



**HAL**  
open science

# Connaissances géométriques et connaissances spatiales dans les situations didactiques avec la technologie

Sophie Soury-Lavergne, Michela Maschietto

► **To cite this version:**

Sophie Soury-Lavergne, Michela Maschietto. Connaissances géométriques et connaissances spatiales dans les situations didactiques avec la technologie. XIXe école d'été de didactique des mathématiques, ARDM Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques, Aug 2017, Paris, France. hal-04796536

**HAL Id: hal-04796536**

**<https://hal.science/hal-04796536v1>**

Submitted on 29 Nov 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

# CONNAISSANCES GÉOMÉTRIQUES ET CONNAISSANCES SPATIALES DANS LES SITUATIONS DIDACTIQUES AVEC LA TECHNOLOGIE

Sophie Soury-Lavergne, Michela Maschietto

## RESUMÉ

Après une revue des problématiques traitées par les travaux sur les technologies de géométrie dynamique menés depuis une dizaine d'années, ce cours présente les études les plus récentes concernant l'insertion de la technologie dans un système complexe d'outils et de situations didactiques. En partant des travaux de Berthelot et Salin pour considérer les connaissances spatiales et les connaissances géométriques comme deux champs conceptuels distincts mais néanmoins fortement connectés, ce cours expose le rôle particulier que peut jouer l'espace graphique dans le développement des connaissances de ces deux champs et de leurs relations. Les technologies numériques jouent également un rôle dans l'articulation des deux champs de connaissances, par leurs propriétés spécifiques, complémentaires, voire nécessaires à l'élaboration de situations didactiques pour l'apprentissage de la géométrie. L'idée de favoriser et de soutenir l'articulation entre tangible et numérique est introduite avec la notion de duo d'artefacts. Elle est illustrée à propos de concepts spatiaux ou géométriques tels que le repérage des positions et des trajectoires sur un quadrillage, la symétrie, la construction de triangles et les patrons du cube.

Mots clefs : Géométrie, Spatial, Tangible, Numérique, Duo d'artefacts

## ABSTRACT

After a review of the research works about dynamic geometry over the last ten years, this text presents the most recent studies about the integration of digital technologies into a complex system of tools and didactical situations. Following Berthelot and Salin's work, we consider spatial knowledge and geometrical knowledge as two different conceptual fields, with strong connections. We present the specific role of graphical space in the development of knowledge and relationship between these two conceptual fields. Moreover, we show that digital environments, like dynamic geometry, have specific and complementary, even necessary, properties for designing didactical situations for the learning of geometry. In this purpose, we introduce the idea of duo of artefacts to focus on the articulation of tangible and digital artefacts in the design of didactical situations and the studies of learning and teaching processes. We illustrate these theoretical developments with research about dynamic geometry, with spatial or geometrical concepts like setting positions and trajectories with a squared grid, symmetry, triangle construction and nets of cube.

Key words: Geometry, Spatial field, Tangible, Digital, Duo of artefacts

## INTRODUCTION

Nous avons construit ce cours en deux parties. La première partie consiste en une revue des travaux en géométrie dynamique au cours des dix dernières années qui, bien qu'incomplète, s'avère utile pour comprendre les questions actuellement traitées en géométrie avec la technologie.

La seconde partie développe le rôle joué par la technologie dans l'articulation entre le spatial et le géométrique, enjeu important de l'apprentissage de la géométrie à l'école élémentaire (Berthelot & Salin, 1993 ; Berthelot & Salin, 1994 ; Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013). Pour cette mise en relation des deux champs de connaissances, l'espace graphique et les technologies apparaissent comme des pivots possibles, offrant chacun des espaces d'expérimentation et de validation qui constituent des milieux possibles pour l'apprentissage. Cette mise en relation entre espace sensible, espace graphique et technologie, initiée avec le jeu sur les environnements de résolution de problème (Rolet, 2003) est reprise avec la notion de duos d'artefacts tangible et numérique (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015a ; Soury-Lavergne, 2017), une des problématisations les plus récentes de l'apprentissage et l'enseignement de la géométrie avec les technologies.

## LES TRAVAUX EN GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE

Les EIAH (Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain) sont un domaine de recherche qui considère les technologies numériques et l'informatique non seulement comme

un moyen de faire apprendre, mais aussi comme un outil de la recherche pour concevoir et étudier les situations d'apprentissage et d'enseignement et en particulier les questions de transpositions des savoirs. Comme le titre l'ouvrage de Noss et Hoyles (1996) « *Windows on mathematical meanings* », la technologie permet d'accéder à ce que signifie faire des mathématiques et apprendre les mathématiques, en particulier la géométrie. Avec la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998 ; Bessot, 2003) et les travaux de Balacheff (Balacheff & Margolinas, 2005), la connaissance mathématique est une propriété du système élève $\Leftrightarrow$ milieu, c'est-à-dire qu'elle existe dans l'interaction entre l'utilisateur-élève et la technologie informatique ou, selon la terminologie plus actuelle, l'environnement numérique. En tant que propriété de ce système, la connaissance est alors en partie déterminée par les caractéristiques de la technologie qu'il faut étudier de plus près. L'étude didactique des technologies, notamment des choix fait lors de leur conception puis de leur utilisation, amène à questionner la connaissance mathématique elle-même. Cette étude porte notamment sur les problèmes que la technologie permet de poser, la résolution de problèmes étant source et critère de la connaissance (Vergnaud, 1990) et les représentations sémiotiques (Duval, 1995) qu'elle donne à manipuler.

Dans ce domaine de recherches, la géométrie dynamique occupe une place tout à fait particulière. Elle est emblématique par son ancienneté, apparue quasi simultanément en France et aux États-Unis dans les années 80 (Sinclair *et al.*, 2016), par l'ampleur des recherches qu'elle a suscitées et les usages scolaires qu'elle a provoqués. Emblématique aussi parce qu'il s'agit d'un micromonde, c'est-à-dire d'un environnement informatique permettant à l'utilisateur d'explorer, par la manipulation directe de représentations graphiques à l'écran, un monde d'objets régis par des lois mathématiques. Les micromondes sont apparus avec les travaux de Papert sur le logiciel Logo (Papert, 1980a ; Balacheff, 2017). Ils implémentent dans la technologie des principes d'apprentissage hérités du constructivisme. Cette caractérisation du terme micromonde a été actualisée par Healy et Kynigos à partir d'une définition de Samara et Clements qui met l'accent sur les significations résultant de l'interaction avec l'environnement, donc sur l'apprentissage. Les micromondes sont des :

« Computational environments embedding a coherent set of scientific concepts and relations designed so that with an appropriate set of tasks and pedagogy, students can engage in exploration and construction activity rich in the generation of meaning » (Healy & Kynigos, 2010, p. 64).

La sélection de travaux sur la géométrie dynamique présentée dans cette partie est organisée en trois catégories, selon les problématiques retenues : les problématiques de conception des environnements, celles relatives à l'apprentissage lors de l'usage de ces environnements et celles relatives à l'enseignement, c'est à dire aux processus d'appropriation de ces environnements et de leur utilisation pour faire apprendre par les enseignants.

### *1. Conception des environnements et des logiciels de géométrie dynamique*

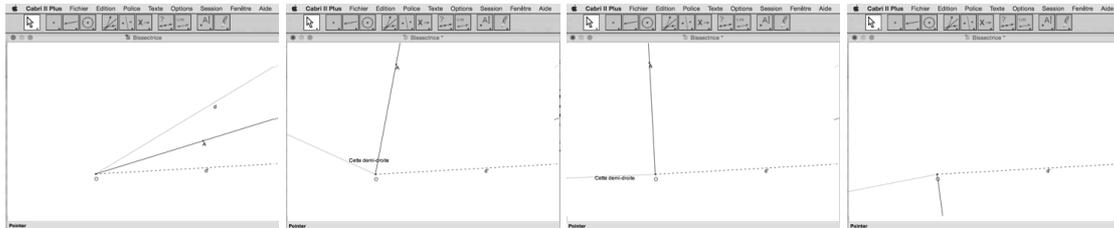
La géométrie dynamique a débuté avec la conception d'environnements logiciels issus de la recherche, tels que les environnements pionniers Cabri-géomètre (Baulac, Bellemain & Laborde, 1988) en France et le Geometer Sketchpad aux États-Unis (Jackiw, 1989), puis d'autres logiciels originaux comme Geoplan en France (CREEM, 1992) ou Cinderella (Richter-Gebert & Kortenkamp, 1999), avant l'apparition de l'environnement gratuit GeoGebra, maintenant massivement utilisé en France.

Au cours de la conception d'un EIAH, une attention particulière doit être portée aux choix d'interface et aux métaphores qui donnent à manipuler directement les représentations d'objets mathématiques abstraits (Laborde, 2003). En effet, les choix de développement impactent les usages futurs, notamment les apprentissages, y compris certains détails qui pourraient apparaître comme mineurs. Comme le dit Jackiw, le concepteur du Geometer Sketchpad, lors de la 17<sup>e</sup> étude ICMI en 2006 « Technology Revisited » :

« Design detail counts [...] To the degree our work in mathematics technology aspires to educational influence at significant scale, [...] we have first to admit that design matters – that specific design matters, specifically – and, second, to develop a much richer discourse for design analysis. » (Butler, Jackiw, Laborde, Lagrange & Yerushalmy, 2010, p. 432).

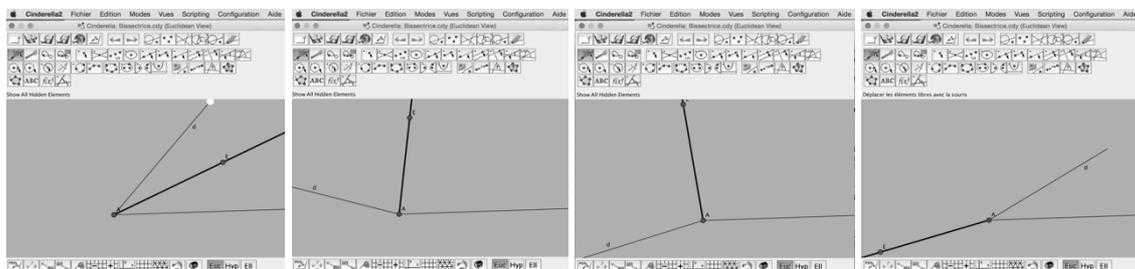
### *Choix de conception et usage didactique de la géométrie dynamique*

Un ensemble de travaux interroge les choix de conception relatifs à la géométrie dynamique. Par exemple, comment définir un point quelconque sur un segment dynamique ? Si le point est quelconque, sa position initiale au moment de sa création par l'utilisateur ne caractérise pas sa position au cours du déplacement. Le concepteur peut alors faire différents choix, guidés par différents principes. En s'appuyant sur des principes issus des travaux sur les interfaces hommes/machines, la continuité des positions successives de ce point quelconque est attendue par l'utilisateur : le point ne doit pas sauter d'une position à l'autre ni disparaître brutalement. Cela conduit le concepteur à positionner le point quelconque en continuité avec la position initiale, par exemple en conservant le rapport de ses distances aux extrémités du segment. Ce choix n'est pas fondé sur une nécessité mathématique, et sa conséquence pose problème didactiquement. En effet, un point positionné perceptivement au milieu du segment, y restera au cours du déplacement.



**Figure 1.** – Réversibilité sans continuité du mouvement avec Cabri. Le déplacement de la bissectrice (en gras), au milieu des deux côtés saute de haut en bas entre la 3<sup>e</sup> et la 4<sup>e</sup> image-écran, alors que le côté n'a parcouru que quelques degrés de plus.

Un autre principe, prenant en compte l'usage didactique de la géométrie dynamique, est celui de la réversibilité (ou déterminisme) des actions de l'utilisateur. Pour apprendre, l'élève doit pouvoir faire des choix et tester les conséquences de ses choix de façon robuste et reproductible. En géométrie dynamique, ce principe se traduit par la possibilité de ramener un point à sa position initiale ainsi que le reste de la figure qui en dépend et de reproduire les mêmes états de la figure, à partir des mêmes déplacements. Or, cela n'est pas toujours possible, selon les choix de conception. En effet, Gawlick (2004) a démontré qu'il n'était pas possible de satisfaire simultanément les deux principes de continuité et de réversibilité, problème posé par (Kortenkamp, 1999) et présenté en français par (Genevès, 2004).

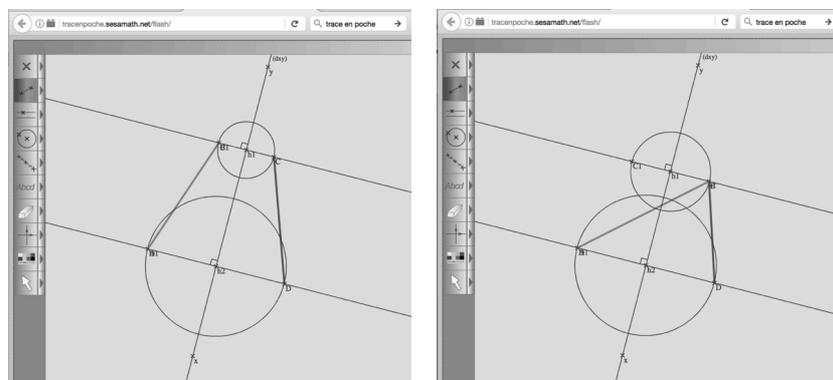


**Figure 2.** – Continuité sans réversibilité avec Cinderella. La bissectrice (en gras) pivote de façon continue mais ne termine pas dans sa position initiale lorsque les deux côtés de l'angle ont repris leurs positions.

Par exemple, si l'on considère la bissectrice de l'angle formé par deux demi-droites : au bout d'un tour de l'une des demi-droites, lorsque les deux demi-droites ont repris leur position

initiale, la bissectrice n'a parcouru qu'un demi-tour. Faut-il qu'elle saute à sa position initiale, pour assurer le déterminisme et la réversibilité de l'action comme c'est le choix fait dans Cabri-géomètre ? Dans ce cas, lors de la rotation de la demi-droite  $d$ , au moment où l'angle entre  $d$  et  $d'$  passe l'angle plat, la bissectrice de l'angle entre  $d$  et  $d'$  saute de  $180^\circ$  (**Figure 1**). Ou bien faut-il privilégier la continuité, permettant de différencier un objet de son image par une rotation de  $2\pi$  au détriment de la réversibilité, comme c'est le cas dans Cinderella ? Dans ce cas, après un tour complet de la demi-droite  $d$ , les deux demi-droites ont repris leur position initiale, mais pas la bissectrice (**Figure 2**). Privilégier la continuité ou la réversibilité est un choix qui incombe aux concepteurs et qui relève d'objectifs didactiques différents.

