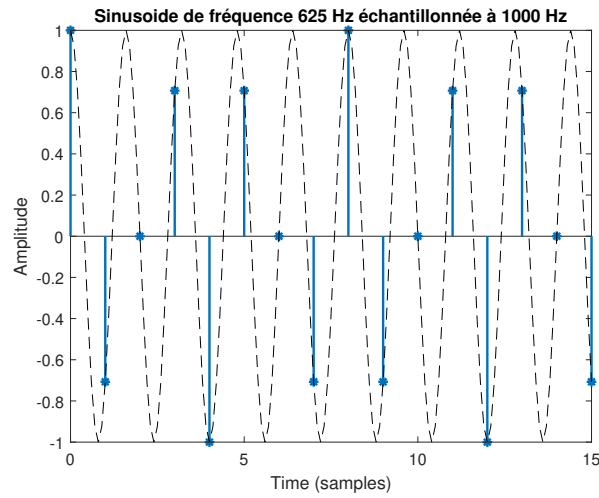
FIGURE 1.5 – Échantillonnage respectant la condition de Shannon

En revanche, les figures 1.6 montre un cas dans lequel on n'a pas respecté la condition de Shannon : la reconstruction du signal en pointillés donne lieu à une erreur sur la fréquence de la sinusoïde reconstituée : elle est "vue" à 375 Hz alors que sa fréquence valait au départ 625 Hz.

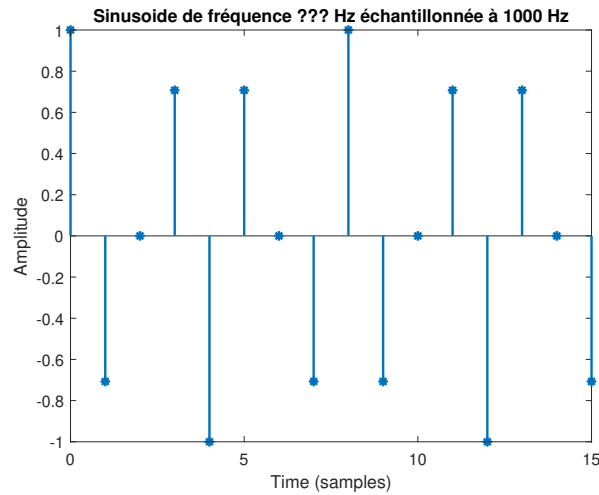
Interprétons ce résultat a priori surprenant en représentation fréquentielle : voir figure 1.7

1.2.2.1 Choix de F_{max}

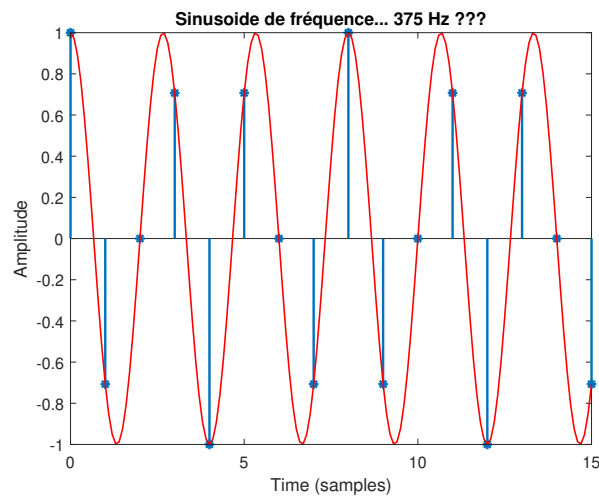
La plupart des signaux que l'on veut échantillonner peuvent avoir une bande passante relativement large au départ. Pour éviter d'utiliser une fréquence d'échantillonnage trop grande (ce qui nécessite une électronique plus rapide et plus coûteuse), on commence par limiter la bande



(a) Échantillonnage ne respectant pas la condition de Shannon



(b) Échantillons de la sinusoïde précédente



(c) Sinusoïde reconstituée

FIGURE 1.6 – Illustration du phénomène de repliement de spectre

1.2 Conversion analogique numérique

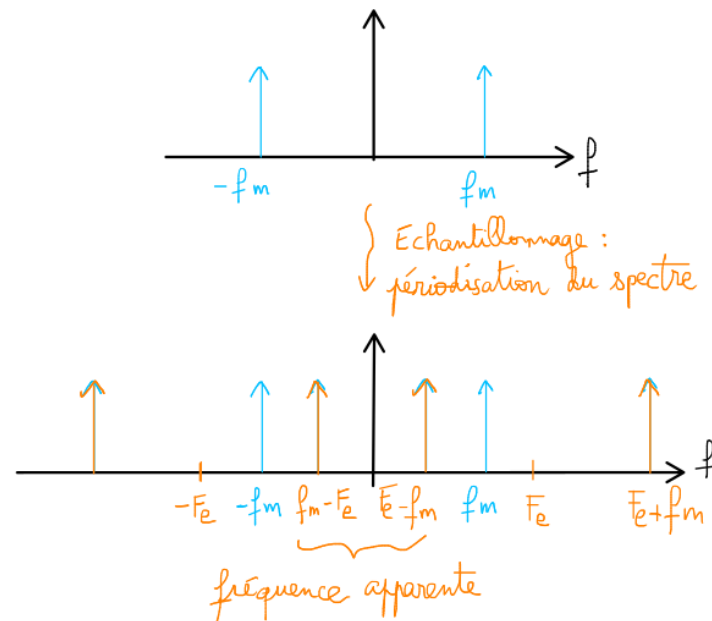


FIGURE 1.7 – Synoptique d’une transmission numérique

passante du signal à l’aide d’un filtre. Suivant les applications, la partie négligée sera plus ou moins importante, en fonction de la qualité de restitution souhaitée

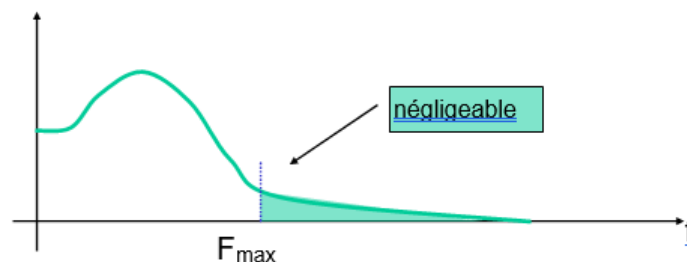


FIGURE 1.8 – Spectre d’un signal physique réel

Exemples :

- Pour la téléphonie classique, on se limite à la bande 300 - 3400 Hz, qui correspond à l’occupation spectrale de la voix, on peut donc utiliser une fréquence d’échantillonnage de 8 kHz (un peu supérieure à $2 F_{\max}$)
- Pour du son haute-fidélité (type CD audio), on garde une bande-passante 20 - 20000 Hz qui correspond à la bande-passante d’une bonne oreille, ce qui nécessite une fréquence d’échantillonnage de 44,1 kHz (un peu supérieure à $2 F_{\max}$),
- Pour le mp3, F_{\max} varie selon le débit souhaité, par exemple 8, 12, 16, 20 kHz

1.2.2.2 Filtre anti-repliement

Lorsque la condition de Shannon n’est pas respectée, les répliques du spectre du signal échantillonné se recouvrent partiellement (1er cas de la figure 1.4). Ce phénomène est préjudiciable pour la restitution du signal analogique. On parle de repliement spectral. Le motif de base est alors recouvert, au moins partiellement, par sa première réplique centrée sur F_e . Dans ce cas on ne peut pas reconstituer sans erreur le signal d’origine.

La solution consiste donc à filtrer le signal avant l'échantillonnage, de manière à limiter son spectre à une fréquence inférieure à $\frac{F_e}{2}$. Ce filtre passe-bas porte le nom de filtre anti-repliement (*anti-aliasing* en anglais). Il est obligatoirement analogique car il précède la numérisation.

Le filtre anti-repliement n'est pas nécessaire lorsque le repliement est négligeable, c'est-à-dire lorsqu'il reste très peu de signal au-delà de F_{max} .

1.2.2.3 Echantillonnage non-uniforme (irrégulier)

L'objectif est de ne pas prélever des échantillons qui fournissent peu ou pas d'information, afin de limiter le débit et le stockage. Dès lors, comment sait-on que certains échantillons fournissent peu ou pas d'information? Lorsque les échantillons précédents fournissent, à priori, des indications sur les échantillons suivants.

Exemple : Lorsque certains signaux ont une série d'échantillons de valeurs nulles, il est très probable que les échantillons suivants soient nuls et donc on ne va en prélever qu'un sur 4 jusqu'à une « reprise » du signal.

C'est un domaine très complexe. Cela fait écho à de la compression de données avec pertes.

1.2.3 Quantification

La quantification succède l'opération d'échantillonnage dans le processus de numérisation d'un signal. Elle permet de passer d'un nombre infini de valeurs analogiques à un nombre fini de valeurs numériques.

1.2.3.1 Principe

Le principe de la quantification est présenté sur les figures suivantes. Le même signal est quantifié de deux manières différentes.

1er exemple Dans le premier cas, le signal est quantifié sur seulement 2 intervalles, ce qui nécessite 1 bit pour le codage. Le codage se fait par comparaison à un seuil (noté « a » sur le graphe 1.9) :

$$x_q[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } x(n \times T_e) > a \\ 0 & \text{si } x(n \times T_e) \leq a \end{cases}$$

Sortie du CAN : 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1

2ème exemple Le signal est cette fois quantifié sur 4 intervalles, ce qui nécessite 2 bits pour le codage. 3 seuils a, b, c délimitent 4 intervalles (voir figure 1.10). La précision de la représentation du signal est meilleure que dans l'exemple précédent.

Sortie du CAN : 10 10 11 00 10 11 10 01 11 00 10 11

De façon générale

si on dispose de n bits pour coder chaque état, le nombre maximum d'intervalles différents qu'il est possible de quantifier est $N = 2^n$.

1.2 Conversion analogique numérique

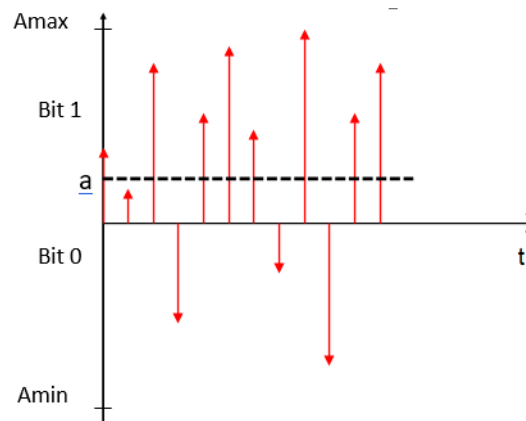


FIGURE 1.9 – Quantification sur 1 bit

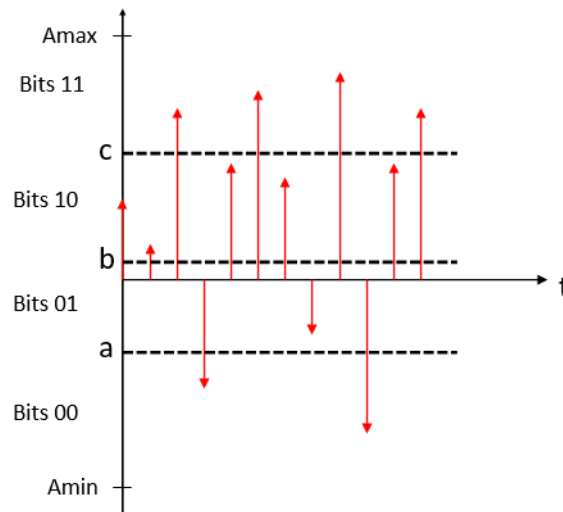


FIGURE 1.10 – Quantification sur 2 bits

Nous voyons bien la problématique de la quantification : il faut suffisamment d'intervalles de quantification pour obtenir une précision suffisante, mais augmenter le nombre d'intervalles implique une augmentation du nombre de bits à transmettre. Nous verrons plus loin que cette précision se mesure sous la forme rapport signal sur bruit de quantification.

Attention : le débit est modifié par les opérations suivantes : codage source et/ou codage canal. Ce n'est donc pas forcément le débit en sortie du CAN qui passera dans le canal de transmission.

Le débit binaire "brut" en sortie du CAN est donc donné par :

$$D = n \times F_e \text{ bits/s (ou bps)} \quad (1.4)$$

1.2.3.2 Définitions

Plage de conversion La plage de conversion d'un CAN est le domaine de variation de son amplitude en entrée. En pratique il existe 2 cas :

- $A_{max} = -A_{min}$: la plage de conversion est alors $[-A_{max}, A_{max}]$
- $A_{min} = 0$: la plage de conversion est alors $[0, A_{max}]$

Il faut donc adapter notre signal d'entrée à la plage de conversion. Si le signal d'entrée a des valeurs trop grandes, on utilise par exemple un pont diviseur. Si le signal d'entrée a des valeurs petites, il est possible de l'indiquer au CAN en mettant la tension de référence (appelée V_{ref}) à la valeur maximale de notre signal. La plage de conversion sera alors $[-V_{ref}, V_{ref}]$ ou $[0, V_{ref}]$.

Selon le modèle de CAN, A_{max} va de 1 à 10 V.

Pas, intervalle La plage de conversion peut s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^N \Delta q_i$. Les Δq_i sont appelés intervalles de quantification ou intervalles de discrétisation.

On trouve également le terme de pas de quantification, généralement employé pour désigner la taille des intervalles dans le cas d'une quantification uniforme (quantification uniforme = pas de quantification constant).

Niveaux Il existe 2 sortes de niveaux :

- dans le CAN les niveaux de quantification (aussi appelés seuils) délimitent les intervalles. a b et c dans l'exemple de la page précédente.
- dans le CNA (que nous verrons dans le chapitre suivant) à chaque valeur numérique en entrée correspond une valeur analogique, cette valeur analogique est appelée niveau de reconstruction.

Il y a donc un niveau de quantification de moins que de niveaux de reconstruction. Le nombre de niveaux de reconstruction correspond au nombre d'intervalles $N = 2^n$.

Dynamique Elle désigne le nombre de bits n ou le nombre d'intervalles. Selon le modèle de CAN la dynamique va de 8 à 24 bits.

Ecrêtage Parfois le signal a des valeurs fortes de probabilité faible qui nous obligeraient à « écraser » la plage des valeurs du CAN afin d'en tenir compte. Il peut être alors souhaitable d'écarter ces valeurs fortes, ainsi la plage des valeurs du CAN est mieux utilisée au détriment des valeurs fortes de probabilité faible. Exemple : en téléphonie, on écrète les valeurs dont la probabilité est inférieure à 10^{-5} .

Résolution Taille moyenne des intervalles de quantification (donc le pas pour une quantification uniforme) = $\frac{\text{plage de conversion}}{2^n}$

Cadence Temps de conversion, de inférieur à très inférieur à 1 ms. Les CAN sont des systèmes synchrones donc avec une horloge, tout se fait en nombre de cycles d'horloge.

1.2.3.3 Exercices

Exercice 2 Microcontrôleurs

Les microcontrôleurs STM32 que vous utiliserez dans quelques semaines utilisent des CAN de 0 à 3.3 V avec 12 bits de quantification uniforme et une fréquence d'échantillonnage de 1.5 MHz. Quelle est :

1. la plage de conversion ?
2. le pas ?

1.2 Conversion analogique numérique

3. la dynamique ?
4. la résolution ?
5. le débit en sortie du CAN ?

Exercice 3 CD audio

Sur un CD audio :

- durée = 74 minutes
 - signal quantifié sur 65536 intervalles
 - $F_e = 44.1$ kHz
 - Stéréo (gauche & droite)
1. Calculer la capacité de stockage du CD en Mo (1 octet = 8 bits)
 2. Calculer le débit minimal pour une écoute en continu (streaming)

1.2.3.4 Bruit de quantification

La quantification est une opération qui introduit une erreur dans la représentation du signal. En effet, à une plage de valeurs en entrée du CAN correspond une valeur binaire en sortie, et à cette valeur binaire en entrée du CNA correspond une seule valeur analogique.

Cette erreur dépend de la loi de quantification choisie, du nombre de niveaux N et de F_e .

Le bruit de quantification représente la différence entre le signal réel et le signal quantifié :

$$e_q(t) = x(t) - x_q(t) \quad (1.5)$$

Dans le cas d'une quantification uniforme, et sous certaines hypothèses d'équirépartition et d'indépendance de l'erreur (hypothèses de Sheppard) que l'on retrouve dans [Ben48], on peut supposer que le bruit de quantification se répartit uniformément sur l'intervalle $\left[-\frac{\Delta q}{2}, \frac{\Delta q}{2}\right]$. On montre alors que la puissance du bruit de quantification est égale à :

$$P_{\text{bruit}}^{\text{quant}} = \frac{\Delta q^2}{12} \quad (1.6)$$

On montre alors que pour un signal sinusoïdal en entrée d'amplitude "pleine" en entrée, la dynamique du CAN vaut donc $2A$, et on a $\Delta q = \frac{2A}{2^n}$. Alors,

$$P_{\text{bruit}}^{\text{quant}} = \left(\frac{2A}{2^n}\right)^2 \frac{1}{12} = \frac{A^2}{3 \times 2^{2n}} \quad (1.7)$$

La puissance moyenne du signal valant $\frac{A^2}{2}$, le rapport signal à bruit de quantification s'écrit :

$$SNR_{\text{quant}} = \frac{3}{2} 2^{2n} \quad (1.8)$$

Exprimé en dB, il vaut :

$$SNR_{\text{quant}} = 6,02 \times n + 1,76 \text{ dB} \quad (1.9)$$

On retiendra donc qu'en général,

Gain en SNR de quantification

Un bit de codage supplémentaire = + 6 dB en rapport signal à bruit de quantification

La contrepartie est que cela augmente le débit nécessaire.

1.2.3.5 Exemple de signal quantifié de manière non uniforme : la voix

Parmi les nombreuses lois de quantification non uniformes que l'on peut utiliser pour améliorer le codage, la loi A est particulièrement importante car elle est normalisée par l'UIT-T pour le codage des signaux téléphoniques. Cette loi est adaptée aux signaux téléphoniques pour lesquels les valeurs faibles sont bien plus fréquentes que les valeurs fortes. On modélise la répartition de l'amplitude des signaux téléphoniques par une loi de Laplace de densité de probabilité décrite ci dessous et représentée figure :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \exp\left(-\sqrt{2}\frac{|x|}{\sigma}\right)$$

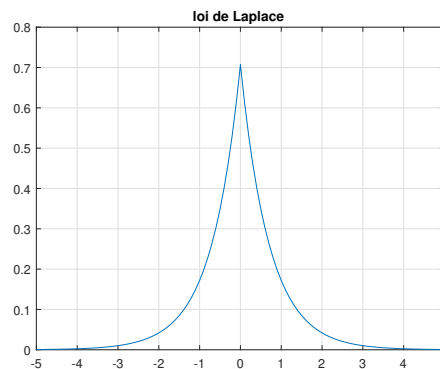


FIGURE 1.11 – Densité de probabilité d'une loi de Laplace

Le principe est de diviser la dynamique du codeur en 16 segments (13 segments au final car 4 sont colinéaires) approximant la loi logarithmique suivante :

$$y(x) = \begin{cases} \text{sgn}(x) & \frac{A|x|}{1+\ln A} \text{ pour } |x| < \frac{1}{A} \\ \text{sgn}(x) & \frac{1+\ln A|x|}{1+\ln A} \text{ pour } \frac{1}{A} < |x| < 1 \end{cases} \quad (1.10)$$

La pente du segment linéaire à l'origine est appelée taux de compression. Sa valeur caractérise l'augmentation de dynamique du codeur pour les faibles valeurs. Pour la loi A, il est égal à 16, ce qui donne A=87.6.

Cette loi est utilisée en Europe et en Afrique. Aux Etats-Unis et au Japon, une autre loi est utilisée, la loi μ .

La figure 1.12 représente les deux lois pour différentes valeurs des paramètres A et μ (abscisses : valeurs, ordonnées : fonction de répartition).

Les deux lois ont bien le même objectif : quantifier les signaux de faibles valeurs avec plus de niveaux que ceux de fortes valeurs, moins fréquents.

Quantification normalisée par l'UIT-T (UIT-T G711) : La loi A est approximée par 16 segments (donc 4 bits), cette opération correspond à une compression de dynamique. Chaque

1.2 Conversion analogique numérique

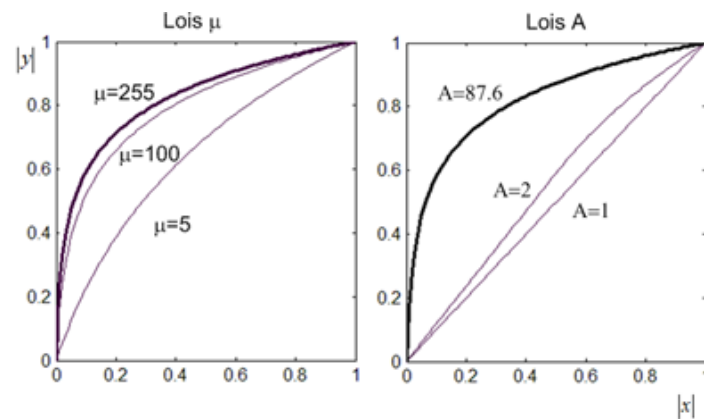


FIGURE 1.12 – Loi μ , loi A

segment est quantifié uniformément sur 16 intervalles (donc 4 bits). Donc chaque intervalle en entrée de la quantification est représenté par 4+4=8 bits en sortie de la quantification.

Les segments sont choisis tel qu'ils aient chacun la même probabilité d'apparition. Effectivement sur l'axe des ordonnées du graphe en figure 1.13, nous constatons que chaque segment correspond à une probabilité d'apparition de $0.125/2$ ($/2$ car le graphe est donné en valeurs absolues).

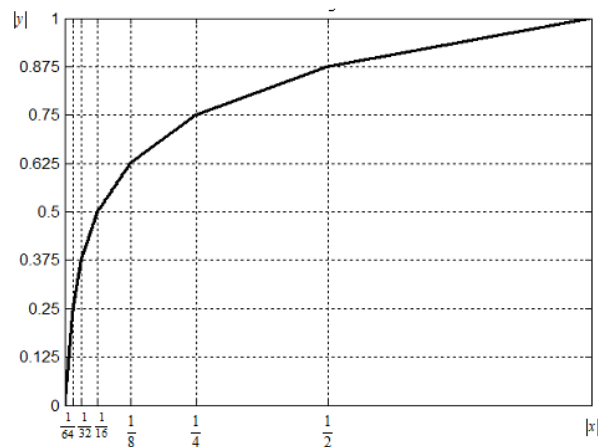


FIGURE 1.13 – Segments de la loi A

Le codage retenu pour la loi A est le suivant : 8 bits dont :

- 1 bit de signe (codage binaire replié : les valeurs positives commencent par « 1 » et les négatives par « 0 »)
- 3 bits pour le numéro du segment
- 4 bits de quantification uniforme par segment

Après codage binaire replié, les bits pairs sont inversés, évitant la présence d'un trop grand nombre de zéros dans les mots du code en présence de signaux de faibles valeurs. On se rapproche ainsi d'une équiprobabilité des 0 et des 1. Les valeurs de sortie sont comprises entre -128 et 128 (0 n'est pas codé).

Le tableau 1.14 représente le codage pour les valeurs positives.

En théorie : En comparaison à une quantification uniforme sur 8 bits, la loi A augmente la dynamique de codage de 24 dB pour les niveaux les plus faibles, mais la diminue de 12 dB pour

Numéro du segment	Valeur du codeur	Codage binaire replié	Codage final (après inversion des bits pairs)
7	128	1 111 1111	1 010 1010
	:	:	:
	113	1 111 0000	1 010 0101
6	112	1 110 1111	1 011 1010
	:	:	:
	97	1 110 0000	1 011 0101
5	80	1 101 1111	1 000 1010
	:	:	:
	65	1 101 0000	1 000 0101
4	64	1 100 1111	1 001 1010
	:	:	:
	50	1 100 0000	1 001 0101
3	64	1 011 1111	1 110 1010
	:	:	:
	49	1 011 0000	1 110 0101
2	48	1 010 1111	1 111 1010
	:	:	:
	33	1 010 0000	1 111 0101
1	32	1 001 1111	1 101 1010
	:	:	:
	1	1 000 0000	1 101 0101

FIGURE 1.14 – Tableau de codage des valeurs positives

1.3 Conversion numérique analogique

les valeurs les plus fortes. Les niveaux faibles étant plus fréquents que les forts, au final on peut considérer un gain théorique de 18 dB (ce qui revient à dire que 8 bits de quantification loi A correspond à 11 bits de quantification uniforme puisque nous avons vu que 1 bit supplémentaire correspond à une amélioration de 6 dB).

En réalité : le gain n'est "que" de quelques dB.

1.2.3.6 Codage MIC

Le codage Modulation par Impulsions Codées (MIC) est très utilisé : pour l'aviation civile, on utilise des liens à 2048 kbits/s (normes G703/G704) permettant de véhiculer 32 voies en multiplexage temporel : 30 voies téléphoniques + 2 voies utilisées pour la signalisation.

2048 kbit/s = 32 voies × 8 bits × 8 kHz : 32 voies de multiplexage temporel, quantification sur 8 bits (loi A), échantillonnage à 8 kHz ($F_{\max} = 3.4$ kHz)

La durée de la trame complète vaut donc $1/8000 = 125 \mu\text{s}$.

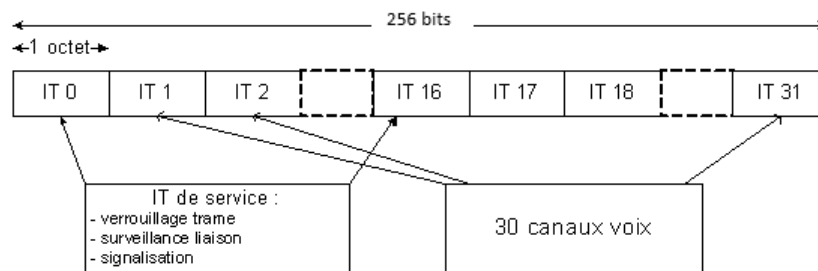


FIGURE 1.15 – Trame MIC

1.3 Conversion numérique analogique

A la réception d'un signal numérique, on souhaite parfois le restituer en analogique avec un CNA (ex : une enceinte diffusant de la musique streamée).

Ca part mal! En théorie, on peut "facilement" retrouver le signal initial $x(t)$ à partir du signal échantillonné, en ayant respecté dans le CAN la règle de Shannon. Spectralement, cela correspond à extraire la partie centrale du spectre périodisé, et à éliminer les "répliques". Cela donne :

$$X(f) = X_e(f) \times \frac{1}{F_e} \text{rect}_{F_e}(f) \quad (1.11)$$

En appliquant une transformée de Fourier inverse à 1.11, on trouve

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_e(t) * \left(\frac{1}{F_e} \frac{\sin(\pi F_e t)}{\pi t} \right) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \delta(t - kT_e) * \frac{\sin(\pi F_e t)}{\pi F_e t} \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \left(\delta(t - kT_e) * \frac{\sin(\pi F_e t)}{\pi F_e t} \right) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \frac{\sin(\pi F_e (t - kT_e))}{\pi F_e (t - kT_e)} \tag{1.12}
 \end{aligned}$$

L'interpolateur idéal suppose donc de connaître, d'après 1.12, tous les $x[k]$, pour $k \in \mathbb{Z}$ – donc les valeurs passées *et futures*!. Cela n'est pas possible, l'interpolateur idéal est donc irréalisable (au demeurant, on pouvait le prévoir car réaliser un filtre de gabarit exactement rectangulaire est une gageure). On devra donc se "contenter" d'une CNA non optimale, mais réalisable.

La conversion numérique - analogique se passera en trois étapes :

- faire correspondre les valeurs numériques à des valeurs analogiques
- relier les échantillons (interpolation)
- donner une allure plus naturelle (moins anguleuse) au signal reconstitué (filtre de restitution)

1.3.1 Interpolation

Dans un premier temps, le CNA fait correspondre à une valeur numérique (qui correspond à une plage de valeurs analogiques dans le CAN), une seule valeur analogique. Il y a 3 méthodes (chacune portant bien son nom) : une quantification par défaut, une quantification par excès et une quantification centrée. En général le nombre de bits d'une quantification est suffisamment important pour que le choix soit négligeable.

Ensuite, le CNA relie les échantillons, nous allons voir 2 interpolations différentes (le bloqueur d'ordre 0 et l'interpolateur linéaire) et leur influence sur le signal.

1.3.1.1 Bloqueur d'ordre 0

Le plus simple (et également très utilisé) est le bloqueur d'ordre 0. Le signal est extrapolé à partir de la valeur précédente, et maintenu jusqu'à l'échantillon suivant.

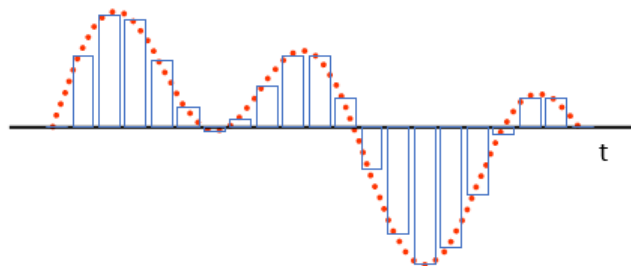
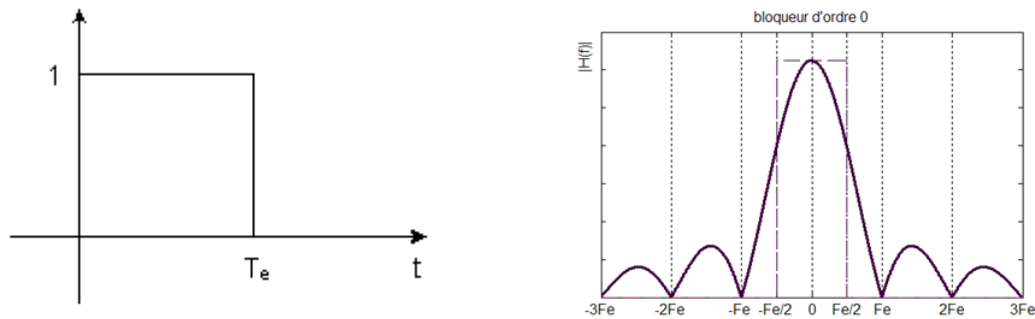


FIGURE 1.16 – Principe du Bloqueur d'ordre 0

Le signal reconstitué est en marches d'escalier et s'écrit : $x(t) = x(n \times T_e)$ pour $t \in [nT_e, (n+1)T_e[$

1.3 Conversion numérique analogique

La réponse impulsionnelle est donc une porte rectangulaire de largeur T_e et sa fonction de transfert est en sinus cardinal, comme montré sur la figure 1.17.



(a) Réponse impulsionnelle du bloqueur d'ordre 0 (b) Réponse fréquentielle du bloqueur d'ordre 0

FIGURE 1.17 – bloqueur d'ordre 0

Le spectre du signal sortant du bloqueur d'ordre 0 est la multiplication du spectre entrant par la fonction de transfert du bloqueur d'ordre 0 (donc le sinus cardinal ci-dessus).

Il est clair que ce filtre apporte une distorsion dans la bande passante par rapport au filtre idéal (notamment par exemple si la fréquence maximum du signal est proche de $F_e/2$). Néanmoins, cette méthode est très utilisée car très simple à mettre en œuvre.

1.3.1.2 Interpolateur linéaire

L'interpolation linéaire consiste à relier linéairement les échantillons entre eux pour obtenir le signal analogique, comme on peut voir en figure 1.18.

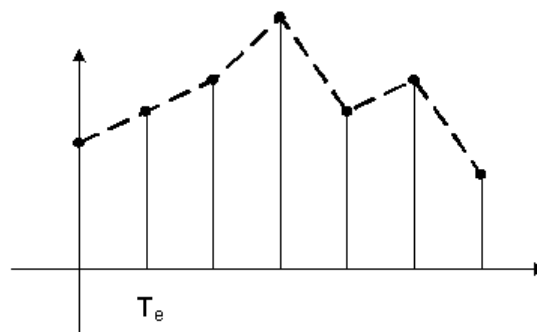


FIGURE 1.18 – Principe du Bloqueur d'ordre 1

Le signal reconstruit peut se mettre sous la forme :

$$x(t) = x(nT_e) + \frac{x((n+1)T_e) - x(nT_e)}{T_e}(t - nT_e) \text{ pour } t \in [nT_e, (n+1)T_e[\quad (1.13)$$

Ce qui donne pour la réponse impulsionnelle du filtre la fenêtre triangulaire 1.19 :

La fonction de transfert du filtre est donc en sinus cardinal au carré qui s'annule tous les $1/(2T_e)$

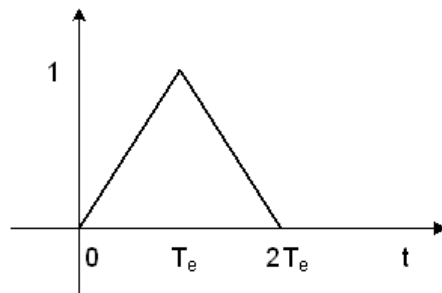


FIGURE 1.19 – Réponse impulsionnelle du bloquer d'ordre 1

1.3.2 Filtre de restitution (Filtre de lissage)

1.3.2.1 Principe

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, un signal échantillonné présente un spectre périodique. Après passage dans l'interpolateur, le signal n'est plus échantillonné, donc les répliques hautes fréquences ont été déformées et atténuées, mais elles sont toujours présentes.

Si on respecte la condition de Shannon, les répliques du spectre seront séparées. On peut donc filtrer le signal afin de ne garder que le premier motif (ou presque), comme le montre la figure :

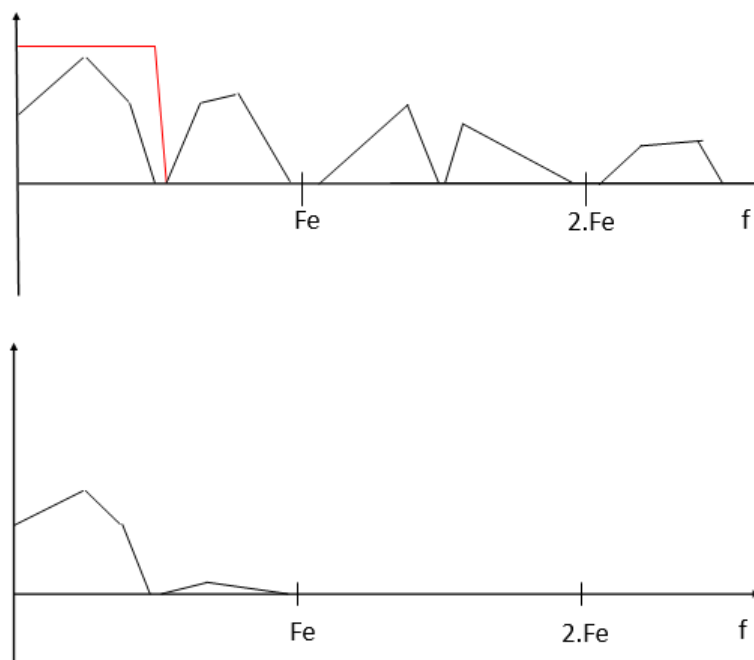


FIGURE 1.20 – Avant et après le filtre de restitution (en fréquentiel)

La fréquence de coupure devant se trouver entre F_{\max} et $\frac{F_e}{2}$ pour garder le motif d'origine et enlever au mieux les répliques autour des multiples de F_e .

Le signal en sortie de l'interpolateur étant analogique, le filtre de restitution est forcément un filtre analogique.

Finalement le filtre de restitution a les mêmes caractéristiques que le filtre anti-repliement.

1.3 Conversion numérique analogique

1.3.2.2 Filtre de restitution réel

Le filtre idéal ne pouvant être réalisé (voir figure 1.21, des composantes indésirables seront toujours présentes dans le signal reconstruit, et ce quel que soit l'ordre du filtre mais elles seront en général négligeables à comparer au bruit de quantification.

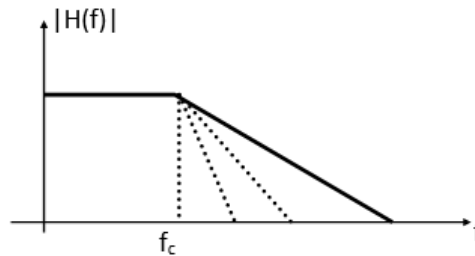


FIGURE 1.21 – Gabarit réel

1.3.2.3 Lissage

Le filtre de restitution est passe-bas, donc il enlève les composantes hautes fréquences (voir schéma 1.22) et donc les variations temporelles rapides, il donne donc une forme plus « naturelle » au signal en le lissant, c'est pourquoi le filtre de restitution est aussi appelé filtre de lissage.

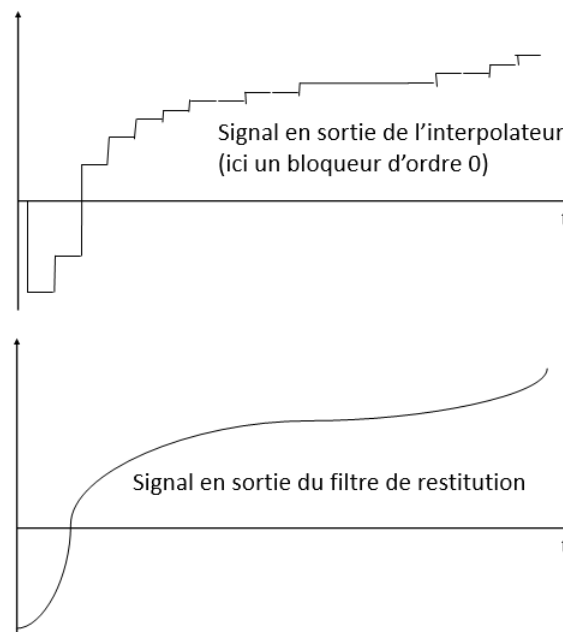


FIGURE 1.22 – Avant et après le filtre de restitution (en temporel)

1.4 Synthèse CAN et CNA

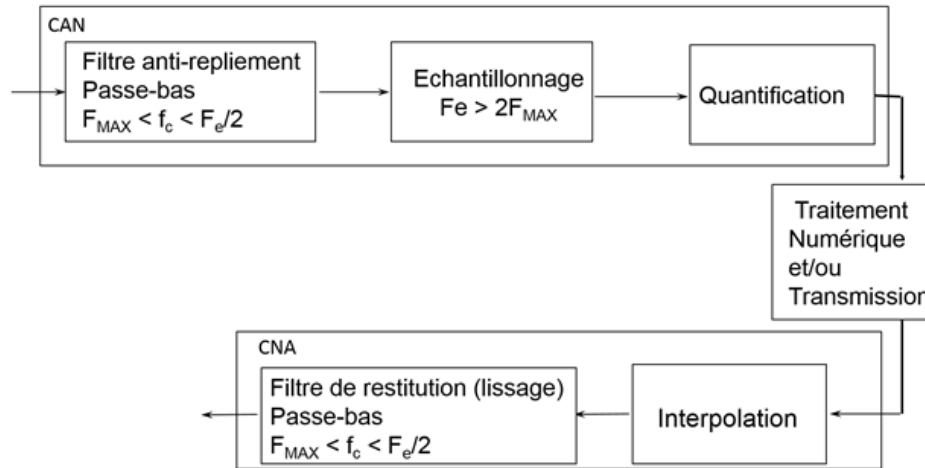


FIGURE 1.23 – Etapes CAN CNA

Exercice 4 CAN, CNA

- La figure 1.24 montre un signal analogique présenté en entrée d'un CAN dont la fréquence d'échantillonnage vaut 1 MHz. La 1ère étape de la CAN a modifié le signal (voir figure 1.25).
 - Quelle est cette première étape ?
 - Comment expliquez-vous l'allure du signal après cette 1ère étape ?
 - Quelle est la fréquence maximale admissible par le CAN ?
- Combien vaut la période d'échantillonnage ?
- La quantification est uniforme, le pas de quantification est de 1 V. On suppose que la plage totale admissible par le CAN est $[-4V, +4V]$. Donner les intervalles de quantification.
- Quel est le nombre minimal de bits nécessaires pour coder le signal quantifié ?
- Quel est le débit en sortie du CAN ?
- Le 1er échantillon est prélevé à $t=0$. Quels sont les 21 premiers bits en sortie de la quantification (donc en sortie du CAN) ?
- On donne les caractéristiques du CNA :
 - Quantification par excès
 - Interpolateur linéaire
 - $A_{min} = -3 V, A_{max} = 4 V$
 - Pas de filtre de restitution

Le signal en sortie du CAN est immédiatement présenté dans un CNA. On suppose la présence d'une erreur sur le 9ème bit. Tracer le signal en sortie du CNA sur la figure 1.24, en le superposant au signal d'origine.