Ces processus de conception interrogent également les définitions des objets mathématiques : un point  $A$  dynamique est défini par la géométrie dynamique indépendamment de sa position, un segment dynamique est défini indépendamment de sa longueur et de la position de ses extrémités. Ce n'est pas le cas en géométrie euclidienne. Ainsi, les objets mathématiques de la géométrie dynamique ne sont pas les mêmes que ceux de la géométrie euclidienne prise comme référence dans l'enseignement, ce qui peut amener à questionner les références elles-mêmes. Par exemple, un point  $A$  dynamique pourrait être défini comme la classe des points qui ont les mêmes propriétés que le point  $A$ , à l'exception de sa position. Cependant cette définition ne permet pas de distinguer deux points lorsqu'ils ont les mêmes propriétés. C'est le cas, par exemple, des deux points d'intersection d'une droite et d'un cercle. Certains logiciels, comme Trace en poche, ne font pas cette distinction, conduisant à des figures dynamiques inacceptables du point de vue mathématique et didactique. Par exemple, avec le logiciel Trace en poche, la construction d'un segment et de son symétrique n'est pas robuste lorsqu'un point extrémité du segment initial est déplacé de l'autre côté de l'axe. Il est confondu avec son image car le logiciel ne différencie pas les deux points d'intersection d'un cercle et d'une droite (**Figure 3**).



**Figure 3.** – Confusion entre les points d'intersection d'un cercle et d'une droite dans Trace en Poche.

### *Évolution des environnements de géométrie dynamique*

Les évolutions des logiciels de géométrie dynamique au cours des dix dernières années ont résulté de leur insertion dans un ensemble de ressources, au sein d'environnements offrant à l'utilisateur un ensemble de fonctionnalités mathématiques élargies. La géométrie dynamique apparaît comme un module, utilisable avec d'autres modules de mathématiques, dans des environnements comme XCAS (Université Joseph Fourier<sup>1</sup>) ou la suite TI-Nspire de Texas Instruments. La géométrie dynamique est également incluse directement au sein d'énoncés d'activités et de problèmes mathématiques, mis en forme dans des e-books (projet européen M C Square (Kynigos, 2015)), des manuels numériques ou des cahiers d'activité informatisés (collection « 1 2 3... Cabri, je fais des maths »). La question de la conception des tâches

<sup>1</sup> [https://www.xcasenligne.fr/giac\\_online/demoGiacPhp.php](https://www.xcasenligne.fr/giac_online/demoGiacPhp.php)

accompagnant la mise à disposition d'un environnement de géométrie dynamique est devenue importante (Margolinas, 2013 ; Leung & Baccaglioni-Frank, 2016).

Les évolutions technologiques les plus récentes concernent l'apparition du multi-touch et des interfaces tactiles (Sinclair *et al.*, 2016) qui associent les gestes et les dessins comme deux systèmes de représentations sémiotiques (de Freitas & Sinclair, 2013). Par exemple, les dessins à main levée sur une tablette peuvent être reconnus et transformés en représentations géométriques, produisant une nouvelle interface (Sketchometry<sup>2</sup>). A signaler également, la possibilité de travailler collaborativement à distance sur la même figure comme avec Tabulae (Bellemain, 2014).

## *2. Apprentissage de la géométrie avec la géométrie dynamique*

Les travaux concernant l'utilisation de la géométrie dynamique pour l'apprentissage des mathématiques dépassent largement la seule géométrie, mais la thématique de l'école d'été nous amène à sélectionner quelques travaux dans le domaine de la géométrie.

### *Le déplacement, une fonctionnalité centrale de la géométrie dynamique*

Les apprentissages mathématiques avec la géométrie dynamique reposent sur l'utilisation de sa caractéristique fondamentale qui est de pouvoir « déplacer » les figures (Kortenkamp, 1999). Cette fonctionnalité et la façon dont les élèves peuvent l'utiliser pour apprendre a été étudiée par différentes équipes (Olivero, 2002 ; Laborde, 2003 ; Soury-Lavergne, 2006 ; Restrepo, 2007), selon des cadres théoriques complémentaires. Arzarello et ses collègues ont distingué les photo-déplacements et les vidéo-déplacements pour différencier les regards portés par l'élève sur la figure lorsqu'il déplace un point au cours de processus de recherche de preuve (Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 2002 ; Olivero, 2002). Avec le photo-déplacement, l'élève prend en compte la position initiale puis la position finale de la construction, deux états statiques de la figure. Avec le vidéo-déplacement, l'élève s'intéresse à la façon dont la figure se comporte au cours du déplacement, entre l'état initial et l'état final. En utilisant l'approche instrumentale (Rabardel, 1995) et en prenant en compte d'autres finalités que celle de la preuve, Restrepo (2007) a identifié toute une série d'instruments déplacement et proposé une classification plus générale. Cette classification a été obtenue en distinguant d'une part les propriétés du déplacement résultant des caractéristiques de la construction : déplacement libre (pour les points libres), le déplacement contraint (pour les points sur objets) et le déplacement indirect (pour les points milieu, points d'intersection et les points images par une transformation, points qui ne peuvent pas être attrapés directement, mais qui bougent par l'intermédiaire d'autres points). D'autre part, Restrepo (*ibidem*) a distingué différentes finalités mathématiques poursuivies par l'élève qui déplace une figure, autres que la validation de la construction ou la recherche d'une preuve. Avec le déplacement pour ajuster, le déplacement mou ou guidé (déplacer un point tout en maintenant une propriété valide sur des points dépendants ou pour obtenir une forme particulière), les déplacements exploratoires pour identifier des invariants, constater des variations ou trouver des trajectoires et enfin les déplacements pour valider ou invalider une construction ou une conjecture, l'élève déplace pour un ensemble de raisons et de finalités mathématiques très diverses, auquel il faut ajouter le déplacement sans finalité mathématique. Cette classification a permis de distinguer et d'ordonner les genèses instrumentales des différents déplacements chez les élèves de 6<sup>e</sup>. Par exemple, le déplacement pour valider une construction apparaît bien plus tardivement que le déplacement pour ajuster qui, lui, apparaît plus spontanément et plus tôt chez la plupart des élèves. La genèse instrumentale du déplacement pour valider passe par

---

<sup>2</sup> <https://start.sketchometry.org/>

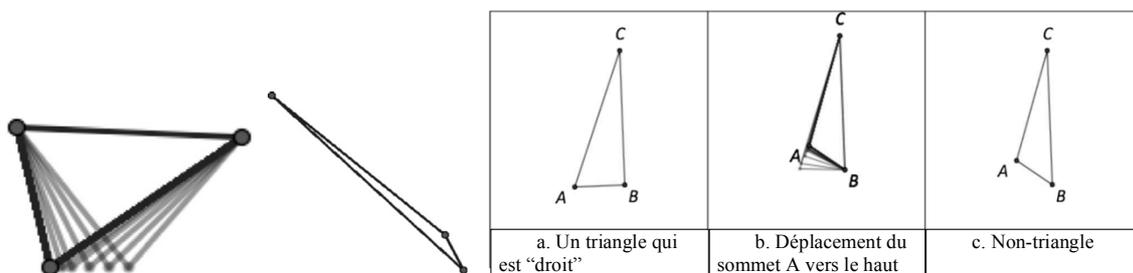
la genèse intermédiaire du déplacement pour invalider, dans les situations où il conduit à un contre-exemple invalidant la construction. Ainsi, l'utilisation du déplacement de la géométrie dynamique pour valider ou invalider les constructions n'est pas disponible chez les élèves de début de collège (comme l'a montré Restrepo, *ibidem*), *a fortiori* à l'école élémentaire. En revanche, le déplacement peut être l'objet d'une genèse instrumentale riche et variée, lorsque les situations adéquates sont proposées aux élèves, conduisant éventuellement jusqu'au déplacement pour valider.

### *Le déplacement pour explorer à l'école primaire*

La caractéristique du déplacement qui est de conserver les propriétés des figures mais aussi de donner à voir une transformation continue peut être exploitée avec les élèves de l'école primaire. Nous considérons ici deux exemples.

Le premier concerne le questionnement de la figure triangle et de ses représentations, à l'école primaire. Il se base sur le fait que les figures géométriques sont souvent présentées et appréhendées comme des figures prototypiques, dans des positions prototypiques elles aussi.

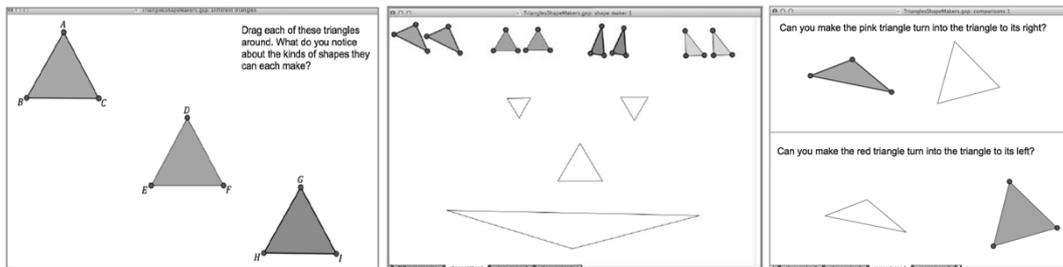
Sinclair et Moss (2012) conduisent une expérimentation avec une classe d'enfants de l'école maternelle (âgés de 4-5 ans), dans le but d'étudier si la géométrie dynamique peut soutenir la reconnaissance des figures et un changement dans le discours des élèves. Au début, le chercheur présente dans la classe demande aux élèves « qu'est-ce qu'un triangle ? », puis construit un triangle avec la géométrie dynamique sur la base des indications des élèves « c'est une forme », « comme un toit », « trois côtés attachés » (Sinclair & Moss, 2012, p. 34). Le triangle est encore une figure statique, considéré comme un médiateur visuel statique. Ensuite les sommets de ce triangle sont déplacés par le chercheur ; l'outil Trace est actif sur la figure pour montrer le mouvement des objets et les triangles successifs obtenus par déplacement continu (**Figure 4**, première image). Le chercheur repose la question initiale, s'appuyant cette fois-ci sur un médiateur visuel dynamique. Les élèves commencent à ne plus être d'accord sur la réponse « triangle » quand la figure devient un triangle avec un angle très aigu (**Figure 4**, deuxième image). La confrontation entre les élèves permet de faire apparaître dans leurs discours des éléments tels que le nombre de sommets du triangle, qui est un invariant. Le questionnement met aussi en évidence que la position « horizontale » d'un des trois côtés est une caractéristique discriminant un triangle et un non-triangle pour certains élèves (**Figure 4**, quatrième et cinquième images). L'analyse révèle que le discours des élèves évolue avec la transformation de la figure. Au début, un triangle est une forme avec trois côtés dans une position prototypique (correspondant aux représentations de triangle que les enfants de cet âge ont souvent rencontrées, **Figure 4**, première et troisième images), puis après le travail avec la géométrie dynamique, le mot triangle est utilisé pour indiquer différents types de triangles ayant tous la caractéristique d'avoir trois côtés.



**Figure 4.** – Triangles dynamiques et discours associés par les élèves (Sinclair & Moss, 2012).

A la suite de cette recherche, Kaur (2015) propose une nouvelle expérimentation où la géométrie dynamique est utilisée pour travailler les propriétés des différents types de triangles avec des élèves âgés de 7-8 ans. Les élèves travaillent collectivement avec la géométrie

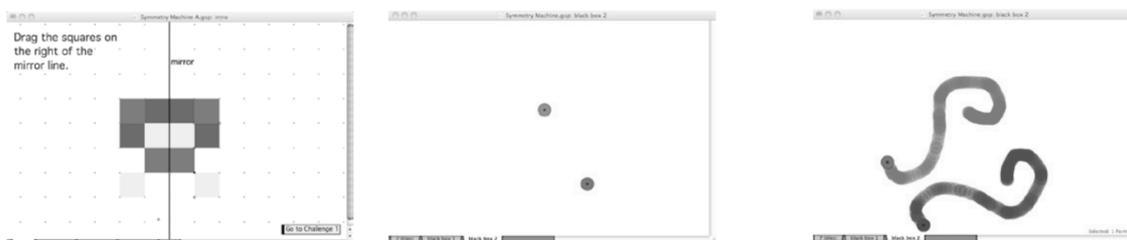
dynamique disponible sur le TBI de la classe et individuellement en papier/crayon. Trois types d'activités sont proposés avec la géométrie dynamique : i) les élèves travaillent sur les différences et similarités entre trois types de triangles (isocèle, équilatéral, scalène) en déplaçant les sommets de trois triangles identiques à l'état initial (**Figure 5**, à gauche) ; ii) les élèves doivent remplir un dessin avec des triangles, qui ne sont pas toujours prototypiques (forme et position) (**Figure 5**, au centre) ; iii) les relations entre les triangles sont abordées par la consigne d'adapter un certain triangle dans une maquette triangulaire donnée (**Figure 5**, à droite). L'analyse souligne l'évolution des stratégies de reconnaissance et de description des figures par la formulation de propriétés géométriques et la mise en place d'un discours général sur les divers triangles.



**Figure 5.** – Les types de tâches pour les élèves (Kaur, 2015).

Dans leurs recherches sur la symétrie orthogonale, Sinclair et Kaur (2011) et Ng et Sinclair (2015) ont proposé aux élèves de l'école maternelle (âgés de 4-5 ans) et de l'école élémentaire (âgés de 6-8 ans) deux « machines à symétrie » conçues en géométrie dynamique dans le but de leur faire explorer cette transformation géométrique. La première « machine » est appelée « discrète » (**Figure 6**, à gauche) parce qu'elle présente un assemblage de carrés et ses symétriques, chaque carré pouvant être déplacé, entraînant le déplacement du carré symétrique ; la symétrie est évoquée par le recours au miroir. Cela permet aux élèves de porter l'attention sur les relations entre ces carrés par l'observation de leur comportement au cours du déplacement. L'axe de symétrie est toujours affiché à l'écran. La deuxième machine est appelée « continue » (**Figure 6**, au centre et à droite) : deux points sont à l'écran, quand l'un se déplace, l'autre bouge de manière symétrique et tous les deux laissent leurs traces. L'axe de symétrie n'est pas visible. Lors du travail avec la deuxième machine, les élèves de l'école maternelle arrivent à porter leur attention sur les trajectoires des points et développent un langage dynamique sur les points. Certains enfants arrivent à identifier l'axe de symétrie.

Comme dans le cas du triangle, la nature dynamique du travail, liée à la possibilité de déplacement, introduit un nouveau discours pour les élèves et les amène à généraliser certaines propriétés de la symétrie.



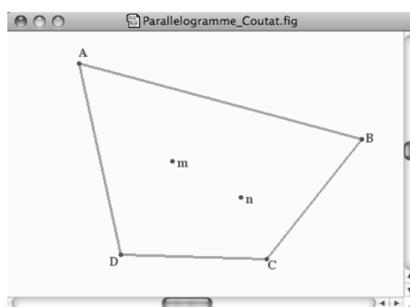
**Figure 6.** – Les deux « machines à symétrie » proposées aux élèves (Sinclair & Kaur, 2011).