- Quelles remarques pouvez-vous faire sur les différences entre le signal d'origine et le signal restitué ?
- Dessiner l'ensemble de la chaîne avec toutes les valeurs caractéristiques

1.5 Echantillonnage des signaux passe-bande (ou comment envoyer pro

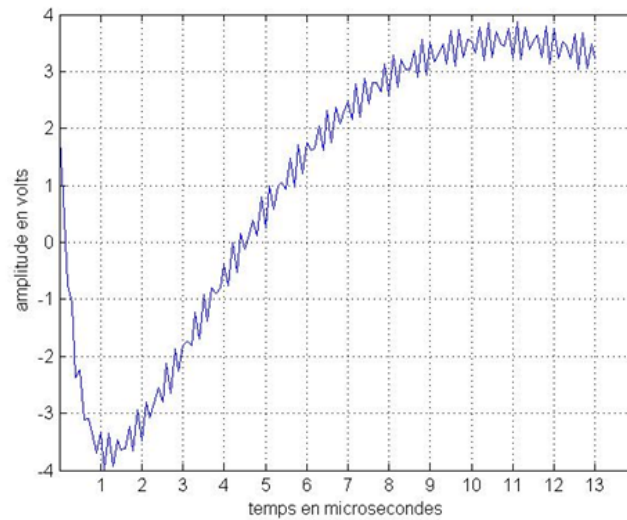


FIGURE 1.24 – Signal analogique en entrée du CAN

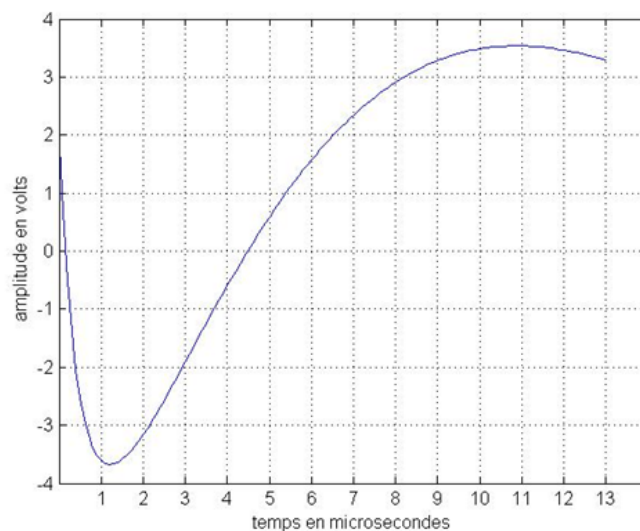


FIGURE 1.25 – Le même signal, une fois passée la 1ère étape du CAN

1.5 Echantillonnage des signaux passe-bande (ou comment envoyer pro- mener la règle de Shannon)

On appelle signal passe-bande un signal s tel que son spectre $|S(f)| \approx 0$ pour $f \notin [f_1, f_2]$, $f_1 > 0$. Classiquement, cela concerne les signaux transmis sur porteuse (radiocommunications, ...). Ils ne comportent pas de composantes spectrales au voisinage de $f = 0$.

Posons $B = f_2 - f_1$. Une application directe du théorème de Shannon conduirait à échantillonner à $F_e \geq 2f_2$. Mais, si le signal est à bande étroite (c'est à dire, $B \ll f_1$), alors il est possible d'échantillonner à une fréquence (beaucoup) plus faible.

Une première condition nécessaire mais non suffisante dit $F_e > 2B$.

Posons

$$S(f) = S^+(f) + S^-(f)$$

avec

$$S^+(f) = \begin{cases} S(f) & \text{si } f > 0 \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases} \text{ et } S^-(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f > 0 \\ S(f) & \text{si } f < 0 \end{cases}$$

On raisonnera sur S^+ , le résultat s'appliquant également à S^- . L'échantillonnage périodise le spectre, on cherche F_e pour éviter le phénomène de repliement sur S : les translatées du spectre peuvent se trouver dans $[0, f_1]$ ou dans $[f_2, +\infty[$.

F_e doit donc être telle que les $k-1$ -ième et k -ième répliques de S^- encadrent sans recouvrement S^+ . On arrive donc à deux conditions :

$$\begin{cases} 2f_2 & \leq kF_e \\ (k-1)F_e & \leq 2f_1 \end{cases} \quad (1.14)$$

1.14 implique nécessairement que

$$\frac{2f_2}{k} \leq F_e \leq \frac{2f_1}{k-1}. \quad (1.15)$$

k est appelé l'*ordre de sous-échantillonnage*. Pour le déterminer, on réécrit 1.14 sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{1}{F_e} & \leq \frac{k}{2f_2} \\ (k-1)F_e & \leq 2f_1 = 2f_2 - 2B \end{cases} \quad (1.16)$$

On multiplie alors les deux côtés des inégalités et on trouve la condition suivante :

$$k \leq \frac{f_2}{B}$$

On a alors

$$k_{\max} = \left\lfloor \frac{f_2}{B} \right\rfloor \quad (1.17)$$

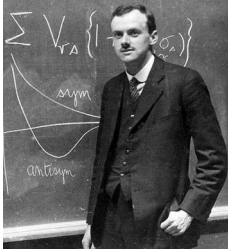
et F_e peut être choisie dans l'intervalle donné par 1.15.

Exercice 5 Radar à ultrasons

Un radar à ultrasons émet des signaux sur une fréquence porteuse constante $f_0 = 40$ kHz. La bande passante du signal est d'environ 2 kHz.

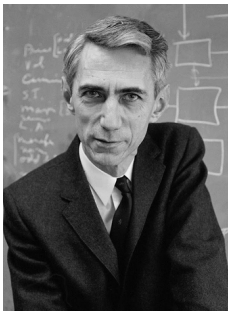
1. Tracer le spectre du signal. Combien valent f_1 et f_2 ici ?
2. Déterminer l'ordre maximal de sous-échantillonnage.
3. Donner une valeur possible pour F_e . Vérifie-t-elle le critère de Shannon ?

Un peu d'histoire ...



Paul Adrien Maurice Dirac est un physicien et mathématicien anglais d'origine suisse, né le 8 août 1902 à Bristol (Angleterre) et mort le 20 octobre 1984 à Tallahassee (Floride, Etats-Unis).

Ses travaux ont été précurseurs de la mécanique quantique. Il est surtout connu pour son équation de Dirac (1928), qui unifie la mécanique quantique et la relativité restreinte et prédit l'existence de l'antimatière. Cependant, sa contribution va bien au-delà. Il explore la théorie des monopôles magnétiques et contribue à la théorie quantique des champs. Dirac s'intéresse aussi à la cosmologie et à la structure de l'espace-temps. Ses travaux sur les fonctions delta et les fondements mathématiques de la physique ont influencé des domaines variés allant des particules élémentaires à la gravitation quantique. Il reçoit le prix Nobel de physique en 1933 "*for the discovery of new productive forms of atomic theory*".



Claude Elwood Shannon est un ingénieur en génie électrique et mathématicien américain né le 30 avril 1916 à Petoskey, Michigan, Etats-Unis et mort le 24 février 2001 à Medford, Massachusetts, Etats-Unis.

Il est le père fondateur de la théorie de l'information avec son article *A Mathematical Theory of Communication* publié en 1948. La théorie mathématique initiée par Claude Shannon définit un cadre de pensée nécessaire à l'élaboration de techniques efficaces pour l'acquisition, le traitement, le stockage et la transmission des données sous forme numérique. Ce sont ces techniques qui ont révolutionné les communications et l'informatique durant la deuxième moitié du 20e siècle, et ont permis la croissance d'internet au début du 21e siècle.



Harry Theodor Nyquist est un physicien et ingénieur électronique suédois né le 7 février 1889 à Nilsby (Suède) et mort le 4 avril 1976 à Harlingen (Texas, Etats-Unis). Il rejoint les laboratoires Bell, où il développe le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon. Il a également travaillé sur les concepts de stabilité des systèmes et sur le bruit thermique dans les communications électroniques. Il a été un important contributeur à la théorie de l'information et à l'automatique.

Notes

1.5 Echantillonnage des signaux passe-bande (ou comment envoyer pro

Notes

Notes

1.5 Echantillonnage des signaux passe-bande (ou comment envoyer pro

Notes

Chapitre 2

Filtrage numérique

2.1 Vous avez dit filtre ?

Le filtrage peut être défini comme *l'opération modifiant les caractéristiques spectrales d'un signal*. Le filtre est le circuit (analogique ou numérique) qui effectue cette opération.

Un filtre idéal doit (devrait !) conduire aux résultats suivants :

- atténuation nulle pour les composantes fréquentielles "utiles" du signal (celles que l'on souhaite conserver)
- temps de réponse égal pour toutes les composantes spectrales du signal utile
- atténuation complète des composantes fréquentielles non désirées

Exemples simples d'applications concrètes :

- éviter de brouiller d'autres utilisateurs (à l'émission)
- récupérer le signal utile sans se faire perturber par des signaux parasites (à la réception)
- mise en forme spectrale, par exemple pour faire de l'égalisation de canal,
- détection de signal en radar, sonar, ...,
- dans des appareils de mesure, isolation d'un signal pour en faire l'analyse

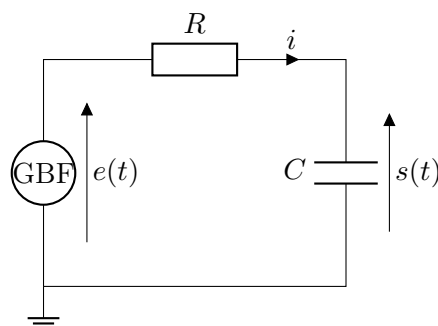


FIGURE 2.1 – Filtre RC

2.1 Vous avez dit filtre ?

2.1.1 Un exemple simple : filtre RC du 1er ordre

Prenons l'exemple d'un filtre simple telle qu'un filtre RC du 1er ordre, en figure 2.1. En appliquant la loi des noeuds, on trouve que $e(t)$ et $s(t)$ sont liés par l'équation :

$$e(t) = RC \frac{ds}{dt}(t) + s(t) \quad (2.1)$$

Les signaux d'entrée et de sortie du filtre sont donc liés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Un filtre analogique tel que celui-ci transforme un signal analogique en un autre signal analogique.

Une famille importante de filtres, dont fait partie le filtre RC, est constituée des filtres linéaires et invariants dans le temps (LIT). Nous n'étudierons que ce type de filtre.

2.1.2 Filtres linéaires invariants dans le temps (LIT)

L'invariance signifie que la réponse du filtre est indépendante de l'origine du temps, c'est à dire qu'un décalage de l'entrée entraîne un simple décalage de la sortie :

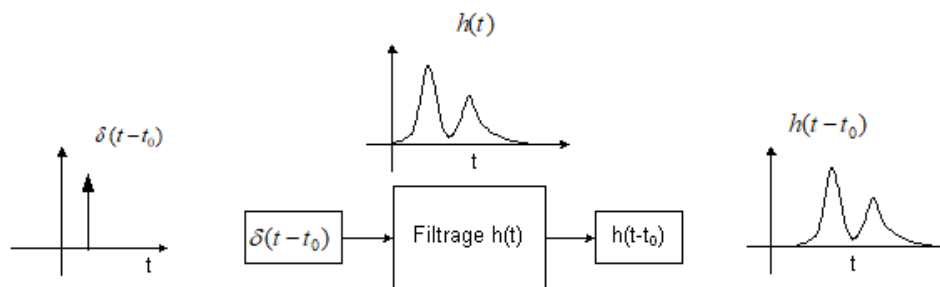


FIGURE 2.2 – Invariance dans le temps

La linéarité signifie que si l'entrée x_1 correspond à la sortie y_1 et l'entrée x_2 correspond la sortie y_2 , alors à l'entrée $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ correspond la sortie $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$

On peut démontrer que l'addition de ces deux caractéristiques est équivalente à écrire que la sortie du filtre $s(t)$ est égale au produit de convolution entre le signal d'entrée $e(t)$ et une fonction caractéristique du filtre $h(t)$ appelée réponse impulsionnelle (ou plus rarement réponse percussionnelle) :

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) h(t-u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) x(t-u) du \end{aligned}$$

Important

Filtre linéaire et invariant dans le temps \iff entrée et sortie liées par un produit de convolution

On rappelle que l'impulsion de Dirac est l'élément neutre pour le produit de convolution : si $x(t) = \delta(t)$, alors $y(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)$: la sortie du filtre en réponse à une impulsion correspond à la réponse impulsionnelle du filtre

Un produit de convolution étant parfois compliqué à calculer, on se ramène souvent dans le domaine fréquentiel via la transformée de Fourier, le produit de convolution devenant un produit simple :

$$Y(f) = X(f) \times H(f) \quad (2.2)$$

La multiplication du spectre du signal d'entrée par la fonction de transfert du filtre donne le spectre du signal de sortie, comme on le voit figure 2.3.

Vocabulaire

Dans le domaine temporel, $h(t)$ est appelée réponse impulsionnelle (ou plus rarement réponse percussionnelle)

Dans le domaine fréquentiel, $H(f)$ est appelée réponse fréquentielle ou fonction de transfert ou transmittance

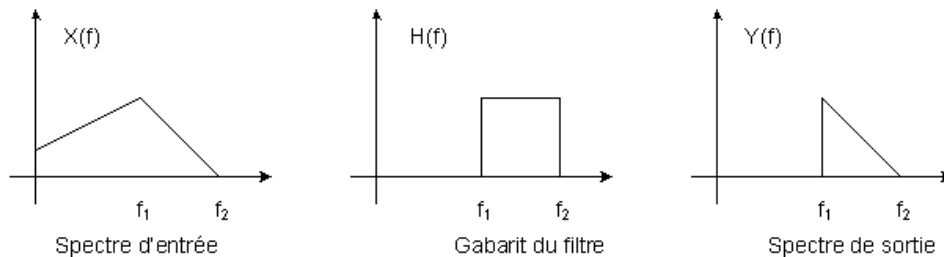


FIGURE 2.3 – Effet du filtre sur le spectre du signal

Dans l'exemple du filtre RC, l'application de la transformée de Fourier (ou de Laplace) à l'équation 2.1 permet de connaître la fonction de transfert du filtre :

$$H(f) = \frac{S(f)}{E(f)} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + 2j\pi RCf} \quad (2.3)$$

Et l'application de la transformée inverse de Fourier à H permet d'obtenir la réponse impulsionnelle du filtre :

$$h(t) = \text{TF}^{-1}[H](t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \text{Heav}(t) \quad (2.4)$$

Heav étant la fonction échelon de Heaviside.

On a alors :

$$\begin{aligned} s(t) &= h(t) * e(t) = e(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) x(t-u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{RC} e^{-\frac{u}{RC}} \text{Heav}(u) x(t-u) du \\ &= \frac{1}{RC} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{RC}} x(t-u) du \end{aligned}$$

2.2 Caractéristiques importantes d'un filtre

2.1.3 Et le numérique dans tout ça ?

Un filtre numérique transforme une séquence de valeurs numériques reçue en entrée en une autre séquence, généralement de même taille, envoyée en sortie : à chaque nouvel échantillon reçu tous les T_e , il calcule une nouvelle sortie $y(nT_e)$ aussi nommée $y[n]$ ou y_n .

Les propriétés précédentes, énoncées pour des signaux continus, peuvent être étendues aux signaux discrets, en remplaçant :

- un signal d'entrée $x(t)$ par la suite $\{x[n], n \in \mathbb{N}\} = \{x(n \times T_e), n \in \mathbb{N}\}$
- le produit de convolution continu par un produit de convolution discret :

$$y[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] h[n - k] \quad (2.5)$$

L'équation 2.5 montre que les séquences d'entrée et de sortie sont liées par une équation aux différences linéaire à coefficients constants du type :

$$y[n] = \sum_{j=0}^M a_j y[n - j] + \sum_{i=0}^N b_i x[n - i] \quad (2.6)$$

L'impulsion numérique unitaire ("Dirac") est l'élément neutre du produit de convolution discret. Elle se définit par :

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.7)$$

Donc si nous appliquons en entrée une impulsion numérique unitaire, nous avons $s(n) = h(n)$.

Ainsi, les filtres LIT présentent l'avantage de pouvoir être entièrement caractérisés par leur réponse impulsionnelle $h(n)$. La notion de réponse impulsionnelle est omniprésente en filtrage numérique.

2.2 Caractéristiques importantes d'un filtre

2.2.1 Stabilité

De façon générale, un filtre est dit stable si sa réponse impulsionnelle tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Une autre définition possible est : la réponse du filtre à un signal borné doit être un signal borné (stabilité dite *BIBO*). On peut montrer que cela équivaut à ce que la réponse impulsionnelle soit :

- une fonction intégrable dans le cas continu :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

- de somme absolument convergente dans le cas discret :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < +\infty$$

On peut étudier la stabilité d'un filtre analogique à l'aide de la transformée de Laplace (certains d'entre vous l'ont étudiée), il existe un équivalent pour les filtres numériques appelé transformée en z . Nous ne l'utiliserons pas dans le cadre de ce cours. Le lecteur intéressé pourra se référer à [Pap80] ou [PM07].

2.2.2 Causalité

Un filtre est causal si sa réponse impulsionnelle est nulle avant l'instant $t = 0$, ainsi nous n'avons pas besoin d'une entrée ou d'une sortie future.

Si le filtre nécessite une entrée future, il suffit d'ajouter une temporisation. Si le filtre nécessite une sortie future, il est définitivement irréalisable.

Les filtres n'étant pas fonction du temps peuvent être réalisés sans condition de causalité. Par exemple, les filtres de traitement d'images sont fonctions de coordonnées.

2.2.3 Gabarit

On classe les filtres suivant leurs caractéristiques dans le domaine fréquentiel en 4 types :

- passe-bas (*lowpass* en anglais),
- passe-haut (*highpass*),
- passe-bande (*bandpass*),
- coupe-bande (ou réjecteur de bande) (*bandstop*, on parle également de *notch* si la bande de fréquences à exclure est étroite),
- passe-tout (*all-pass*).

Idéalement, un filtre a :

- un gain constant égal à 1 (0 dB) dans la / les bande(s) passante(s),
- un gain égal à 0 ($-\infty$ dB) dans la / les bande(s) coupée(s),
- une variation abrupte du gain entre bande(s) passante(s) et bande(s) coupée(s) à une fréquence appelée *fréquence de coupure*.