### *Distinction entre construction robuste et construction molle*

Lors des études conduites sur les usages de la géométrie dynamique par les élèves et les apprentissages qui en résultent, la distinction entre construction robuste et construction

« molle », a été introduite par Healy (2000) et reprise par Laborde (2005) pour reconnaître l'existence de différentes démarches de résolution avec la géométrie dynamique. Les constructions molles permettent de considérer les constructions des élèves, non pas comme des constructions robustes inachevées, mais comme de véritables moyens d'expérimenter la nécessité mathématique. Une construction est dite molle (Soury-Lavergne, 2011) en référence à un objet géométrique ou un théorème, lorsqu'elle vérifie toutes les hypothèses par construction, à l'exception d'une qui est ajustée momentanément et localement. Par exemple, la construction d'un rectangle tel que tous ses côtés soient de même longueur grâce au positionnement local et momentané d'un de ses sommets est une construction molle du carré. Par déplacement de ce sommet, l'élève peut faire l'expérience du carré comme conséquence nécessaire de l'ajout, à un rectangle, de la propriété d'égalité des côtés adjacents. L'utilisation du déplacement et des constructions molles dans la résolution de problèmes ouverts est étudiée par Baccaglioni-Frank et Mariotti (2010) pour caractériser les processus cognitifs sous-jacents à la formulation de conjectures. Les modalités de déplacement et les figures molles envisagées dans cette analyse sont combinées avec l'approche de la variation pour discuter la question de la reconnaissance des invariants dans les figures dynamiques (Leung, Baccaglioni-Frank & Mariotti, 2013).

Les travaux de Coutat (2005) ont également exploité l'usage des constructions molles pour l'apprentissage de la distinction des statuts d'hypothèse et de conclusion des énoncés dans les théorèmes. En associant les manipulations aux hypothèses, constructions et ajustements et les propriétés obtenues aux conclusions, les élèves expérimentent la nécessité de la conclusion quand les hypothèses sont satisfaites. Par exemple, dans le quadrilatère ABCD (**Figure 7**), les milieux  $m$  et  $n$  des diagonales sont construits, puis les milieux des diagonales sont déplacés pour coïncider. La propriété, ABCD est un parallélogramme, est obtenue sans que le contrôle des élèves n'ait porté sur cette conclusion. Cette distinction entre hypothèse et conclusion, à laquelle la géométrie dynamique contribue, est une étape nécessaire pour entrer dans une démarche de preuve.



**Figure 7.** – Déplacement des points  $m$  et  $n$  pour avoir un parallélogramme (Coutat, 2005).

### *Géométrie dynamique et preuve*

La recherche conduite par Mariotti (2010), fondée dans le cadre théorique de la médiation sémiotique issu de l'œuvre de Vygotski (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), développe une approche où la géométrie dynamique<sup>3</sup> est exploitée comme médiateur de la notion de preuve. Cette exploitation est basée sur les caractéristiques des constructions robustes qui sont de préserver les relations géométriques par déplacement et sur la hiérarchie des propriétés déterminées par la procédure de construction. Ainsi, sont mis en correspondance l'ensemble des fonctionnalités de la géométrie dynamique avec l'ensemble des outils de construction dans la géométrie euclidienne. Cette correspondance permet également de mettre en relation le contrôle par déplacement et le contrôle par « preuve et définition » de la géométrie

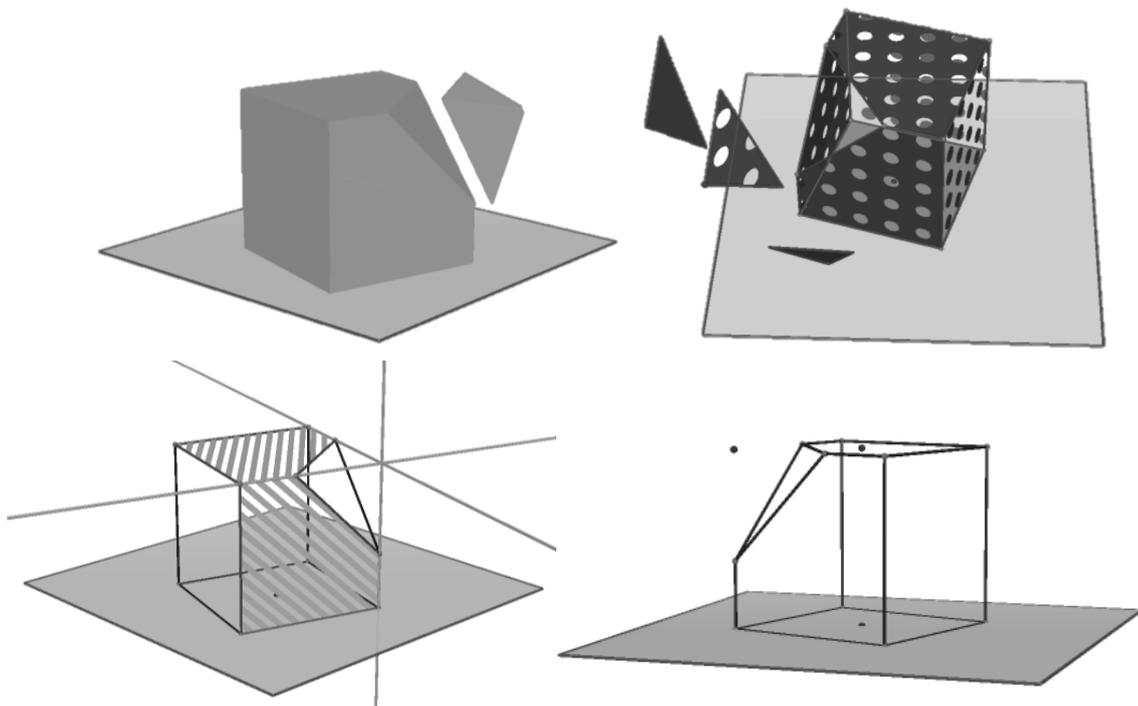
<sup>3</sup> Les expérimentations ont été conduites avec Cabri-géomètre.

euclidienne de référence. Dans la perspective proposée par la théorie de la médiation sémiotique, c'est un double lien des fonctionnalités de géométrie dynamique qui est analysé. Le premier est le lien entre les fonctionnalités de la géométrie dynamique et les propriétés de la figure dynamique construite. Le second est le lien entre les fonctionnalités de la géométrie dynamique et les axiomes et théorèmes de la géométrie euclidienne utilisés pour valider le problème de construction. L'enseignant peut alors soutenir la mise en relation des significations émergeant de l'utilisation des fonctionnalités pour résoudre un problème de construction et du recours au déplacement lors du contrôle de la figure (qui sont souvent du côté de l'action de l'élève avec la géométrie dynamique) avec la signification théorique d'une construction géométrique déduite du système d'axiomes de la géométrie euclidienne. Pour cela, l'activité des élèves ne se borne pas à une tâche de construction, mais doit présenter trois phases : la construction d'une figure dynamique, puis la description écrite de la procédure de construction et enfin la production d'une justification de la validité de la procédure. Il est notable de retrouver dans cette approche les trois fonctions du savoir et donc les trois types de situations didactiques de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) : situations d'action, de formulation et de validation.

En France, avec le projet MAGI (Mieux Apprendre la Géométrie avec l'Informatique, 2003-2006, présenté à l'école d'été par Assude et Restrepo il y a 10 ans (Restrepo, 2007)) ce sont également les questions de mise en relation entre les constructions dynamiques et le raisonnement déductif qui ont été étudiées. L'objectif était de montrer qu'il est possible de créer des situations didactiques problématisant pour l'élève la nécessité de la preuve (Soury-Lavergne, 2007 ; Goos & Soury-Lavergne, 2010). Ces situations reposent d'abord sur la possibilité pour les élèves d'identifier et de distinguer les propriétés qui sont toujours ou seulement parfois vraies à propos d'une construction, reprenant la distinction figure et dessin (Laborde & Capponi, 1994). Les propriétés toujours vraies sont des bonnes candidates pour caractériser la figure, les propriétés parfois vraies sont celles de certains dessins. Ces situations reposent aussi sur un autre constat : dans une figure, certaines propriétés géométriques ne sont pas celles qui ont été utilisées pour la construire. Il faut donc que les élèves puissent distinguer les propriétés utilisées pour construire (propriétés données, présentes dans l'énoncé) et celles qui en résultent (propriétés déduites, absentes de l'énoncé initial). Cette distinction peut alors être utilisée pour faire naître chez les élèves une contradiction apparente : cette figure a des propriétés que je ne lui ai pas données. Ce constat peut alors susciter la recherche d'une explication, amenant à la preuve. Une telle situation à propos du théorème « si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles » a été testée trois années de suite dans les classes de 6<sup>e</sup> d'une même enseignante. Elle a révélé les difficultés importantes relatives à la reconnaissance des propriétés géométriques d'une figure et à l'instrumentation du déplacement. Mais elle a aussi permis de conclure sur la possibilité d'utiliser la géométrie dynamique pour motiver la démonstration. Dans cette situation, la démonstration n'est pas utilisée comme moyen de convaincre, car les élèves sont bien convaincus qu'ils ne trouveront aucune position dans laquelle les deux droites ne sont pas parallèles, mais comme moyen d'expliquer un phénomène surprenant. La situation permet aux élèves de prendre conscience de la contradiction apparente : on n'a rien fait pour que ces droites soient parallèles et pourtant elles le sont ! Une fois la contradiction établie, le raisonnement déductif peut être introduit comme explication.

Mithalal (2010) a repris la recherche de situations didactiques problématisant l'introduction de la démarche de preuve en étudiant les apports possibles de la géométrie dynamique 3D. Il a mis en évidence que la possibilité de manipuler et construire des représentations dynamiques 3D est suffisamment facile pour rendre possibles les premières constructions et amène rapidement l'utilisateur à prendre conscience des limites du contrôle

perceptif de son action. A partir du moment où l'élève peut construire quelque chose et se rendre compte que sa figure n'a pas les propriétés voulues, l'interaction élève-milieu démarre et la réussite de la tâche passe par un contrôle théorique. Grâce à la géométrie dynamique en 3D, on peut donc élaborer des situations (comme par exemple construire le sommet manquant d'un cube, **Figure 8**) qui déstabilisent la perception et rendent nécessaire le contrôle théorique de la figure. Cela favorise l'entrée dans une démarche de preuve. Sans géométrie dynamique, la difficulté pour produire et manipuler les premières représentations d'objets 3D est telle qu'elle crée un obstacle à l'entrée dans le problème géométrique posé. Ce n'est pas le cas avec la géométrie plane, pour laquelle le contrôle perceptif est très opérationnel, ce qui pose d'autres problèmes.



**Figure 8.** – Déconstructions dimensionnelles d'un cube en géométrie 3D (Mithalal, 2010). Le sommet manquant du cube est reconstruit à partir d'un tétraèdre (en haut à gauche), de triangles rectangles impliquant une déconstruction 3D/2D (en haut à droite), de droites qui se coupent impliquant une déconstruction 3D/1D (en bas à gauche) ou d'un point image d'un autre sommet par une symétrie centrale, déconstruction 3D/0D (en bas à droite).

Mithalal (*ibidem*) a donc exploité une propriété spécifique de la géométrie dans l'espace et mis en évidence des situations permettant la mise en relation des déconstructions instrumentales impliquées par l'utilisation de la géométrie dynamique avec les déconstructions dimensionnelles, caractéristiques du raisonnement en géométrie. Une déconstruction instrumentale d'une figure correspond aux fonctionnalités de la géométrie dynamique retenues pour son programme de construction. Plusieurs déconstructions instrumentales différentes pour un même objet existent, faisant appel à diverses fonctionnalités de l'environnement de construction, par exemple le sommet manquant du cube peut être construit avec la fonctionnalité Tétraèdre (**Figure 8**, en haut à gauche) ou bien avec la fonctionnalité Droite (**Figure 8**, en bas à gauche). Les déconstructions dimensionnelles d'une figure (Duval, 2005) correspondent à la prise en compte d'unités figurales de dimension inférieure, dont les relations géométriques et l'assemblage permettent d'obtenir la figure (par exemple voir le cube comme un assemblage de carrés ayant des côtés communs et appartenant à des plans orthogonaux ou parallèles les uns aux autres). Il apparaît ainsi une proximité importante entre ces travaux sur la preuve menés en France et en Italie au même moment, à partir d'approches théoriques différentes.

### 3. Enseigner la géométrie avec la géométrie dynamique

Ces travaux relatifs aux apports de la géométrie dynamique à l'apprentissage de la géométrie sont représentatifs des travaux mondiaux menés sur la question (voir la place de la géométrie dynamique dans l'ouvrage coordonné par Hoyles & Lagrange (2010) qui fait le point sur les usages de la technologie dans le champ de l'éducation mathématique ou bien Sinclair et *al.* (2016) pour un état des lieux plus récent). Ils ont établi l'intérêt du recours à la géométrie dynamique pour apprendre les mathématiques et la géométrie. Et pourtant, le constat actuel est que dans les pratiques, les usages ne sont pas à la hauteur du potentiel identifié. Les usages ne sont ni aussi fréquents qu'ils pourraient l'être ni ceux identifiés comme les plus pertinents. Quand ils existent, ils sont en décalage avec les situations identifiées par la recherche. Lors de sa conférence plénière à ICTMT 13 en 2017, Sacristan déclarait que la technologie est utilisée sans innovation, essentiellement pour faire ce qui pourrait être fait en papier crayon, le potentiel de la technologie est largement ignoré, par exemple le déplacement en géométrie dynamique :

“The most common use of technology was just for demonstration. There is little innovation. There is a lot of doing the same or similar tasks than with paper and pencil. We see that all the time. [...] The teachers have never conveyed what are the tools about, the idea of dragging. [...] Sometimes the potential of tool is completely ignored”. (Sacristan, 2017)<sup>4</sup>

Les explications sont recherchées du côté de l'enseignement et des processus d'appropriation. Les phénomènes d'appropriation, tant du côté des élèves que des enseignants, sont suffisamment complexes pour que les usages pertinents, significatifs du point de vue des connaissances mathématiques, identifiés dans les recherches, ne soient pas ceux majoritairement observés dans les classes.

#### *Pratiques des enseignants*

Laborde (2001) a distingué différents usages de la géométrie dynamique dans les tâches proposées aux élèves, qui permettent de caractériser les pratiques des enseignants. La géométrie dynamique peut être utilisée pour faciliter l'aspect pratique de la tâche sans impacter le travail mathématique, par exemple en améliorant la qualité graphique de la figure. La géométrie dynamique peut aussi faciliter la tâche mathématique en fournissant plus de cas, plus rapidement et en permettant de faire des constats qui seraient plus difficilement accessibles en papier-crayon. Avec ces deux premiers cas, la géométrie dynamique joue un rôle d'amplificateur, augmentant la précision ou le nombre de cas traités, en comparaison à l'utilisation du papier-crayon (Soury-Lavergne, 2017). Mais elle ne modifie pas fondamentalement le travail mathématique. La géométrie dynamique peut également modifier les stratégies de construction possibles en imposant des contraintes sur les outils, donc sur les propriétés géométriques mobilisables dans la résolution, par exemple construire un parallélogramme sans utiliser la fonctionnalité Droite parallèle. Enfin, la géométrie dynamique permet de créer de nouvelles tâches qui ne pourraient pas exister sans elle, par exemple les boîtes noires, où la tâche est de reproduire une figure dynamique donnée, sans avoir accès à son énoncé ni à son programme de construction, mais uniquement par exploration de la figure modèle fournie (Charrière, 1995). Dans ces deux derniers cas, la géométrie dynamique joue un rôle de générateur de contraintes, générateur d'affordances relatives aux outils géométriques de résolution de problème ou générateur de nouvelles tâches qui n'auraient pas de signification sans dynamisme.

Ainsi, si les genèses instrumentales sont complexes pour les élèves, elles le sont encore plus pour les enseignants, qui doivent apprendre à utiliser la géométrie dynamique pour

---

<sup>4</sup> The 13<sup>th</sup> International Conference on Technology in Mathematics Teaching. Conférence accessible en vidéo sur <https://ictmt13.sciencesconf.org/resource/page/id/16>, citation à partir de la 33<sup>e</sup> minute.

résoudre des problèmes de mathématiques et également pour enseigner, notamment en pilotant les genèses instrumentales de leurs élèves. Des modèles et cadres théoriques sont apparus pour prendre en compte cet usage de la technologie par les enseignants, notamment l'orchestration instrumentale (Trouche, 2009) et la double genèse instrumentale des enseignants (Haspekian, 2011). Ces processus longs doivent être mieux compris et soutenus.

Cela a aussi été un objectif des travaux menés par Assude *et al.* (Assude & Gelis, 2002 ; Assude, Grugeon, Laborde & Soury-Lavergne, 2006) puis repris par Athias (2014), avec une caractérisation des modes d'intégration de la géométrie dynamique dans les pratiques. En définissant des indicateurs relatifs au degré de nouveauté des tâches proposées aux élèves, ainsi que leur orientation, plutôt sur l'artefact ou sur le contenu mathématique, il est possible de caractériser l'intégration et l'évolution de cette intégration dans les pratiques des enseignants. Toutefois ces indicateurs n'ont pas permis d'identifier les conditions les plus critiques pour expliquer les différents niveaux d'intégration. Le volet expérimental de ces travaux a été conduit en partie dans le projet MAGI déjà cité, en collaboration étroite avec les enseignants, du primaire et du secondaire, dont les pratiques étaient étudiées. Ce n'est pas le cas des travaux plus récents qui concernent des pratiques qualifiées d'ordinaires, car déjà existantes avant l'intervention de la recherche. Par exemple, Abboud et Rogalski (2017) utilisent le cadre de la double approche pour identifier les tensions que gèrent les enseignants lors de l'utilisation de la géométrie dynamique et qui les conduisent à ne pas en exploiter tout le potentiel.

Parmi les pistes pour soutenir le développement des pratiques, au-delà de l'amélioration des logiciels, deux ont particulièrement été étudiées : celle des ressources fournies aux enseignants et celle de la formation et du développement professionnel.

### *Les ressources de géométrie dynamique*

Un travail a consisté à faire évoluer l'offre de ressources à destination des enseignants et des élèves en ne proposant pas uniquement le logiciel mais en l'accompagnant de tâches et de fichiers pré-élaborés qui cadrent l'activité et suggèrent des usages en classe (Sinclair, 2003).

Pendant, l'ensemble de ces ressources, fichiers de géométrie dynamique et diverses fiches d'accompagnement, est devenu rapidement très important, rendant à nouveau difficile pour les enseignants d'identifier les bonnes ressources, c'est-à-dire celles qu'ils peuvent utiliser car adaptées à leur contexte d'enseignement. L'objectif du projet européen Intergeo (2007-2010) (Kortenkamp & Laborde, 2011) a été d'outiller la mise à disposition et la diffusion des ressources de géométrie dynamique en répondant à la question de leur foisonnement et de leur qualité par l'élaboration d'une plateforme de partage dotée d'outils spécifiques. En particulier, des outils de traitement des ressources ne nécessitant pas une organisation *a priori* des ressources, mais fonctionnant *a posteriori* sur une collection hétérogène en évolution constante ont été conçus et expérimentés : interopérabilité (pour s'affranchir de la contrainte logiciel), recherche par ontologie (pour s'affranchir de la contrainte d'indexation par mots-clefs et donc de la langue) et évaluation de la qualité (pour faire émerger les ressources les plus pertinentes, car adaptées à l'utilisateur). La qualité des ressources de géométrie dynamique a été définie comme un processus, prenant en compte non seulement les caractéristiques intrinsèque de la ressource considérée mais aussi son adéquation aux différents contextes d'usage (Trgalova, Jahn & Soury-Lavergne, 2009) et la possibilité d'améliorer ces caractéristiques grâce aux usages et retours des utilisateurs enseignants, notamment sa qualité didactique (Trgalova, Soury-Lavergne & Jahn, 2011).

## *Formation et développement professionnel des enseignants*

L'autre volet des travaux visant à accompagner le développement des usages est celui de la formation des enseignants et de leur développement professionnel. La collaboration entre enseignants et chercheurs pour la formation et le développement professionnel, en particulier relatif à la géométrie et aux technologies, est promue et étudiée dans de nombreux pays avec par exemple les projets AProvaME au Brésil (Healy, Jahn & Bolite-Frant, 2009), ICTML au Royaume-Uni (Fuglestad, Healy, Kynigos & Monaghan, 2010) ou M@t.abel en Italie (Arzarello *et al.*, 2012). De récents développements théoriques comme la transposition méta-didactique (Aldon *et al.*, 2013) ont été proposés. Dans le cas de l'accompagnement par la recherche du programme de formation continu français Pairform@nce (Gueudet, Saby & Soury-Lavergne, 2011 ; Gueudet, Sacristan, Soury-Lavergne & Trouche, 2012), la géométrie dynamique a été étudiée tout particulièrement car elle a permis de mettre en œuvre la méthodologie retenue qui impliquait notamment un échange de parcours de formation entre formateurs. Les principes de formation retenus pour Pairform@nce étaient la collaboration entre pairs, la conception de ressources et l'hybridation (en classe et hors la classe, en présence et à distance).

La recherche fonctionne aussi comme source de problèmes mathématiques à traiter avec les enseignants en formation. En formation initiale avec les étudiants italiens futurs enseignants du premier degré, la géométrie dynamique est un moyen de revenir sur les savoirs géométriques qu'ils ont déjà rencontrés, en leur proposant une nouvelle entrée et des tâches renouvelées. Par exemple, à partir de la tâche de construction d'un triangle, reprise sous une forme issue des résultats de la recherche, les étudiants revoient les concepts mathématiques puis abordent les questions didactiques, comme la distinction entre hypothèse et conclusion. Ainsi, une construction géométrique qui peut être proposée aux élèves devient un outil de formation initiale, voire même de formation continue (Cohen, Kouropatov, Ovodenko, Hoch & Hershkovitz, 2017).

Le développement professionnel des enseignants se réalise également en dehors des formations institutionnelles, comme nous avons pu le mettre en évidence avec le processus d'analyse de la qualité des ressources du projet Intergeo (Soury-Lavergne, Jahn & Trgalova, 2011). Impliquer les enseignants dans un processus d'évaluation de la qualité des ressources s'avère être un levier de développement.

Au final, l'accompagnement des enseignants dans les usages de la géométrie dynamique se situe au croisement du travail collectif et de la conception de ressources.

## DE LA DISTINCTION ENTRE SPATIAL ET GÉOMÉTRIQUE A L'ARTICULATION DU TANGIBLE ET DU NUMÉRIQUE

Dans ce panorama sur les problématiques des dix dernières années à propos de la géométrie dynamique, les spécificités des premiers apprentissages de la géométrie, notamment à l'école primaire, n'ont pas été véritablement traitées. Pourtant, la technologie peut contribuer au développement des connaissances géométriques des élèves, en particulier en les articulant à leurs connaissances spatiales (voir le cours de C. Houdement dans cet ouvrage).

### *1. Le spatial et la géométrie avec la technologie*

#### *Comment se construisent les premières connaissances géométriques des élèves ?*

Différents points de vue existent sur ce que doit être l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et il ne semble pas encore y avoir de consensus à ce sujet. Certains chercheurs, rattachés aux cadres théoriques de Van Hiele (Van Hiele, 1986) ou de Fishbein (Fishbein, 1993) mettent l'accent sur la conceptualisation des figures géométriques dès la maternelle, en

distinguant à propos d'un concept géométrique l'image, on dirait en français plutôt la forme, et la définition, « concept image » et « concept définition », (Tall & Vinner, 1981). L'objectif à l'école maternelle serait la construction du « concept image », avec la distinction des caractéristiques critiques ou non critiques d'une forme géométrique ou encore des exemples ou non-exemples d'une forme (Levenson, Tirosh & Tsamir, 2011 ; Tsamir, Tirosh, Levenson, Barkai & Tabach, 2015). D'autres travaux mettent l'accent sur la relation entre l'expérience quotidienne des élèves avec leur environnement spatial comme fondement pour la construction des connaissances géométriques. Dans la revue de travaux de Bryant (2009), la perception joue un rôle important dans la reconnaissance des formes, des tailles, de l'orientation et de la position. Les travaux de Clements et Samara (2009) ont essayé de montrer le rôle important des activités spatiales (avec les jeux de construction « building blocks ») comme précurseur à l'apprentissage de la géométrie. Cependant, d'après Bryant, nous ne disposons pas encore de preuve que les compétences spatiales facilitent le développement de la pensée géométrique, si l'on considère les difficultés récurrentes des élèves en géométrie en comparaison à leurs aptitudes spatiales croissantes. Ainsi, la compréhension de la relation entre l'apprentissage de la géométrie et le développement des compétences spatiales reste un sujet de recherche au niveau international.

### *Distinction entre connaissances spatiales et connaissances géométriques*

Berthelot et Salin (1993 ; 1995), distinguent les deux champs de connaissances que sont celui des connaissances spatiales et celui des connaissances géométriques. Ils proposent de considérer les connaissances spatiales comme un véritable champ de connaissances, un champ conceptuel en référence à Vergnaud (1990), avec ses propres problèmes, systèmes de représentation sémiotiques et invariants opératoires. Il ne s'agit ni de connaissances informelles ni d'embryon de connaissances plus abstraites et formelles. Déjà Clairaut (1741) déclarait s'appuyer sur les problèmes spatiaux et les problèmes d'arpentage pour produire les connaissances géométriques, sans confondre les deux champs de connaissances et en montrant que leur distinction est présente dans le type de problème posé et la validation des solutions.

La géométrie est un ensemble d'objets théoriques et de relations entre ces objets, accessibles à travers divers systèmes sémiotiques, dont un système graphique et un système langagier. Dans ce champ de connaissances, la validation est théorique, fondée sur la non-contradiction des énoncés langagiers, reposant sur un raisonnement et un traitement linéaire et analytique. Lorsque les objets et relations sont exprimés graphiquement, ils engagent une autre appréhension, plus globale et avec des contrôles perceptifs (Parzysz, 1988). Ainsi, deux systèmes sémiotiques distincts, produisant des représentations complémentaires et fonctionnant différemment sont utilisables pour la géométrie. Cependant, le graphique n'est pas seulement un système sémiotique pour le travail géométrique. Il est aussi un moyen de modéliser l'environnement, l'espace qui nous entoure (Laborde, 2004). Dans ce sens, le système graphique et la géométrie apparaissent comme un moyen de modéliser l'espace, dont l'appréhension est régie par les connaissances spatiales.

Les connaissances spatiales concernent une classe de problèmes, qui inclut la caractérisation des formes, de l'orientation, des positions et des mouvements. La création d'une carte au sens de cartographie et l'utilisation de cette carte pour se repérer en montagne, en mer ou en ville, pour atteindre une position ou pour construire un objet (on parle alors de « plan ») sont les problèmes typiques de ce champ de connaissances, pour lequel la validation est pragmatique et empirique. Certains de ces problèmes appartiennent aussi au champ des connaissances géométriques, mais leur résolution dans l'un ou l'autre des deux champs ne fera pas appel aux mêmes systèmes de représentation ou aux mêmes invariants opératoires.

A partir de ces constats et à la suite de Bryant (2009), la question posée à la recherche est celle de la relation entre les connaissances spatiales et les connaissances géométriques et dans quelle mesure ces relations peuvent contribuer à l'apprentissage de la géométrie.

### *Le rôle pivot du graphique dans l'articulation des connaissances spatiales et des connaissances géométriques à l'école primaire*

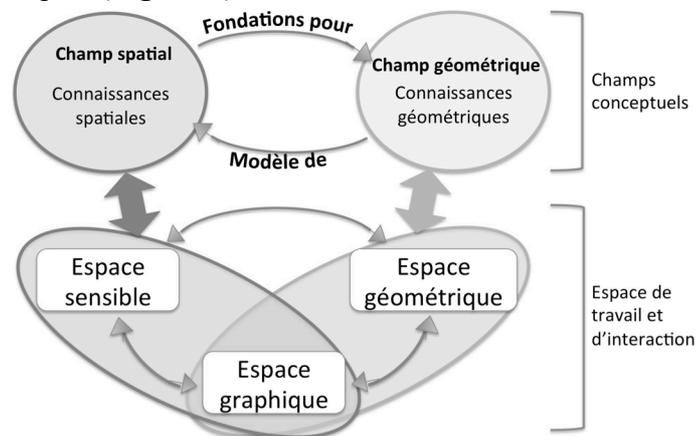
Berthelot et Salin (1993), se fondant sur une analyse des manuels et des instructions officielles, ont conclu que les connaissances spatiales ne sont pas suffisamment prises en compte et enseignées à l'école primaire. Le temps consacré aux connaissances spatiales ne serait pas suffisant, en comparaison avec celui consacré à la géométrie. De plus, l'analyse précédente des relations entre les deux champs de connaissances indique que ce ne sont pas uniquement les connaissances spatiales pour elles-mêmes qui doivent être développées, ni les deux champs de connaissances considérés séparément, mais bien leur mise en relation. Dans la perspective de l'apprentissage de la géométrie, ces liens entre activités spatiales et activités géométriques doivent être spécifiquement traités. Ils permettent de construire les connaissances géométriques comme un moyen de traiter les problèmes spatiaux, en offrant un modèle possible des situations spatiales. Ils permettent également de constituer le champ des connaissances spatiales comme un domaine de problèmes qui donne du sens aux connaissances géométriques et un moyen de validation des raisonnements, distinct de la validation géométrique.