Un tel gabarit est représenté figure 2.4.

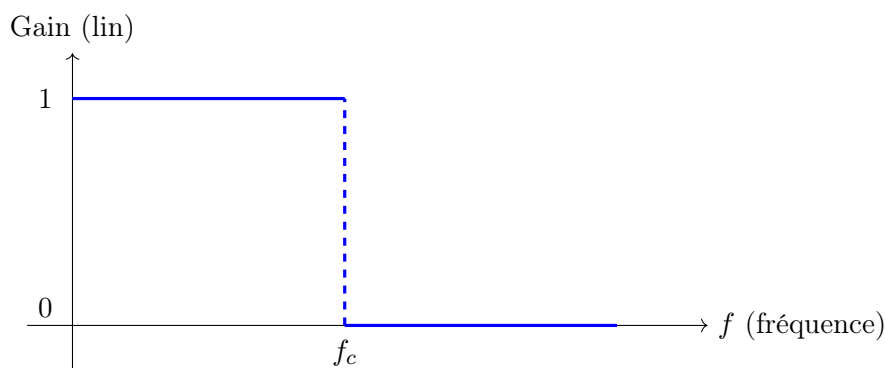
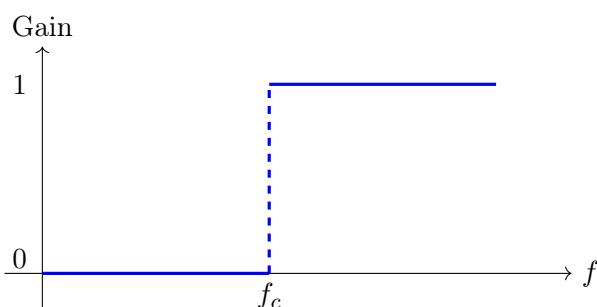
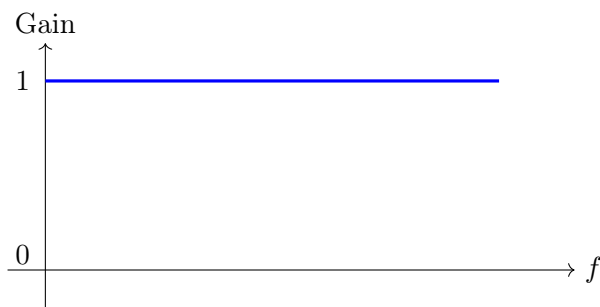
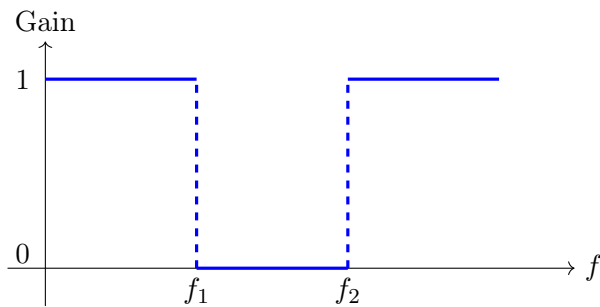
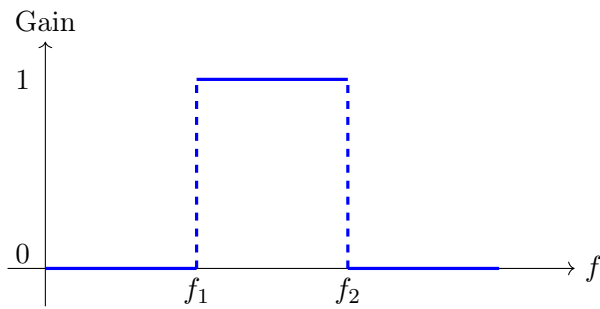


FIGURE 2.4 – Gabarit idéal d'un filtre passe-bas



2.2 Caractéristiques importantes d'un filtre



Un filtre est en général synthétisé à partir de son gabarit requis, qui précise les bandes de fréquences que le filtre va laisser passer, et celles qu'il va filtrer. Le gabarit d'un filtre réel matérialise les tolérances admises par rapport au filtre idéal.

On définit donc pour le gabarit :

- les écarts par rapport à la constance du gain en bande passante R_p (*pass band ripple*),
- la largeur maximale des bandes de transition déterminées par f_p (*pass frequency*) et f_s (*stop frequency*),
- l'atténuation minimum en bande coupée R_a .

Fréquence de coupure : Souvent lors de la mise en oeuvre, f_p et f_s disparaissent au profit de f_c (fréquence de coupure). Selon les méthodes, f_c se situe à $G = -3$ dB ou -6 dB ou à $f_c = \frac{f_p + f_s}{2}$. En fonction de la méthode de synthèse du filtre utilisée, il faut être attentif à la signification précise des paramètres.

Gain : Le gain d'un filtre idéal dans la bande passante est de 0 dB. Si l'on souhaite un autre gain moyen dans la bande passante pour un filtre réel, il suffit de mettre un coefficient multiplicateur devant l'équation aux différences.

Remarque : on parle de gain *moyen* dans la bande passante d'un filtre réel car le gain oscille en fonction de f_p (le gain d'un filtre idéal n'oscille pas).

Les figures 2.5 présentent les 4 types de gabarits pour les 4 principales catégories de filtres : passe-haut, passe-bas, passe-bande, coupe-bande.

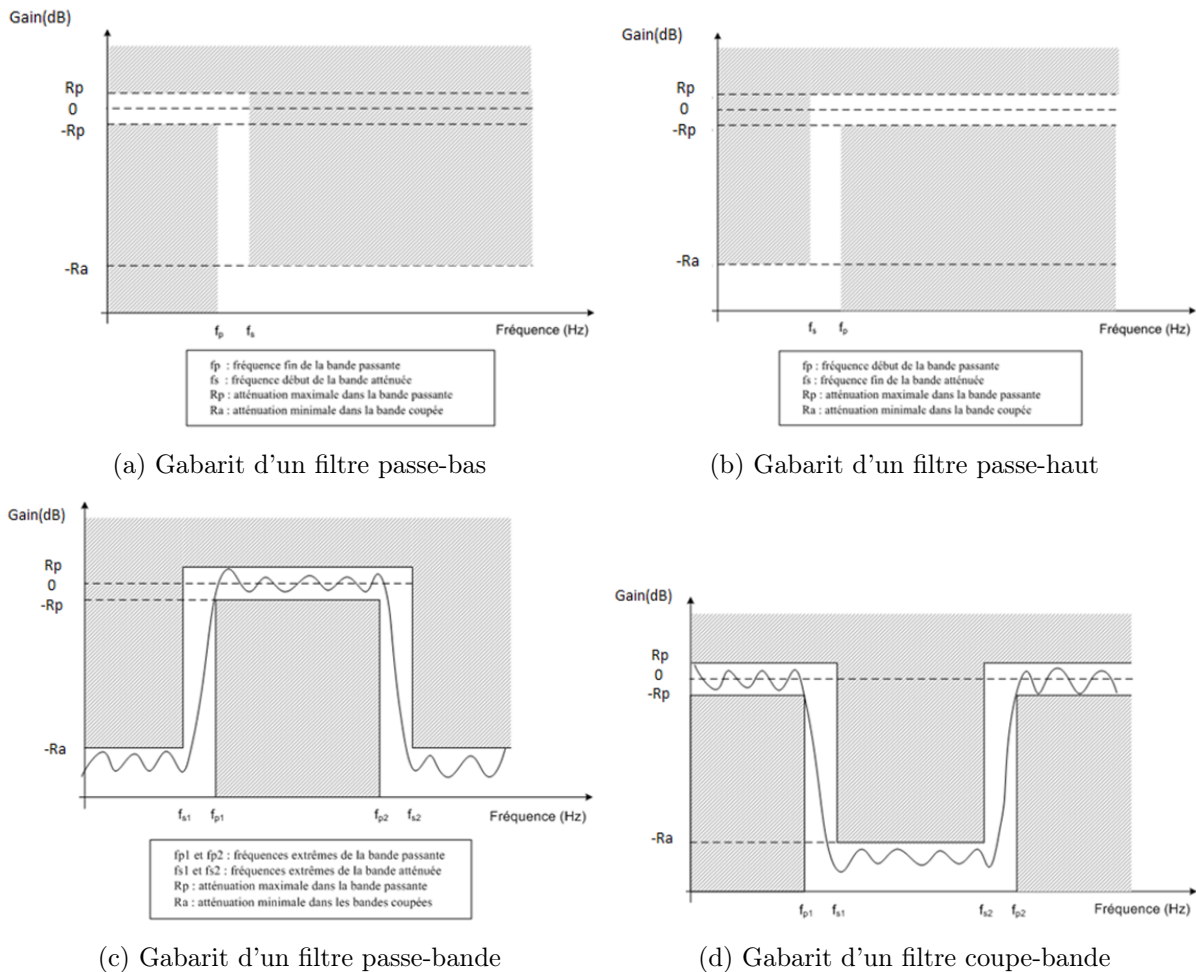


FIGURE 2.5 – Gabarits réels des 4 types de filtres

2.2.4 Temps de propagation de groupe et linéarité de la phase

La fonction de transfert étant à valeur complexe, elle peut s'écrire sous forme polaire

$$H(f) = G(f) \times \exp(j\Phi(f)), \quad (2.8)$$

avec

- on appelle gain $G = |H|$ à valeurs dans \mathbb{R} ,
- on appelle déphasage ou retard de phase le terme $\Phi(f)$.

Toutes les fréquences ne traversent pas le filtre à la même vitesse, le temps de propagation de groupe (ou retard de groupe) est donc fonction de la fréquence, il se calcule ainsi :

$$\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(f)}{df} \quad (2.9)$$

Si l'on souhaite un tpg constant il faut donc une phase linéaire par rapport à la fréquence (dans la bande passante, puisque dans la bande coupée les fréquences ne passent pas). Donc on souhaite $\Phi(f) = af + b$ (a et b étant des constantes)

2.3 Les deux familles de filtres numériques

Exemple temps de propagation de groupe non constant : dans la figure 2.6 on filtre la somme de 3 sinusoïdes. Le filtre laisse passer les 3 fréquences mais présente un temps de propagation de groupe variable selon la fréquence. Le signal de sortie présente une distorsion visible en temporel. A noter que le spectre d'entrée et de sortie sont les mêmes.

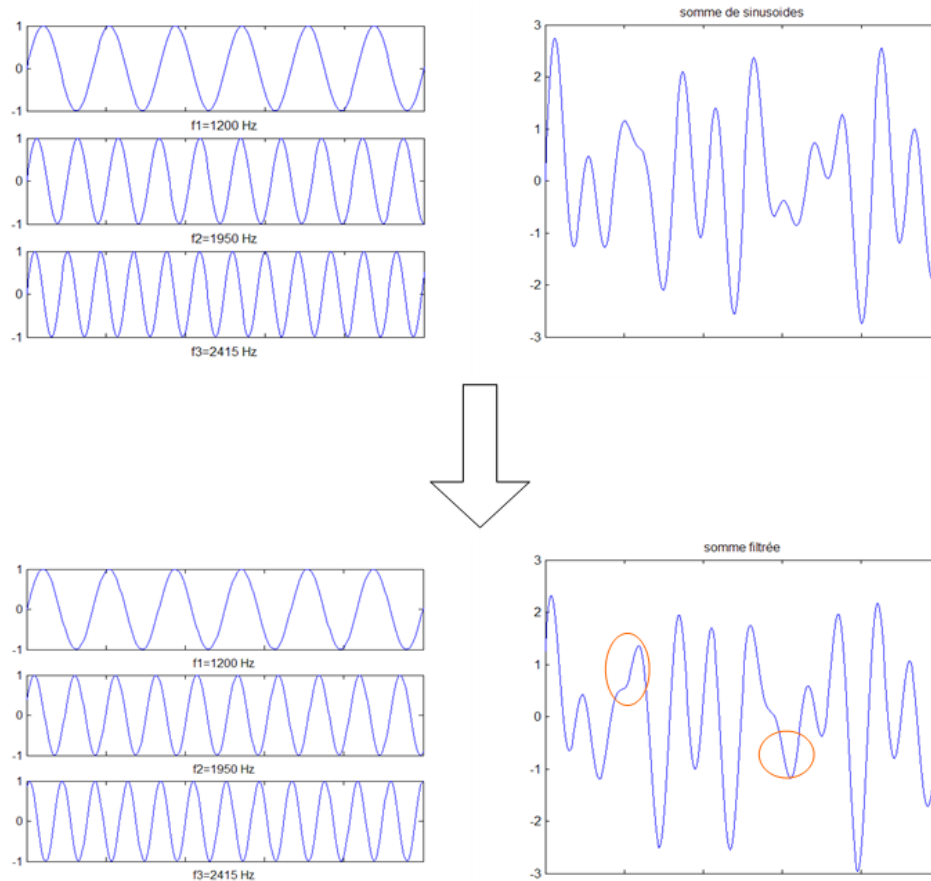


FIGURE 2.6 – temps de propagation de groupe non constant

2.3 Les deux familles de filtres numériques

2.3.1 Filtres RIF

Un filtre Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) se schématise comme montré en figure 2.7 :

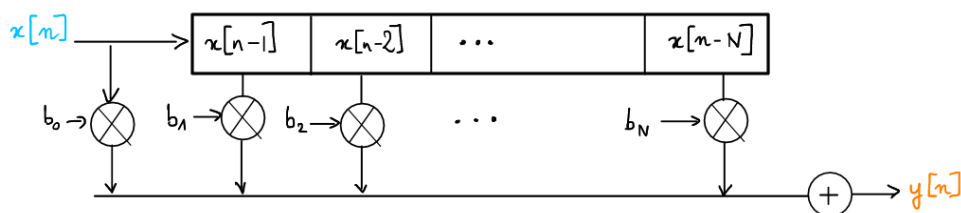


FIGURE 2.7 – Synoptique d'un filtre RIF

Un filtre RIF a une équation aux différences s'écrivant :

$$y[n] = \sum_{j=0}^N b_j x[n-j] \quad (2.10)$$

avec $x[n]$ désigne le signal d'entrée du filtre et $y[n]$ le signal de sortie. La sortie est donc obtenue par sommation pondérée d'un nombre fini d'échantillons en entrée. Il est parfois appelé *filtre non récursif* car il ne nécessite pas de boucle de rétroaction dans sa réalisation.

Un filtre RIF d'ordre N comporte $N + 1$ coefficients (b_0, b_1, \dots, b_N), et sa réponse impulsionnelle est de longueur $L = N + 1$.

Exercice 6 Réponse impulsionnelle d'un filtre RIF

Soit un filtre d'ordre 2 défini par les coefficients b_0, b_1, b_2 .

Calculer la réponse impulsionnelle de ce filtre

On vérifie donc bien que $\forall n, h[n] = b_n$: la réponse impulsionnelle n'est autre que la suite des coefficients. Tous les termes qui suivent seront obligatoirement nuls. La réponse impulsionnelle est donc bien de longueur $L = N + 1$.

Les filtres RIF présentent l'avantage de pouvoir être à phase linéaire, cela dépend de la parité de l'ordre et du caractère d'antisymétrie ou de symétrie de la réponse impulsionnelle :

- ordre pair et coefficients symétriques
- ordre pair et coefficients antisymétriques
- ordre impair et coefficients symétriques
- ordre impair et coefficients antisymétriques

Démontrons ceci pour le premier cas : $h[n] = h[N - n]$ pour un ordre pair.

Par définition de la transformée de Fourier à temps discret :

$$H(f) = \sum_{n=0}^N h[n] e^{-2j\pi n f T_e} \quad (2.11)$$

On pose $m = n - \frac{N}{2}$ (N étant pair), l'équation 2.11 devient :

$$\begin{aligned} H(f) &= \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} h \left[m + \frac{N}{2} \right] e^{-2j\pi m f T_e} e^{2j\pi \frac{N}{2} f T_e} \\ &= \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} h \left[m + \frac{N}{2} \right] e^{-2j\pi m f T_e} e^{-j\pi N f T_e} \\ &= e^{-j\pi N f T_e} \left(\sum_{m=-\frac{N}{2}}^{-1} h \left[m + \frac{N}{2} \right] e^{-2j\pi m f T_e} + \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} h \left[m + \frac{N}{2} \right] e^{-2j\pi m f T_e} + h \left[\frac{N}{2} \right] \right) \\ &= e^{-j\pi N f T_e} \left(\sum_{p=1}^{\frac{N}{2}} h \left[-p + \frac{N}{2} \right] e^{2j\pi p f T_e} + \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} h \left[m + \frac{N}{2} \right] e^{-2j\pi m f T_e} + h \left[\frac{N}{2} \right] \right) \end{aligned}$$

2.3 Les deux familles de filtres numériques

On utilise la symétrie des coefficients : $h[n] = h[N - n] \iff h[N/2 + m] = h[N/2 - m]$

Donc

$$\begin{aligned} H(f) &= e^{-j\pi N f T_e} \left(\sum_{p=1}^{\frac{N}{2}} h \left[p + \frac{N}{2} \right] \left(e^{2j\pi p f T_e} + e^{-2j\pi p f T_e} \right) + h \left[\frac{N}{2} \right] \right) \\ &= e^{-j\pi N f T_e} \times \left(\sum_{p=1}^{\frac{N}{2}} 2h \left[p + \frac{N}{2} \right] \cos(2\pi p f T_e) + h \left[\frac{N}{2} \right] \right) \\ &= e^{j\phi(f)} \times A(f) \end{aligned}$$

avec $A(f) \in \mathbb{R}$, donc le déphasage vaut $\phi(f) = -\pi N f T_e$: la phase est bien linéaire, par conséquent le temps de propagation de groupe est constant et vaut : $\tau_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(f)}{df} = \frac{N T_e}{2}$

On obtient bien une phase linéaire, qui correspond à un retard de $\frac{N}{2}$ échantillons.

Exercice 7 Gabarit d'un filtre réel

La figure 2.8 représente le gabarit souhaité d'un filtre. Déterminer :

1. le gain dans la BP
2. f_p
3. f_s
4. R_p
5. R_a
6. la bande passante
7. la bande de transition
8. la bande coupée
9. l'ordre minimum satisfaisant aux conditions requises

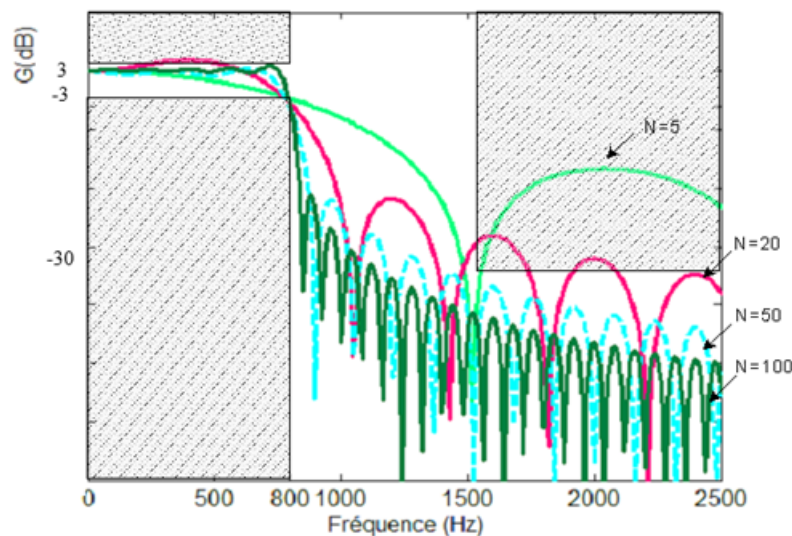


FIGURE 2.8 – Gabarit d'un filtre réel

2.3.2 Filtres RII

Un filtre Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) se schématise comme montré en figure 2.9 :

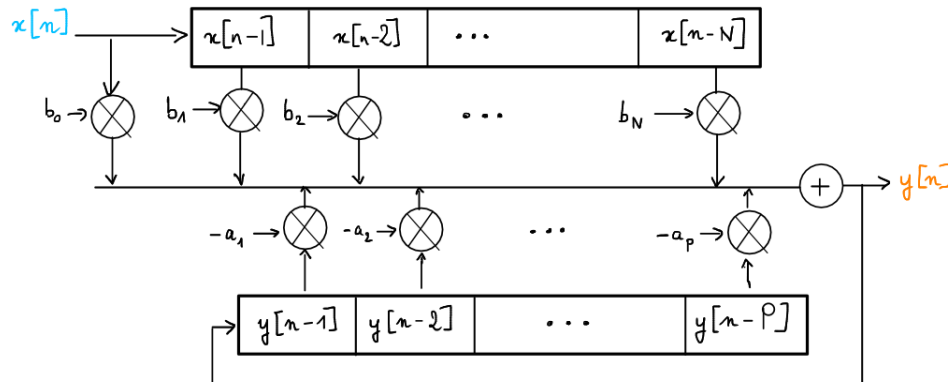


FIGURE 2.9 – Synoptique d'un filtre RII

Un filtre RII a une équation aux différences s'écrivant :

$$y[n] + \sum_{i=1}^P a_i y[n-i] = \sum_{j=0}^N b_j x[n-j]$$

avec $x[n]$ désigne le signal d'entrée du filtre et $y[n]$ le signal de sortie, ce qui équivaut à :

$$y[n] = \sum_{j=0}^N b_j x[n-j] - \sum_{i=1}^P a_i y[n-i] \quad (2.12)$$

La différence majeure avec un filtre RIF est donc que la sortie dépend maintenant des entrées **et** des sorties passées : un filtre RII est donc récursif.