Dans leur cours à la XIV<sup>e</sup> école d'été, Bloch et Pressiat (2009) donnent une première piste pour travailler la relation entre spatial et géométrique. Ils attirent l'attention sur l'importance du processus de construction de schémas à l'école primaire. S'appuyant sur l'approche de Gonseth (1936) et se plaçant dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), ils font l'hypothèse que certaines difficultés d'élèves en géométrie sont imputables à un manque, ou à une trop faible organisation, de milieux objectifs pour les situations de modélisation du méso-espace. Pour la constitution de tels milieux, ils prévoient des expériences matérielles (par exemple, la rotation d'une porte avec un crayon fixé à une extrémité permettant de produire le cercle) et attendent des élèves qu'ils dessinent des schémas (ce qui correspond au passage du méso-espace au micro-espace, via l'espace graphique). L'analyse des réponses des élèves amène Bloch et Pressiat (*ibidem*) à s'interroger sur le rôle spécifique de la schématisation dans la progression de l'enseignement de la géométrie à l'école. Ils considèrent ce processus comme une étape nécessaire, en particulier pour ralentir le cheminement souvent trop rapide vers des savoirs géométriques. Ils ajoutent la nécessité de situations de schématisation sans objectif géométrique associé afin de construire un milieu d'expériences spatiales. Ainsi, Bloch et Pressiat (*ibidem*) indiquent le rôle pivot de la schématisation dans la mise en relation des champs spatial et géométrique. Perrin-Glorian, Mathé et Leclercq (2013) poursuivent en identifiant trois espaces en interaction pour la construction des connaissances géométriques : l'espace géométrique, l'espace graphique et l'espace sensible.

Il nous semble ici nécessaire d'introduire explicitement le sens que nous attribuons aux expressions « espace », « champ conceptuel », « champ de connaissances ». Avec « champ de connaissances » ou « champ conceptuel », nous renvoyons à la définition de Vergnaud (1990) au moyen du triplet problèmes, invariants opératoires et systèmes de représentation. Balacheff a repris ce triplet et a distingué les niveaux conception (une entité cohérente pour un sujet donné dans une situation donnée), connaissance (l'ensemble des conceptions relatives à un même objet mathématique pour un sujet ou une communauté de personnes) et concept (ensemble des connaissances) (Balacheff & Margolinas, 2005). Le mot « espace » renvoie plutôt à la situation et au milieu didactique qui émerge dans l'interaction avec l'élève. Il contient des objets et du matériel, physique ou abstrait. Il est caractérisé par la taille des objets

considérés, macro, méso ou micro espace et la nature des objets privilégiés dans l'interaction avec l'élève, comme par exemple l'espace graphique. Cette acception paraît compatible avec l'usage fait par Perrin-Glorian et *al.* (2013).

La proposition de Perrin-Glorian et ses collègues est de considérer que l'espace graphique joue un rôle pivot dans le passage de l'espace sensible à l'espace géométrique. En effet, l'espace graphique est à la fois un espace sensible, sur lequel le sujet agit matériellement (dessin, construction, mesure...) et un espace géométrique, comme système de représentation des objets géométriques. L'espace graphique permet l'expérimentation et la résolution de problèmes selon des critères qui peuvent tout aussi bien relever du champ des connaissances spatiales que du champ des connaissances géométriques. L'espace graphique permet la modélisation et la résolution d'un problème spatial, en modélisant les objets 3D du micro, du méso ou du macro espace par des objets graphiques bidimensionnels du micro-espace. Dès lors que ce modèle est produit, il peut à son tour être considéré comme une représentation d'un objet géométrique et en conséquence donner lieu à un traitement plus théorique. L'espace graphique est alors un moyen de travailler la relation entre connaissances spatiales et connaissances géométriques (**Figure 9**).



**Figure 9.** – Rôle pivot de l'espace graphique dans la mise en relation des connaissances spatiales et des connaissances géométriques (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015a).

La mise en relation des champs conceptuels avec les trois espaces de Perrin-Glorian et *al.* (2013) est réalisée d'une part au niveau des espaces sensible et graphique en lien avec le champ des connaissances spatiales et d'autre part au niveau des espaces graphique et géométrique en lien avec le champ des connaissances géométriques (**Figure 9**). L'espace graphique apparaît comme une liaison possible entre les espaces et par conséquent les deux champs de connaissances. Les connaissances spatiales sont efficaces pour résoudre les problèmes posés dans l'espace sensible ou graphique et le passage aux connaissances géométriques n'est requis que dans un second temps, lorsqu'un travail de modélisation s'avère nécessaire pour résoudre le problème. Réciproquement, les connaissances géométriques sont nécessaires et incontournables lorsque le problème se pose dans le champ géométrique, les espaces graphique ou sensible offrant un moyen d'explorer le problème. À l'école primaire, la priorité n'est pas aux problèmes purement géométriques. En revanche, les problèmes géométriques, traitables dans l'espace graphique et pouvant donner lieu à une problématisation dans le champ conceptuel des connaissances spatiales sont ceux à privilégier, comme l'indiquaient déjà Berthelot et Salin (1993 ; 1995).

## *La technologie, un espace graphique augmenté pour connecter espace sensible et espace géométrique*

Notre proposition est que la technologie a un rôle à jouer pour la construction des situations didactiques permettant la mise en relation par les élèves des connaissances spatiales avec les connaissances géométriques, du fait de ses relations étroites avec les trois espaces de Perrin-Glorian et *al* (2013). Tout d'abord, les travaux présentés en Partie 1 ont montré de façon détaillée en quoi la géométrie dynamique est un élément de l'espace géométrique, permettant la constitution de milieux pour l'apprentissage de la géométrie, en particulier parce qu'elle fournit un espace graphique augmenté qui amène les élèves à travailler au niveau de la figure et pas seulement du dessin (Laborde & Capponi, 1994). En plus de ces relations déjà identifiées, la technologie est également un élément de l'espace sensible des objets tangibles. En effet, les actions dans l'environnement de géométrie dynamique ont des propriétés de l'espace sensible, les objets à l'interface pouvant être déplacés, attrapés, supprimés, pliés... Cette appartenance à l'espace sensible peut être renforcée par les rétroactions que la technologie produit dans l'interaction élève-milieu. Les rétroactions sont un élément essentiel de la valeur ajoutée de la technologie aux situations d'apprentissage, un outil à disposition des chercheurs (Laborde & *al.*, 2006). Nous avons distingué trois types de rétroaction (Mackrell, Maschietto & Soury-Lavergne, 2013) qui contribuent à la valeur ajoutée de la technologie aux situations didactiques : (i) les rétroactions de manipulation directe sont toutes les réponses immédiates et continues de la technologie à l'action de l'utilisateur (affichage/masquage, son, déplacement...), lui indiquant que son action a été prise en compte par le système et lui permettant d'en suivre les conséquences ; (ii) les rétroactions de stratégie sont les réponses de la technologie significatives du point de vue de la résolution du problème en cours, qui ne donnent pas la réponse ni ne modifient le problème à résoudre, mais qui permettent à l'utilisateur de faire évoluer sa stratégie (il s'agit principalement d'un changement de valeur de variable didactique) ; (iii) les rétroactions d'évaluation correspondent à la validation ou l'invalidation de la réponse de l'élève par le système (réussi ou échoué). Ces rétroactions existent également dans l'espace sensible, mais avec la technologie, elles sont augmentées, d'une façon qui peut être choisie par le concepteur de la technologie et le concepteur de la situation, de façon à être complémentaires par rapport à celles du graphique papier-crayon et de l'espace sensible. Ainsi, la technologie fournit un autre élément de mise en relation de l'espace sensible avec l'espace graphique, non seulement par les représentations qu'elle permet de traiter mais aussi par les rétroactions qu'elle permet de produire.

### *2. Le tangible et le numérique*

Le rôle de l'expérience sensible dans l'apprentissage des mathématiques, et pas uniquement la géométrie, à travers la manipulation concrète d'objets et l'expérience du corps, est attesté par divers travaux (Lakoff & Nunez, 2000 ; Nemirowski et *al.*, 2004 ; Pinet & Gentaz, 2008 ; Edwards, Radford & Arzarello, 2009 ; Artigue, Cazes, Haspekian, Khanfour-Armalé & Lagrange, 2013). Lors de l'école d'été de 2007, Dias (2009) faisait l'hypothèse que le travail mathématique passe par l'expérience sensible et que le développement des mathématiques ne peut se faire sans une dialectique entre objets sensibles et objets théoriques, considérant comme objets sensibles ce que les sens peuvent percevoir (notamment les objets matériels) et comme objets théoriques ce qui est inséré dans une théorie mathématique. Cette dialectique lui permet de proposer une méthode de raisonnement qualifiée d'expérimentale, consistant à analyser la réalité, à avancer des propositions, à argumenter pour les valider ou pas, puis à revenir aux objets sensibles pour mettre à l'épreuve les considérations théoriques. Favoriser la dimension expérimentale devrait permettre au sujet des allers retours entre objets sensibles et théoriques, pour dépasser une simple progression qui irait des objets sensibles aux objets

théoriques. Dias soutient la nécessité de constituer un milieu expérimental pour les mathématiques, qu'il rattache à l'idée de laboratoire de mathématiques. Ce rapport au sensible, nécessaire pour l'apprentissage des mathématiques, ne peut pas être remplacé par l'interaction avec l'environnement informatique, comme l'avait supposé initialement Papert (Papert, 1980b ; Turkle & Papert, 1992). Dès 2003, des travaux à l'école primaire concernaient l'articulation de trois environnements instrumentés pour la résolution de problèmes géométriques tels que construire un carré (Rolet, 2003) : celui de la cour de récréation, celui du papier et celui de l'écran d'ordinateur (<http://magesi.ens-lyon.fr/>). Dans les différents environnements, les propriétés géométriques mobilisées ne sont pas les mêmes, ni les outils matériels (l'équerre de la trousse n'a que peu d'utilité pour construire un angle droit dans la cour ou à l'écran d'un ordinateur), ni les contrôles et moyens de vérification (la validation par déplacement est inopérante dans la cour).

Nous proposons d'étudier plus précisément l'association du tangible avec le numérique dans les situations d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques, c'est-à-dire de réintroduire le tangible dans les travaux de recherche en EIAH. Nous retenons maintenant l'adjectif « tangible »<sup>5</sup> pour caractériser les objets matériels de l'espace sensible afin de préciser qu'il ne s'agit pas seulement des sens tels que la vue et l'ouïe, mais également le toucher (sens haptique). Pour cela, nous avons fait le choix d'étudier un système minimal combinant le tangible et le numérique que nous avons appelé duo d'artefacts. Cela permet de renouveler les problématiques des EIAH relatives à :

1. La conception des environnements : quelles sont les caractéristiques des objets tangibles et des environnements numériques permettant leur association dans une situation didactique ?
2. L'apprentissage des élèves : quelles sont les caractéristiques des genèses instrumentales (Rabardel, 1995) et des conceptualisations dans les situations didactiques (Brousseau, 1998) associant tangible et numérique ?
3. L'appropriation par les enseignants : quelles sont les caractéristiques des orchestrations (Trouche, 2003 ; Drijvers, Doorman, Boon, Reed & Gravemeijer, 2010) et des genèses documentaires (Gueudet & Trouche, 2008) de ressources associant tangible et numérique ?

Ce travail débuté en 2011 dans le champ des connaissances en numération et calcul sur les trois axes présentés (Maschietto & Soury-Lavergne, 2013 ; Soury-Lavergne & Maschietto, 2015b ; Maschietto & Soury-Lavergne, 2017) a aussi été mené en partie dans le domaine de la géométrie. Nous présentons des exemples de questions et d'expérimentations en géométrie après avoir exposé les caractéristiques de ce que nous appelons duo d'artefacts tangible et numérique.

### *Caractéristiques d'un duo d'artefacts tangible et numérique*

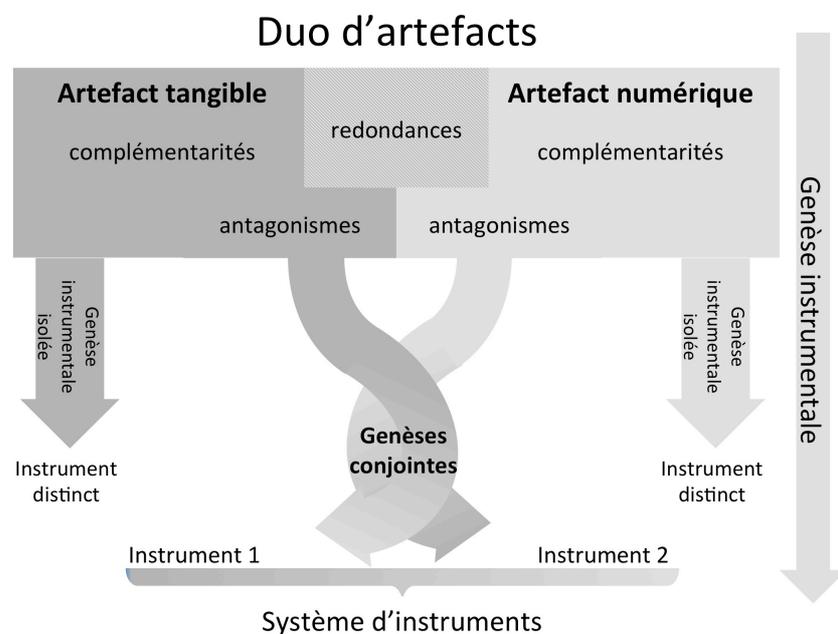
Le duo d'artefacts est une version simplifiée d'un système plus complexe d'objets et d'environnements constituant un milieu didactique pour un concept mathématique donné (Soury-Lavergne, 2017). Il s'agit d'étudier la combinaison de différents artefacts dans une situation et de déterminer en quoi ils provoquent l'apprentissage, en particulier en permettant des genèses instrumentales. En effet, le développement des schèmes caractérise l'apprentissage et la construction des connaissances qui résultent de l'utilisation d'un artefact : « *Au fond de l'action, la conceptualisation* » (Vergnaud, 2011).

---

<sup>5</sup> L'adjectif tangible renvoie à deux significations importantes pour notre travail (source TLFI, le Trésor de la langue française informatisé) : (i) perceptible par le toucher, synonyme de palpable et sensible, (ii) dont l'existence et la réalité est indéniable, synonyme de concret.

L'imbrication et l'enrichissement mutuel des genèses instrumentales relatives à chaque artefact du duo sont donc recherchés. La question est alors relative aux moyens de les contrôler au moment de la conception du duo (ou de la conception de l'un des artefacts lorsque l'autre est donné). En choisissant un artefact tangible et un artefact numérique, nous avons une possibilité d'y parvenir, car ils ont des propriétés différentes et complémentaires.

L'artefact tangible est un objet qui a des propriétés physiques telles qu'une masse, une couleur, un mouvement. Il est soumis à la pesanteur, il est visible, accessible aux sens, en cela il relève de l'espace sensible. En opposition avec le tangible, l'artefact numérique n'a pas ces propriétés dans le sens où sa réaction à l'action de l'utilisateur n'est pas soumise et contrainte de la même manière par les lois de la physique. Cependant, les représentations numériques à l'interface des systèmes informatiques ont tout de même certaines propriétés physiques. En effet, elles émettent de la lumière, elles sont incluses dans des objets matériels (tablette, ordinateur, smartphone) soumis à la pesanteur, enfin on peut les toucher directement, opérant dessus comme avec des objets. Dans le choix d'un artefact tangible et d'un artefact numérique, il s'agit de sélectionner, dans un continuum d'objets et de propriétés, deux artefacts suffisamment distincts pour être complémentaires dans leur association.