La réponse impulsionnelle peut donc ne pas revenir à zéro en temps fini, et le filtre peut être instable, comme nous allons le montrer dans l'exercice suivant :

Exercice 8 Réponse impulsionnelle d'un filtre RII

Soit un filtre RII défini par les coefficients $b_0 = 1, a_1 = a$.

1. Ecrire l'équation aux différences du filtre
2. Calculer la réponse impulsionnelle de ce filtre pour $n = 0$ jusqu'à $n = 4$
3. Justifier le nom de RII
4. Que peut-on dire de la stabilité du filtre en fonction de a ?

2.4 Transformée en z

Elle permet de déterminer la solution d'une équation aux différences à coefficients constants.

Soit un signal numérique causal $x[n]$: la transformée en z de x est définie par :

$$TZ[x[n]](z) = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (2.13)$$

2.4 Transformée en z

Dans cette expression, z est une variable complexe et la fonction X est à valeurs complexes.

La transformation en z est aux signaux discrets ce que la transformation de Laplace est aux signaux continus. En effet, si on applique cette dernière à un signal échantillonné x_{ech} , alors :

$$\begin{aligned} TL[x_{\text{ech}}](p) &= \int_0^{\infty} x_{\text{ech}}(t) e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{\infty} \left(\sum_n x[n] \delta(t - nT_e) \right) e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{\infty} \sum_n (x[n] e^{-pt} \delta(t - nT_e)) dt \\ &= \int_0^{\infty} \sum_n (x[n] e^{-pnT_e} \delta(t - nT_e)) dt \\ &= \sum_n x[n] e^{-pnT_e} \int_0^{\infty} \delta(t - nT_e) dt \\ &= \sum_n x[n] (e^{-pT_e})^n \end{aligned}$$

En posant $z = e^{pT_e}$, on trouve que $TL[x_{\text{ech}}(t)](p) = TZ[x[n]](z)$: la transformée de Laplace appliquée à un signal échantillonné correspond à la transformée en z après un changement de variable.

2.4.1 Propriétés

On retrouve des propriétés similaires à celles de la transformation de Laplace :

- linéarité : $TZ(ax[n] + by[n])(z) = aX(z) + bY(z)$
- décalage temporel : $TZ(x[n - m])(z) = z^{-m} X(z)$
- produit de convolution : $TZ(x[n] * y[n])(z) = X(z) \times Y(z)$
- dérivation : $TZ(nx[n]) = -z \frac{dX(z)}{dz}$
- théorème de la valeur initiale : $\lim_{k \rightarrow 0} x[k] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$, à condition que $\lim_{k \rightarrow 0} x[k]$ existe
- théorème de la valeur finale : $\lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$, à condition que $\lim_{k \rightarrow \infty} x[k]$ existe

2.4.2 Transformées de signaux fréquemment rencontrés

- Impulsion : $x[n] = 1$ si $n = 0$, 0 sinon $\implies X(z) = 1 \times z^0 = 1$
- Echelon unité : $x[n] = 1 \implies X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$ pour $|z| < 1$
- Signal géométrique : $x[n] = a^n \implies X(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$ pour $|z| > |a|$

Table de transformées de signaux causaux courants :

Nom	$x[n]$	$X(z)$	ROC
Impulsion de Dirac	$\delta[n] = \delta_0^n$	1	\mathbb{C}
Echelon	$u[n] = 1$	$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
Rampe	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
Suite géom.	a^n	$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
Cos échantillonné	$\cos(\omega_0 n)$	$\frac{z(z-\cos(\omega_0))}{z^2-2\cos\omega_0 z+1}$	$ z > 1$
Sin échantillonné	$\sin(\omega_0 n)$	$\frac{\sin(\omega_0)z}{z^2-2\cos\omega_0 z+1}$	$ z > 1$

TABLE 2.1 – Caption

2.4.3 Transformation inverse

2.4.3.1 Décomposition en originaux connus

2.4.3.2 Division polynomiale

2.5 Synthèse d'un filtre numérique RIF

2.5.1 Problématique

Il s'agit, à partir d'un gabarit requis **idéal**, de trouver les coefficients du filtre **réel** (réalisable!) correspondant.

Le caractère réalisable implique :

-

Les filtres RIF n'ont pas d'équivalent analogique, leur synthèse fait donc appel à des méthodes directes. Plusieurs méthodes existent :

- méthode de la fenêtre,
- optimisation par moindres carrés,
- calcul des coefficients par approximation de Tchebychev,
- TFD itérative,
- ...

Nous proposons d'en étudier une en particulier : il s'agit de la méthode dite de la fenêtre (*Window design method* en anglais). On l'appelle également méthode des coefficients de Fourier.

2.5.2 Du gabarit idéal aux coefficients réels

Dans la suite :

1. les $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ désignent les coefficients complexes de la série de Fourier

2.5 Synthèse d'un filtre numérique RIF

2. les $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont les coefficients du filtre RIF (et non pas les coefficients réels pondérant les sin de la série de Fourier...)

On part du gabarit idéal d'un filtre analogique $H(f)$, représenté dans la figure 2.10 : on ne s'intéresse qu'au module dans un 1er temps.

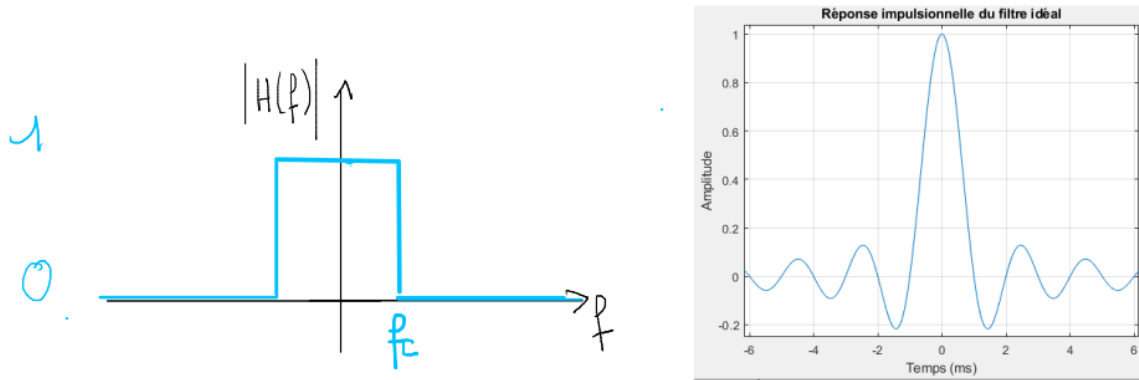


FIGURE 2.10 – Gabarit fréquentiel et réponse impulsionnelle du filtre passe-bas idéal

Nous souhaitons construire un filtre numérique, donc la réponse impulsionnelle du filtre idéal doit être échantillonnée. Cet échantillonnage correspond dans le domaine fréquentiel à une périodisation du spectre tel que vu en figure 2.11

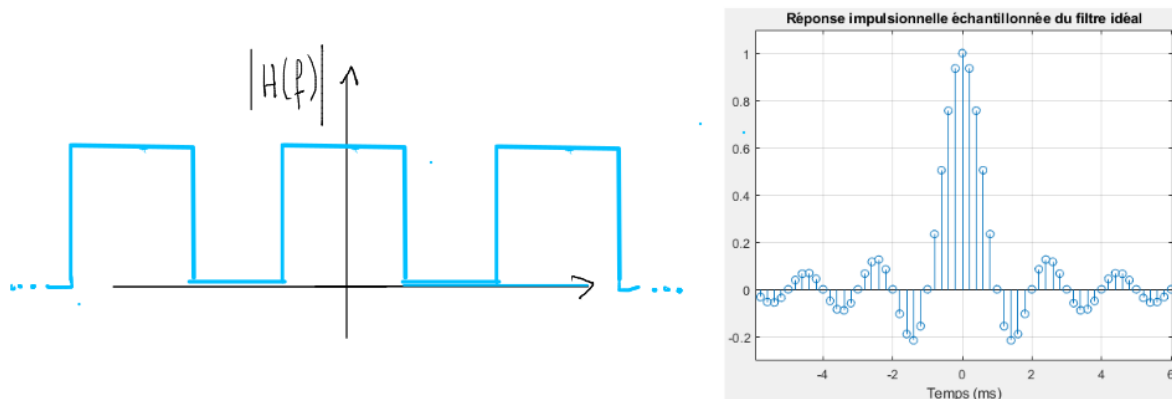


FIGURE 2.11 – Gabarit idéal échantillonné

La fonction que l'on cherche à approcher est donc le spectre idéal du filtre analogique, mais périodisé autour de F_e ; c'est cette fonction qui donnera la réponse impulsionnelle du filtre numérique voulu. Or :

$$H_{\text{idéal}}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(-2j\pi n f T_e) \implies c_n = \frac{1}{F_e} \int_{-F_e/2}^{F_e/2} H_{\text{idéal}}(f) \exp(2j\pi n f T_e) df \quad (2.14)$$

La somme est infinie, et ne constitue donc pas un filtre réalisable. Il faut donc la tronquer à un nombre $L = N + 1$ de coefficients. Cela revient à multiplier le signal $h[n]$ par une fenêtre rectangulaire de longueur L . Cette opération peut paraître anodine, mais elle a des conséquences importantes que nous verrons par la suite.

Cette opération de multiplication par une fenêtre (pas forcément rectangulaire) a donné le nom à la méthode. On garde donc L termes de la série. La troncature se fait de $-N/2$ à $N/2$ ainsi

nous respectons la condition de symétrie pour obtenir une phase linéaire, mais cela implique que N soit pair.

La somme devient donc :

$$H_{\text{approx}}(f) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n \exp(-2j\pi n f T_e) \text{ avec } c_n = \frac{1}{F_e} \int_{-F_e/2}^{F_e/2} H_{\text{idéal}}(f) \exp(2j\pi n f T_e) df \quad (2.15)$$

Selon l'équation aux différences, le filtre n'est pas causal si nous avons des c_n non nuls lorsque $n < 0$. Pour rendre causale l'équation aux différences, posons $m = n + \frac{N}{2}$

On a alors :

$$\begin{aligned} H_{\text{approx}}(f) &= \sum_{m=0}^N c_{m-N/2} \exp(-2j\pi m f T_e) \exp(2j\pi \frac{N}{2} f T_e) \\ &= \exp(j\pi N f T_e) \times \sum_{m=0}^N c_{m-N/2} \exp(-2j\pi m f T_e) \end{aligned}$$

Or la transformée de Fourier d'un signal discret $h[n]$ (DTFT) se définit par :

$$\sum_{n=0}^N h[n] \exp(-2j\pi n f T_e) \quad (2.16)$$

Par identification, on en déduit les coefficients du filtre RIF :

$$\forall n \in \{0, 1, \dots, N\}, h[n] = \exp(j\pi N f T_e) c_{n-N/2} \quad (2.17)$$

Le terme de phase en facteur peut être écarté (nous nous intéressons ici au spectre d'amplitude du filtre), on en déduit :

$$\forall n \in \{0, 1, \dots, N\}, b_n = h[n] = c_{n-N/2} \quad (2.18)$$

Les coefficients c_n de la série de Fourier inversée tronqués et décalés de $N/2$ correspondent, à un terme de phase près, aux coefficients b_n du filtre RIF.

De plus, nous savons calculer les c_n :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{F_e} \int_{-F_e/2}^{F_e/2} H_{\text{idéal}}(f) \exp(2j\pi n f T_e) \\ &= \frac{1}{F_e} \int_{-f_c}^{f_c} \exp(2j\pi n f T_e) \\ &= 2 \frac{f_c}{F_e} \text{sinc} \left(2\pi n \frac{f_c}{F_e} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

L'équation 2.18 peut être modifiée en utilisant une autre fenêtre que rectangulaire, auquel cas elle devient

$$\forall n \in \{0, 1, \dots, N\}, b_n = h[n] = c_{n-N/2} \times w_n \quad (2.20)$$

2.5.3 Influence du fenêtrage : atténuation de l'effet de Gibbs

Lors du calcul des coefficients du filtre, nous avons tronqué la réponse impulsionnelle en la multipliant par une fenêtre rectangulaire ($w_n = 1$ pour $n \in \{0, 1, \dots, N\}$, 0 sinon). Cette opération n'est pas sans conséquence : en effet, une multiplication en temporel équivaut à un produit de convolution en fréquentiel :

$$H_{\text{approx}}(f) = H_{\text{idéal}}(f) * \text{sinc} \quad (2.21)$$

. les oscillations observées sur la réponse en fréquence des filtres obtenus en découlent directement $W(f)(= TF(w_n)(f))$ a la forme d'un sinus cardinal dans le cas d'une fenêtre rectangulaire : les ondulations de la réponse en fréquence sont donc directement dues à cette fenêtre.

Les ondulations provoquées par les transitions brutales de la fenêtre de troncature sont dues au phénomène de Gibbs. Elles peuvent être atténuées en utilisant des fenêtres avec des transitions plus douces. Il existe de nombreuses fenêtres de pondération (= fenêtre d'apodisation), en voici 2 exemples :

1. la fenêtre de Hamming :

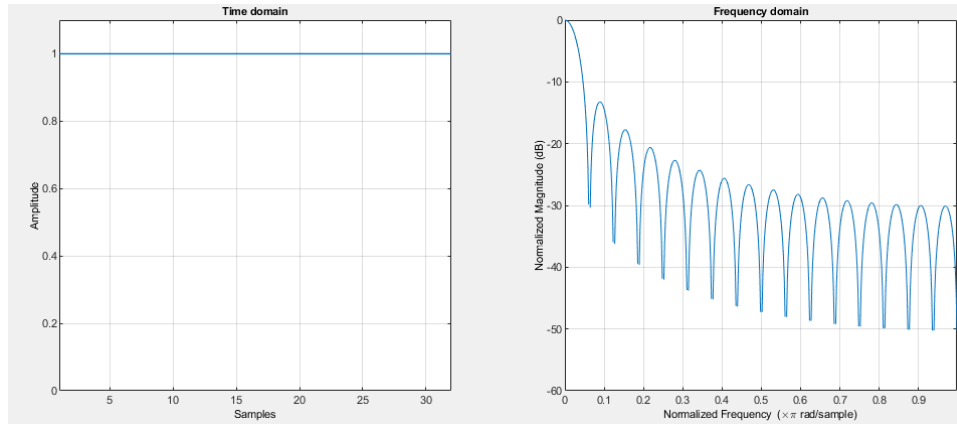
$$\begin{aligned}
 w_n^{\text{Ham}} &= 0.54 - 0.46 \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right) \text{ si } n \in \{0, 1, \dots, N\} \\
 &= 0 \text{ sinon}
 \end{aligned}$$

2. la fenêtre de Blackman :

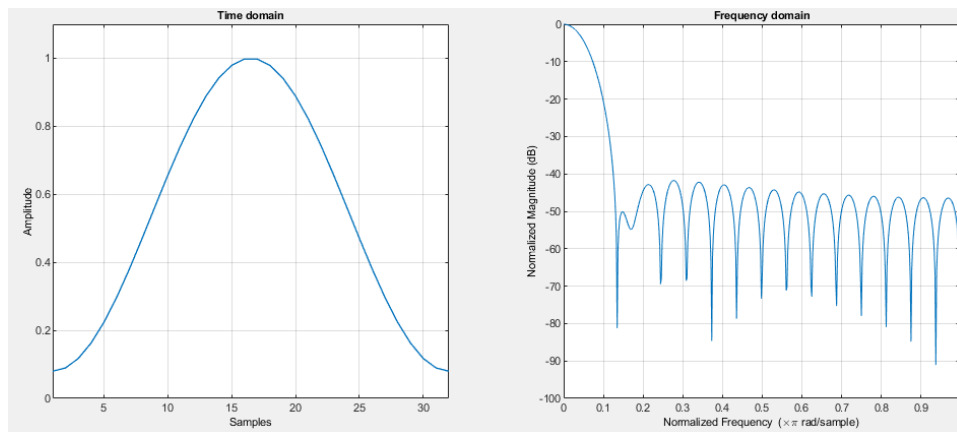
$$\begin{aligned}
 w_n^{\text{Bla}} &= 0.42 - 0.5 \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right) + 0.08 \cos\left(4\pi \frac{n}{N}\right) \text{ si } n \in \{0, 1, \dots, N\} \\
 &= 0 \text{ sinon}
 \end{aligned}$$

Il en existe d'autres : Hann (souvent appelée incorrectement "Hanning"), Bartlett, Kaiser, gaussienne, cosinus, ...).

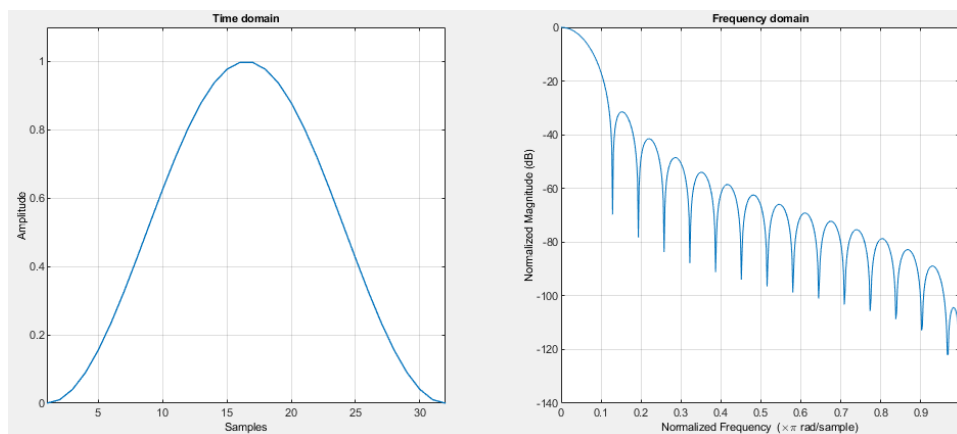
Les allures temporelles et fréquentielles des fenêtres rectangulaires, de Hamming et de Hann sont représentées figure 2.12.



(a) Fenêtre rectangulaire



(b) Fenêtre de Hamming



(c) Fenêtre de Hann

FIGURE 2.12 – Différentes fenêtres et leurs spectres respectifs

2.5 Synthèse d'un filtre numérique RIF

Fenêtre	Performances de la fenêtre			
	R_p (dB)	R_a (dB)	$\Delta\Omega$	$\Delta\tilde{f}$
Rectangle	0.74	21	$1.8\pi/N$	$0.9/N$
Hann	0.055	44	$6.2\pi/N$	$3.1/N$
Hamming	0.014	53	$6.6\pi/N$	$3.3/N$
Blackman	0.0017	74	$11\pi/N$	$5.5/N$

TABLE 2.2 – Comparaison des fenêtres couramment utilisées (liste non exhaustive)

Principales caractéristiques des fenêtres de pondération :

- R_p : ondulation dans la bande passante
- R_a : atténuation entre la bande passante et la bande coupée
- largeur de la bande de transition, exprimée en pulsation et normalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage : $\Delta\Omega = 2\pi \frac{\Delta f}{F_e} = 2\pi \Delta\tilde{f}$, Δf étant la largeur de la bande de transition.

Si la largeur de la bande de transition n'est pas respectée, nous n'obtiendrons pas les R_p et R_a du tableau.

Le choix de la fenêtre de pondération sera toujours un compromis entre la raideur de la réponse dans la bande de transition et les oscillations tolérables dans la bande passante.

Par exemple :

- La pente la plus forte est obtenue avec la fenêtre rectangulaire, mais au prix d'ondulations importantes dans la bande passante et dans la bande coupée.
- Les fenêtres de Hamming et de Blackman ne présentent pratiquement pas d'oscillations, mais la bande de transition est plus large.

Le choix de la fenêtre dépend donc des spécifications.

Enfin, logiquement selon les équations : plus la bande de transition souhaitée est petite, plus N devra être grand comme nous l'avons déjà vu dans la figure 2.8

Exercice 9 Synthèse d'un filtre passe-bas

Réaliser un filtre passe-bas avec le gabarit suivant :

- $f_p = 5$ kHz,
 - $f_s = 7$ kHz,
 - $R_p = 0.02$ dB,
 - $R_a = 40$ dB,
 - $F_e = 48$ kHz.
1. Quelle(s) fenêtre(s) (parmi les 4 du tableau 2.2) peut-on utiliser pour la réalisation de ce filtre ?
 2. En déduire l'ordre minimum N du filtre dans chaque cas
 3. Sélectionner la fenêtre optimale
 4. Démontrer que les coefficients de la fenêtre choisie à la question précédente sont symétriques (i.e., $w[N - n] = w[n]$)
 5. Donner l'équation des coefficients du filtre

6. Calculer le temps de propagation de groupe de ce filtre (dans ce cas, $\tau_g = \frac{NT_e}{2}$)
7. A partir de ce filtre, construire un passe-haut

2.6 Synthèse d'un filtre RII

La fonction de transfert d'un filtre analogique a forcément un dénominateur et donc ne correspond pas à un filtre RIF, mais correspond à un filtre RII.

La synthèse des filtres RII peut se faire à partir des filtres analogiques (Butterworth, Chebyshev, elliptique, ...), puis le passage du monde analogique au monde numérique peut se faire de plusieurs méthodes :

- soit par la méthode de l'invariance impulsionnelle,
- soit par la méthode "pole-zero mapping",
- soit avec la transformation conforme (souvent incorrectement appelée "transformée bilinéaire") permettant de passer de l'expression utilisant la transformée de Laplace à une expression utilisant la transformée en z :

$$p = \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}$$

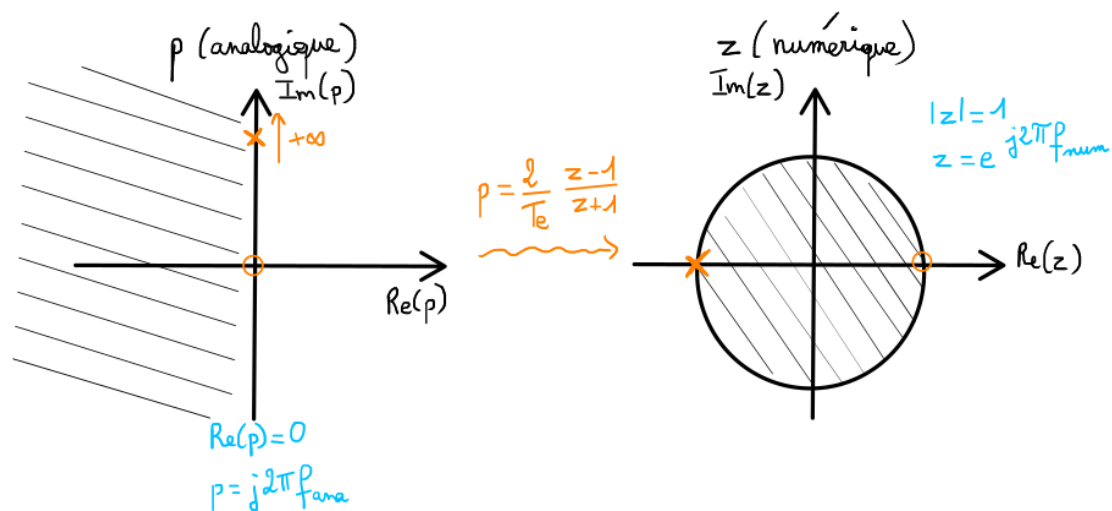


FIGURE 2.13 – Schéma de la transformation conforme $p \longleftrightarrow z$

On constate sur le plan des z qu'en $z = 1$ nous avons $f_{ana} = f_{num} = 0$ mais en $z = -1$ nous avons $f_{num} = F_e/2$ et f_{ana} tend vers l'infini. La transformation produit donc une distorsion des fréquences. Afin de maîtriser cette distorsion, on introduit une prédistorsion (avant de faire la transformation). Cette prédistorsion nous permet d'être exact à une fréquence particulière, classiquement la fréquence de coupure d'un filtre passe-bas. Plus on s'éloigne de cette fréquence, plus on aura de la distorsion.

2.7 Une très brève introduction à la transformation en z

La transformée en z d'une suite numérique $\{x[n]\}, n \in \mathbb{Z}$ est donnée par :

$$X(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] z^{-k} \quad (2.22)$$

z est une variable *complexe*, et la série définie ci-dessus converge en général dans un anneau centré en 0, de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 .

On remarquera que la transformée de Fourier à temps discret (DTFT) de la suite $\{x[n]\}_n$ s'écrit :

$$X(\tilde{f}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \exp(-j2\pi k \tilde{f}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \exp\left(-j2\pi k \frac{f}{F_e}\right) \quad (2.23)$$

2.8 Comparatif RIF RII

Filtres RIF :

- ☺ Ils sont inconditionnellement stables
- ☺ Ils permettent d'obtenir une phase linéaire
- ☹ Ils nécessitent un ordre élevé

Filtres RII :

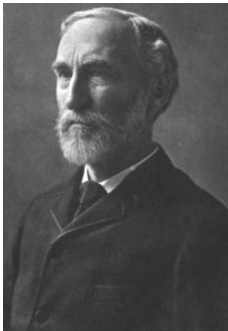
- ☺ Ils nécessitent un ordre moins élevé que les filtres RIF pour les mêmes performances, donc moins de temps de calcul
- ☹ Ils nécessitent une étude de stabilité (systèmes bouclés)
- ☹ Ils présentent une distorsion de phase

Un peu d'histoire ...

Jean Baptiste Joseph Fourier est un mathématicien et physicien français né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris.



Napoléon le désigne pour participer à la campagne d'Égypte en 1798, et il sert comme gouverneur de Basse Égypte jusqu'en 1801 lorsqu'il rentre en France pour poursuivre ses travaux. Ces derniers concernent en physique la théorie de la chaleur, et en mathématiques les équations différentielles et les séries trigonométriques. Il présente le 21 décembre 1807, à l'Académie des sciences un mémoire intitulé *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides*. Il publie en 1822 une étude très complète intitulée *Théorie analytique de la chaleur* dans laquelle il évoque les séries trigonométriques. Plusieurs de ses contemporains contestent néanmoins ses travaux. Depuis, ces séries ont été appliquées dans de nombreux domaines scientifiques. Par ailleurs, Fourier fut le premier à évoquer la notion d'effet de serre. Malade, il pense que seule la chaleur peut le sauver et meurt en 1830 d'un arrêt cardiaque dans son logis qu'il surchauffait.



J. Willard Gibbs

Josiah Willard Gibbs est un physicien américain né le 11 février 1839 à New Haven (Connecticut, États-Unis) et mort le 28 avril 1903 à New Haven.

Il est l'un des pionniers de la thermodynamique et de la mécanique statistique. Professeur à l'Université de Yale, il développe des concepts fondamentaux tels que l'énergie libre de Gibbs, qui permet de prédire si une réaction chimique peut se produire spontanément. Ses travaux en thermodynamique chimique posent les bases de la chimie physique moderne. Il est aussi l'un des premiers à appliquer les probabilités à la mécanique pour expliquer les propriétés des systèmes thermodynamiques, fondant ainsi la mécanique statistique. En optique, Gibbs propose une méthode vectorielle pour analyser la polarisation de la lumière. Son oeuvre est aujourd'hui considérée comme fondamentale dans plusieurs branches des sciences physiques.



Richard Wesley Hamming est un mathématicien né le 11 février 1915 à Chicago (Illinois, États-Unis) et mort le 7 janvier 1998 à Monterey (Californie, États-Unis). Travaillant aux laboratoires Bell, il développe en 1950 le code de Hamming, un algorithme de détection et de correction d'erreurs dans les transmissions de données. Ce code, fondamental en informatique et en télécommunications, permet de corriger automatiquement les erreurs dans les messages numériques, améliorant ainsi la fiabilité des systèmes de transmission. Hamming a également contribué au développement des premiers ordinateurs, et son travail a posé les bases de la théorie des codes correcteurs utilisée dans de nombreux systèmes de communication modernes. Ses travaux ont également porté sur l'analyse numérique et le traitement numérique du signal auquel il a consacré l'un ([Ham98]) de ses neuf livres.

2.8 Comparatif RIF RII

Notes

Notes

2.8 Comparatif RIF RII

Notes

Notes

2.8 Comparatif RIF RII

Chapitre 3

Codage source, codage canal, codage en ligne

Se référer au cours de P. Brochet.

Contenu :

- Codage source
 - ▷ sans pertes
 - ▷ avec pertes
- Codage canal
 - ▷ correction d'erreur
 - ▷ interleaver
 - ▷ scrambler
- Codage en ligne (avec ou sans modulation)

Chapitre 4

Réception, décodage en ligne

4.1 Réception : les différentes étapes

4.1.1 Préambule et problématique

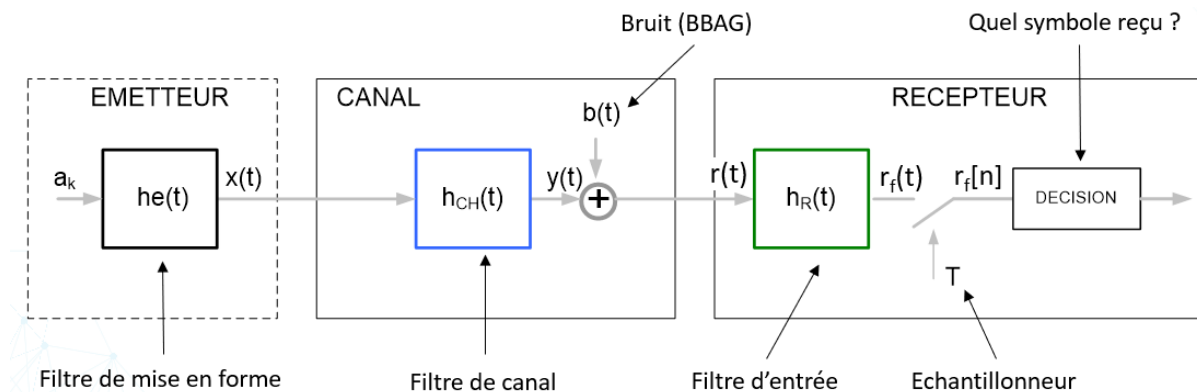


FIGURE 4.1 – Réception

Le signal sortant du codage en ligne passe dans le canal de transmission, il est alors : bruité, déformé par les bornes du canal, retardé et atténué. Le récepteur doit donc limiter l'influence des perturbations avant de prendre la décision :

- Pour limiter l'influence du bruit, le récepteur a un filtre en entrée, nous étudierons le filtre adapté qui permet d'optimiser le rapport signal sur bruit
- Pour limiter l'influence des bornes du canal, il est possible d'utiliser une mise en forme autre que rectangulaire ayant une occupation spectrale plus petite, nous étudierons la famille des gabarits de Nyquist dont le cosinus surélevé
- Pour limiter l'influence du retard, qui peut être variable, notamment en cas de déplacement, nous pouvons ajouter après le filtre un mécanisme de synchronisation, nous étudierons l'algorithme Early-Late

Une fois que ces différentes influences sont minimisées, le récepteur peut alors effectuer le décodage en ligne en effectuant la décision à l'instant de décision en comparant la valeur de l'échantillon au(x) seuil(s). La décision est le choix du symbole reçu parmi la liste de symboles possibles, ce qui permet ensuite d'envoyer en sortie du décodage en ligne les bits correspondants au symbole. Parfois, le signal est numérisé dès l'entrée du récepteur afin d'effectuer toutes ces étapes en numérique.

4.1 Réception : les différentes étapes

4.1.2 Filtrage du bruit

Le bruit est généralement quasiment blanc, donc il y a du bruit dans notre occupation spectrale. Dans l'occupation spectrale le filtre ne peut donc pas enlever que du bruit.

L'objectif de ce filtre est d'améliorer le rapport signal sur bruit. Il peut être suffisant par exemple de mettre un filtre passe-bande ne laissant passer que l'occupation spectrale du signal. Le filtre adapté que l'on verra en 4.2 permet d'optimiser le rapport signal sur bruit.

4.1.3 Synchronisation des symboles

Afin d'effectuer une décision sur chaque symbole, le récepteur doit prélever une valeur pour chaque symbole et la comparer au(x) seuil(s), le moment où le récepteur prélève un échantillon se nomme l'instant de décision. Il est souvent nécessaire de se synchroniser pour obtenir l'instant de décision.

La synchronisation n'est pas toujours utile, notamment si le temps de transmission est très négligeable en comparaison du temps symbole ou si le réseau à une horloge partagée.

Souvent en début de transmission, une séquence connue du récepteur est envoyée par l'émetteur, cela permet de s'adapter à la puissance du signal reçue et de se synchroniser.

En sortie du filtre adapté le signal est triangulaire, comme nous avons plusieurs niveaux possibles, les triangles ont des amplitudes différentes et ils sont « vers le haut » ou « vers le bas ». Le signal est élevé au carré, pour n'avoir que des triangles « vers le haut ». 2 échantillons sont prélevés pour chaque symbole avec un écart en temps constant. Si le 1er échantillon est plus grand que le 2nd alors il faut retarder l'échantillonnage. Si le 1er échantillon est plus petit que le 2nd alors il faut avancer l'échantillonnage. Lorsque le 1er échantillon et le 2nd échantillon ont la même valeur cela signifie que l'instant du milieu est l'instant de décision. Cette méthode converge assez rapidement mais elle a l'inconvénient de prélever 3 échantillons par symbole, ce qui peut être un rythme trop élevé.

Il existe d'autres méthodes (algorithme de Gardner, algorithme de Mueller et Müller), qui utilisent les passages par 0.

4.1.4 Décodage en ligne

Le décodage en ligne consiste à faire correspondre à une suite de symboles physiques (électriques, optiques) une suite binaire. Pour pouvoir décoder, il est nécessaire que le récepteur connaisse le codage en ligne utilisé.

Diagramme de l'oeil On peut visualiser les divers phénomènes (bruits, IES, ...) à l'oscilloscope en formant le diagramme de l'oeil. On réécrit sur le même chronogramme tous les $2 T_s$ ou les $2 T_b$ (on choisit le plus grand) le signal en sortie du filtre. Par rémanence, l'oscilloscope superpose toutes les trajectoires potentielles, ce qui dessine une figure présentant des "yeux" centrés temporellement sur l'instant d'échantillonnage et verticalement sur le seuil de décision. La forme de l'oeil renseigne sur les conditions de détection. Cela permet de tester simplement le récepteur. Si les yeux sont "ouverts" alors la marge au bruit est suffisante, il ne devrait pas y avoir d'erreur à la décision.

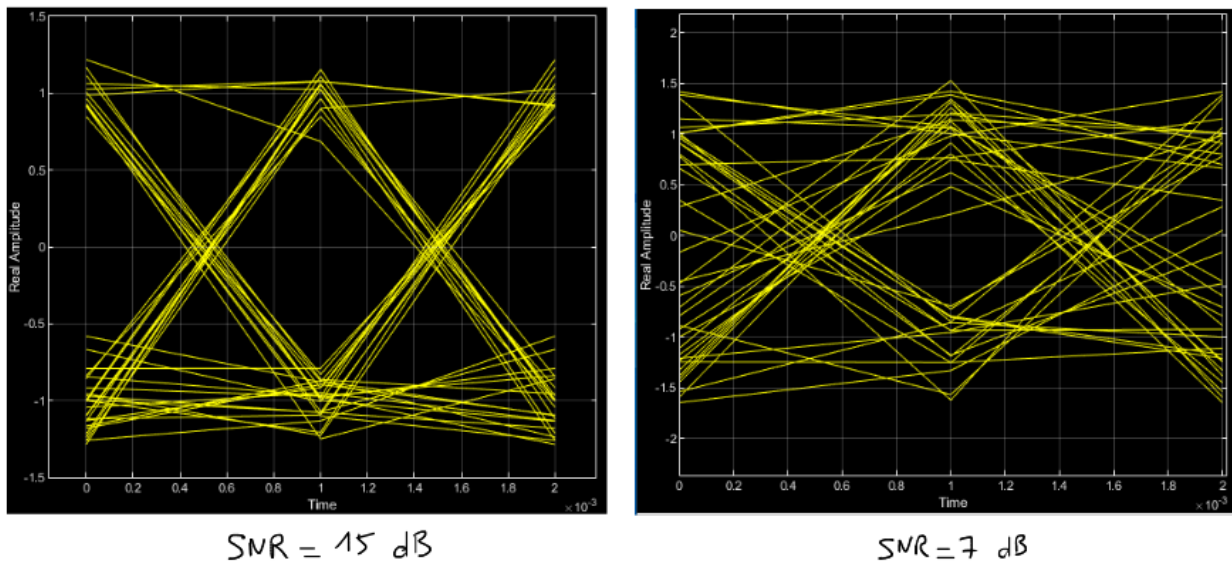


FIGURE 4.2 – Diagramme de l'oeil

4.2 Filtrage adapté

4.2.1 Introduction

On rappelle que le canal de transmission est modélisé par 4 caractéristiques :

- un bruit (blanc additif gaussien),
- une bande passante,
- une atténuation,
- un temps de traversée

Dans cette partie, nous ne prenons en compte ni l'atténuation, ni le temps de traversée, ni la limitation en bande passante.