**Figure 10.** – Les genèses instrumentales conjointes avec un duo d'artefacts.

Cependant, choisir deux artefacts complémentaires par rapport à la réalisation d'une tâche ou la résolution d'un problème n'amène pas forcément l'utilisateur à les associer et à engendrer un système d'instruments, bien que cette complémentarité soit nécessaire pour l'utilité du duo. Les genèses instrumentales peuvent se développer de façon disjointe. Bourmaud (2007) indique deux autres caractéristiques des systèmes d'instruments robustes et adaptables : la redondance et les antagonismes. La redondance permet le développement de certains schèmes dans le passage d'un artefact à l'autre. Les antagonismes provoquent des réorganisations et des modifications. Si ces mécanismes opèrent de façon cohérente avec les apprentissages mathématiques visés, un tel duo peut donner matière au développement d'un système d'instruments pour apprendre et faire apprendre (**Figure 10**). Les complémentarités, qui justifient l'usage des deux artefacts et pas d'un seul, les redondances, qui permettent aux utilisateurs d'associer les deux dans les usages et les antagonismes qui provoquent les

évolutions font que deux artefacts constituent un duo et se développent en un système d'instruments.

La situation didactique au sein de laquelle sont inclus les artefacts, en particulier le type de problème posé, est également nécessaire pour que les genèses instrumentales conjointes se développent.

Les travaux en géométrie qui ont donné lieu au développement de ce modèle ont concerné principalement la conception des artefacts pour l'apprentissage de divers concepts géométriques et l'expérimentation des situations auprès d'élèves pour identifier les apprentissages. Les questions d'appropriation par les enseignants n'ont pas été étudiées sur les cas de duos d'artefacts en géométrie. Nous avons parfois conçu l'artefact tangible pour compléter un environnement numérique existant ou bien conçu l'environnement numérique associé à des artefacts tangibles. La problématique en termes de duo d'artefact en géométrie la plus aboutie concerne le travail sur la construction du triangle à la règle et au compas (Voltolini, 2014 ; 2017). Avec la conception d'un environnement numérique associé à la construction au compas d'un triangle dont les longueurs des côtés sont données, ce travail a permis de mettre en évidence les stratégies de construction des élèves ainsi que les genèses instrumentales relatives aux deux environnements. Ce travail a permis à Voltolini (*ibidem*) d'identifier un nouvel instrument « compas » servant à faire pivoter les segments. Elle a également montré quelles connaissances géométriques étaient construites lors de ces genèses, dont une nouvelle conception du triangle comme ligne brisée fermée (voir la présentation détaillée dans le TD associé à ce cours : Emprin et *al.* dans le volume 2 de cet ouvrage).

#### *Tapis et grenouille, un duo d'artefacts pour l'apprentissage du quadrillage comme outil de repérage dans le plan*

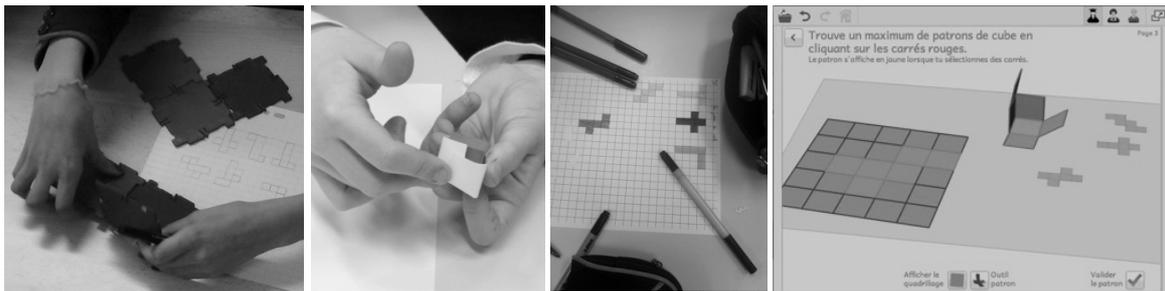
Nous avons utilisé ce principe de mise en relation de l'espace tangible et de la technologie, pour concevoir une situation d'apprentissage du quadrillage (ou grille à mailles carrées) comme outil de repérage des positions et des trajectoires dans le plan (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015a). Le quadrillage est un objet graphique du micro-espace qui permet de structurer le plan et de distinguer les positions. C'est également la représentation d'un objet géométrique théorique (réseau de droites perpendiculaires), à partir duquel sera construit le concept de repère, et qui permet de modéliser et résoudre des problèmes spatiaux et des problèmes géométriques. Son introduction auprès des élèves n'est généralement pas problématisée à l'école primaire. C'est-à-dire que les raisons d'utiliser ou pas un quadrillage pour résoudre un problème ne sont pas accessibles aux élèves, le quadrillage étant toujours donné lors de la présentation du problème.

Un artefact tangible de l'espace sensible, un grand tapis uni, a été choisi pour être associé à un environnement numérique existant. Une situation a été conçue pour faire exister le quadrillage comme objet du champ des connaissances spatiales permettant de résoudre le problème de repérage spatial et rendre le passage par l'espace graphique nécessaire. En effet, mémoriser une position sur un tapis ou bien le déplacement d'une grenouille dans un plan quadrillé implique la réalisation de schémas dans l'espace graphique. La situation a été expérimentée en Italie avec deux classes de niveau CE1 et les productions graphiques des élèves ont été étudiées pour déterminer le rôle joué par le quadrillage dans leurs stratégies de résolution (voir la présentation détaillée dans le TD associé à ce cours).

#### *Pliage papier et pliage numérique pour l'apprentissage des patrons du cube*

L'étude des patrons du cube passe traditionnellement par la réalisation des patrons en papier. Le découpage et le pliage des patrons, mobilisant l'espace sensible (avec les cubes comme objets, le pliage et dépliage des patrons et l'assemblage de pièces carrées en plastique) ainsi

que l'espace graphique (avec la réalisation de dessins de patrons), produisent des rétroactions qui permettent aux élèves d'obtenir une validation pragmatique du patron. En choisissant de caractériser un raisonnement dans l'espace géométrique par les déconstructions dimensionnelles opérées par l'élève (Duval, 2005), le pliage et dépliage des patrons implique une déconstruction 3D/2D qui relève alors de l'espace géométrique. Ainsi, le pliage des patrons apparaît comme permettant d'articuler les champs de connaissances spatiales et géométriques. Pour augmenter et faciliter les possibilités de pliage et dépliage, nous avons élaboré un artefact numérique avec la technologie Cabri-Elem et une situation dans laquelle étaient associés des artefacts tangibles (papier ou polydrons, **Figure 11** à gauche et au milieu) et un environnement numérique (**Figure 11**, à droite) (Calpe, Rabatel, Zucchetto & Soury-Lavergne, 2014).



**Figure 11.** – Artefacts tangibles et artefact numérique pour les patrons du cube (Calpe et al., 2014).

Dans l'environnement numérique (**Figure 11**, à droite), la tâche de l'élève est de trouver différents patrons d'un cube. Pour cela, il peut sélectionner des carrés sur un quadrillage 5x5 (les carrés sélectionnés changent de couleur, rétroaction de manipulation directe) puis replier la sélection et faire tourner le patron replié pour vérifier, comme dans l'espace sensible, qu'il n'y a pas de trous et de recouvrements (rétroaction de stratégie). Il peut aussi demander au système s'il a bien trouvé un patron du cube. Si c'est le cas et que le patron n'est pas déjà identifié, le système l'affiche sur la droite du plan (rétroaction d'évaluation), sinon il indique soit que le patron a déjà été trouvé (en faisant tourner le patron en question, rétroaction de stratégie) ou indique simplement que l'assemblage de carrés n'est pas un patron (rétroaction d'évaluation). Les différents messages et animations ont été conçus pour constituer des rétroactions d'évaluation ou de stratégies (par exemple, faire tourner l'image réduite d'un patron déjà obtenu permet de faire reconnaître le doublon sans pour autant indiquer comment obtenir un nouveau patron). De plus, en n'indiquant pas que tous les patrons du cube ont été identifiés, on amène les élèves à tester des assemblages inhabituels et à questionner les raisons qui font que ce sont ou pas des patrons de cube.

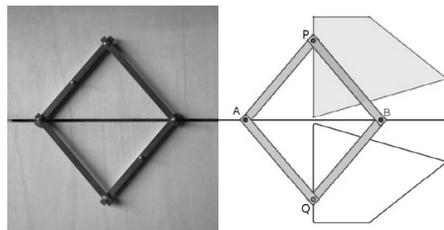
Dans ce cahier, la construction des carrés et le choix de faces carrées n'est pas une tâche sous la responsabilité des élèves. Ainsi, la caractéristique des patrons de cubes d'avoir uniquement des faces carrées ne résulte pas de l'utilisation de l'environnement numérique. C'est le recours à l'artefact tangible, prévu dans l'autre phase de la situation, qui prend en charge l'apprentissage de cette propriété. La situation est conçue en trois phases (après une introduction pour vérifier que les élèves disposent des critères pour reconnaître qu'un pliage est un patron, à savoir forme du cube, pas de recouvrement et pas de face vide) : (i) une phase de travail avec le matériel tangible pour chercher au moins trois patrons de cube, et plus si possible, et les représenter sur une fiche ; (ii) une phase de travail avec l'environnement numérique pour vérifier les patrons trouvés lors de la phase précédente et en chercher d'autres ; (iii) une phase collective pour faire apparaître les propriétés d'un patron de cube (6 faces, des faces carrées) et le rôle du pliage dans la validation de l'assemblage. La recherche de nombreux patrons doit amener les élèves à tenter de plier et déplier, physiquement, à l'interface du logiciel et mentalement, de nombreux patrons.

La situation a été expérimentée auprès de trois classes françaises (deux CM2 et une 6<sup>e</sup>) en 2013 et 2014. L'analyse est conduite sur les schémas de 53 élèves de CM2 et une observation de classe (enregistrement des discussions collectives et de deux binômes, observation des autres binômes). Cette analyse a pour objectif de déterminer le champ conceptuel auquel se rattache le problème résolu par les élèves, en particulier en identifiant les déconstructions dimensionnelles qui sont mobilisées.

Une conclusion importante est que les élèves ont d'abord considéré le problème dans l'espace sensible, faisant notamment appel aux contraintes particulières de cet espace qui ne sont pas géométriques (un patron en papier ayant exactement les dimensions des faces d'un cube ne pourrait pas l'envelopper). L'enjeu de la situation a été de voir si les problèmes à résoudre avec le tangible puis le numérique pouvaient amener les élèves à travailler dans l'espace géométrique et mobiliser des propriétés telles que le côté du carré d'un patron a la même mesure que l'arête du cube. Dans l'environnement papier-crayon, peu d'élèves utilisent la règle pour tracer les alignements des côtés des carrés formant le patron, la plupart d'entre eux construisent séparément les carrés adjacents, sans perception de l'alignement des bords des carrés 1D/2D dans le patron à construire. Près de la moitié des fiches des élèves présentent des patrons dupliqués (23 sur 53). Seulement 16 fiches sur 53 ne présentent ni doublons, ni erreur, mais dans ce cas, il y a souvent peu de patrons représentés. Pendant la phase avec l'artefact numérique, les élèves ont testé de très nombreux assemblages de carrés incorrects, avec plus ou moins de 6 faces ou avec un pavage de 4 carrés. Ainsi, la technologie leur a donné l'occasion d'expérimenter. Pourtant, ils n'ont pas toujours plié le patron, contournant la rétroaction de stratégie pour demander l'évaluation par le système. La facilité de sélection et d'obtention d'une évaluation rend peu coûteuse une stratégie de type combinatoire sur le choix de carrés. Or cette stratégie relève d'un autre champ mathématique et n'est pas en relation avec l'espace sensible. Mais dès que la situation s'est complexifiée, par exemple après la découverte de cinq patrons différents, et que le système a rejeté systématiquement les nouvelles propositions, les élèves ont recommencé à plier les patrons, parfois après que le système les ait rejetés, pour comprendre pourquoi ils n'étaient pas acceptables. Ainsi, le nombre de patrons à trouver est une variable didactique importante, sa valeur devant être au moins cinq, pour provoquer le changement de stratégie et le recours au pliage, indicateur d'un travail dans le champ de la géométrie.

### *Machine mathématique et géométrie dynamique pour l'apprentissage de la symétrie*

L'exemple considéré dans cette section concerne l'utilisation d'un artefact tangible et de la géométrie dynamique pour la symétrie axiale. Les expérimentations conduites au niveau collège (Bettini, Facchetti & Maschietto, 2012 ; Bettini, 2017 ; Maschietto, 2018) commencent par l'exploration d'un artefact tangible appelé « machine mathématique » (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006) constitué par un losange articulé (**Figure 12**) dont deux sommets opposés sont contraints de glisser le long d'une fente dans un plan en bois.

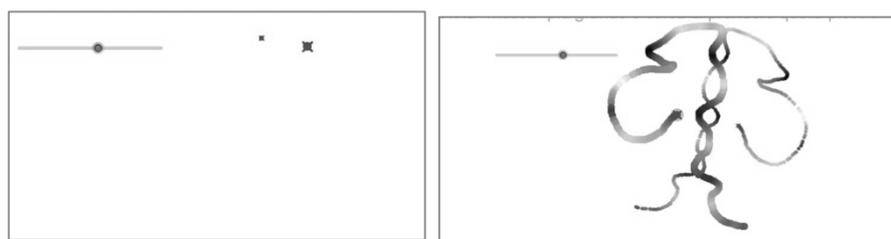


**Figure 12.** – Pantographe pour la symétrie axiale.

Les élèves travaillent selon la structure proposée par les travaux s'inscrivant dans la médiation sémiotique : i) description de la machine (ses composantes et leurs caractéristiques,

type de figure articulée) ; ii) dessin de figures symétriques en plaçant des mines de crayon dans les deux sommets qui ne sont pas dans la fente. Selon la classe, il peut avoir une troisième étape, où on demande aux élèves d'expliquer pourquoi la machine réalise une symétrie axiale (grâce aux propriétés des diagonales du losange faisant coïncider une diagonale avec la fente du plan). Enfin, la justification du comportement et de ce que la machine produit représente un moment de la mise en commun du travail fait. D'autres tâches sont ensuite proposées (Maschietto, 2018).