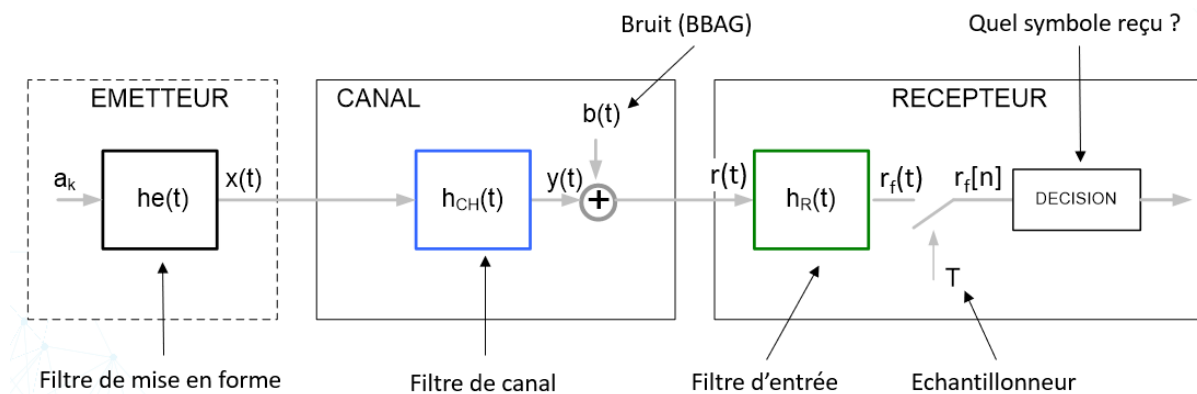
Le filtrage adapté permet de minimiser l'influence du bruit sur la décision. Dans votre scolarité, vous retrouverez la notion de filtrage adapté en deuxième année notamment dans le cours de radar primaire. Afin de minimiser l'influence du bruit, le filtrage adapté effectue le meilleur compromis entre enlever le maximum de bruit... sans détériorer le signal.

4.2.2 Place dans le récepteur

Avec une transmission bande de base (c'est-à-dire sans modulation) le filtre adapté est placé au début du récepteur, noté filtre d'entrée sur le synoptique déjà vu précédemment

- a_k : bits ou symboles émis par la source
- $x(t)$: signal en sortie de l'émetteur
 - ▷ signal analogique, suite de motifs
- $y(t)$: signal en sortie du canal
 - ▷ signal analogique, suite de motifs déformés et/ou atténués et/ou retardés
- $b(t)$: bruit, supposé blanc gaussien, de DSP $S_b(f) = \frac{N_0}{2}$ W/Hz, soit de puissance moyenne $P_b^{\text{moy}} = N_0$ W. A cause de ce dernier, il y aura des erreurs de décision.

4.2 Filtrage adapté



- $r(t)$: signal reçu $r(t) = y(t) + b(t)$
 - ▷ analogique, suite de motifs bruités et/ou déformés et/ou atténués et/ou retardés
- $r_f(t)$: signal en sortie du filtre adapté
- l'interrupteur symbolise un échantillonnage aux instants de décision
- la décision consiste à affecter le signal reçu filtré à l'un des mots de l'alphabet de départ
- sortie du bloc décision : bits reçus d'après le récepteur, le but étant bien sûr qu'ils soient identiques aux bits émis

La décision ne pouvant hélas être parfaite, il faudra établir des contraintes sur la probabilité de mauvaise décision (P_{md}). Même sans équilibre de relation mathématique, on comprend assez facilement que plus le signal utile en sortie du filtre $r_f(t)$ est élevé par rapport au bruit résiduel en sortie de ce même filtre, plus il sera facile pour l'étage de décision de prendre la bonne décision

4.2.3 Un petit jeu ?

Le fonctionnement du filtre adapté peut s'apparenter au jeu pour enfants "Où est Charlie?" (*Where's Waldo?* ou *Where's Wally?* dans les pays anglo-saxons).

En effet, ce jeu consiste à chercher, dans une image comme par exemple celle de la figure 4.4, un personnage dont on connaît les caractéristiques :

- un jeune homme grand et mince aux cheveux bruns,
- portant des lunettes de vue,
- habillé avec :
 - un bonnet blanc à pompon rouge,
 - un sweat-shirt à rayures blanches et rouges,
 - un pantalon bleu
 - et des chaussures marron

comme on le voit sur la figure 4.3. Alors, notre œil va "s'adapter" à ces caractéristiques, considérer ce qui n'y ressemble pas à du bruit et faire une "corrélacion" (!) entre la portion de l'image qui défile devant notre œil et l'apparence du personnage Charlie.

On recherche donc un "motif" connu à l'avance dans un signal contenant le motif en question et du bruit. Le filtre adapté fonctionne selon ce principe, et l'on verra par la suite que le mot "corrélacion" cité ci-dessus n'arrive pas par hasard.



FIGURE 4.3 – Charlie

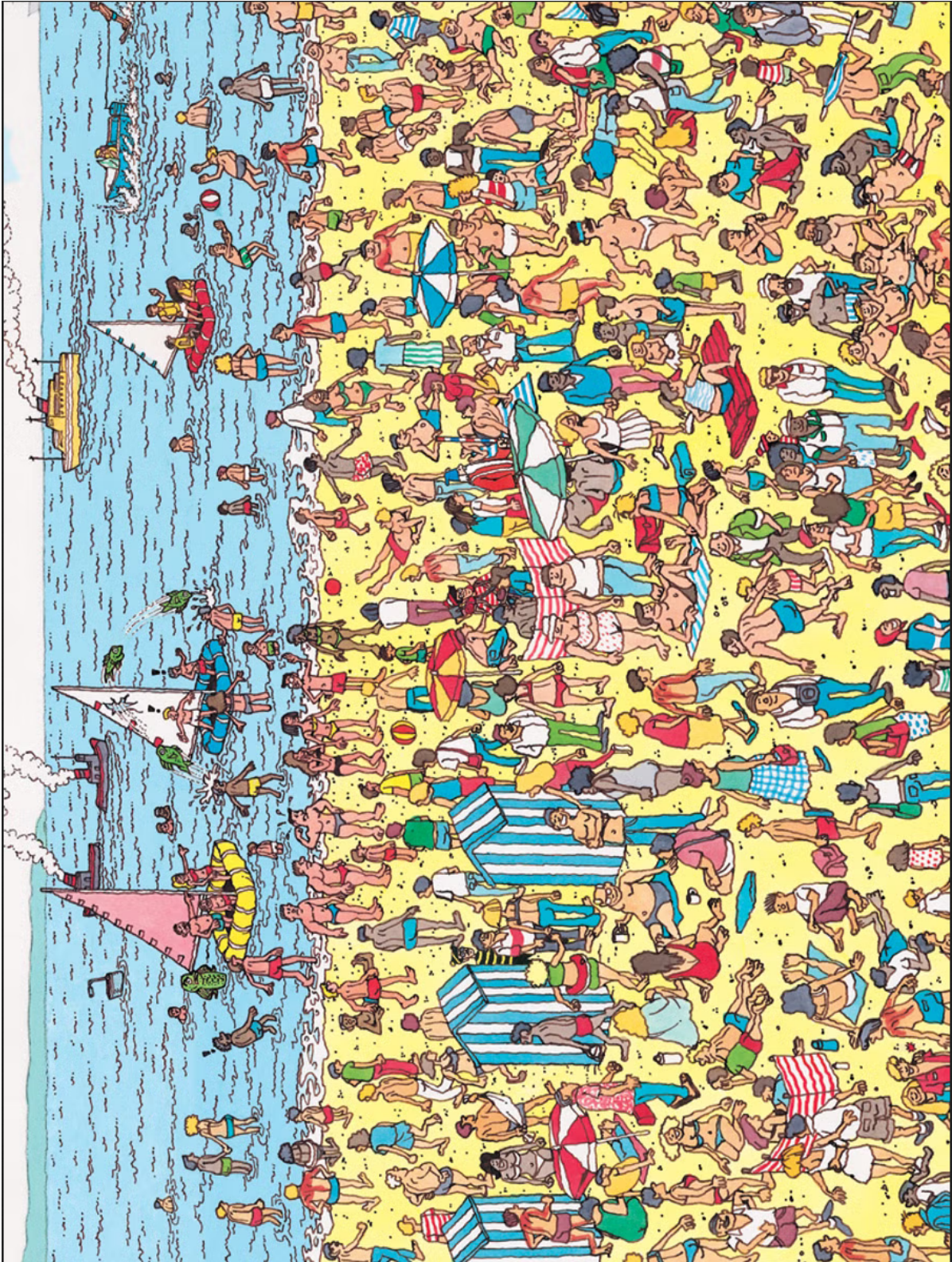


FIGURE 4.4 – Où est Charlie ?

4.2 Filtrage adapté

4.2.4 Réponse impulsionnelle, fonction de transfert

Il s'agit de choisir le filtre H_r qui minimisera la probabilité d'erreur, donc maximisera la rapport signal à bruit en sortie de ce même filtre H_r .

On a :

$$\begin{aligned} r(t) = y(t) + b(t) &\implies r_f(t) = r(t) * h_r(t) \\ &= y(t) * h_r(t) + b(t) * h_r(t) \\ &= y_f(t) + b_f(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Le rapport signal à bruit en sortie du filtre à l'instant de décision s'écrit :

$$\text{SNR}_{r_f} = \frac{y_f(t_d)^2}{P_{b_f}}$$

- Développons le numérateur :

$$y_f(t) = \text{TF}^{-1}[Y_f(f)](t) = \int_{\mathbb{R}} Y(f) \times H_r(f) e^{2j\pi ft} df \implies y_f(t_d) = \int_{\mathbb{R}} Y(f) \times H_r(f) e^{2j\pi ft_d} df$$

- Développons le dénominateur :

$$P_{b_f} = \int_{\mathbb{R}} S_{b_f}(f) df = \int_{\mathbb{R}} S_b(f) |H_r(f)|^2 df$$

Alors :

$$\text{SNR}_{r_f} = \frac{\left| \int_{\mathbb{R}} Y(f) \times H_r(f) e^{2j\pi ft_d} df \right|^2}{\int_{\mathbb{R}} S_b(f) |H_r(f)|^2 df}$$

Majorons alors le numérateur à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int u(x)v(x) dx \right|^2 \leq \int |u(x)|^2 dx \times \int |v(x)|^2 dx, \text{ l'égalité étant atteinte pour } u(x) = \lambda v^*(x) \quad (4.2)$$

en posant $u(f) = H_r(f) \sqrt{S_b(f)}$ et $v(f) = \frac{Y(f) e^{j2\pi ft_d}}{\sqrt{S_b(f)}}$:

$$\begin{aligned} \text{SNR}_{r_f} &= \frac{\left| \int_{\mathbb{R}} Y(f) \times H_r(f) e^{2j\pi ft_d} df \right|^2}{\int_{\mathbb{R}} S_b(f) |H_r(f)|^2 df} \\ &\leq \frac{\int_{\mathbb{R}} \left| H_r(f) \times \sqrt{S_b(f)} \right|^2 df \times \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{Y(f) e^{2j\pi ft_d}}{\sqrt{S_b(f)}} \right|^2 df}{\int_{\mathbb{R}} S_b(f) |H_r(f)|^2 df} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{|Y(f)|^2}{S_b(f)} df \end{aligned} \quad (4.3)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz 4.2, la borne supérieure 4.3 est atteinte pour :

$$H_r(f) \sqrt{S_b(f)} = \lambda \frac{Y^*(f) e^{-j2\pi ft_d}}{\sqrt{S_b(f)}} \implies H_r(f) = \lambda \frac{Y^*(f) e^{-j2\pi ft_d}}{S_b(f)} = \lambda \left[\frac{Y(f) e^{j2\pi ft_d}}{S_b(f)} \right]^* \quad (4.4)$$

Or par hypothèse nous avons un bruit de type BBAG, de DSP $S_b(f) = \frac{N_0}{2}$ W/Hz. L'équation 4.4 devient donc :

$$H_r(f) = \frac{\lambda}{\frac{N_0}{2}} Y^*(f) e^{-j2\pi f t_d} = \frac{\lambda}{\frac{N_0}{2}} \left[Y(f) e^{j2\pi f t_d} \right]^* \quad (4.5)$$

Nous obtenons ainsi la réponse fréquentielle du filtre adapté.

Réponse fréquentielle du filtre adapté

La réponse fréquentielle du filtre adapté à un motif correspond (à un déphasage près) au conjugué du spectre du motif.

En effet, $y(t)$ correspond soit à $m^0(t)$, soit à $m^1(t)$.

Par transformée inverse de Fourier sur 4.5, on obtient :

$$h_r(t) = \frac{\lambda}{\frac{N_0}{2}} y^*(t_d - t) \quad (4.6)$$

Or concrètement, $y(t)$ est réel, et la réponse impulsionnelle est normalisée par rapport à l'énergie du motif, donc

$$h_r(t) = y(t_d - t) \quad (4.7)$$

Ce qui donne le très important résultat suivant :

Réponse impulsionnelle du filtre adapté

La réponse impulsionnelle du filtre adapté à un motif est égale au motif lui-même, retourné sur l'axe des temps, et décalé d'un temps t_d .

Plusieurs remarques suite à ce résultat :

- le SNR maximal vaut alors, d'après 4.3 $\frac{E}{\frac{N_0}{2}} = \frac{2E}{N_0}$ où E est l'énergie du motif émis,
- le motif étant en général défini sur l'intervalle $[0, T]$, le filtre adapté est non causal si $t_d < T$. L'instant optimal de décision est donc $t_d = T$: on prend la décision en fin de temps symbole.

$$h_r(t) = y(T - t) \quad (4.8)$$

On peut interpréter cela comme "il faut observer le signal pendant toute la durée du symbole avant de prendre la décision".

- en reprenant l'équation 4.1, on obtient :

$$\begin{aligned}
 r_f(t) &= r(t) * y(t_d - t) = (y(t) + b(t)) * y(t_d - t) \\
 &= y(t) * y(t_d - t) + b(t) * y(t_d - t) \\
 &= \int y(x) y(t_d - t + x) dt + b(t) * y(t_d - t) \\
 &= \underbrace{R_y(t - t_d)}_{\text{partie signal utile}} + \underbrace{R_{yb}(t - t_d)}_{\text{intercorrélacion entre le motif et le bruit}}
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le signal filtré se compose, pour la partie signal utile, de l'autocorrélation du motif émis : le filtre adapté donne la corrélation (donc le degré de ressemblance) entre le signal bruité reçu et le motif attendu. Ceci justifie le terme de "corrélacion" utilisé dans la section 4.2.3.

A partir de là, pour prendre la décision "1" ou "0" (donc motif émis = $m^1(t)$ ou $m^0(t)$), on fait passer le signal dans deux filtres adaptés en parallèle (l'un à m^1 , l'autre à m^0), et on regarde quel filtre donne la plus grande sortie. Cela revient donc, mathématiquement, à convoluer le signal

4.2 Filtrage adapté

reçu par $m^1(t) - m^0(t)$: on dit alors parfois que la réponse impulsionnelle du filtre adapté est $h_r(t) = m^1(t) - m^0(t)$. Cependant, la plupart du temps, comme vous l'avez vu en codage en ligne, on n'utilise que très rarement deux formants complètement différents : soit ils sont antipodaux ($m^1(t) = -m^0(t)$), soit ils sont orthogonaux ($\langle m^0(t), m^1(t) \rangle = 0$). Dans le cas antipodal, il suffit donc de convoluer avec m^0 (ou m^1).

Enfin, on peut montrer qu'à énergie du bit équivalente, le SNR en sortie du filtre adapté est deux fois plus grand avec des signaux antipodaux ($m^1 = -m_0$, ce qu'on a par exemple avec le P/NRZ) qu'avec des signaux orthogonaux (produit scalaire $\langle m_0, m_1 \rangle = 0$, ce qu'on a par exemple avec le U/NRZ)

Exercice 10 Exemple avec une séquence codée en P/NRZ/L

Soit la séquence $\{1, 1, 0, 1, 0, 0\}$ codée avec un P/NRZ/L/ La figure 4.5 représente en noir la séquence émise par l'émetteur $x(t)$ et en bleu la même séquence passée à travers le filtre adapté. On a négligé le temps de transmission.

1. Quel est la réponse impulsionnelle du filtre adapté au P/NRZ/L ?
2. Quelle est la fonction de transfert de ce filtre adapté ?
3. Sur le dessin, dessiner la réponse du filtre adapté au premier "1"
4. Dessiner également la réponse du filtre adapté au deuxième "1" et expliquer alors la forme de $r_f(t)$ entre 0 et $2T_s$
5. Quel est l'instant de décision optimal si le signal se passe pas par le filtre adapté (le signal reçu ressemble alors à $x(t)$) ?
6. Même question pour $r_f(t)$
7. Combien vaut le seuil de décision ?

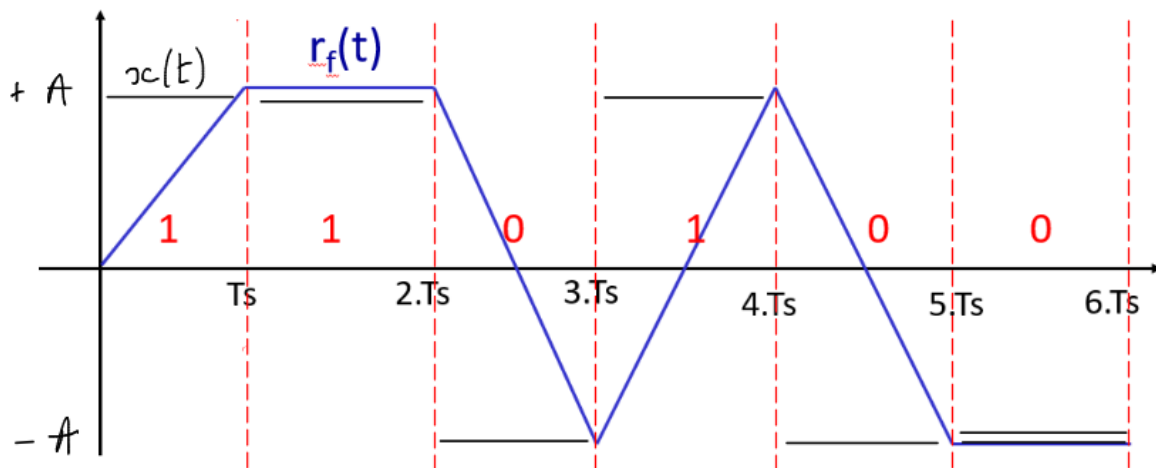


FIGURE 4.5 – P/NRZ/L avec et sans filtre adapté

Exercice 11 Filtre adapté à un P/RZ/L

1. Côté émetteur :
 - (a) Que signifie P ? RZ ? L ?
 - (b) Dessiner les 2 motifs
 - (c) Quels sont les avantage(s) et inconvénient(s) du P/RZ/L ?

- (d) Quel est le rapport entre T_b et T_s ?
- (e) Dessiner le chronogramme de la sortie du codage en ligne à : $\{1, 1, 0, 1, 0, 0\}$
2. Côté récepteur
- (a) Calculer et dessiner la réponse impulsionnelle du filtre adapté
- (b) Dessiner la réponse du filtre adapté à un 1
- (c) Dessiner la réponse du filtre adapté à un 0
- (d) Dessiner le chronogramme de la séquence que vous avez dessiné à la question précédente
- (e) A quoi sert le filtre adapté ?
- (f) En supposant le bruit de DSP $\frac{N_0}{2}$, combien vaut le SNR maximal atteignable pour un "1" ?
- (g) En supposant le bruit de DSP $\frac{N_0}{2}$, combien vaut le SNR maximal atteignable pour un "0" ?
- (h) Quel est l'instant de décision optimal ?
- (i) Combien vaut le seuil de décision ?

** Integrate and dump **

4.3 Critère de Nyquist, gabarit de Nyquist

4.3.1 Introduction

On rappelle (une fois de plus !) que le canal de transmission est modélisé par 4 caractéristiques :

- un bruit (blanc additif gaussien),
- une bande passante,
- une atténuation,
- un temps de traversée

Dans cette partie, nous ne prenons en compte ni l'atténuation, ni le temps de traversée, ni le bruit. Intéressons-nous à l'effet de la bande passante du canal sur le signal avec un exemple simple : on prend un motif simple (rectangulaire) de durée T_s . La figure 4.6 montre 4 cas, avec une bande passante de plus en plus restreinte.

Conformément à ce que vous avez vu en mathématiques appliquées, plus le spectre du signal se raccourcit, plus le signal s'étale en temps. Ceci donne lieu à deux phénomènes indésirables :

- le pic de signal est émoissé, diminuant ainsi le SNR à l'instant de décision,
- les signaux d'un T_s à l'autre ne sont plus "étanches" et se recouvrent partiellement : on appelle cela l'interférence entre symboles (IES).

Pour lutter contre cela, il est nécessaire de mettre en forme le signal d'une certaine manière. Le gabarit de Nyquist permet de prendre en compte le fait que le canal soit borné en bande passante.

Dans la suite, on notera, conformément au dessin 4.7 :

- $H_e(f)$: la fonction de transfert de la mise en forme des signaux dans le codage en ligne (formant)

4.3 Critère de Nyquist, gabarit de Nyquist

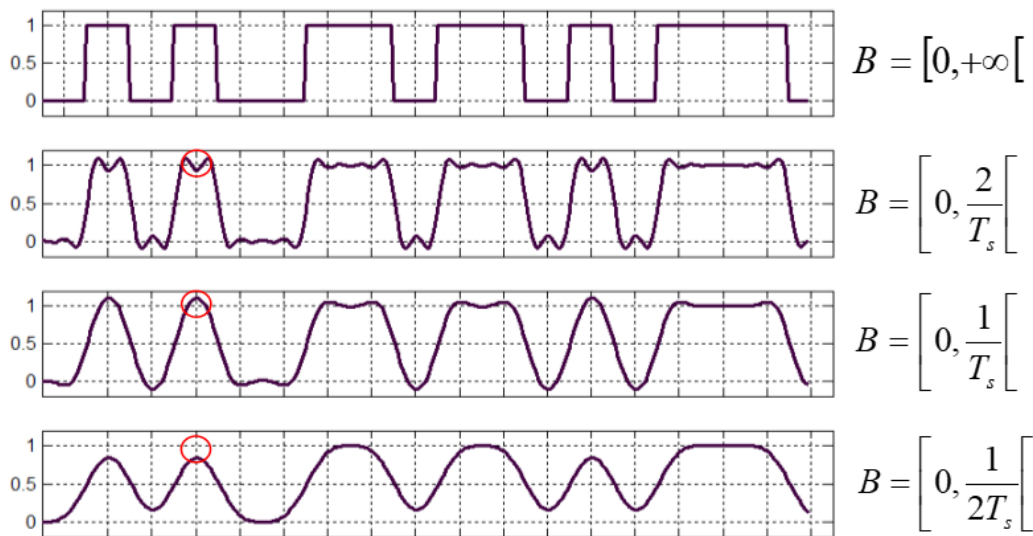


FIGURE 4.6 – Allure d’un signal rectangulaire ayant traversé un canal de bande passante limitée

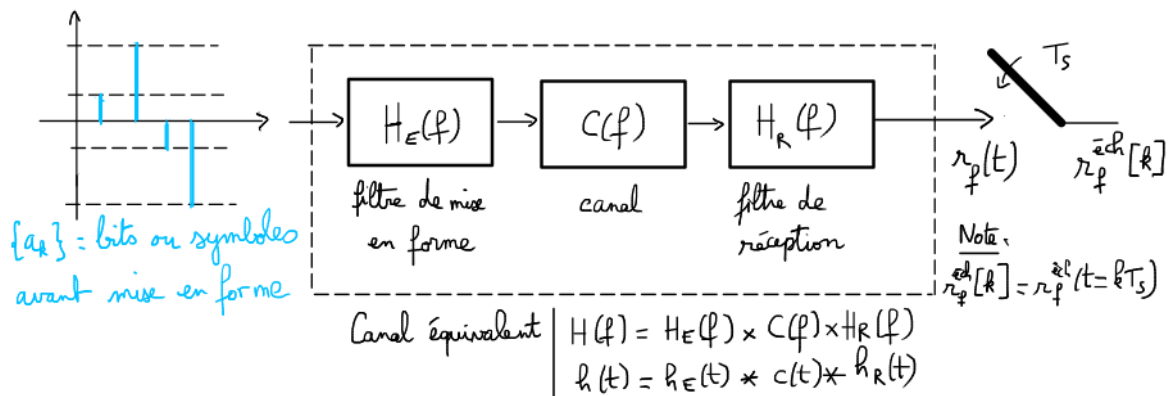


FIGURE 4.7 – Notion de canal équivalent

- $H_r(f)$: la TF du filtre avant la décision (par exemple filtre adapté comme vu précédemment, ou filtre passe-bas, ou rien)
- $C(f)$: 1 dans la bande passante B et 0 ailleurs, les autres paramètres sont inutiles
- $H(f)$: Canal équivalent égal au produit des trois précédents, sa bande passante est inférieure ou égale à B

Avant la mise en forme, on a

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta(t - kT_s) \quad (4.10)$$

Après la mise en forme, le passage dans le canal et le filtrage à la réception, on a :

$$r_f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h(t - kT_s) \quad (4.11)$$

On rappelle que l’équation 4.11 signifie que h est répété tous les T_s , pondéré par l’amplitude a_k .

Puis le récepteur échantillonne tous les T_s pour prendre sa décision, le signal s'écrit alors :

$$r_{ech}[m] = r_{ech}(t = mT_s) \quad (4.12)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_{ech}(mT_s - kT_s) \quad (4.13)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_{ech}[m - k] \quad (4.14)$$

$$= a_m h_{ech}[0] + \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq m} a_k h_{ech}[m - k] \quad (4.15)$$

On distingue donc deux termes dans la dernière équation : le signal reçu à l'instant mT_s se compose du terme $a_m h_{ech}[0]$ qui nous intéresse (il correspond au symbole que l'on souhaite détecter) et d'un terme impliquant les autres symboles ($k \neq m$) qui viennent donc en partie "parasiter" le signal : on parle d'interférence entre symboles (IES).

Ce problème vient bien du caractère limité de la bande passante du canal : $h(t)$ décroît d'autant moins vite que la bande passante est petite. Par exemple, sur une ligne téléphonique classique, la bande passante utilisable vaut habituellement [300, 3400] Hz, avec un temps de réponse de l'ordre de 10 ms. Si on prend comme hypothèse une vitesse de transmission de 2400 bauds, on a une interférence entre environ 24 symboles consécutifs.

Par conséquent, la réponse du canal équivalent $h(t)$ doit respecter le critère de Nyquist :

Critère de Nyquist

$$h_{ech}[0] = 1 \text{ et } h_{ech}[k] = 0 \text{ pour } k \neq 0 \quad (4.16)$$

L'équation 4.16 signifie que le canal équivalent doit avoir une réponse impulsionnelle égale à un Dirac numérique. Par application de la transformée de Fourier, cela signifie :

$$H_{ech}(f) = 1, \forall f \in \mathbb{R} \quad (4.17)$$

Le canal équivalent échantillonné doit donc se comporter comme un passe-tout ! Ce qui paraît a priori impossible. Mais nous avons vu dans le chapitre 1, une fonction continue de t $h(t)$ échantillonnée tous les T_{ech} voit sa transformée de Fourier $H(f)$ répliquée dans le domaine fréquentiel, les répliques se trouvant tous les $F_{ech} = \frac{1}{T_{ech}}$ (voir figure 4.8)

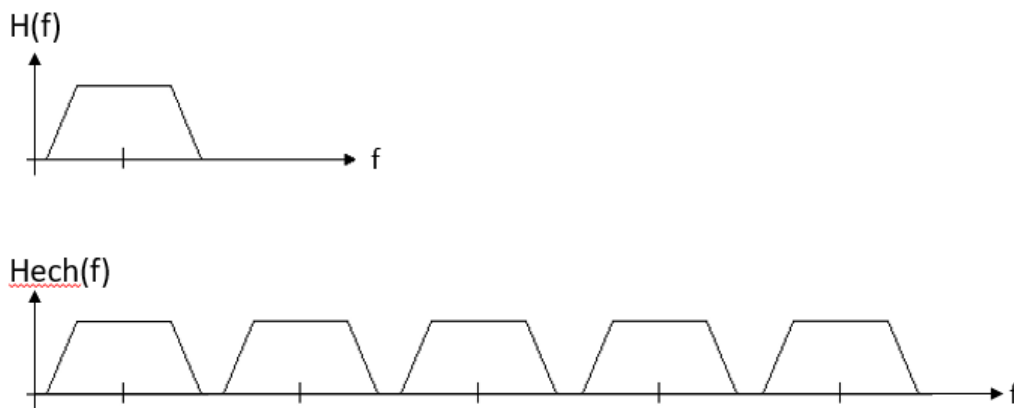


FIGURE 4.8 – Gabarit répliqué dans le domaine fréquentiel

4.3 Critère de Nyquist, gabarit de Nyquist

On va donc faire en sorte que le gabarit $H(f)$ plus ses répliques s'additionnent pour obtenir la condition 4.17. Cela suppose des conditions sur B , T_s et les "pentes" ascendante et descendante du gabarit. On peut constater sur la figure 4.9 que le critère :

- n'est pas respecté si $\frac{1}{T_s} > 2B \iff T_s < \frac{1}{2B}$: il y aura nécessairement de l'IES
- peut être respecté si $\frac{1}{T_s} = 2B$, mais cela implique nécessairement que :

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |f| < B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \iff h(t) = \text{sinc} \left(\frac{\pi t}{T_s} \right)$$

qui est non causal. On peut contourner le problème avec un décalage temporel. Cependant, cette forme présente un autre problème plus gênant : un sinc décroissant lentement, une erreur de synchronisation, même faible, fera qu'à l'instant d'échantillonnage on aura une addition de nombreuses IES

- et qu'il ne l'est complètement que si :
 - ✓ $2B > \frac{1}{T_s} \iff T_s > \frac{1}{2B}$
 - ✓ la pente descendante soit impaire par rapport au point "milieu" ($f = \frac{1}{2T_s}, H(f) = 0.5$)

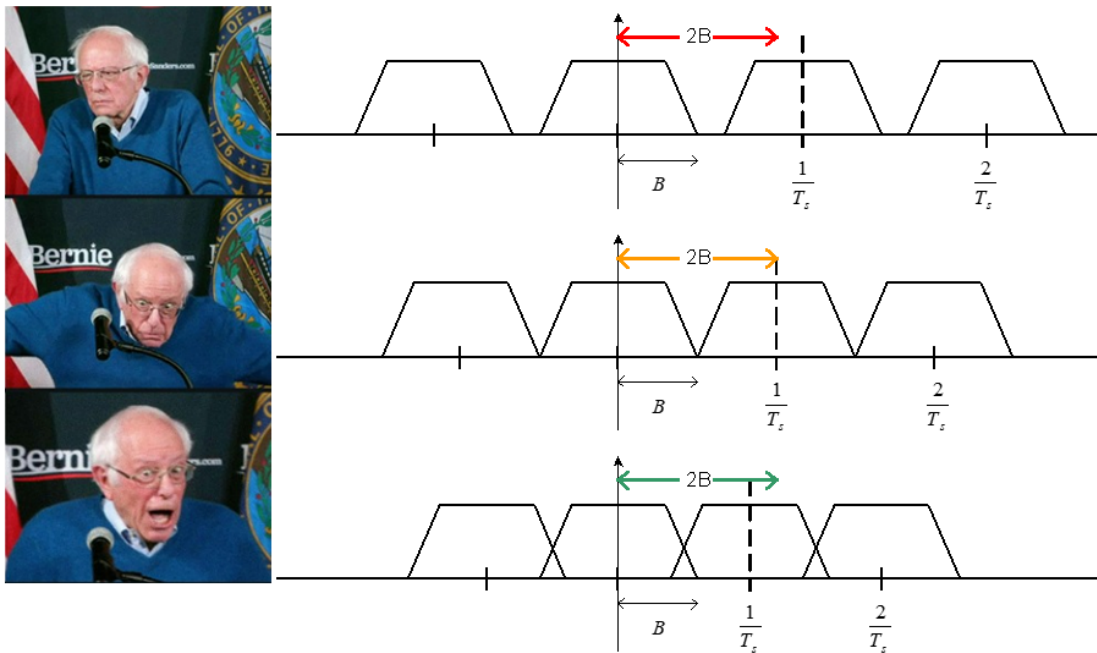


FIGURE 4.9 – Addition du gabarit $H(f)$ et de ses répliques

On retiendra donc le résultat suivant :

Condition de non IES

On peut avoir un canal sans IES à condition de limiter le débit de symboles :

$$D_{max} = \frac{1}{T_s^{min}} < 2B$$

avec B la bande passante du canal.

Une fois ces conditions remplies, on appelle **gabarit de Nyquist**, noté $H_N(f)$, le spectre du canal équivalent, avec pour rappel $H_N(f) = H_e(f) \times C(f) \times H_r(f)$.

De plus, on a supposé que le canal laissait tout passer dans sa bande passante et rien en dehors, ce qui nous donne :

$$H_N(f) = H_e(f) \times H_r(f), f \in BP_{\text{canal}} \quad (4.18)$$

On n'a donc pas de contraintes sur H_e seul ou H_r seul, mais sur le produit des deux.

Cependant, si on souhaite utiliser un filtre adapté pour optimiser le SNR, cela met une condition supplémentaire vue dans le chapitre 4.2 :

$$|H_e(f)| = |H_r(f)|$$

Dans ce cas, la combinaison gabarit de Nyquist + filtre adapté impose

$$|H_e(f) = H_r(f)| = \sqrt{H_N(f)} \quad (4.19)$$

Ce gabarit s'appelle *demi-Nyquist* ou *racine de Nyquist*.

Si on n'utilise pas de filtre adapté, alors on place le gabarit de Nyquist à l'émission, et le filtre de réception devient un simple filtre passe-bas accordé sur l'occupation spectrale de H_N . Ce cas présente l'avantage que le spectre décroît un peu plus vite que celui du demi-Nyquist, protégeant un peu mieux les canaux adjacents. Mais on perd la possibilité d'atteindre le SNR optimal que permet le filtre adapté.

Plusieurs formes d'onde permettent de réaliser un gabarit de Nyquist, l'une d'entre elles fréquemment utilisée est le filtre en cosinus surélevé (*raised cosine filter* en anglais) :

$$h(t) = \frac{\sin \pi \frac{t}{T_s}}{\pi t} \times \frac{\cos \alpha \pi \frac{t}{T_s}}{1 - \left(2\alpha \frac{t}{T_s}\right)^2} \iff H(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_s} \\ \frac{1}{2} \left(1 - \sin \left(\frac{\pi T_s}{\alpha} \left(f - \frac{1}{2T_s}\right)\right)\right) & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T_s} < |f| < \frac{1+\alpha}{2T_s} \\ 0 & \text{si } |f| > \frac{1+\alpha}{2T_s} \end{cases} \quad (4.20)$$

qui dépend d'un paramètre α compris entre 0 et 1 appelé facteur de débordement (*roll-off factor* en anglais)

L'allure de la réponse impulsionnelle et du spectre d'un filtre en cosinus surélevé est tracé en figure 4.10 pour différentes valeurs de α . Se pose alors la question du "meilleur" α : cete question n'a pas de r réponse univoque, il faudra faire un compromis entre oscillations dans le domaine temporel (α faible) et occupation spectrale débordant sur les canaux voisins (α élevé)

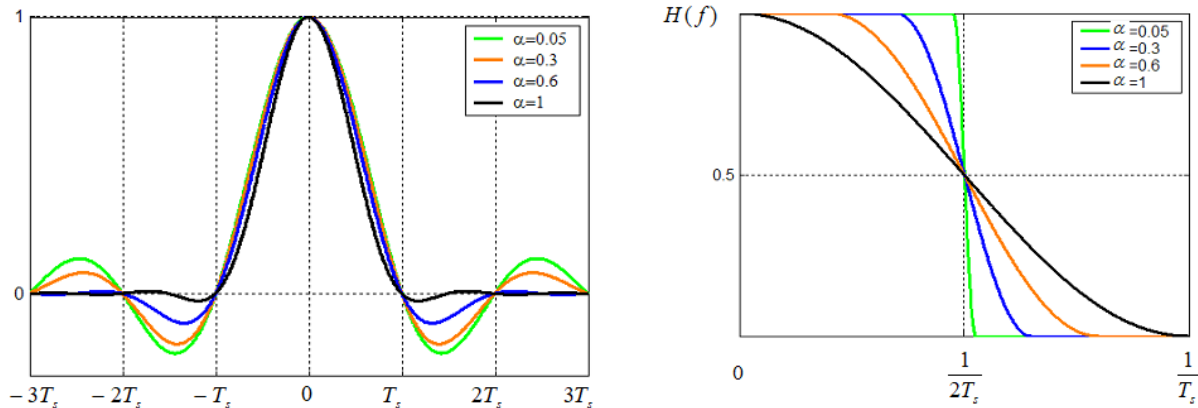


FIGURE 4.10 – Réponse impulsionnelle et spectre d'amplitude du filtre en cosinus surélevé

Exercice 12 Occupation spectrale d'un cosinus surélevé

1. Combien vaut l'occupation spectrale d'un cosinus surélevé en bande de base ?
2. Combien vaut-elle dans le cas d'une transmission sur porteuse ?

Indication : on rappelle (résultat vu en mathématiques appliquées) qu'une transmission sur porteuse translate le spectre du signal autour de la fréquence porteuse.

Notes

4.3 Critère de Nyquist, gabarit de Nyquist

Notes

Notes

4.3 Critère de Nyquist, gabarit de Nyquist

Chapitre 5

Modulations

Se référer au cours de P. Artaut.

Contenu :

- Généralités sur les modulations
 - ▷ enveloppe complexe
 - ▷ voies I et Q
- Modulations analogiques
 - ▷ modulations d'amplitude (Amplitude Modulation (AM)), de fréquence (Frequency Modulation (FM)) et de phase (Phase Modulation (PM))
 - ▷ exemple particulier : la modulation d'amplitude à double bande latérale (Double-sideband amplitude modulation (DSB-AM))
- Modulations numériques
 - ▷ constellation
 - ▷ modulations d'amplitude (Amplitude Shift Keying (ASK)), de fréquence (Frequency Shift Keying (FSK)) et de phase (Phase Shift Keying (PSK))
 - ▷ performances

Acronymes

ADC	Analog to Digital Converter
ADSL	Asymmetric Digital Subscriber Line
AM	Amplitude Modulation
ASK	Amplitude Shift Keying
AWGN	Additive White Gaussian Noise
BBAG	Bruit Blanc Additionnel Gaussien
CAN	Convertisseur Analogique Numérique
CNA	Convertisseur Numérique Analogique
CNS	Communication, Navigation, Surveillance
DAC	Digital to Analog Converter
DSB-AM	Double-sideband amplitude modulation
FM	Frequency Modulation
FSK	Frequency Shift Keying
MIC	Modulation par Impulsions Codées
PM	Phase Modulation
PSK	Phase Shift Keying
RIF	Réponse Impulsionnelle Finie
RII	Réponse Impulsionnelle Infinie
UIT	Union internationale des télécommunications

Bibliographie

- [Ben48] W. R. Bennett. Spectra of quantized signals. *The Bell System Technical Journal*, 27(3) :446–472, 1948.
- [Ham98] Richard W. Hamming. *Digital Filters*. Dover, 3th edition, 1998.
- [Pap80] A. Papoulis. *Circuits and Systems : A Modern Approach*. HRW series in electrical and computer engineering. Holt, Rinehart, and Winston, 1980.
- [PM07] John G. Proakis and Dimitris G. Manolakis. *Digital Signal Processing : Principles, Algorithms, And Applications*. Pearson Education, Inc., 4th edition, 2007.
- [Pro08] John G. Proakis. *Digital communications*. Mc Graw-Hill, 5th edition, 2008.
- [SH20] Bernard Sklar and Fredric J. Harris. *Digital Communications : Fundamentals and Applications, 3rd Edition*. Pearson, décembre 2020.
- [Sha48] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27(3) :379–423, 1948.