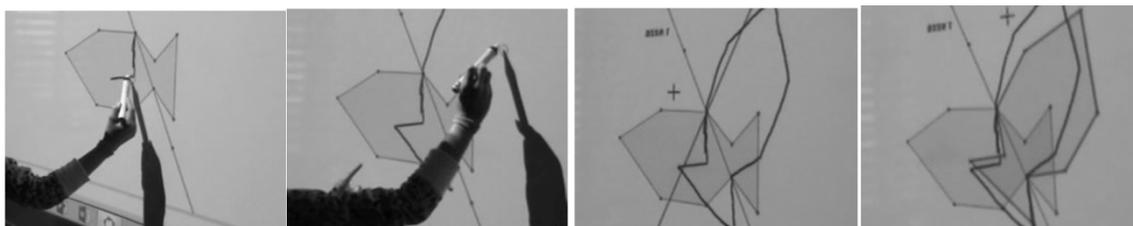
Après l'exploration de la machine mathématique, la géométrie dynamique est utilisée en classe dans des moments collectifs sur le TBI. Par exemple, deux fonctionnalités sont utilisées : le déplacement des points pour lesquels la Trace est activée et la commande Symétrie axiale.



*Figure 13. – A gauche la situation de départ, à droite les trajectoires des deux mouches.*

Dans Bettini (2017), l'utilisation du déplacement et de la Trace repose sur l'utilisation d'une métaphore des points présentés comme deux mouches qui se déplacent de façon symétrique sur le plan et qui ont les pattes colorées (cette idée a été empruntée à une activité conçue dans le projet MAGI), avec le but que la mouche la plus grande puisse rattraper la plus petite (Figure 13). Cette activité se réalise en continuité avec le travail précédent sur la machine. Sans la structure du losange articulé et la présence de l'axe, elle peut être considérée en antagonisme par rapport à la machine, mais aussi en complémentarité par la possibilité de changer la position de l'axe, qui n'est plus nécessairement vertical et de passer d'un demi-plan à l'autre.

La commande de symétrie est utilisée dans des tâches de prévision de la figure symétrique d'une figure donnée (**Figure 14**).



*Figure 14. – Prévision de la figure symétrique et validation de la réponse.*

Le parcours avec la machine mathématique et la géométrie dynamique offre une approche dynamique de la symétrie axiale en conjuguant un point de vue global et un point de vue ponctuel sur les figures et ses transformées. La limitation physique du losange et de la fente, ainsi que l'orientation de l'axe de la machine (toujours horizontal ou vertical par rapport à l'élève) est dépassée avec la géométrie dynamique, qui permet de rencontrer des configurations nouvelles et, en particulier, des configurations où l'axe de symétrie coupe la figure (comme dans le cas de la **Figure 14**). La géométrie dynamique est donc complémentaire à la machine mathématique, mais aussi antagoniste parce qu'elle remet en cause la conception selon laquelle la symétrie est une correspondance entre demi-plans.

## ACQUIS ET NOUVELLES QUESTIONS À TRAITER

Dans l'ensemble des recherches que nous avons présentées, qui partent des travaux sur la géométrie dynamique pour interroger les connaissances géométriques puis le rôle de la technologie associée aux artefacts tangibles dans les processus d'apprentissage, nous proposons de retenir quelques idées clefs qui, selon nous, devraient fonder les futurs travaux dans le domaine, soit comme hypothèses de travail, soit comme générateur de nouvelles questions.

### *Diversité des usages possibles du dynamisme en géométrie*

Quelques résultats obtenus avec les travaux en géométrie dynamique devraient être pris en compte dans nos recherches à venir et pourraient même être la source de nouveaux travaux. Finalement, le dynamisme dans la géométrie et la variété des situations qu'il permet d'aborder, au-delà de révéler les propriétés invariantes d'une figure lors du déplacement, n'ont pas encore été complètement cernés. Par exemple, nous avons maintenant les moyens de distinguer deux façons de considérer la figure dynamique : une vision statique, qui considère les états successifs de la figure, ou bien une vision dynamique qui s'intéresse à sa transformation continue et à celle de ses propriétés au cours du déplacement. Ces deux visions sont-elles mobilisées par les élèves et à quelles conditions ? Qu'en est-il pour les enseignants ? Avec quelles conséquences sur les connaissances mathématiques construites ? Une autre distinction à reprendre est celle des constructions robustes et des constructions molles, l'exploitation de l'une ou de l'autre, donnant lieu à des instrumentations variées du déplacement. Elle apparaît très utile pour aborder les apprentissages en géométrie à l'école primaire et même dès la maternelle, comme en témoignent les travaux canadiens. Cette distinction est également fructueuse pour engager les élèves dans une démarche de preuve. Les situations dans lesquelles le travail des élèves porte sur la recherche des conditions (hypothèses qui ne sont pas toutes satisfaites dans les cas des constructions molles) afin d'obtenir une conclusion souhaitée et bien identifiée *a priori* sont productives pour l'apprentissage de la preuve et de la démonstration.

### *Complexité de la prise en compte du dynamisme par les élèves et par les enseignants*

En connaissant mieux les caractéristiques et le potentiel de la géométrie dynamique, nous avons aussi peu à peu mieux compris la complexité de son appropriation tant par les élèves que par les enseignants. Nous avons exposé en quoi les objets de la géométrie dynamique sont différents des objets géométriques de la géométrie euclidienne. Ces différences parfois transparentes pour les utilisateurs ont des conséquences dans les pratiques. Une autre différence est la nécessité de concevoir le point comme intersection de lignes pour obtenir des constructions robustes. Or la conceptualisation du point est difficile (Kuzniak, 2005) et n'est pas un objectif de l'école primaire. Pour l'enseignement, il ne s'agit pas de partir du point pour construire le champ des connaissances géométriques, comme chez Euclide, mais plutôt d'avoir sa conceptualisation comme objectif. Les premiers travaux utilisant la géométrie dynamique qui ont pris comme principe de ne pas aller jusqu'à une déconstruction dimensionnelle 0D ont été conduits de façon fructueuse sur quelques concepts mathématiques, donnant des pistes pour l'usage de ces technologies en primaire.

### *Construction des connaissances géométriques*

A propos de la construction des connaissances géométriques, l'hypothèse retenue dans les travaux étudiés est qu'elles se développent à partir des connaissances spatiales, chaque champ conceptuel étant à la fois distinct et en relation avec l'autre. Les travaux conduits ont aussi

distingué trois espaces concourant au développement des deux domaines de connaissances : l'espace sensible, l'espace graphique et l'espace géométrique. Ils ont mis en évidence le rôle pivot joué par l'espace graphique dans la mise en relation des deux champs. L'enjeu est maintenant de poursuivre la conception de situations didactiques basées sur la mise en relations des trois espaces, pour amener les élèves à construire des connaissances spatiales et des connaissances géométriques (à l'image du programme que s'est donné le groupe de recherche sur l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire du Nord-Pas-de-Calais, voir le cours de J. Mithalal et A.-C. Mathé dans cet ouvrage). L'enjeu est aussi de comprendre comment ces trois espaces sont mis en relation non seulement grâce aux graphiques et schématisations, mais aussi grâce à la technologie numérique, notamment la géométrie dynamique. Avec les bonnes situations, la technologie permet de créer des liens entre l'espace sensible, l'espace graphique et l'espace géométrique.

### *Duos d'artefacts tangibles et numériques*

Enfin, nous proposons de regarder particulièrement l'articulation entre le tangible et le numérique dans les situations didactiques pour l'apprentissage de la géométrie. Avec les duos d'artefacts, nous présentons une modélisation simplifiée pour concevoir et étudier les systèmes d'instruments complexes que développent les élèves et les enseignants dans les situations incluant nombre d'artefacts variés, comme c'est le cas en géométrie. L'idée principale des duos d'artefacts est de rechercher dans un artefact tangible et dans un artefact numérique des éléments de complémentarité, de redondance et d'antagonisme permettant de concevoir des situations didactiques. Les nouvelles questions posées concernent : (i) la conception des artefacts et des situations, toute situation existante pouvant être reconsidérée du point de vue de la conception d'un des artefacts lorsque l'autre existe ; (ii) les processus d'apprentissage, les genèses instrumentales conjointes au sein du duo et les conceptualisations associées ; (iii) l'appropriation de la technologie et des situations par les enseignants, l'association de la technologie à d'autres artefacts déjà utilisés étant un facteur possible d'appropriation.

Ce nouveau point de vue semble très productif puisque plusieurs travaux se développent actuellement, qui problématisent de façon explicite le rapport entre tangible et numérique, comme les travaux en géométrie de Montone, Faggiano et Mariotti (2017).

### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ABBOUD, M., & ROGALSKI, J. (2017). Des outils conceptuels pour analyser l'activité de l'enseignant ordinaire utilisant des technologies en classe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 37(1-2).
- ALDON, G., ARZARELLO, F., CUSI, A., GARUTI, R., MARTIGNONE, F., ROBUTTI, O., SABENA C. & SOURY-LAVERGNE, S. (2013). The Meta-Didactical Transposition: A Model for Analysing Teachers Education Programs. In *Proceedings of PME 37*. Kiel, Germany.
- ARTIGUE, M., CAZES, C., HASPEKIAN, M., KHANFOUR-ARMALÉ, R., & LAGRANGE, J.-B. (2013). *Geste, cognition incarnée et artefacts : une analyse bibliographique pour une nouvelle dimension dans les travaux didactiques au LDAR* (Cahiers du Laboratoire de didactique André Revuz No. 8). Paris, France: IREM Paris 7.
- ARZARELLO, F., BERNARDI, C., BORGI, R., CIARRAPICO, L., De SANCTIS, F., BAKER, M., ... ZAN, R. (2012). *m@t.abel. Matematica per gli studenti alla soglia del terzo millennio*. Florence: INDIRE-ANSAS. Consulté à l'adresse <http://www.scuolavalore.indire.it/superguida/matabel/>
- ARZARELLO, F., OLIVERO, F., PAOLA, D., & ROBUTTI, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 34(3), 66-72.
- ASSUDE, T., & GELIS, J.-M. (2002). La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 259-287.
- ASSUDE, T., GRUGEON, B., LABORDE, C., & SOURY-LAVERGNE, S. (2006). Study of a teacher professional problem: how to take into account the instrumental dimension when using Cabri-geometry? In C. Hoyles, J.-B. Lagrange, S. Le Hung, & N. Sinclair (Éd.), *Proceedings of ICMI Study 17 Technology revisited* (Vol. 2, p. 317-333). Hanoi Vietnam.
- ATHIAS, F. (2014, novembre). *La géométrie dynamique comme moyen de changement curriculaire* (These de doctorat). Université d'Aix Marseille. Consulté à l'adresse <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01092711>

- BACCAGLINI-FRANK, A., & MARIOTTI, M. A. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(3), 225-253. <https://doi.org/10.1007/s10758-010-9169-3>
- BALACHEFF, N. (2017). Seymour Papert (1928-2016) Aux sources d'une pensée innovante et engagée. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 37(2-3).
- BALACHEFF, N., & MARGOLINAS, C. (2005). cK $\phi$  Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In C. MARGOLINAS & A. MERCIER (Éd.), *Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques* (p. 1-32). Corps, France: La pensée Sauvage Grenoble, France.
- BARTOLINI BUSSI, M., & MASCHIETTO, M. (2006). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Milano, Italie: Springer.
- BARTOLINI BUSSI, M. G., & MARIOTTI, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. D. English (Éd.), *Handbook of International research in mathematics education* (p. 746-783). New York: Routledge.
- BAULAC, Y., BELLEMAIN, F., & LABORDE, J.-M. (1988). *Cabri-géomètre, un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie, logiciel et manuel d'utilisation*. Paris: Cedic-Nathan.
- BELLEMAIN, F. (2014). Analyse de ambientes de geometria dinamica colaborativa do ponto de vista da orquestração instrumental. *Nuances: estudos sobre Educação*, 25(2), 18-38. <https://doi.org/10.14572/nuances.v25i2.2936>
- BERTHELOT, R., & SALIN, M.-H. (1993). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, 53, 39-56.
- BERTHELOT, R., & SALIN, M.-H. (1994). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N*, 65, 37-59.
- BERTHELOT, R., & SALIN, M.-H. (1995). Un processus d'enseignement des angles au cycle III. *Grand N*, 56, 69-116.
- BESSOT, A. (2003). Une introduction à la théorie des situations didactiques. *Cahiers du laboratoire Leibniz*, 91. Consulté à l'adresse <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00078794/document>
- BETTINI, G. (2017). Un'orchestra di strumenti matematici. Macchine matematiche, software di geometria dinamica e LIM nella scuola media. 1., *Didattica della matematica. Dalle ricerche alle pratiche d'aula*, 1, 65-92.
- BETTINI, G., FACCHETTI, C., & MASCHIETTO, M. (2012). Costruzione di significati nel laboratorio di matematica: attività con il macchina matematica per la simmetria assiale. In O. Robutti & M. Mosca (Éd.), *Atti del V Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e delle Matematica DiFiMa* (p. 193-204). Torino, Italia: Kim Williams Books.
- BLOCH, I., & PRESSIAT, A. (2009). L'enseignement de la géométrie de l'école au début du collège: situations et connaissances. In I. Bloch & F. Conne (Éd.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques* (p. 65-88). La Pensée Sauvage Editions.
- BOURMAUD, G. (2007). L'organisation systémique des instruments: méthodes d'analyse, propriétés et perspectives de conception ouvertes. In *Colloque de l'Association pour la Recherche Cognitive - ARCo'07: Cognition - Complexité - Collectif* (p. 61-76). Nancy, France: ARCo - INRIA - EKOS. Consulté à l'adresse <https://hal.inria.fr/inria-00191128>
- BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée Sauvage.
- BRYANT, P. (2009). *Paper 5: Understanding space and its representation in mathematics*. (research review). London: Nuffield Foundation. Consulté à l'adresse <http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/P5.pdf>
- BUTLER, D., JACKIW, N., LABORDE, J.-M., LAGRANGE, J.-B., & YERUSHALMY, M. (2010). Design for Transformative Practices. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Éd.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Springer, p. 425-462).
- CALPE, A., RABATEL, J.-P., ZUCCHETTA, J.-F., & SOURY-LAVERGNE, S. (2014). Explorer les patrons du cube: de l'intérêt des représentations à l'aide de logiciels de mathématique dynamique. In *Enseignement de la géométrie à l'école: enjeux et perspectives* (p. 315-Atelier15). Nantes, France: IREM de Nantes.
- CHARRIÈRE, P.-M. (1995). Boîtes noires, 9. Consulté à l'adresse [http://icosaweb.ac-reunion.fr/GeomJava/abraCAda/M\\_abra.htm](http://icosaweb.ac-reunion.fr/GeomJava/abraCAda/M_abra.htm)
- CLAIRAUT, A. (1741). *Éléments de géométrie* (Imprimerie et librairie classique de Jules Delalain). Paris. Consulté à l'adresse <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k147493j>
- CLEMENTS, D. H., & SAMARA, J. (2009). *Learning and Teaching Early Maths. The Learning Trajectories Approach*. New York: Routledge.
- COHEN, D., KOUROPATOV, A., OVODENKO, R., HOCH, M., & HERSHKOVITZ, S. (2017). Geometric constructions in a dynamic environment (GeoGebra): The case of in-service teachers. In T. Dooley & G. Gueudet (Éd.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 580-587). Dublin, Ireland.
- COUTAT, S. (2005). Connaître et reconnaître les théorèmes de la géométrie. *Petit x*, (67), 12-32.
- CREEM. (1992). *Activités mathématiques avec imagiciels, classes de premières et terminales cinq volumes, volume 5 Geoplan*. CRDP de Poitou-Charentes.
- DE FREITAS, E., & SINCLAIR, N. (2013). New materialist ontologies in mathematics education: The body in/of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 83(3), 453-470.
- DIAS, T. (2009). L'apprentissage de la géométrie dans la scolarité obligatoire: une dialectique entre objets sensibles et objets théoriques. In I. Bloch & A. Pressiat (Éd.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques* (p. 43-64). La Pensée Sauvage Editions.
- DRIJVERS, P., DOORMAN, M., BOON, P., REED, H., & GRAVEMEIJER, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 213-234.
- DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne ; New York: P. Lang.
- DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.
- EDWARDS, L., RADFORD, L., & ARZARELLO, F. (Éd.). (2009). Gestures and multimodality in the construction of mathematical meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2).
- FISHBEIN, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.

- FUGLESTAD, A. B., HEALY, L., KYNIGOS, C., & MONAGHAN, J. (2010). Working with Teachers: Context and Culture. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Éd.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Vol. 13, p. 293-310). Berlin: Springer. [https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0\\_13](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_13)
- GAWLICK, T. (2004). Towards a Theory of Visualization by Dynaic Geometry Software Paradigms, Phenomena, Principles.
- GENEVÈS, B. (2004). *Vers des spécifications formelles : Fondements Mathématiques et Informatiques pour la Géométrie Dynamique* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier - Grenoble I.
- GONSETH, F. (1936). *Les mathématiques et la réalité : essai sur la méthode axiomatique*. Paris : A. Blanchard.
- GOOS, M., & SOURY-LAVERGNE, S. (2010). Teachers and teaching: theoretical perspectives and classroom implementation. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Éd.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (p. 311-328). Springer.
- GUEUDET, G., SABY, N., & SOURY-LAVERGNE, S. (2011). Usage des technologies et formation professionnelle des enseignants à l'université. *Revue internationale des technologies en pédagogie universitaire / International Journal of Technologies in Higher Education*, 9(1-2), 92-100.
- GUEUDET, G., SACRISTAN, A.-I., SOURY-LAVERGNE, S., & TROUCHE, L. (2012). Online paths in mathematics teacher training: new resources and new skills for teacher educators. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 44, 717-731. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0424-z>
- GUEUDET, G., & TROUCHE, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. *Education & Didactique*, 2(3), 7-33.
- HASPEKIAN, M. (2011). The co-construction of a mathematical and a didactical instrument. Présenté à seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7), Rzeszow, Poland.
- HEALY, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: interactions with robust and soft Cabri constructions. In T. Nakahara & M. Koyama (Éd.), *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 103-117). Hiroshima: Hiroshima University.
- HEALY, L., JAHN, A. P., & BOLITE-FRANT, J. (2009). Developing cultures of proof practices amongst Brazilian mathematics teachers. In Fou-lai Lin, Feng-Jui Hsieh, H. Gila, & M. de Villiers (Éd.), *Proof and Proving in Mathematics Education*. Taipei: National Taiwan Normal University.
- HEALY, L., & KYNIGOS, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education. *ZDM*, 42(1), 63-76. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0193-5>
- HOYLES, C., & LAGRANGE, J.-B. (Éd.). (2010). *Mathematics education and technology: rethinking the terrain: the 17th ICMI study*. New York: Springer.
- JACKIW, N. (1989). *The Geometer's Sketchpad (Computer Software)*. Berkeley: Key Curriculum Press.
- KAUR, H. (2015). Two aspects of young children's thinking about different types of dynamic triangles: prototypicality and inclusion. *ZDM Mathematics Education*.
- KORTENKAMP, U. (1999). *Foundations of Dynamic Geometry* (PhD Thesis). Swiss Federal Institute of Technology Zurich.
- KORTENKAMP, U., & LABORDE, C. (2011). Interoperable Interactive Geometry for Europe: an introduction. *ZDM*, 43(3), 321-323. <https://doi.org/DOI 10.1007/s11858-011-0340-7>
- KUZNIAK, A. (2005). L'enseignement de la géométrie en formation initiale. In *Concertum. Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques* (ARPEME, Vol. Tome 2.).
- KYNIGOS, C. (2015). Designing Constructionist New Mediations for Creative Mathematical Thinking? *Constructivist Foundations*, 10(3), 305-313.
- LABORDE, C. (2001). Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283-317.
- LABORDE, C. (2003). Technology used as a tool for mediating knowledge in the teaching of mathematics: the case of Cabri-geometry. In *Electronic Proceedings of ATCM*. Consulté à l'adresse <http://epatcm.any2any.us/EP/EP2003/index.html>
- LABORDE, C. (2004). Come la geometria dinamica puo rinnovare i processi di mediazione delle conoscenze matematiche nella scuola primaria. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Éd.), *La didattica della matematica: una scienza per la scuola* (p. 19-28). Bologna.
- LABORDE, C. (2005). Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments. In W.-C. Y. Sung-Chi Chu, Hee-Chan Lew (Éd.), *10th Asian Technology Conference in Mathematics* (p. 22-36). Cheong-Ju, South Korea: Korea: Korea National University of Education.
- LABORDE, C., & CAPPONI, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1.2), 165-210.
- LAKOFF, G., & NUNEZ, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. (Basic Books). New York.
- LEUNG, A., & BACCAGLINI-FRANK, A. (Éd.). (2016). *Digital technologies in designing mathematics education tasks*. New York, NY: Springer Berlin Heidelberg.
- LEUNG, A., BACCAGLINI-FRANK, A., & MARIOTTI, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 439-460. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9492-4>
- LEVENSON, E., TIROSH, D., & TSAMIR, P. (2011). *Preschool geometry. Theory, Research, and Practical Perspectives*. Rotterdam: Sense Publisher.
- MACKRELL, K., MASCHIETTO, M., & SOURY-LAVERGNE, S. (2013). The interaction between task design and technology design in creating tasks with Cabri Elem. In C. Margolinas (Ed.), *ICMI Study 22 Task Design in Mathematics Education* (pp. 81-90). Oxford, Royaume-Uni.
- MARGOLINAS, C. (Éd.). (2013). *ICMI Study 22 Task Design in Mathematics Education*. Oxford, Royaume-Uni.
- MARIOTTI, M.-A. (2010). Proofs, Semiotics and Artefacts of Information Technologies. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Éd.), *Explanation and proof in mathematics: philosophical and educational perspectives* (p. 169-188). New York: Springer.
- MASCHIETTO, M. (2018). Instruments de l'histoire pour enseigner et apprendre : le cas des machines mathématiques. In E. Barbin, D. Bénard, & G. Moussard (Éd.), *Les mathématiques et le réel. Expériences, instruments, investigations*. (p. 95-107). Rennes: Presses Universitaires de Rennes.

- MASCHIETTO, M., & SOURY-LAVERGNE, S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM*, 45(7), 959–971. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0533-3>
- MASCHIETTO, M., & SOURY-LAVERGNE, S. (2017). The duo “pascaline and e-pascaline”: an example of using material and digital artefacts at primary school. In E. Faggiano, F. Ferrara, & A. Montone (Éd.), *Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education* (p. 137–160). Springer.
- MITHALAL, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier, Grenoble, France. Consulté à l'adresse [tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/59/09/41/PDF/these\\_mithalal.pdf](http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/59/09/41/PDF/these_mithalal.pdf)
- MONTONE, A., FAGGIANO, E., & MARIOTTI, M. A. (2017). The design of a teaching sequence on axial symmetry, involving a duo of artefacts and exploiting the synergy resulting from alternate use of these artefacts. In *CERME 10*. Dublin, Irlande. Consulté à l'adresse [https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10\\_0475.pdf](https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0475.pdf)
- NEMIROVSKY, R., BORBA, M., DIMATTIA, C., ARZARELLO, F., ROBUTTI, O., SCHNEPP, M., ... others. (2004). PME Special Issue: Bodily activity and imagination in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 57(3), 303–321.
- NG, O.-L., & SINCLAIR, N. (2015). Young children reasoning about symmetry in a dynamic geometry environment. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 47(3), 421–434.
- NOSS, R., & HOYLES, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: learning cultures and computers*. Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers.
- OLIVERO, F. (2002). *The proving process within a dynamic geometry environment* (PhD Thesis). Graduate School of Education, Bristol.
- PAPERT, S. (1980a). *Mindstorms. Children, computers, and powerful ideas*. New York: Basic Books.
- PAPERT, S. (1980b). The Gears of My Childhood. In *indsroms: Children, computers, and powerful ideas* (Basic Books, p. XVIII–XXI). New York, NY.
- PARZYSZ, B. (1988). « Knowing » vs « seeing » Problem of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79–92.
- PERRIN-GLORIAN, M.-J., MATHE, A.-C., & LECLERCQ, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? *Repères-IREM*, 90, 5–41.
- PINET, L., & GENTAZ, É. (2008). Évaluation d'entraînements multisensoriels de préparation à la reconnaissance de figures géométriques planes chez les enfants de cinq ans : étude de la contribution du système haptique manuel. *Revue française de pédagogie*, (162), 29–44. <https://doi.org/10.4000/rfp.753>
- RABARDEL, P. (1995). *Les hommes & les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris France: Armand Colin.
- RESTREPO, A. M. (2007). L'instrumentation du déplacement dans un logiciel de géométrie dynamique. In I. Bloch. & F. Conne (Éd.), *XIV école d'été de l'ARDM*. Sainte Livrade France.
- RICHTER-GERBERT, J., & KORTENKAMP, U. (1999). The interactive geometry software Cinderella. Book & CD-ROM (Version First commercial release of the Cinderella software). Berlin: Springer-Verlag.
- ROLET, C. (2003). Teaching And Learning Plane Geometry In Primary School: Acquisition Of A First Geometrical Thinking. Présenté à CERME 3: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy. Consulté à l'adresse <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/>
- SACRISTAN, A.-I. (2017). *Technological innovations in schools: the gap between theory and practice*. Lyon, France. Consulté à l'adresse <https://ictmt13.sciencesconf.org/resource/page/id/16>
- SINCLAIR, N. (2003). Some implications of the results of a case study for the design of pre-constructed, dynamic geometry sketches and accompanying materials. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 289–317.
- SINCLAIR, N., BARTOLINI BUSSI, M. G., DE VILLIERS, M., JONES, K., KORTENKAMP, U., LEUNG, A., & OWENS, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM*, 48(5), 691–719. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6>
- SINCLAIR, N., & KAUR, H. (2011). Young children's understanding of reflectional symmetry in a dynamic geometry environment. In B. Ubuz (Éd.) (Vol. 4, p. 193–200). Présenté à 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Ankara, Turquie.
- SINCLAIR, N., & MOSS, J. (2012). The More It Changes, the More It becomes the Same: The Development of the Routine of Shape Identification in Dynamic Geometry Environment. *International Journal of Educational Research*, 51–52(3), 28–44.
- SOURY-LAVERGNE, S. (2006). Instrumentation du déplacement dans l'initiation au raisonnement déductif avec Cabri-géomètre. In N. Bednarz (Éd.), *Espace Mathématique Francophone EMF2006*. Sherbrooke Canada: Université de Sherbrooke.
- SOURY-LAVERGNE, S. (2007). Utilisation de la géométrie dynamique pour l'introduction du raisonnement déductif en sixième : instrumentation du déplacement des figures. In G. Gueudet & Y. Matheron (Éd.), *Actes du Séminaire national l'association pour la recherche en didactique des mathématiques*. Paris France.
- SOURY-LAVERGNE, S. (2011). De l'intérêt des constructions molles en géométrie dynamique. *MathemaTICE*, (27). Consulté à l'adresse <http://revue.sesamath.net/spip.php?article364>
- SOURY-LAVERGNE, S. (2017). *Duos d'artefacts tangibles et numériques et objets connectés pour apprendre et faire apprendre les mathématiques*. (HDR). ENS de Lyon, Lyon, France.
- SOURY-LAVERGNE, S., JAHN, A.-P., & TRGALOVA, J. (2011). I2Geo quality assessment process: a tool for teacher professional development? *Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 5(3), 261–275.
- SOURY-LAVERGNE, S., & MASCHIETTO, M. (2015a). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 47(3), 435–449. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0694-3>
- SOURY-LAVERGNE, S., & MASCHIETTO, M. (2015b). Number system and computation with a duo of artefacts: The pascaline and the e-pascaline. In X. Sun, B. Kaur, & J. Novotna (Éd.), *The Twenty-third ICMI Study: Primary Mathematics Study on Whole Numbers* (p. 371–378). Macau, China: ICMI.
- TALL, D., & VINNER, S. (1981). Concept Images and Concept Definitions in Mathematics With Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.

- TRGALOVA, J., JAHN, A. P., & SOURY-LAVERGNE, S. (2009). Analyse de ressources pédagogiques pour la géométrie dynamique et évaluation de leur qualité : le projet Intergeo. In *Actes du colloque de l'Espace Mathématique Francophone* (p. 922-934). Dakar Sénégal. Consulté à l'adresse <http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT6/Groupe%20N%2006.html>
- TRGALOVA, J., SOURY-LAVERGNE, S., & JAHN, A.-P. (2011). Quality assessment process for dynamic geometry resources in Intergeo project: rationale and experiments. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 43(3), 337-351.
- TROUCHE, L. (2003, novembre). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations* (Document pour l'habilitation à diriger des recherches). Paris 7, Paris, France. Consulté à l'adresse HAL. (hal-00190091)
- TROUCHE, L. (2009). Penser la gestion didactique des artefacts pour faire et faire faire des mathématiques : histoire d'un cheminement intellectuel. *Educateur*, 3, 35-38.
- TSAMIR, P., TIROSH, D., LEVENSON, E., BARKAI, R., & TABACH, M. (2015). Early-years teachers' concept images and concept definitions: Triangles, circles, and cylinders. *ZDM Mathematics Education*, (3).
- TURKLE, S., & PAPERT, S. (1992). Epistemological Pluralism and the Revaluation of the Concrete. *Journal of Mathematical Behavior*, 11(1), 3-33.
- VAN HIELE, P.-M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Orlando, FL: Academic Press.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 133-170.
- VERGNAUD, G. (2011). Au fond de l'action, la conceptualisation. In *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (p. 275-292). Paris: Presses Universitaires de France. <https://doi.org/10.3917/puf.barbi.2011.01.0275>
- VOLTOLINI, A. (2014). Un duo d'artefacts virtuel et matériel pour apprendre à construire un triangle à la règle et au compas. *Grand N*, 94, 25-46.
- VOLTOLINI, A. (2017). *Duos d'artefacts matériel et numérique pour l'apprentissage de la géométrie* (Thèse de doctorat). Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon.