



HAL
open science

UNE MESURE DE RADON INVARIANTE SUR LES F -STRATES UNIPOTENTES

Bertrand Lemaire

► **To cite this version:**

Bertrand Lemaire. UNE MESURE DE RADON INVARIANTE SUR LES F -STRATES UNIPOTENTES. 2024. hal-04788620

HAL Id: hal-04788620

<https://hal.science/hal-04788620v1>

Preprint submitted on 18 Nov 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNE MESURE DE RADON INVARIANTE SUR LES F -STRATES UNIPOTENTES

par

Bertrand Lemaire

Résumé. — Soient F un corps commutatif localement compact non archimédien et G un groupe réductif connexe défini sur F . À tout élément unipotent u de $G(F)$, on a associé en $[\mathbf{L}]$ une F -strate $\mathfrak{Y}_{F,u}$ qui est réunion (éventuellement infinie) de $G(F)$ -orbites unipotentes. On définit une mesure de Radon positive $G(F)$ -invariante non nulle « canonique » sur $\mathfrak{Y}_{F,u}$. Sous certaines hypothèses supplémentaires, on en déduit la convergence de l'intégrale orbitale associée à la $G(F)$ -orbite de u . La construction, valable en toute caractéristique, généralise celle de Deligne-Ranga Rao $[\mathbf{RR}]$ et s'applique aussi bien aux F -strates nilpotentes dans $\mathrm{Lie}(G)(F)$.

Abstract. — Let F be a non-Archimedean locally compact field and G a connected reductive group defined over F . To any unipotent element u in $G(F)$, we have associated in $[\mathbf{L}]$ an F -stratum $\mathfrak{Y}_{F,u}$ which is a (possibly infinite) union of unipotent $G(F)$ -orbits. We define a « canonical » non-zero positive $G(F)$ -invariant Radon measure on $\mathfrak{Y}_{F,u}$. Under additional assumptions, we deduce the convergence of the orbital integral associated to the $G(F)$ -orbit of u . The construction, valid in any characteristic, generalizes the one of Deligne-Ranga Rao $[\mathbf{RR}]$ and also applies to nilpotent strata in $\mathrm{Lie}(G)(F)$.

Table des matières

1. Introduction	2
1.1. Notations	2
1.2. Le théorème de Deligne-Ranga Rao ($p = 1$)	2
1.3. L'état des lieux en caractéristique $p \geq 1$	4
1.4. L'analogie du théorème de $[\mathbf{RR}]$ pour les F -strates	4
1.5. Une formule du type « intégrale orbitale » pour $I_{\mathfrak{Y}}$	5

Classification mathématique par sujets (2000). — 22E50, 22E35.

Mots clefs. — instabilité, co-caractère optimal, strate unipotente, mesure de Radon, distribution invariante, théorème de Deligne-Ranga Rao.

Ce texte est le fruit d'une collaboration avec Jean-Pierre Labesse : c'est ensemble que nous avons démontré la proposition 2.6.2 qui est le résultat technique principal de l'article. Je remercie aussi Philippe Gille et George McNinch pour avoir eu la patience de répondre à mes questions naïves.

1.6. Sur la convergence des intégrales orbitales unipotentes . . .	6
1.7. Organisation des résultats	7
2. Un résultat technique	7
2.1. Les co-caractères (F, u) -optimaux	7
2.2. Les F -lames et les F -strates	9
2.3. La théorie sur l'algèbre de Lie	9
2.4. Du groupe à l'algèbre de Lie	10
2.5. Généralisation et descente	10
2.6. Énoncé du résultat technique et premières réductions . .	11
2.7. Constructions préliminaires et rappels	16
2.8. Le cas où les $N_{\alpha, \beta}$ sont tous égaux à ± 1 ($p > 1$)	17
2.9. Le cas où F est un corps local, resp. global ($p > 1$)	19
3. Mesure de Radon invariante sur les F -strates unipotentes	23
3.1. Les objets	23
3.2. Le lemme-clé	27
3.3. Le résultat principal	28
3.4. Le cas où la $G(F)$ -orbite est ouverte dans la F -strate . .	32
3.5. Comparaison avec les résultats connus	33
3.6. Désintégration de la mesure sur la F -lame	35
3.7. Une remarque sur les corps globaux	41
Références	42

1. Introduction

1.1. Notations. — Soit F un corps commutatif d'exposant caractéristique $p \geq 1$. On fixe une clôture algébrique \overline{F} de F et on note $F^{\text{sé}p}$, resp. F^{rad} , la clôture séparable, resp. radicielle, de F dans \overline{F} . On pose $\Gamma_F = \text{Gal}(F^{\text{sé}p}/F)$. Soit G un groupe réductif connexe défini sur F . On note $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ son algèbre de Lie. Comme il est d'usage, on identifie G à $G(\overline{F})$ et \mathfrak{g} à $\mathfrak{g}(\overline{F})$.

Si F est localement compact non archimédien (non discret), ce que l'on suppose jusqu'à la fin cette introduction, on note $|\cdot|_F$ la valeur absolue normalisée sur F et on munit $G(F)$ et $\mathfrak{g}(F)$ de la topologie définie par F , appelée Top_F .

1.2. Le théorème de Deligne-Ranga Rao ($p = 1$). — On suppose dans cette sous-section que F est une extension finie de \mathbb{Q}_p . La convergence des intégrales orbitales sur $G(F)$ est un résultat connu, dû à Deligne et Ranga Rao [RR]. Grâce à la décomposition de Jordan (rationnelle puisque $p = 1$), le résultat se déduit facilement de la convergence des intégrales orbitales unipotentes.

Soit u un élément unipotent de $G(F)$. Le centralisateur $G^u(F)$ de u dans $G(F)$ est unimodulaire et l'espace quotient $G^u(F) \backslash G(F)$ est muni d'une mesure de Radon positive $G(F)$ -invariante non nulle $d\bar{g}$ (où $\bar{g} = G^u(F)g$ avec $g \in G(F)$). Il est prouvé dans loc. cit. que cette mesure $d\bar{g}$, vue comme une mesure sur la $G(F)$ -orbite

$$\mathcal{O}_{F,u} = \{g^{-1}ug \mid g \in G(F)\} \subset G(F)$$

via l'homéomorphisme $G^u(F) \backslash G(F) \rightarrow \mathcal{O}_{F,u}$, $\bar{g} \mapsto g^{-1}ug$, est une mesure de Radon positive sur $G(F)$. En d'autres termes, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, l'intégrale

$$(1) \quad \int_{G^u(F) \backslash G(F)} f(g^{-1}ug) d\bar{g}$$

est absolument convergente et définit une distribution invariante sur $G(F)$. La preuve repose sur un calcul explicite de cette distribution, que nous rappelons ci-dessous.

Puisque $p = 1$, on dispose de l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g}(F) \rightarrow G(F)$. L'élément $X \in \mathfrak{g}(F)$ tel que $u = \exp(X)$ s'insère dans un \mathfrak{sl}_2 -triplet de Jacobson-Morosov $(X, H, Y) : H$ et Y appartiennent à $\mathfrak{g}(F)$, $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$ et $[X, Y] = H$. L'élément H définit une fibration

$$\mathbb{Z} \in i \mapsto \mathfrak{g}(i) = \{Z \in \mathfrak{g} \mid [H, Z] = iZ\}$$

de \mathfrak{g} définie sur F . Ainsi $\mathfrak{p} = \sum_{i \geq 0} \mathfrak{g}(i)$ est une sous- F -algèbre parabolique de \mathfrak{g} de radical nilpotent $\mathfrak{u} = \sum_{i \geq 1} \mathfrak{g}(i)$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}(0)$ est une sous- F -algèbre de Levi de \mathfrak{p} . Soient P, U, M les sous-groupes de G (définis sur F) correspondant à $\mathfrak{p}, \mathfrak{u}$ et \mathfrak{m} . Puisque $p = 1$, le morphisme (surjectif)

$$(2) \quad G \rightarrow \text{Ad}_G(X), g \mapsto \text{Ad}_g(X)$$

est séparable ; en d'autres termes le commutant \mathfrak{g}^X de X dans \mathfrak{g} coïncide avec l'algèbre de Lie du centralisateur $G^X = G^u$ de X dans G . Or $G^X \subset P$ par conséquent $\mathfrak{g}^X \subset \mathfrak{p}$ et le F -morphisme $[X, \cdot] : \mathfrak{g}(-1) \rightarrow \mathfrak{g}(1)$ est un isomorphisme. Cela assure l'existence d'une fonction $\varphi : \mathfrak{g}(2; F) \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\varphi(X) \neq 0$ et, pour tout $X' \in \mathfrak{g}(2, F)$ et tout $m \in M(F)$, on ait

$$(3) \quad \varphi(\text{Ad}_m(X')) = |\det_F(\text{Ad}_m \mid \mathfrak{g}(1; F))|_F \varphi(X').$$

Soit K un sous-groupe ouvert compact maximal de $G(F)$ tel que $G(F) = KP(F)$. L'intégrale (1) se réécrit (pour un bon choix de mesures de Haar)

$$(4) \quad \int_{G^X(F) \backslash P(F)} f^K \circ \exp(\text{Ad}_{p^{-1}}(X)) d_r \bar{p} \quad \text{avec} \quad f^K(g) = \int_K f(k^{-1}gk) dk.$$

La séparabilité du morphisme (2) entraîne aussi que :

- l'application $M(F) \rightarrow \mathfrak{g}(2; F)$, $m \mapsto \text{Ad}_m(X)$ est submersive, par conséquent son image est un ouvert de $\mathfrak{g}(2; F)$ que l'on note $\mathcal{O}_{F,X}^M$;
- l'application $P(F) \rightarrow \mathcal{O}_{F,X}^M \oplus \mathfrak{g}_3(F)$, $p \mapsto \text{Ad}_p(X)$ est surjective, où l'on a posé $\mathfrak{g}_3(F) = \sum_{i \geq 3} \mathfrak{g}(i; F)$.

Soit Λ la distribution sur $G(F)$ définie par

$$\Lambda(f) = \int_{\mathcal{O}_{F,X}^M \times \mathfrak{g}_3(F)} \varphi(X') f^K(\exp(X' + Z)) dX' dZ.$$

La propriété (3) assure qu'elle est invariante [RR, theorem 1] : on a $\Lambda(f \circ \text{Int}_g) = \Lambda(f)$ pour tout $g \in G(F)$. Cela prouve qu'à une constante > 0 près (qui dépend du choix de φ et des mesures de Haar), l'intégrale (1) coïncide avec $\Lambda(f)^{(1)}$.

⁽¹⁾C'est un calcul analogue que nous faisons ici, valable pour $p \geq 1$, en remplaçant la $G(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,u}$ par la F -strate $\mathfrak{V}_{F,u}$ (voir 2.1 et 2.2).

1.3. L'état des lieux en caractéristique $p \geq 1$. — Pour les « bons »⁽²⁾ $p \geq 1$, les orbites géométriques nilpotentes dans $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\overline{F})$ sont décrites par le théorème de Bala-Carter. Pour $p = 1$ ou $p \gg 1$, on peut utiliser la théorie des \mathfrak{sl}_2 -triplets. Pour p seulement « bon », il faut remplacer le H du \mathfrak{sl}_2 -triplet associé à X par un co-caractère $\lambda \in \check{X}(G)$ qui destabilise X , c'est-à-dire tel que $\lim_{t \rightarrow 0} \text{Ad}_{t\lambda}(X) = 0$, et soit en certain sens meilleur que les autres ; cela a été fait d'abord par Pommerening en utilisant les co-caractères dits « associés » à X , puis par Premet en utilisant les co-caractères dits « optimaux » de la théorie de Kempf-Rousseau. Pour étudier les orbites nilpotentes rationnelles, il faut ensuite faire descendre ces résultats de \overline{F} à F . La théorie de Kempf-Rousseau se comporte très bien par descente séparable, ce qui permet en général (si $p > 1$) de se ramener à F^{rad} ; mais pas à F .

Des résultats plus fins concernant le théorème de Deligne-Ranga Rao pour $p > 1$ sont dus à George McNinch [MN]. Sous des hypothèses standard un peu moins fortes que « p très bon »⁽³⁾ mais assurant néanmoins que toutes les orbites géométriques nilpotentes sont séparables, McNinch prouve dans loc. cit. que si X est un élément nilpotent de $\mathfrak{g}(F)$, il existe un co-caractère de G qui soit à la fois associé à X et défini sur F . Il en déduit le théorème de Deligne-Ranga Rao sur la convergence des intégrales orbitales nilpotentes, resp. unipotentes (sous des hypothèses supplémentaires, via une application du type « logarithme » $G(F) \rightarrow \mathfrak{g}(F)$).

Si $p > 1$, les résultats prouvés ici redonnent ceux de McNinch [MN] pour les orbites rationnelles nilpotentes, resp. unipotentes⁽⁴⁾. Ils donnent même plus (cf. 1.6).

1.4. L'analogie du théorème de [RR] pour les F -strates. — Cette sous-section et la suivante sont valables pour $p \geq 1$, sans aucune hypothèse supplémentaire.

Soit $u \neq 1$ un (vrai) élément unipotent de $G(F)$, c'est-à-dire contenu dans le radical unipotent d'un F -sous-groupe parabolique de G . On renvoie à 2.1 et 2.2 pour les définitions des objets introduits ci-après. Soient $\lambda \in \Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$ un co-caractère (F, u) -optimal de G , $P = {}_F P_u (= P_\lambda)$ le F -sous-groupe parabolique de G associé à u , $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{F,u}$ et $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_{F,u} (= \text{Int}_{G(F)}(\mathcal{Y}_{F,u}))$ respectivement la F -lame et la F -strate associées à u . Soient aussi $k = m_{F,u} (= m_u(\lambda))$ et $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{F,u} (= G_{\lambda,k}(F))$. On prouve que pour $i = 1, \dots, k-1$, le F -endomorphisme $X \mapsto \text{Ad}_u(X) - X$ de $\mathfrak{g}(F)$ induit par restriction et passage aux quotients un isomorphisme

$$(1) \quad \mathfrak{g}_{\lambda,-i}(F)/\mathfrak{g}_{\lambda,-i+1}(F) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}_{\lambda,-i+k}(F)/\mathfrak{g}_{\lambda,-i+k+1}(F).$$

⁽²⁾Rappelons que si G est (absolument) quasi-simple, $p \geq 1$ est dit *bon* pour G si $p = 1$ ou si $p > 1$ ne divise aucun coefficient de la plus grande racine (exprimée comme combinaison linéaire de racines simples) du système de racines de G . Les *mauvais* $p > 1$ pour G sont : aucun si G est de type \mathbf{A}_l ; $p = 2$ si G n'est pas de type \mathbf{A}_l ; $p = 3$ si G est de type exceptionnel ($\mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4$ ou \mathbf{E}_*) ; $p = 5$ si G est de type \mathbf{E}_8 . Si G n'est pas quasi-simple, p est dit *bon* pour G s'il est bon pour tout sous-groupe distingué quasi-simple de G .

⁽³⁾Rappelons que $p > 1$ est dit *très bon* pour G s'il est bon pour G et si pour tout sous-groupe distingué quasi-simple de G de type \mathbf{A}_l , on a $l \not\equiv -1 \pmod{p}$.

⁽⁴⁾Pour les orbites unipotentes, on n'a pas besoin ici d'hypothèses supplémentaires car on n'utilise pas d'application logarithme pour passer de $G(F)$ à $\mathfrak{g}(F)$.

Cela assure l'existence d'une fonction

$$\varphi : \overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X}/G_{\lambda,k+1}(F) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

telle que pour tout $\bar{x} \in \overline{\mathcal{X}}$ et tout $p \in P(F)$, on ait

$$(2) \quad \varphi(\text{Int}_p(\bar{x})) = \delta_P(p)\delta_{\lambda,k}(p)^{-1}\varphi(\bar{x})$$

avec

$$\delta_{\lambda,k}(p) = |\det(\text{Ad}_p|_{\mathfrak{g}_{\lambda,k}(F)})|_F \quad \text{et} \quad \delta_P = \delta_{\lambda,1}.$$

On relève φ en une fonction $G_{\lambda,k+1}(F)$ -invariante (par translations) sur \mathcal{X} . On a

$$(3) \quad \varphi(y) \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad y \in \mathcal{Y}.$$

Fixons un sous-groupe ouvert compact maximal K de $G(F)$ tel que $G(F) = KP(F)$. Observons que la F -lampe \mathcal{Y} est (Top_F) -ouverte dans \mathcal{X} et que $\text{Int}_K(\mathcal{Y}) = \mathfrak{Y}$. Soit $I_{\mathfrak{Y}}$ la distribution sur $G(F)$ définie par

$$(4) \quad I_{\mathfrak{Y}}(f) = \int_{K \times \mathcal{Y}} \varphi(x)f(kxk^{-1}) dk dx$$

où dx est une mesure de Haar sur \mathcal{X} . Elle annule toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$ qui s'annule sur \mathfrak{Y} et comme dans [RR], la propriété (2) assure qu'elle est invariante pour la conjugaison dans $G(F)$.

1.5. Une formule du type « intégrale orbitale » pour $I_{\mathfrak{Y}}$. — Pour relier la distribution $I_{\mathfrak{Y}}$ à une formule qui ressemble à une intégrale orbitale du type 1.2 (1), il faut travailler un peu plus. Soit \mathcal{H} l'espace des fonctions localement constantes Φ sur $G(F) \times \mathcal{X}$ qui vérifient, pour tout $(g, x) \in G(F) \times \mathcal{X}$:

- $\Phi(gp, p^{-1}xp) = \delta_P(p)^{-1}\delta_{\lambda,k}(p)\Phi(g, x)$ pour tout $p \in P(F)$;
- il existe un sous-ensemble compact $\Omega_\Phi \subset G(F) \times \mathcal{X}$ tel que si $\Phi(g, x) \neq 0$, alors il existe un $p \in P(F)$ tel que $(gp, p^{-1}xp) \in \Omega_\Phi$.

On note μ la fonctionnelle linéaire positive sur \mathcal{H} définie par

$$\langle \mu, \Phi \rangle = \int_{G(F) \times \mathcal{X}} f(g, x) dg dx$$

pour une (i.e. pour toute) fonction $f \in C_c^\infty(G(F) \times \mathcal{X})$ telle que

$$\Phi(g, x) = \int_{P(F)} f(gp, p^{-1}xp)\delta_{\lambda,k}(p)^{-1} d_r p.$$

L'application continue

$$G(F) \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{Y}, (g, y) \mapsto (g, y) \mapsto gyg^{-1}$$

se quotiente en un homéomorphisme

$$(1) \quad G(F) \times^{P(F)} \mathcal{Y} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{Y}.$$

On prouve que la mesure $\mu_{\mathfrak{Y}}^\varphi$ sur $G(F) \times^{P(F)} \mathcal{Y}$ définie par

$$d\mu_{\mathfrak{Y}}^\varphi(g, y) = \varphi(y) d\mu(g, y)$$

donne via l'homéomorphisme (1) une mesure de Radon positive et $G(F)$ -invariante (pour la conjugaison) sur $G(F)$. Précisément, les mesures de Haar étant choisies de manière cohérente, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, on a

$$(2) \quad I_{\mathfrak{Y}}(f) = \int_{G(F) \times {}^{P(F)}\mathfrak{Y}} f(gyg^{-1})\varphi(y) \, d\mu(g, y).$$

1.6. Sur la convergence des intégrales orbitales unipotentes. — Supposons que la $G(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,u}$ soit ouverte dans $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_{F,u}$ (e.g si $p = 1$ ⁽⁵⁾). Alors la $P(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,u}^P = \{pup^{-1} \mid p \in P(F)\}$ est ouverte dans $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_{F,u}$, donc aussi dans $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{F,u}$, et en remplaçant \mathfrak{Y} par $\mathcal{O}_{F,u}^P$ dans la définition de $I_{\mathfrak{Y}}$ (cf. 1.4 (4)), on obtient une distribution positive $G(F)$ -invariante non nulle $I_u = I_{\mathcal{O}_{F,u}}$ sur $G(F)$:

$$I_u(f) = \int_{K \times \mathcal{O}_{F,u}^P} \varphi(x)f(kxk^{-1}) \, dk \, dx.$$

L'existence de I_u assure que le centralisateur $G^u(F)$ de u dans $G(F)$ est unimodulaire. Si dg^u est une mesure de Haar sur $G^u(F)$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, on ait

$$\int_{G^u(F) \backslash G(F)} f(g^{-1}ug) \frac{dg}{dg^u} = cI_u(f) ;$$

l'intégrale étant absolument convergente. C'est le théorème de Deligne-Ranga Rao. Ce cas particulier contient tous les cas traités dans [MN].

On prouve ici que le théorème de Deligne-Ranga Rao reste vrai sous les hypothèses plus faibles suivantes (3.6.4) :

(H1) Le centralisateur $G^u(F)$ de y dans $G(F)$ est unimodulaire.

(H2) Il existe un feuillet S pour u (dans \mathfrak{Y} relativement à l'action de $P(F)$), cf. 3.6.3.

Posons

$$\tilde{S} = \text{Int}_{P(F)}(S) \quad \text{et} \quad \mathfrak{S} = \text{Int}_K(\tilde{S}) (= \text{Int}_{G(F)}(S)).$$

D'après l'hypothèse (H2), \tilde{S} est ouvert dans \mathfrak{Y} (par suite \mathfrak{S} est ouvert dans \mathfrak{Y}) et S est fermé dans \tilde{S} . De plus l'espace $\tilde{S}/P(F) (= \mathfrak{S}/G(F))$ des $P(F)$ -orbites dans \tilde{S} est homéomorphe à S . On prouve que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$ et tout $y \in \mathfrak{S}$, l'intégrale

$$(1) \quad I_y(f) = \int_{G^y(F) \backslash G(F)} f(g^{-1}yg) \frac{dg}{dg^y}$$

est absolument convergente. De plus, en remplaçant \mathfrak{Y} par \tilde{S} dans la définition de $I_{\mathfrak{Y}}$ (cf. 1.4 (4)), on obtient une distribution positive $G(F)$ -invariante $I_{\mathfrak{S}}$ sur $G(F)$, donnée par (cf. 1.5 (2)) :

$$I_{\mathfrak{S}}(f) = \int_{G(F) \times {}^{P(F)}\tilde{S}} f(gyg^{-1})\varphi(y) \, d\mu(g, y).$$

⁽⁵⁾En effet dans ce cas, la F -strate \mathfrak{Y} est réunion *finie* de $G(F)$ -orbites, chacune d'elles étant ouverte et fermée dans \mathfrak{Y} .

On prouve qu'il existe une mesure de Radon positive non nulle η_S sur l'espace des orbites $\tilde{S}/P(F)$ telle que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, on ait

$$(2) \quad I_{\mathfrak{E}}(f) = \int_{\tilde{S}/P(F)} \varphi(y) I_y(f) d\eta_S(y).$$

On a les mêmes résultats pour les éléments nilpotents de $\mathfrak{g}(F)$.

Une remarque conjecturale pour finir. Nous ne connaissons pas d'exemple où les hypothèses (H1) et (H2) ne soient pas vérifiées. D'un autre côté le développement fin de la contribution unipotente à la formule des traces [L] devrait fournir localement des distributions invariantes qui sont des intégrales sur des ouverts ($G(F)$ -invariants) de F -strates unipotentes et pas des intégrales orbitales sur les orbites rationnelles. C'est pourquoi pour les *mauvais* p , il n'est peut-être pas nécessaire de pousser plus avant l'étude des intégrales orbitales unipotentes.

1.7. Organisation des résultats. — Dans la section 2, après des rappels sur la théorie des F -strates unipotentes et nilpotentes (2.1-2.4), on démontre que les morphismes 1.4 (1) sont des isomorphismes — le résultat technique de l'article — par la méthode des corps proches (2.9) ; on donne aussi une preuve de ce résultat valable pour F quelconque si tous les facteurs quasi-simples de G sont de type \mathbf{A}_l , \mathbf{D}_l ou de type exceptionnel \mathbf{E}_* (2.8).

La distribution $I_{\mathfrak{J}}$ fait l'objet de la section 3 ; en particulier l'égalité 1.5 (2) est obtenue en 3.3. En 3.4, on traite le cas où l'orbite rationnelle est ouverte dans la F -strate. Ce cas particulier nous permet en 3.5 de comparer nos résultats avec ceux déjà connus [RR, MN]. En 3.6, sous les hypothèses (H1) et (H2), on prouve la convergence des intégrales orbitales unipotentes 1.6 (1) ainsi que la formule 1.6 (2). Enfin 3.7 contient une remarque sur le cas des corps globaux qui sera utile pour la suite de notre travail sur la formule des traces.

2. Un résultat technique

Dans cette section, F est un corps commutatif quelconque et la topologie est celle de Zariski ; à l'exception de 2.9 où F est un corps localement compact non archimédien et la topologie est celle définie par F (Top_F). Le résultat technique en question est la proposition 2.6.2. Il convient de lire cette section avec [L] sous la main.

2.1. Les co-caractères (F, u) -optimaux. — On a développé dans [L] une théorie des F -lames et des F -strates unipotentes de $G(F)$ basée sur les travaux de Kempf-Rousseau [K, R] et Hesselink [H1, H2]. Jusqu'en 2.5, on rappelle les principaux résultats de cette théorie.

On fixe une F -norme G -invariante $\|\cdot\|$ sur $\check{X}(G)$ (cf. [L, 2.2]). Pour chaque tore maximal T de G défini sur F , on dispose donc d'une forme bilinéaire symétrique définie positive $(\cdot, \cdot) : \check{X}(T) \times \check{X}(T) \rightarrow \mathbb{Z}$ qui est invariante par l'action du groupe de Weyl $W^G(T) = N^G(T)/T$ et par celle du groupe de Galois Γ_F . On étend $\|\cdot\|$ à $\check{X}(G)_{\mathbb{Q}}$ (cf. [L, 2.4]) et (\cdot, \cdot) à $\check{X}(T)_{\mathbb{Q}} = \check{X} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ par conjugaison et linéarité.

Soit $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^G$ la sous-variété fermée de $G = G(\overline{F})$ formée des éléments unipotents. Soit ${}_F\mathfrak{U} = {}_F\mathfrak{U}^G$ le sous-ensemble de \mathfrak{U} formé des éléments qui sont contenus dans le radical unipotent d'un F -sous-groupe parabolique de G , et soit $\mathfrak{U}_F = G(F) \cap {}_F\mathfrak{U}$ l'ensemble des (vrais) éléments unipotents de $G(F)$. L'inclusion $\mathfrak{U}_F \subset \mathfrak{U}(F)$ est en général stricte.

Pour $\lambda \in \check{X}(G)$, on note :

- P_λ l'ensemble des $g \in G$ tels que la limite $\lim_{t \rightarrow 0} t^\lambda g t^{-\lambda}$ existe⁽⁶⁾ ;
- $U_\lambda = U_{P_\lambda}$ l'ensemble des $g \in G$ tels que $\lim_{t \rightarrow 0} t^\lambda g t^{-\lambda} = 1$;
- M_λ le centralisateur de $\text{Im}(\lambda)$ dans G .

Ainsi P_λ est un sous-groupe parabolique de G de radical unipotent U_λ et M_λ est une composante de Levi de P_λ : on a $P_\lambda = M_\lambda \times U_\lambda$. Pour $u \in G \setminus \{1\}$ et $\mu \in \check{X}(G)$ tels que $u \in U_\lambda$, la fibre schématique au-dessus de 1 du prolongement à \mathbb{G}_a du morphisme $\mathbb{G}_m \rightarrow G$, $t \mapsto t^\lambda u t^{-\lambda}$ est d'algèbre affine $\overline{F}[T]/(T^m)$ pour un entier $m > 0$; on pose $m_u(\lambda) = m$ et $\rho_u(\lambda) = \frac{m_u(\lambda)}{\|\lambda\|}$.

À tout élément $u \in \mathfrak{U}(F) \setminus \{1\}$ sont associés comme suit

- un sous-ensemble $\Lambda_{F,u}^{\text{opt}} \subset \check{X}_F(G)$;
- un invariant $m_{F,u} \in \mathbb{N}^*$;
- un F -sous-groupe parabolique ${}_F P_u$ de G .

Un co-caractère $\lambda \in \check{X}(G)$ est dit *primitif* s'il n'existe aucun co-caractère $\lambda' \in \check{X}(G)$ tel que $\lambda = k\lambda'$ avec $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Un co-caractère primitif $\lambda \in \check{X}_F(G)$ est dit (F, u) -*optimal* si $u \in U_\lambda$ et si pour tout $\mu \in \check{X}_F(G)$ tel que $u \in U_\mu$, on a $\rho_u(\mu) \leq \rho_u(\lambda)$. On note $\Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$ l'ensemble des co-caractères (F, u) -optimaux. L'invariant $m_u(\lambda)$ et le F -sous-groupe parabolique P_λ de G ne dépendent pas de $\lambda \in \Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$; on les note $m_{F,u}$ et ${}_F P_u$, et on pose ${}_F U_u = U_\lambda$. Observons que, bien que l'ensemble $\Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$ et le groupe ${}_F P_u$ soient définis via le choix de la F -norme G -invariante $\|\cdot\|$, ils n'en dépendent pas. De plus, l'ensemble $\Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$ forme une seule orbite sous l'action du sous-groupe parabolique ${}_F P_u = {}_F P_u(F)$ de $G(F)$; précisément, $\Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$ est un espace principal homogène sous l'action de $U_{F,u} = {}_F U_u(F)$. Un tore F -déployé maximal A de G est dit (F, u) -*optimal* s'il est contenu dans ${}_F P_u$; pour un tel A , on a $\check{X}(A) \cap \Lambda_{F,u}^{\text{opt}} = \{\lambda'\}$ et $M_{\lambda'}$ est une composante de Levi de ${}_F P_u$ définie sur F . Enfin on note

$$\mathbf{\Lambda}_{F,u} = \left\{ \frac{\lambda}{m_u(\lambda)} \mid \lambda \in \Lambda_{F,u}^{\text{opt}} \right\} \subset \check{X}_F(G)_\mathbb{Q}$$

l'ensemble des co-caractères virtuels (F, u) -optimaux normalisés.

On peut définir $\mathbf{\Lambda}_{F,u}$ directement de la manière suivante. Pour $\mu \in \check{X}(G)_\mathbb{Q}$, on choisit un $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = r\mu \in \check{X}(G)$. Posons $P_\mu = P_\lambda$ et pour $u' \in U_\mu = U_\lambda$, posons $m_{u'}(\mu) = \frac{1}{r} m_{u'}(\lambda)$. Ces définitions ne dépendent pas du choix de r et l'on a $\frac{m_{u'}(\mu)}{\|\mu\|} = \frac{m_{u'}(\lambda)}{\|\lambda\|} = \rho_{u'}(\lambda)$. On voit donc que $\mathbf{\Lambda}_{F,u}$ est l'ensemble des $\mu \in \check{X}_F(G)_\mathbb{Q}$ tels que $u \in U_\mu$, $m_u(\mu) \geq 1$ et $\|\mu\|$ soit minimal pour ces conditions ; si $\mu \in \mathbf{\Lambda}_{F,u}$, on a forcément $m_u(\mu) = 1$.

⁽⁶⁾i.e. tels que le morphisme $\mathbb{G}_m \rightarrow G$, $t \mapsto t^\lambda g t^{-\lambda}$ se prolonge, de manière nécessairement unique, en un morphisme de $\mathbb{G}_a \rightarrow G$.

Il est commode d'étendre ces définitions à $u = 1$: on pose $\Lambda_{F,1}^{\text{opt}} = \Lambda_{F,1} = \{0\}$, $m_{F,1} = m_1(0) = +\infty$ et ${}_F P_1 = G$.

2.2. Les F -lames et les F -strates. — Tout co-caractère $\lambda \in \check{X}(G)$ définit une filtration $(G_{\lambda,i})_{i \in \mathbb{N}}$ de G , cf. [L, 2.4]. Si λ est défini sur F , ces filtrations le sont aussi. On a toujours $P_\lambda = G_{\lambda,0}$ et $U_\lambda = G_{\lambda,1}$. Pour $u \in U_\lambda$, on a

$$m_u(\lambda) = \inf\{i \in \mathbb{N}^* \mid u \in G_{\lambda,i}\}.$$

À tout élément $u \in \mathfrak{U}_F \setminus \{1\}$ sont associées une F -lame $\mathcal{Y}_{F,u}$ et une F -strate $\mathfrak{Y}_{F,u}$ (de \mathfrak{U}_F) :

$$\mathcal{Y}_{F,u} = \{u' \in \mathfrak{U}_F \mid \Lambda_{F,u'} = \Lambda_{F,u}\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Y}_{F,u} = \text{Int}_{G(F)}(\mathcal{Y}_{F,u}).$$

En d'autres termes, $\mathfrak{Y}_{F,u}$ est l'ensemble des $u' \in \mathfrak{U}_F$ tels que $\Lambda_{F,u'} = \text{Int}_g \circ \Lambda_{F,u}$ pour un $g \in G(F)$. Les F -strates sont donc les classes de $G(F)$ -conjugaison de F -lames. On définit aussi des sous-ensembles $\mathcal{X}_{F,u}$ et $\mathfrak{X}_{F,u}$ de \mathfrak{U}_F tels que $\mathcal{Y}_{F,u} \subset \mathcal{X}_{F,u}$ et $\mathfrak{Y}_{F,u} \subset \mathfrak{X}_{F,u}$. Pour cela on choisit un $\lambda \in \Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$ et on pose $k = m_u(\lambda)$; alors

$$\mathcal{X}_{F,u} = G_{\lambda,k}(F) \quad \text{et} \quad \mathfrak{X}_{F,u} = \text{Int}_{G(F)}(\mathcal{X}_{F,u}).$$

D'après [L, 3.4.4], on a

$$\mathcal{Y}_{F,u} G_{\lambda,k+1}(F) = G_{\lambda,k+1}(F) \mathcal{Y}_{F,u} = \mathcal{Y}_{F,u}.$$

Pour $u = 1$, on pose $\mathfrak{Y}_{F,1} = \mathcal{Y}_{F,1} = \{1\}$ et $\mathfrak{X}_{F,1} = \mathcal{X}_{F,1} = \{1\}$.

Il n'y a qu'un nombre fini de F -strates $\mathfrak{Y}_{F,u}$ avec $u \in \mathfrak{U}_F$ et elles sont deux-à-deux disjointes.

2.3. La théorie sur l'algèbre de Lie. — On a la même théorie pour $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ muni de l'action adjointe de G . Pour $\lambda \in \check{X}(G)$, on pose

$$\mathfrak{p}_\lambda = \text{Lie}(G_\lambda), \quad \mathfrak{u}_\lambda = \text{Lie}(U_\lambda) \quad \text{et} \quad \mathfrak{m}_\lambda = \text{Lie}(M_\lambda).$$

Soit $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^G$ la sous-variété fermée de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\overline{F})$ formée des éléments nilpotents. On note ${}_F \mathfrak{N} = {}_F \mathfrak{N}^G$ le sous-ensemble de \mathfrak{N} formé des éléments qui sont contenus dans le radical nilpotent d'une sous- F -algèbre parabolique de \mathfrak{g} , et on pose $\mathfrak{N}_F = {}_F \mathfrak{N} \cap \mathfrak{g}(F)$. Pour $X \in \mathfrak{N}_F$, on définit comme en 2.1 le sous-ensemble $\Lambda_{F,X}^{\text{opt}} \subset \check{X}_F(G)$, l'invariant $m_{F,X} \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et le F -sous-groupe parabolique ${}_F P_X$; ainsi que le sous-ensemble $\Lambda_{F,X} = \frac{1}{m_{F,X}} \Lambda_{F,X}^{\text{opt}} \subset \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}}$.

Pour $\lambda \in \check{X}(G)$, on définit comme suit une filtration P_λ -invariante $(\mathfrak{g}_{\lambda,i})_{i \in \mathbb{Z}}$ de \mathfrak{g} , définie sur F si λ l'est. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\mathfrak{g}_{\lambda,i} = \bigoplus_{j \geq i} \mathfrak{g}_\lambda(j) \quad \text{avec} \quad \mathfrak{g}_\lambda(i) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{Ad}_{t^\lambda}(X) = t^i X, \forall t \in \mathbb{G}_m\};$$

l'espace quotient $\mathfrak{g}_{\lambda,i}/\mathfrak{g}_{\lambda,i+1}$ s'identifie naturellement à $\mathfrak{g}_\lambda(i)$. On a toujours $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{g}_{\lambda,0}$, $\mathfrak{u}_\lambda = \mathfrak{g}_{\lambda,1}$ et $\mathfrak{m}_\lambda = \mathfrak{g}_\lambda(0)$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{g}_\lambda(i)$ est un sous-espace M_λ -invariant de \mathfrak{g} , défini sur F si λ l'est ; et pour $i \in \mathbb{N}$, on a $\mathfrak{g}_{\lambda,i} = \text{Lie}(G_{\lambda,i})$.

Pour $X \in \mathfrak{N}_F$, on définit comme en 2.2 les sous-ensembles $\mathscr{Y}_{F,X} \subset \mathscr{X}_{F,X}$ et $\mathfrak{Y}_{F,X} \subset \mathfrak{X}_{F,X}$ de \mathfrak{N}_F . Pour $X \in \mathfrak{N}_F \setminus \{0\}$, $\lambda \in \Lambda_{F,X}^{\text{opt}}$ et $k = m_X(\lambda)$, on a [L, 2.7.7]

$$\mathscr{Y}_{F,X} + \mathfrak{g}_{\lambda,k+1}(F) = \mathscr{Y}_{F,X}.$$

Comme pour les F -strates de \mathfrak{U}_F , il n'y a qu'un nombre fini de F -strates de \mathfrak{N}_F et elles sont deux-à-deux disjointes.

2.4. Du groupe à l'algèbre de Lie. — Soit P_0 un F -sous-groupe parabolique minimal de G . Notons $U_0 = U_{P_0}$ son radical unipotent. Observons que

$$\mathfrak{U}_F = \text{Int}_{G(F)}(U_0(F)) \quad \text{et} \quad \mathfrak{N}_F = \text{Ad}_{G(F)}(\mathfrak{u}_0(F)).$$

Soit M_0 une composante de Levi de P_0 définie sur F et soit A_0 le tore F -déployé maximal dans le centre de M_0 . On sait qu'il existe un F -isomorphisme de variétés algébriques (cf. [L, 3.4])

$$j_0 : \mathfrak{u}_0 = \text{Lie}(U_0) \rightarrow U_0$$

compatible à l'action de A_0 , c'est-à-dire tel que $j_0(\text{Ad}_a(X)) = \text{Int}_a(j(X))$ pour tout $a \in A_0$ et tout $X \in \mathfrak{u}_0$. On note $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{A_0} \subset X(A_0)$ l'ensemble des racines de A_0 dans G , $\mathcal{R}^+ \subset \mathcal{R}$ le sous-ensemble formé des racines dans P_0 et $\Delta \subset \mathcal{R}^+$ la base formée des racines simples.

Un élément $u \in \mathfrak{U}_F$ est dit *en position standard* si ${}_F P_u \supset P_0$. Observons que si u est en position standard, alors u appartient à $U_0(F)^{(7)}$ et tout élément de la F -lame $\mathscr{Y}_{F,u}$ est en position standard ; auquel cas on dit que $\mathscr{Y} = \mathscr{Y}_{F,u}$ ($\subset U_0(F)$) est une F -lame *standard*. Tout élément de \mathfrak{U}_F est $G(F)$ -conjugué à un élément en position standard et toute F -strate de \mathfrak{U}_F contient une unique F -lame standard. Les mêmes définitions s'appliquent aux éléments de \mathfrak{N}_F .

D'après [L, 3.4.5], l'application j_0 induit une bijection entre les F -lames standard de \mathfrak{U}_F et les F -lames standard de \mathfrak{N}_F . Cette bijection ne dépend pas de j_0 : pour $X \in \mathfrak{N}_F$ en position standard, on a $\Lambda_{F,j_0(X)} = \Lambda_{F,X}$. On en déduit que pour $X \in \mathfrak{N}_F$ (en position standard ou non), l'ensemble

$$\mathfrak{Y}_{F,X}^G \stackrel{\text{déf}}{=} \{u \in \mathfrak{U}_F \mid \exists g \in G(F) \text{ tel que } \Lambda_{F,u} = \text{Int}_g \circ \Lambda_{F,X}\}$$

est une F -strate de \mathfrak{U}_F qui ne dépend que de la F -strate $\mathfrak{Y}_{F,X}$ de \mathfrak{N}_F . Cela fournit une bijection naturelle entre les F -strates de \mathfrak{N}_F et celles de \mathfrak{U}_F [L, 3.4.8]. C'est d'ailleurs grâce à cette bijection que certains résultats pour les F -strates de \mathfrak{U}_F ont été prouvés, à partir des résultats analogues pour les F -strates de \mathfrak{N}_F .

2.5. Généralisation et descente. — Ces théories (sur G et sur \mathfrak{g}) sont deux cas particuliers d'une théorie plus générale, valable pour toute G -variété algébrique affine pointée (V, e_V) définie sur F , avec $e_V \in V(F)$, cf. [L, 2.4, 2.5] ; le cas d'un G -module $(V, e_V = 0)$ défini sur F généralisant celui de \mathfrak{g} .

Un élément $v \in V(F)$ est dit (F, G) -*instables* s'il existe un co-caractère $\lambda \in \check{X}_F(G)$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0} t^\lambda \cdot v = e_V$; et il est dit (F, G) -*semi-stable* sinon, c'est-à-dire si pour tout

⁽⁷⁾Cette condition n'est pas suffisante : pour que $u \in U_0(F)$ soit en position standard, il faut et il suffit que le tore A_0 soit (F, u) -optimal et que le co-caractère λ défini par $\check{X}(A_0) \cap \Lambda_{F,u}^{\text{opt}} = \{\lambda\}$ vérifie l'inclusion $P_\lambda \supset P_0$.

$\lambda \in \check{X}_F(G)$ tel que la $\lim_{t \rightarrow 0} t^\lambda \cdot v$ existe, cette limite n'est pas e_V . On note $\mathcal{N}_F^G(V, e_V)$ l'ensemble des éléments (F, G) -instables de $V(F)$. Pour $v \in \mathcal{N}_F^G(V, e_V)$, on définit comme plus haut ${}_F P_v$, $\mathbf{\Lambda}_{F,v}$ (etc.), et les sous-ensembles $\mathcal{Y}_{F,v}$ et $\mathfrak{Y}_{F,v} = G(F) \cdot \mathcal{Y}_{F,v}$ de $\mathcal{N}_F^G(V, e_V)$. L'une des propriétés fondamentales de la théorie est la *descente séparable* [H1, 5.5] (cf. [L, 2.3.11] pour la version non algébrique), [L, 2.5.18, 2.5.19] :

PROPOSITION 2.5.1. — *Soit $v \in \mathcal{N}_F^G(V, e_V)$. Soit E/F une extension séparable (algébrique ou non) telle que $(E^{\text{sép}})^{\text{Aut}_F(E^{\text{sép}})} = F^{(8)}$.*

- (i) $\mathbf{\Lambda}_{F,v} = \check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_{E,v}$; en particulier ${}_E P_v = {}_F P_v \times_F E$.
- (ii) $\mathcal{Y}_{F,v} = V(F) \cap \mathcal{Y}_{E,v}$ et $\mathfrak{Y}_{F,v} = V(F) \cap \mathfrak{Y}_{E,v}$.

Il convient aussi, quand c'est possible, de comparer la théorie sur F avec la théorie géométrique, c'est-à-dire sur \overline{F} (si $p = 1$, cette comparaison est donnée par 2.5.1). Pour $F = \overline{F}$, on supprimera l'indice F dans les définitions précédentes : $P_u = \overline{F} P_u$, $\mathbf{\Lambda}_u = \mathbf{\Lambda}_{\overline{F},u}$, etc. On dira $G (= G(\overline{F}))$ -instable, resp. G -semi-stable, au lieu de (\overline{F}, G) -stable, resp. (\overline{F}, G) -semi-stable. Pour $v \in \mathcal{N}_F^G(V, e_V)$, l'intersection $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v$ peut être vide ; si elle est non vide, alors elle coïncide avec $\mathbf{\Lambda}_{F,v}$ et on a $\mathcal{Y}_{F,v} = \mathcal{Y}_v(F)$.

Cela nous amène à considérer l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 2.5.2. — *Pour tout $v \in \mathcal{N}_F^G(V, e_V)$, on a $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_v \neq \emptyset$.*

Si l'hypothèse 2.5.2 est vérifiée, alors pour tout $v \in \mathcal{N}_F^G(V, e_V)$, on a [L, 2.6.13]

$$\mathfrak{Y}_{F,v} = \mathcal{N}_F^G(V, e_V) \cap \mathfrak{Y}_v(F) ;$$

cela fournit une bijection entre les strates (géométriques) de $\mathcal{N}^G(V, e_V)$ qui intersectent $\mathcal{N}_F^G(V, e_V)$ et les F -strates de $\mathcal{N}_F^G(V, e_V)$.

Nous savons que pour $V = (G, e_G = 1)$ muni de l'action par conjugaison et pour $V = (\mathfrak{g}, e_{\mathfrak{g}} = 0)$ muni de l'action adjointe, l'hypothèse 2.5.2 est vérifiée dans les cas suivants :

- $p = 1$ ou $p > 1$ est très bon pour G ;
- F est un corps local (i.e. localement compact, non discret) ;
- F est un corps global.

2.6. Énoncé du résultat technique et premières réductions. — On suppose jusqu'à la fin de la section 2 que l'hypothèse 2.5.2 est vérifiée pour $V = G$ muni de l'action par conjugaison : pour tout $u \in \mathfrak{U}_F$, on a $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_u \neq \emptyset$. D'après [L], elle l'est alors aussi pour $V = \mathfrak{g}$ muni de l'action adjointe : pour tout $X \in \mathfrak{N}_F$, on a $\check{X}_F(G)_{\mathbb{Q}} \cap \mathbf{\Lambda}_X \neq \emptyset$.

Pour $u \in \mathfrak{U}$, on note G^u le centralisateur schématique u dans G et on pose

$$\mathfrak{g}^u = \ker\{\text{Ad}_u - \text{Id} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}\}.$$

On a toujours l'inclusion $\text{Lie}((G^u)^{\text{réd}}) \subset \mathfrak{g}^u$ où $(G^u)^{\text{réd}}$ est le centralisateur schématique réduit de u dans G (correspondant au quotient de l'algèbre affine $F[G^u]$ par

⁽⁸⁾Cette égalité est toujours vérifiée si E/F est algébrique ou de degré de transcendance infini, e.g. si E est le complété F_ν d'un corps global F en une place ν de F .

son nil-radical) que l'on identifie au centralisateur de u dans G au sens de Borel [B]. Cette inclusion est une égalité si et seulement si le morphisme

$$\pi_u : G \rightarrow \text{Int}_G(u), g \mapsto gug^{-1}$$

est séparable, auquel cas on dit que u est *séparable* (cf. [L, 2.1]). Pour $u \in \mathfrak{U}_F$ et $\lambda \in \Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$, puisque λ appartient à $\Lambda_{F^{\text{sep}},u}^{\text{opt}}$ (2.5.1), on a toujours l'inclusion

$$G^u(F^{\text{sep}}) \subset P_{F^{\text{sep}},u} = P_\lambda(F^{\text{sep}}).$$

Si de plus u est séparable, alors $G^u = (G^u)^{\text{red}}$ (cf. [B, ch. II, 6.7]), i.e. G^u « est » un groupe algébrique linéaire, et on a l'inclusion $G^u \subset P_\lambda$ (d'après [B, ch. AG, 13.3]). Posons

$$\mathfrak{p}_{F,u} = \mathfrak{p}_\lambda(F) (= \text{Lie}({}_F P_u)(F)).$$

Observons que si u est séparable, alors $\mathfrak{g}^u = \text{Lie}(G^u) \subset \mathfrak{p}_\lambda$ et donc $\mathfrak{g}^u(F) \subset \mathfrak{p}_{F,u}$.

REMARQUE 2.6.1. — Nous ne savons pas si l'inclusion $\mathfrak{g}^u(F) \subset \mathfrak{p}_{F,u}$ est vraie en général, c'est-à-dire pour les éléments u qui ne sont pas séparables ; de toutes façons nous n'aurons besoin que de la version graduée 2.6.2 de cette inclusion. En revanche nous savons que pour $Y \in \mathfrak{N}_F \setminus \{0\}$, le centralisateur

$$\mathfrak{g}^Y(F) = \{X \in \mathfrak{g}(F) \mid [Y, X] = 0\}$$

de Y dans $\mathfrak{g}(F)$ peut ne pas être contenu dans $\mathfrak{p}_{F,Y} = \text{Lie}({}_F P_Y)(F)$ (cf. 2.6.11).

D'après les relations de commutateurs de Chevalley, pour $\lambda \in \check{X}_F(G)$ et $x \in G_{\lambda,k}$ avec $k \in \mathbb{N}$, le morphisme linéaire $\text{Ad}_x - 1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ envoie $\mathfrak{g}_{\lambda,i}$ dans $\mathfrak{g}_{\lambda,k+i}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Par restriction et passage au quotient, il induit donc, pour chaque $i \in \mathbb{Z}$, un morphisme linéaire

$$\eta_{\lambda,x}(i) : \mathfrak{g}_\lambda(i) \rightarrow \mathfrak{g}_{\lambda,k+i}/\mathfrak{g}_{\lambda,k+i+1} = \mathfrak{g}_\lambda(k+i)$$

qui ne dépend que de l'image \bar{x} de x dans

$$G_\lambda(k) \stackrel{\text{déf}}{=} G_{\lambda,k}/G_{\lambda,k+1}.$$

Si $x \in G_{\lambda,k}(F)$, ou plus généralement si $\bar{x} \in G_\lambda(k; F)$, alors $\eta_{\lambda,x}(i)$ est défini sur F et induit un morphisme F -linéaire

$$\eta_{\lambda,x}(i; F) : \mathfrak{g}_\lambda(i; F) \rightarrow \mathfrak{g}_{\lambda,k+i}(F)/\mathfrak{g}_{\lambda,k+i+1}(F) = \mathfrak{g}_\lambda(k+i; F).$$

La proposition suivante est le résultat technique principal de l'article.

PROPOSITION 2.6.2. — (On suppose que l'hypothèse 2.5.2 est vérifiée pour G .) Soient $u \in \mathfrak{U}_F \setminus \{1\}$, $\lambda \in \Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$ et $k = m_u(\lambda) > 0$. Pour $i = 1, \dots, k-1$, on a l'inclusion

$$\{X \in \mathfrak{g}_{\lambda,-i}(F) \mid \text{Ad}_u(X) - X \in \mathfrak{g}_{\lambda,k-i+1}(F)\} \subset \mathfrak{g}_{\lambda,-i+1}(F);$$

en d'autres termes, le morphisme $\eta_{\lambda,x}(-i; F)$ est injectif.

On ne démontrera 2.6.2 que dans les cas particuliers suivants, le cas général pouvant être considéré comme conjectural :

- $p = 1$ ou $p > 1$ est très bon pour G ;

- les sous-groupes (absolument) quasi-simples de G sont tous de type \mathbf{A}_l , \mathbf{D}_l ou de type exceptionnel E_* (de manière équivalente, les entiers $N_{\alpha,\beta}$ des formules de commutateurs de Chevalley sont tous égaux à ± 1 , cf. 2.6.8) ;
- F est un corps local (i.e. localement compact, non discret) ou un corps global.

Ces cas sont non exclusifs l'un de l'autre. Observons que dans le premier et le troisième cas, l'hypothèse 2.5.2 est automatiquement vérifiée. La démonstration de 2.6.2 occupera la suite de 2.6 ainsi que les sous-sections 2.8 et 2.9.

REMARQUE 2.6.3. — Le cas qui nous servira ici est celui où F est un corps local non archimédien de caractéristique $p > 1$. Il sera traité en 2.9 par la méthode des corps proches, qui n'est pas généralisable à d'autres corps. En revanche la méthode utilisée dans le deuxième cas (cf. 2.8) est sans doute généralisable, du moins si les constantes $N_{\alpha,\beta}$ des formules de commutateurs de Chevalley sont toutes inversibles dans F (cf. 2.6.8 (iii)) ; et sinon, elle pourrait fournir des contres-exemples.

Observons que l'injectivité de tous les F -morphisms $\eta_{\lambda,u}(-i; F)$ ($i = 1, \dots, k-1$) équivaut à leur surjectivité :

LEMME 2.6.4. — Soient $u \in \mathfrak{U}_F \setminus \{1\}$, $\lambda \in \Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$ et $k = m_u(\lambda) > 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour $i = 1, \dots, k-1$, le morphisme $\eta_{\lambda,u}(-i; F)$ est injectif ;
- (ii) pour $i = 1, \dots, k-1$, le morphisme $\eta_{\lambda,u}(-i; F)$ est surjectif ;
- (iii) pour $i = 1, \dots, k-1$, le morphisme $\eta_{\lambda,u}(-i; F)$ est un isomorphisme.

Si les trois conditions équivalentes ci-dessus sont vérifiées, on a en particulier

$$\dim_F(\mathfrak{g}_\lambda(-i; F)) = \dim_F(\mathfrak{g}_\lambda(k-i; F)) \quad \text{pour } i = 1, \dots, k-1.$$

Démonstration. — Pour $i \in \mathbb{Z}$, posons $d_i = \dim_F(\mathfrak{g}_\lambda(i; F))$. Pour $i \neq 0$, notons $\mathcal{R}_\lambda(i)$ l'ensemble des $\alpha \in \mathcal{R}$ tels que $\langle \alpha, \lambda \rangle = i$; on a donc $d_i = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_\lambda(i)} \dim_F(\mathfrak{u}_\alpha(F))$ où $\mathfrak{u}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ est le sous-espace radiciel associé à α . Puisque $\mathcal{R}_\lambda(-i) = \mathcal{R}_{-\lambda}(i)$ et $\dim_F(\mathfrak{u}_\alpha(F)) = \dim_F(\mathfrak{u}_{-\alpha}(F))$, on a $d_{-i} = d_i$. Par conséquent

$$\sum_{i=1}^{k-1} d_{-i} = \sum_{i=1}^{k-1} d_{k-i}.$$

Cela entraîne que si l'une des deux premières conditions de l'énoncé est vérifiée, alors l'autre l'est aussi. \square

La proposition suivante est la version nilpotente de 2.6.2 :

PROPOSITION 2.6.5. — (On suppose que l'hypothèse 2.5.2 est vérifiée pour \mathfrak{g} .) Soient $\lambda \in \check{X}(A_0)$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $Y \in \mathfrak{g}_\lambda(k; F)$ tels que $\lambda \in \Lambda_{F,Y}^{\text{opt}}$. Pour $i = 1, \dots, k-1$, on a

$$\mathfrak{g}^Y(F) \cap \mathfrak{g}_\lambda(-i; F) = \{0\} ;$$

en d'autres termes, le morphisme $[Y, \cdot] : \mathfrak{g}_\lambda(-i; F) \rightarrow \mathfrak{g}_\lambda(k-i; F)$ est injectif.

Là encore, on ne démontrera pas 2.6.5 en général mais seulement dans les cas particuliers indiqués plus haut. On a aussi la version nilpotente de 2.6.4 :

LEMME 2.6.6. — Soient $\lambda \in \check{X}(A_0)$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $Y \in \mathfrak{g}_\lambda(k; F)$ tels que $\lambda \in \Lambda_{F,Y}^{\text{opt}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour $i = 1, \dots, k-1$, on a $\mathfrak{g}^Y(F) \cap \mathfrak{g}_\lambda(-i; F) = \{0\}$;
- (ii) pour $i = 1, \dots, k-1$, on a $[Y, \mathfrak{g}_\lambda(-i; F)] = \mathfrak{g}_\lambda(k-i; F)$;
- (iii) pour $i = 1, \dots, k-1$, le morphisme $[Y, \cdot] : \mathfrak{g}_\lambda(-i; F) \rightarrow \mathfrak{g}_\lambda(k-i; F)$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Elle est identique à celle de 2.6.6. \square

Pour démontrer 2.6.2, nous verrons qu'il suffit de démontrer 2.6.5, ou ce qui revient au même 2.6.6 (ii), dans le cas où G est F -déployé. Avant cela, prouvons 2.6.5 dans le cas facile suivant :

LEMME 2.6.7. — Soient $\lambda \in \check{X}(A_0)$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $Y \in \mathfrak{g}_\lambda(k; F)$ tels que $\lambda \in \Lambda_{F,Y}^{\text{opt}}$. Si Y est séparable, c'est-à-dire si le morphisme $G \rightarrow \text{Ad}_G(Y)$, $g \mapsto \text{Ad}_g(Y)$ est séparable (e.g. si $p = 1$), alors

$$\mathfrak{g}^Y(F) \cap \mathfrak{g}_\lambda(-i; F) = \{0\} \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{N}^* .$$

Démonstration. — Supposons Y séparable. Dans ce cas on a l'égalité $\mathfrak{g}^Y = \text{Lie}(G^Y)$. Comme d'autre part (d'après 2.5.1) on a l'inclusion $G^Y(F^{\text{sép}}) \subset P_{F^{\text{sép}}, Y} = P_\lambda(F^{\text{sép}})$, on en déduit l'inclusion $\mathfrak{g}^Y \subset \mathfrak{p}_\lambda$ (cf. le début de 2.6). D'où le lemme. \square

Soient $u \in \mathfrak{U}_F \setminus \{1\}$, $\lambda \in \Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$ et $k = m_u(\lambda) > 0$. Supposons que l'on a démontré 2.6.2 dans le cas où le groupe G est F -déployé. Soit E/F une sous-extension finie de $F^{\text{sép}}/F$ déployant G . Puisque $u \in \mathfrak{U}_E$ et $\lambda \in \Lambda_{E,u}^{\text{opt}}$ (2.5.1), pour $i = 1, \dots, k-1$, le morphisme

$$\eta_{\lambda,u}(-i; E) : \mathfrak{g}_\lambda(-i; E) \rightarrow \mathfrak{g}_{\lambda, k-i}(E) / \mathfrak{g}_{\lambda, k-i+1}(E) = \mathfrak{g}_\lambda(k-i; E)$$

est injectif ; il induit par restriction le morphisme $\eta_{\lambda,u}(-i; F)$, qui est lui aussi injectif.

On peut donc supposer que G est F -déployé. On peut aussi supposer u en position standard et $\lambda \in \check{X}(A_0)$, c'est-à-dire $\Lambda_{F,u}^{\text{opt}} \cap \check{X}(A_0) = \{\lambda\}$.

Rappelons que le F -isomorphisme $j_0 : \mathfrak{u}_0 \rightarrow U_0$ compatible à l'action de A_0 a été construit via le choix d'éléments $E_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha(F) \setminus \{0\}$ pour $\alpha \in \mathcal{R}$ (cf. [L, 3.4]⁽⁹⁾) ; où⁽¹⁰⁾

$$\mathfrak{u}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{Ad}_a(X) = a^\alpha X, \forall a \in A_0\} .$$

On peut imposer de plus que ces E_α soient obtenus par extension des scalaires de \mathbb{Z} à F à partir d'une « base de Chevalley » $\{H_\alpha \mid \alpha \in \Delta\} \cup \{E_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{R}\}$ de $\text{Lie}(\mathcal{G}_{\text{der}})(\mathbb{Z})$:

- pour tous $\alpha, \beta \in \Delta$, $[H_\alpha, H_\beta] = 0$;
- pour tout $\alpha \in \Delta$ et tout $\beta \in \mathcal{R}$, $[H_\alpha, E_\beta] = \beta(H_\alpha)E_\beta = 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} E_\beta$;
- pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$, $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ est une combinaison linéaire à coefficients dans \mathbb{Z} des H_β ($\beta \in \Delta$) ;

⁽⁹⁾On a supprimé les « tildes » de loc. cit. car ici G est supposé F -déployé. Observons aussi que seuls les E_α pour $\alpha \in \mathcal{R}^+$ sont utilisés dans la construction de j_0 .

⁽¹⁰⁾Si $2\alpha \notin \mathcal{R}_{A_0}$, on a $\mathfrak{u}_\alpha = \text{Lie}(U_\alpha)$; si $2\alpha \in \mathcal{R}_{A_0}$, on a $\mathfrak{u}_\alpha = \text{Lie}(U_{(\alpha)}/U_{2\alpha})$ où $U_{(\alpha)}$ est le sous-groupe unipotent de G correspondant à $(\alpha) = \{\alpha, 2\alpha\}$.

- si $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ sont deux racines non proportionnelles, et si $\{j\alpha + \beta \mid j \in [-q, r]\}$ est la α -chaîne de racines définie par β , alors

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ \pm(q+1)E_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha + \beta \in \mathcal{R} \end{cases} .$$

Le point crucial est que les relations sont à coefficients dans \mathbb{Z} . On peut considérer l'enveloppe linéaire de cette base sur n'importe quel corps (e.g. F ou \mathbb{F}_p , mais aussi les corps algébriquement clos \mathbb{C} , $\overline{\mathbb{Q}_p}$ ou $\overline{\mathbb{F}_p}$) ; les relations ci-dessus la munissent d'une structure d'algèbre de Lie sur le corps en question.

Les relations peuvent être très différentes d'un corps à l'autre. En particulier pour $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ tel que $\alpha + \beta \in \mathcal{R}$, l'entier $N_{\alpha, \beta}$ défini par

$$[E_\alpha, E_\beta] \stackrel{\text{déf}}{=} N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta}$$

peut être nul dans F (si $p > 1$ et p divise $N_{\alpha, \beta}$).

REMARQUE 2.6.8. —

- (i) Les entiers $N_{\alpha, \beta}$ appartiennent à $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$. Si de plus \mathcal{R} n'a aucun facteur irréductible de type \mathbf{G}_2 , ils appartiennent à $\{0, \pm 1, \pm 2\}$. En effet \mathbf{G}_2 est le seul système de racines (réduit et irréductible) pour lequel il existe deux racines α et β telles que l'ensemble des racines de la forme $i\alpha + j\beta$ avec $i, j \in \mathbb{N}$ soit de cardinal > 2 .
- (ii) Si α, β, γ sont trois racines d'une composante irréductible de \mathcal{R} dont toutes les racines sont de même longueur (c'est-à-dire de type $\mathbf{A}_l, \mathbf{D}_l$ ou de type exceptionnel \mathbf{E}_*) telles que $\alpha + \beta = \gamma$, alors $N_{\alpha, \beta} = \pm 1$.
- (iii) Supposons que G soit (absolument) quasi-simple, i.e. que \mathcal{R} soit irréductible. D'après (ii), si G est de type $\mathbf{A}_l, \mathbf{D}_l$ ou de type exceptionnel \mathbf{E}_* , tous les $N_{\alpha, \beta}$ sont égaux à ± 1 , donc en particulier inversibles dans F . Les seuls cas où les $N_{\alpha, \beta}$ peuvent ne pas être inversibles dans F sont les suivants :
 - $p = 2$ et G est de type $\mathbf{B}_l, \mathbf{C}_l, \mathbf{F}_4$ ou \mathbf{G}_2 ;
 - $p = 3$ et G est de type \mathbf{G}_2 .

Posons

$$Y \stackrel{\text{déf}}{=} j_0^{-1}(u) \in \mathfrak{g}_{\lambda, k}(F).$$

Pour $Z \in \mathfrak{g}$ et $r \in \mathbb{Z}$, notons $Z(r)$ la composante de Z sur $\mathfrak{g}_\lambda(r)$. Si $Z \in \mathfrak{g}_{\lambda, -i}(F)$ pour un $i \in \mathbb{Z}$, on a

$$\text{Ad}_u(Z) - Z \equiv [Y(k), Z(-i)] \pmod{\mathfrak{g}_{\lambda, k-i+1}(F)}.$$

D'après [L, 3.4.5, 2.7.7], le co-caractère λ est $(F, Y(k))$ -optimal ; et puisque par hypothèse λ est (\overline{F}, u) -optimal (i.e. $\lambda \in \check{X}_F(G) \cap \Lambda_{F, u}^{\text{opt}}$), il est $(\overline{F}, Y(k))$ -optimal. En remplaçant Y par $Y(k)$ et $X \in \mathfrak{g}_{\lambda, -i}(F)$ par $X(-i)$, on obtient le :

LEMME 2.6.9. — *La proposition 2.6.5 dans le cas où G est F -déployé implique la proposition 2.6.2.*

REMARQUE 2.6.10. — On s'est ramené par descente séparable au cas où G est F -déployé puis on est passé à l'algèbre de Lie grâce au F -isomorphisme $j_0 : \mathfrak{u}_0 \rightarrow U_0$. De la même manière (par descente séparable), si les énoncés 2.6.5 et 2.6.6 sont vrais

sur E pour une sous-extension (finie ou pas) E/F de $F^{\text{séparé}}/F$ déployant G , alors ils sont vrais sur F .

D'après 2.6.9 et 2.6.7, si $p = 1$ ou $p > 1$ est *très bon* pour G , la proposition 2.6.2 est démontrée. En effet dans ce cas toutes G -orbites nilpotentes de \mathfrak{g} sont séparables : c'est évident si $p = 1$; et si $p > 1$, c'est un résultat de Richardson-Springer-Steinberg (cf. Jantzen [J, 2.5, 2.6]). Il nous reste donc à prouver 2.6.5 dans le cas où $p > 1$ n'est pas très bon pour G . On a vu que l'on peut supposer G déployé sur F . On peut aussi supposer que G est absolument simple de type adjoint (cf. [L, 3.2.6]).

REMARQUE 2.6.11. — Si $p > 1$ n'est pas très bon pour G , la condition $i < k$ est essentielle pour que la proposition 2.6.2 soit vraie. On suppose que G est F -déployé. Soient $Y = \sum_{\alpha \in \Delta} E_\alpha$ et $u = j_0(Y) \in U_0(F)$. Alors u est un élément unipotent régulier de G au sens où il est contenu dans un unique sous-groupe de Borel de G , en l'occurrence P_0 . Soit $\mu = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \check{\alpha} \in \check{X}(A_0)_\mathbb{Q}$. D'après Hesselink [H1, 8.6 (b)], μ appartient à $\Lambda_{F,u}$. Soit k l'unique entier > 0 tel que $\lambda = k\mu$ appartienne à $\Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$. Soit $X = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha E_{-\alpha}$ avec $c_\alpha \in F$. Alors $Y \in \mathfrak{g}_\lambda(k; F)$, $X \in \mathfrak{g}_{\lambda, -k}(F)$ et

$$\text{Ad}_u(X) - X \equiv \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha [E_\alpha, E_{-\alpha}] \pmod{\mathfrak{g}_{\lambda, 1}(F)}.$$

Pour $\alpha \in \Delta$, l'élément $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ coïncide avec $H_\alpha = \text{Lie}(\check{\alpha})(1) \in \text{Lie}(A_0)(F)$. L'inclusion $\check{\mathcal{R}} \subset \check{X}(A_0)$ donne dualement un morphisme de \mathbb{Z} -modules

$$\eta : X(A_0) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(\check{\mathcal{R}}), \mathbb{Z}), \quad \chi \mapsto (\check{\alpha} \mapsto \langle \chi, \check{\alpha} \rangle).$$

Si $p > 1$ divise l'ordre du conoyau $\text{coker}(\eta)$, les H_α ($\alpha \in \Delta$) ne sont pas linéairement indépendants sur F (par exemple : si $G = \text{PGL}_n$ et p divise n). En ce cas il existe un $X \in \mathfrak{g}_\lambda(-k; F) \setminus \{0\}$ tel que $\text{Ad}_u(X) - X \in \mathfrak{g}_{\lambda, 1}(F)$.

2.7. Constructions préliminaires et rappels. — Le groupe G est supposé F -déployé. On peut supposer que $G = \mathcal{G} \times_{\mathbb{Z}} F$ et $A_0 = \mathcal{A}_0 \times_{\mathbb{Z}} F$ où \mathcal{G} est un \mathbb{Z} -schéma en groupes réductif (connexe) de Chevalley-Demazure et \mathcal{A}_0 est un tore maximal de \mathcal{G} . Chaque racine $\alpha \in \mathcal{R}$ provient par extension des scalaires d'un morphisme de \mathbb{Z} -schémas en groupes $\alpha : \mathcal{A}_0 \rightarrow G_{\mathbb{m}/\mathbb{Z}}$, i.e appartient à $X(\mathcal{A}_0) = \text{Hom}(\mathcal{A}_0, G_{\mathbb{m}/\mathbb{Z}})$. De même, chaque co-caractère $\lambda \in \check{X}(A_0)$ appartient à $\check{X}(\mathcal{A}_0) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_{\mathbb{m}/\mathbb{Z}}, \mathcal{A}_0)$. L'identification $\check{X}(A_0) = \check{X}(\mathcal{A}_0)$ induit une identification $\check{X}(A_0)_\mathbb{Q} = \check{X}(\mathcal{A}_0)_\mathbb{Q}$.

Pour $\lambda \in \check{X}(A_0)$, $i \in \mathbb{N}^*$ et une \mathbb{Z} -algèbre A , on note $\mathfrak{g}_\lambda(i; A)$ le A -module libre de type fini défini par

$$\mathfrak{g}_\lambda(i; A) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}_\lambda(i)} AE_\alpha \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}_\lambda(i) = \{\alpha \in \mathcal{R} \mid \langle \alpha, \lambda \rangle = i\}.$$

Ces A -modules libres de type fini définissent un espace affine $\mathfrak{g}_\lambda(i)_\mathbb{Z} \simeq_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$ avec $n = |\mathcal{R}_\lambda(i)|$; et le F -espace affine $\mathfrak{g}_\lambda(i)$ coïncide avec $\mathfrak{g}_\lambda(i)_\mathbb{Z} \times_{\mathbb{Z}} F$.

Pour $\lambda \in \check{X}(A_0) = \check{X}(\mathcal{A}_0)$, notons \mathcal{M}_λ le centralisateur schématique de λ dans \mathcal{G} . On a $M_\lambda = \mathcal{M}_\lambda \times_{\mathbb{Z}} F$ et pour $i \in \mathbb{N}^*$, l'action F -linéaire de M_λ sur $\mathfrak{g}_\lambda(i)$ provient par

le changement de base $\mathbb{Z} \rightarrow F$ d'une action \mathbb{Z} -linéaire de \mathcal{M}_λ sur $\mathfrak{g}_\lambda(i)_\mathbb{Z}$. Soit T un tore maximal de M_λ . Notons T^λ le sous-tore de T défini par

$$T^\lambda = \langle \text{Im}(\mu) \mid \mu \in \check{X}(T), (\mu, \lambda) = 0 \rangle$$

et M_λ^\perp le sous-groupe fermé distingué de M_λ défini par

$$M_\lambda^\perp = \langle T^\lambda, (M_\lambda)_{\text{der}} \rangle.$$

Le groupe M_λ^\perp est réductif connexe et il ne dépend pas du choix de T . En particulier il est défini sur F (on peut prendre $T = A_0$). D'après [CP, 4.3], le F -sous-groupe fermé M_λ^\perp de M_λ provient par le changement de base $\mathbb{Z} \rightarrow F$ d'un sous-schéma en groupes fermé (réductif connexe) $\mathcal{M}_\lambda^\perp$ de \mathcal{M}_λ : on a $M_\lambda^\perp = \mathcal{M}_\lambda^\perp \times_{\mathbb{Z}} F$.

Soient $\lambda \in \check{X}(A_0)$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que λ est primitif. Pour un élément $Y \in \mathfrak{g}_\lambda(k; F)$, le *critère de Kirwan-Ness rationnel* (cf. [L, 2.8.1]) dit que λ est (F, Y) -optimal (relativement à l'action adjointe de $G(F)$) si et seulement si Y est (F, M_λ^\perp) -semi-stable, cf. 2.5. Pour $F = \bar{F}$, on obtient le critère de Kirwan-Ness habituel (i.e. géométrique).

Puisque l'action F -linéaire de M_λ^\perp sur $\mathfrak{g}_\lambda(k)$ provient par le changement de base $\mathbb{Z} \rightarrow F$ d'une action \mathbb{Z} -linéaire du schéma en groupes $\mathcal{H} = \mathcal{M}_\lambda^\perp$ sur l'espace affine $\mathcal{V} = \mathfrak{g}_\lambda(k)_\mathbb{Z} (\simeq_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}_\mathbb{Z}^n)$, on dispose aussi du théorème de Seshadri [S] : il existe un sous-schéma ouvert \mathcal{V}^{ss} de \mathcal{V} tel que pour tout corps commutatif \mathbf{k} algébriquement clos, $\mathcal{V}^{\text{ss}}(\mathbf{k})$ soit l'ensemble des éléments $\mathcal{H}(\mathbf{k})$ -semi-stables de $\mathcal{V}(\mathbf{k}) = \mathcal{V}(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}$. D'après le critère de Kirwan-Ness géométrique, un élément Y de $\mathcal{V}(\mathbf{k})$ appartient à $\mathcal{V}^{\text{ss}}(\mathbf{k})$ si et seulement si le co-caractère λ — qui est défini sur \mathbb{Z} et donc *a fortiori* sur \mathbf{k} — est (\mathbf{k}, Y) -optimal (relativement à l'action adjointe de $\mathcal{H}(\mathbf{k})$).

2.8. Le cas où les $N_{\alpha, \beta}$ sont tous égaux à ± 1 ($p > 1$). — Le groupe G est supposé F -déployé, avec $p > 1$. On suppose toujours que l'hypothèse 2.5.2 est vérifiée pour $V = G$ muni de l'action par conjugaison. On suppose de plus que pour toutes les racines $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ telles que $\alpha + \beta \in \mathcal{R}$, l'entier $N_{\alpha, \beta}$ est égal à ± 1 ; c'est-à-dire que tout facteur (absolument) quasi-simple de G est de type $\mathbf{A}_l, \mathbf{D}_l$ ou de type exceptionnel \mathbf{E}_* (cf. 2.6.8).

Soient λ, k et Y comme dans l'énoncé de 2.6.5. On peut supposer que Y est en position standard et que $\lambda \in \check{X}(A_0)$; autrement dit $P_\lambda \supset P_0$ et $\check{X}(A_0) \cap \Lambda_{F, Y}^{\text{opt}} = \{\lambda\}$. Fixons un entier $i \in \{1, \dots, k-1\}$ et un élément $X \in \mathfrak{g}_\lambda(-i; F)$ tel que $[X, Y] = 0$. On veut prouver que $X = 0$. On écrit

$$X = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_\lambda(-i)} a_\alpha E_\alpha \quad \text{et} \quad Y = \sum_{\beta \in \mathcal{R}_\lambda(k)} b_\beta E_\beta.$$

On note $\mathcal{R}(X)$ le sous-ensemble de $\mathcal{R}_\lambda(-i)$ formé des racines α telles que $a_\alpha \neq 0$. On définit de manière analogue le sous-ensemble $\mathcal{R}(Y)$ de $\mathcal{R}_\lambda(k)$. Pour $\gamma \in \mathcal{R}$, on note $C(\gamma) = C(X, Y; \gamma)$ l'ensemble des $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(Y)$ tels que $\alpha + \beta = \gamma$. Pour que $C(\gamma)$ soit non vide, il faut bien sûr que γ appartienne à $\mathcal{R}_\lambda(k-i)$. On a donc

$$[X, Y] = \sum_{\gamma \in \mathcal{R}_\lambda(k-i)} \left(\sum_{(\alpha, \beta) \in C(\gamma)} c_{\alpha, \beta} N_{\alpha, \beta} \right) E_\gamma \quad \text{avec} \quad c_{\alpha, \beta} = a_\alpha b_\beta \in F^\times.$$

Puisque $[X, Y] = 0$, on a

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in C(\gamma)} c_{\alpha, \beta} N_{\alpha, \beta} = 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{R}_\lambda(k-i).$$

LEMME 2.8.1. — *Si tous les ensembles $C(\gamma)$ sont vides, alors $X = 0$.*

Démonstration. — Supposons que tous les ensembles $C(\gamma)$ soient vides. Alors $\langle \alpha, \beta \rangle \geq 0$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(Y)$. Si $X \neq 0$, on choisit une racine $\alpha \in \mathcal{R}(X)$, que l'on identifie à un élément $\eta \in \check{X}(A_0)_\mathbb{Q}$. On a alors

$$\begin{cases} \langle \beta, \eta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle \geq 0 & \text{pour tout } \beta \in \mathcal{R}(Y) \\ \langle \lambda, \eta \rangle = -i < 0 \end{cases}.$$

Posons $\mu = \tilde{\lambda} + \frac{1}{a}\eta \in \check{X}(A_0)_\mathbb{Q}$ avec $\tilde{\lambda} = \frac{1}{k}\lambda \in \Lambda_{F,Y}$ et $a \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\langle \beta, \mu \rangle = \langle \beta, \tilde{\lambda} \rangle + \frac{1}{a} \langle \beta, \eta \rangle \geq \langle \beta, \tilde{\lambda} \rangle = 1 \quad \text{pour toute racine } \beta \in \mathcal{R}(Y)$$

et

$$\langle \mu, \mu \rangle = \langle \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda} \rangle + \frac{2}{a} \langle \tilde{\lambda}, \eta \rangle + \frac{1}{a^2} \langle \eta, \eta \rangle < \langle \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda} \rangle \quad \text{si } a \text{ est suffisamment grand.}$$

Ainsi pour $a \gg 1$, on a $m_Y(\mu) \geq 1$ et $\langle \mu, \mu \rangle < \langle \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda} \rangle$, ce qui contredit la minimalité de $\|\tilde{\lambda}\|$ et donc le fait que $\tilde{\lambda}$ appartient $\Lambda_{F,Y}$. Donc $X = 0$. \square

Il suffit donc de prouver que tous les ensembles $C(\gamma)$ sont vides. Supposons par l'absurde qu'il existe un $\gamma \in \mathcal{R}_\lambda(k-i)$ tel que l'ensemble $C(\gamma)$ ne soit pas vide. Quitte à remplacer X par $c^{-1}X$ pour une constante $c \in F^\times$, on peut supposer que $c_{\alpha, \beta} = 1$ pour au moins un couple $(\alpha, \beta) \in C(\gamma)$. En choisissant une base du sous- \mathbb{F}_p -espace vectoriel de F engendré par les $c_{\alpha, \beta}$ pour $(\alpha, \beta) \in C(\gamma)$, on obtient une égalité non triviale dans \mathbb{F}_p de la forme

$$(1) \quad \sum_{(\alpha, \beta) \in C'(\gamma)} c_{\alpha, \beta} N_{\alpha, \beta} = 0 \quad \text{avec } c_{\alpha, \beta} \in \mathbb{F}_p$$

pour un sous-ensemble non vide $C'(\gamma) \subset C(\gamma)$. Puisque par hypothèse les $N_{\alpha, \beta}$ sont tous non nuls dans $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, l'ensemble $C'(\gamma)$ est de cardinal ≥ 2 . Pour chaque couple $(\alpha, \beta) \in C'(\gamma)$, choisissons un relèvement arbitraire $c'_{\alpha, \beta}$ de $c_{\alpha, \beta}$ dans \mathbb{Z} . On a

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in C'(\gamma)} c'_{\alpha, \beta} N_{\alpha, \beta} \equiv 0 \pmod{p\mathbb{Z}}.$$

Comme tous les $N_{\alpha, \beta}$ sont égaux à ± 1 , il suffit de modifier l'un des relèvements $c'_{\alpha, \beta}$ pour avoir une égalité non triviale dans \mathbb{Z}

$$(2) \quad \sum_{(\alpha, \beta) \in C'(\gamma)} c'_{\alpha, \beta} N_{\alpha, \beta} = 0 \quad \text{avec } c'_{\alpha, \beta} \in \mathbb{Z}.$$

On va modifier l'égalité (2) et en déduire une identité analogue sur \mathbb{C} , suivant le principe qui consiste à ramener la théorie des éléments unipotents, resp. nilpotents, sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 1$ à celle sur \mathbb{C} (cf. [Lu, CP]).

Pour cela on va utiliser l'hypothèse $\check{X}_F(G)_\mathbb{Q} \cap \Lambda_Y \neq \emptyset$ (qui permet de passer de F à \overline{F}) et le théorème de Seshadri (qui permet de passer de \overline{F} à \mathbb{C}).

Comme en 2.7, posons $\mathcal{H} = \mathcal{M}_\lambda^\perp$ et $\mathcal{V} = \mathfrak{g}_\lambda(k)_\mathbb{Z}$, et notons \mathcal{V}^{ss} la sous-variété ouverte de \mathcal{V} telle que pour tout corps commutatif k algébriquement clos, $\mathcal{V}^{\text{ss}}(k)$ soit l'ensemble des éléments $\mathcal{H}(k)$ -semi-stable de $\mathcal{V}(k)$ (relativement à l'action adjointe de $\mathcal{H}(k)$). Puisque par hypothèse $\check{X}_F(G) \cap \Lambda_Y \neq \emptyset$, le co-caractère λ est (\overline{F}, Y) -optimal et d'après le critère de Kirwan-Ness géométrique, l'élément Y appartient à $\mathcal{V}^{\text{ss}}(\overline{F})$. En particulier $\mathcal{V}_{\text{ss}}(\overline{F})$ est non vide. Cela assure que $\mathcal{V}_{\text{ss}}(\mathbb{C})$ est non vide, donc (ouvert) dense dans $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ pour la topologie de Zariski.

Pour une famille $z = (z_\beta)_{\beta \in \mathcal{R}_\lambda(k)}$ d'éléments de \mathbb{C}^\times , notons $\mathbf{Y}_z \in \mathfrak{g}_\lambda(k; \mathbb{C}) = \mathcal{V}(\mathbb{C})$ et $\mathbf{X}_z \in \mathfrak{g}_\lambda(-i; \mathbb{C})$ les éléments définis par

$$\mathbf{Y}_z = \sum_{\beta \in \mathcal{R}_\lambda(k)} z_\beta E_\beta \quad \text{et} \quad \mathbf{X}_z = \sum_{(\alpha, \beta) \in C'(\gamma)} z_\beta^{-1} c'_{\alpha, \beta} E_\alpha.$$

Par construction, on a

$$[\mathbf{X}_z, \mathbf{Y}_z] = \left(\sum_{(\alpha, \beta) \in C'(\gamma)} c'_{\alpha, \beta} N_{\alpha, \beta} \right) E_\gamma = 0.$$

L'ensemble des \mathbf{Y}_z pour $z \in (\mathbb{C}^\times)^{|\mathcal{R}_\lambda(k)|}$ est un ouvert de Zariski de $\mathcal{V}(\mathbb{C})$. Puisque $\mathcal{V}^{\text{ss}}(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{V}(\mathbb{C})$, il contient un tel \mathbf{Y}_z . D'après le critère de Kirwan-Ness géométrique, le co-caractère λ est $(\mathbb{C}, \mathbf{Y}_z)$ -optimal (relativement à l'action adjointe de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$). Par conséquent $\mathbf{X}_z = 0$ (d'après 2.6.7) ; contradiction. Donc tous les ensembles $C(\gamma)$ sont vides et $X = 0$ (d'après 2.8.1).

Cela achève la démonstration de 2.6.5 dans le cas où G est F -déployé et tous les entiers $N_{\alpha, \beta}$ sont égaux à ± 1 (sous l'hypothèse 2.5.2). On conclut grâce à 2.6.9.

2.9. Le cas où F est un corps local, resp. global ($p > 1$). — On suppose toujours que G est F -déployé, avec $p > 1$. On suppose de plus que $F = \mathbb{F}_q((\varpi))$, avec $q = p^r$. D'après [L], l'hypothèse 2.5.2 est vérifiée pour $V = G$ muni de l'action par conjugaison et pour $V = \mathfrak{g}$ muni de l'action adjointe. Dans cette sous-section, on munit $G(F)$ et $\mathfrak{g}(F)$ de la topologie définie par F (Top_F).

Soient λ , k et Y comme dans l'énoncé de 2.6.5. Comme en 2.8, On peut supposer que Y est en position standard et que $\lambda \in \check{X}(A_0)$. Comme en 2.7, posons $\mathcal{H} = \mathcal{M}_\lambda^\perp$ et $\mathcal{V} = \mathfrak{g}_\lambda(k)_\mathbb{Z}$. Quitte à multiplier Y par un élément de F^\times , on peut aussi supposer que $Y \in \mathcal{V}(\mathfrak{o}_F) \setminus \mathfrak{p}_F \mathcal{V}(\mathfrak{o}_F)$.

Posons $H = M_\lambda^\perp (= \mathcal{H} \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z})$ et $V = \mathfrak{g}_\lambda(k) (= \mathcal{V} \times_{\mathbb{Z}} F)$. Puisque le co-caractère λ est (F, Y) -optimal, d'après le critère de Kirwan-Ness rationnel (cf. 2.7), l'élément Y est (F, M_λ^\perp) -semi-stable, i.e. il appartient à $V(F) \setminus \mathcal{N}_F^N(V, 0)$.

Posons $P_0^H = H \cap P_0$. C'est un F -sous-groupe de Borel de H , et en notant K^H le sous-groupe compact maximal (pour Top_F) $\mathcal{H}(\mathfrak{o}_F)$ de $H(F)$, on a la décomposition d'Iwasawa

$$H(F) = K^H P_0^H(F) = P_0^H(F) K^H.$$

On en déduit que pour un élément $Y_1 \in V(F)$, les deux conditions suivantes sont équivalentes (cf. la preuve de [L, 2.8.7]) :

- Y_1 est (F, H) -semi-stable, i.e. $Y_1 \in V(F) \setminus \mathcal{N}_F^H(V, 0)$;
- pour tout co-caractère virtuel $\mu \in \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}$, la K^H -orbite

$$K^H \cdot Y_1 = \{\text{Ad}_k(Y_1) \mid k \in K^H\}$$

ne rencontre pas $V_{\mu,1}(F)$.

Puisque Y appartient à $V(F) \setminus \mathcal{N}_F^H(V, 0)$ et $\mathcal{N}_F^H(V, 0)$ est Top_F -fermé dans $V(F)$, il existe un plus petit entier $m \geq 1$ tel que l'ensemble $Y + \mathfrak{p}_F^m \mathcal{V}(\mathfrak{o}_F)$ soit contenu dans $V(F) \setminus \mathcal{N}_F^H(V, 0)$. Par conséquent l'ensemble

$$K^H \cdot (Y + \mathfrak{p}_F^m \mathcal{V}(\mathfrak{o}_F)) = K^H \cdot Y + \mathfrak{p}_F^m \mathcal{V}(\mathfrak{o}_F)$$

est contenu dans $V(F) \setminus \mathcal{N}_F^H(V, 0)$. On a donc

$$(K^H \cdot Y + \mathfrak{p}_F^m \mathcal{V}(\mathfrak{o}_F)) \cap V_{\mu,1}(F) = \emptyset \quad \text{pour tout } \mu \in \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}.$$

Pour $\mu \in \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}} = \check{X}(\mathcal{A}_0)_{\mathbb{Q}}$, le F -espace affine $V_{\mu,1}$ provient par le changement de base $\mathbb{Z} \rightarrow F$ d'un sous- \mathbb{Z} -schéma fermé $\mathcal{V}_{\mu,1} \simeq_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^r$ de \mathcal{V} . Observons que puisque Y appartient à $\mathcal{V}(\mathfrak{o}_F)$, l'ensemble $K_H \cdot Y + \mathfrak{p}_F^m \mathcal{V}(\mathfrak{o}_F)$ est contenu dans $\mathcal{V}(\mathfrak{o}_F)$; d'autre part pour tout $\mu \in \check{X}(A_0)$, on a l'égalité $\mathcal{V}(\mathfrak{o}_F) \cap V_{\mu,1}(F) = \mathcal{V}_{\mu,1}(\mathfrak{o}_F)$. Notons $\mathfrak{o}_{F,m}$ l'anneau tronqué $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F^m$ et $\pi_{F,m} : \mathcal{V}(\mathfrak{o}_F) \rightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{o}_{F,m})$ la projection naturelle. Elle est K^H -équivariante pour l'action de K_H sur $\mathcal{V}(\mathfrak{o}_{F,m})$ donnée par la projection naturelle $K^H \rightarrow \mathcal{H}(\mathfrak{o}_{F,m})$. On obtient les égalités dans $\mathcal{V}(\mathfrak{o}_{F,m})$ ⁽¹¹⁾ :

$$\mathcal{H}(\mathfrak{o}_{F,m}) \cdot \pi_{F,m}(Y) \cap \mathcal{V}_{\mu,1}(\mathfrak{o}_{F,m}) = \emptyset \quad \text{pour tout } \mu \in \check{X}(A_0)_{\mathbb{Q}}.$$

Soit F'/\mathbb{Q}_p une extension finie telle que les anneaux tronqués $\mathfrak{o}_{F',m}$ et $\mathfrak{o}_{F,m}$ soient isomorphes, c'est-à-dire telle que le corps résiduel $\mathfrak{o}_{F'}/\mathfrak{p}_{F'}$ soit égal à \mathbb{F}_q et l'indice de ramification de F'/\mathbb{Q}_p soit $\geq m$; on dit alors que les corps F et F' sont *m-proches*. Fixons un tel isomorphisme

$$\phi : \mathfrak{o}_{F,m} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{o}_{F',m}.$$

En pratique, on considère la section de Teichmüller (l'unique section multiplicative) $s : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathfrak{o}_{F'}$ de la projection naturelle $\mathfrak{o}_{F'} \rightarrow \mathfrak{o}_{F'}/\mathfrak{p}_{F'} = \mathbb{F}_q$. Observons que $s(\mathbb{F}_q)$ est contenu dans l'anneau des entiers $\mathfrak{o}_{F'_0} \simeq \mathbb{W}(\mathbb{F}_q)$ de la sous-extension non ramifiée maximale F'_0/\mathbb{Q}_p de F'/\mathbb{Q}_p . La section s est additive modulo p : pour tous $x, y \in \mathbb{F}_q$, on a $s(x+y) \equiv s(x) + s(y) \pmod{p\mathfrak{o}_{F'}}$. Choisissons une uniformisante ϖ' de F' et notons $\tilde{s} : \mathbb{F}_q[[\varpi]] \rightarrow \mathfrak{o}_{F'}$ l'unique application multiplicative prolongeant s et vérifiant $\tilde{s}(\varpi) = \varpi'$. Puisque $p\mathfrak{o}_{F'} \subset \mathfrak{p}_{F'}^m$, elle induit par passage aux quotients un isomorphisme d'anneaux $\phi = \phi_{s,m}(\varpi, \varpi') : \mathfrak{o}_{F,m} \rightarrow \mathfrak{o}_{F',m}$.

Par transport de structure, ϕ induit pour tout \mathbb{Z} -schéma \mathcal{Z} une application bijective

$$\phi_{\mathcal{Z}} : \mathcal{Z}(\mathfrak{o}_{F,m}) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathfrak{o}_{F',m}).$$

Ainsi $\phi_{\mathcal{V}} : \mathcal{V}(\mathfrak{o}_{F,m}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{o}_{F',m})$ est un isomorphisme de $\mathfrak{o}_{F,m}$ -modules pour l'action de $\mathfrak{o}_{F,m}$ sur $\mathcal{V}(\mathfrak{o}_{F',m})$ donnée par ϕ , qui vérifie les propriétés :

- $\phi_{\mathcal{V}}$ est $\mathcal{H}(\mathfrak{o}_{F,m})$ -équivariante pour l'action de $\mathcal{H}(\mathfrak{o}_{F,m})$ sur $\mathcal{V}(\mathfrak{o}_{F',m})$ donnée par $\phi_{\mathcal{H}}$;

⁽¹¹⁾ Ces égalités permettent de démontrer l'hypothèse 2.5.2 dans le cas de \mathfrak{g} muni de l'action adjointe, cf. la preuve de [L, 2.8.7].

– pour tout $\mu \in \check{X}(\mathcal{A}_0)_{\mathbb{Q}}$, la restriction de $\phi_{\mathcal{V}}$ à $\mathcal{V}_{\mu,1}$ coïncide avec $\phi_{\mathcal{V}_{\mu,1}}$.
 Soit $Y' \in \mathcal{V}(\mathfrak{o}_{F'})$ tel que

$$\pi_{F',m}(Y') = \phi_{\mathcal{V}} \circ \pi_{F,m}(Y).$$

D'après ce qui précède, on a

$$\mathcal{H}(\mathfrak{o}_{F',m}) \cdot \pi_{F',m}(Y') \cap \mathcal{V}_{\mu,1}(\mathfrak{o}_{F',m}) = \emptyset \quad \text{pour tout } \mu \in \check{X}(\mathcal{A}_0)_{\mathbb{Q}}.$$

Posons $V' = \mathcal{V} \times_{\mathbb{Z}} F'$, $H' = \mathcal{H} \times_{\mathbb{Z}} F'$, etc. On a prouvé que pour tout co-caractère virtuel $\mu \in \check{X}(A'_0)_{\mathbb{Q}} = \check{X}(\mathcal{A}_0)_{\mathbb{Q}}$, la $K^{H'}$ -orbite $K^{H'} \cdot Y'$ ne rencontre pas $V'_{\mu,1}(F')$, ce qui assure que l'élément Y' est (F', H') -semi-stable, i.e. $Y' \in V'(F') \setminus \mathcal{N}_{F'}^{H'}(V', 0)$.

D'après le critère de Kirwan-Ness rationnel, le co-caractère $\lambda \in \check{X}(A'_0) = \check{X}(\mathcal{A}_0)$ est (F', Y') -optimal (relativement à l'action adjointe de $\mathcal{G}(F')$). On peut donc appliquer 2.6.7 : pour $i \in \mathbb{N}^*$, on a $\text{Lie}(G')^{Y'}(F') \cap \mathfrak{g}_{\lambda}(-i; F') = \{0\}$. On en déduit (d'après 2.6.6) que pour $i = 1, \dots, k-1$, on a $[Y', \mathfrak{g}_{\lambda}(-i; F')] = \mathfrak{g}_{\lambda}(k-i; F')$.

Fixons un entier $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Puisque $[Y', \mathfrak{g}_{\lambda}(-i; F')] = \mathfrak{g}_{\lambda}(k-i; F')$, l'image de $\mathfrak{g}_{\lambda}(-i; \mathfrak{o}_{F'})$ par l'application $[Y', \cdot]$ est un $\mathfrak{o}_{F'}$ -réseau de $\mathfrak{g}_{\lambda}(k-i; F')$ contenu dans $\mathfrak{g}_{\lambda}(k-i; \mathfrak{o}_{F'})$, disons Ω' . Soient :

- Ω'_m l'image de Ω' dans $\mathfrak{g}_{\lambda}(k-1; \mathfrak{o}_{F',m}) = \mathfrak{g}_{\lambda}(k-1; \mathfrak{o}_{F'}) / \mathfrak{p}_{F'}^m \mathfrak{g}_{\lambda}(k-1; \mathfrak{o}_{F'})$ par la projection naturelle

$$\mathfrak{g}_{\lambda}(k-i; \mathfrak{o}_{F'}) \rightarrow \mathfrak{g}_{\lambda}(k-i; \mathfrak{o}_{F',m});$$

- Ω_m l'image réciproque de Ω'_m par l'isomorphisme de $\mathfrak{o}_{F,m}$ -modules

$$\phi_{\mathfrak{g}_{\lambda}(k-i)_{\mathbb{Z}}} : \mathfrak{g}_{\lambda}(k-i; \mathfrak{o}_{F,m}) \rightarrow \mathfrak{g}_{\lambda}(k-i; \mathfrak{o}_{F',m});$$

- Ω la pré-image de Ω_m dans $\mathfrak{g}_{\lambda}(k-i; \mathfrak{o}_F)$ par la projection naturelle

$$\mathfrak{g}_{\lambda}(k-i; \mathfrak{o}_F) \rightarrow \mathfrak{g}_{\lambda}(k-i; \mathfrak{o}_{F,m}).$$

Par construction, Ω est un \mathfrak{o}_F -réseau de $\mathfrak{g}_{\lambda}(k-i; F)$ qui vérifie

$$\mathfrak{p}_F^m \mathfrak{g}_{\lambda}(k-i; \mathfrak{o}_F) \subset \Omega \subset \mathfrak{g}_{\lambda}(k-i; \mathfrak{o}_F)$$

et

$$[Y, \mathfrak{g}_{\lambda}(-i; \mathfrak{o}_F)] + \mathfrak{p}_F^m \mathfrak{g}_{\lambda}(k-i; \mathfrak{o}_F) = \Omega.$$

Soit maintenant e un entier ≥ 2 et soit F''/F' l'extension totalement ramifiée de degré e définie par le polynôme d'Eisenstein $T^e - \varpi' \in F'[T]$. Les corps F et F'' sont me -proches et l'on peut choisir un isomorphisme d'anneaux $\psi : \mathfrak{o}_{F,me} \rightarrow \mathfrak{o}_{F'',me}$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{o}_{F,m} & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{o}_{F',m} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{o}_{F,me} & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{o}_{F'',me} \end{array}$$

où les flèches verticales sont définies comme suit :

- celle de gauche est déduite par passage aux quotients de l'endomorphisme de l'anneau \mathfrak{o}_F qui est l'identité sur \mathbb{F}_q et envoie ϖ sur ϖ^e ;

– celle de droite est déduite par passage aux quotients de l'inclusion $\mathfrak{o}_{F'} \subset \mathfrak{o}_{F''}$.

En effet, il suffit de construire ψ comme on l'a fait pour $\phi = \phi_{s,m}(\varpi, \varpi')$ à l'aide d'une uniformisante ϖ'' de F'' vérifiant $\varpi''^e = \varpi'$: on prend $\psi = \phi_{s,me}(\varpi, \varpi'')$.

Puisque l'extension F''/F' est séparable, le co-caractère λ est (F'', Y') -optimal ; et comme sur F' , on a l'égalité $[Y', \mathfrak{g}_\lambda(-i; F'')] = \mathfrak{g}_\lambda(k-i; F'')$. Notons Ω'' le $\mathfrak{o}_{F''}$ -réseau de $\mathfrak{g}_\lambda(k-i; F'')$ image de $\mathfrak{g}_\lambda(-i; \mathfrak{o}_{F''})$ par l'application $[Y', \cdot]$. Puisque $\mathfrak{g}_\lambda(-i; \mathfrak{o}_{F''}) = \mathfrak{g}_\lambda(-i; \mathfrak{o}_{F'}) \otimes_{\mathfrak{o}_{F'}} \mathfrak{o}_{F''}$ et $\mathfrak{g}_\lambda(k-i; \mathfrak{o}_{F''}) = \mathfrak{g}_\lambda(k-i; \mathfrak{o}_{F'}) \otimes_{\mathfrak{o}_{F'}} \mathfrak{o}_{F''}$, on a l'égalité

$$\Omega'' = \Omega' \otimes_{\mathfrak{o}_{F'}} \mathfrak{o}_{F''}.$$

Soit Ω''_m l'image de Ω'' dans $\mathfrak{g}_\lambda(k-1; \mathfrak{o}_{F'',me}) = \mathfrak{g}_\lambda(k-1; \mathfrak{o}_{F''})/\mathfrak{p}_{F''}^{me} \mathfrak{g}_\lambda(k-1; \mathfrak{o}_{F''})$ par la projection naturelle $\mathfrak{g}_\lambda(k-i; \mathfrak{o}_{F''}) \rightarrow \mathfrak{g}_\lambda(k-i; \mathfrak{o}_{F'',me})$. On a

$$\Omega''_{me} = \Omega'' \otimes_{\mathfrak{o}_{F''}} \mathfrak{o}_{F'',me} = (\Omega' \otimes_{\mathfrak{o}_{F'}} \mathfrak{o}_{F''}) \otimes_{\mathfrak{o}_{F''}} \mathfrak{o}_{F'',me} = \Omega \otimes_{\mathfrak{o}_{F'}} \mathfrak{o}_{F'',me}.$$

Comme $\mathfrak{o}_{F'',me} = \mathfrak{o}_{F',m} \otimes_{\mathfrak{o}_{F'}} \mathfrak{o}_{F''}$, on obtient l'égalité

$$\Omega''_{me} = \Omega'_m \otimes_{\mathfrak{o}_{F'}} \mathfrak{o}_{F''}.$$

On en déduit que l'image réciproque de Ω''_{me} par l'isomorphisme de $\mathfrak{o}_{F,me}$ -modules

$$\psi_{\mathfrak{g}_\lambda(k-i)_\mathbb{Z}} : \mathfrak{g}_\lambda(k-i; \mathfrak{o}_{F,me}) \rightarrow \mathfrak{g}_\lambda(k-i; \mathfrak{o}_{F'',me})$$

est

$$\Omega \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_{F,me}.$$

Par conséquent

$$[Y, \mathfrak{g}_\lambda(-i; \mathfrak{o}_F)] + \mathfrak{p}_F^{me} \mathfrak{g}_\lambda(k-i; \mathfrak{o}_F) = \Omega.$$

Comme l'égalité ci-dessus est vraie pour tout entier $e \geq 1$, par passage à la limite on obtient que

$$[Y, \mathfrak{g}_\lambda(-i; \mathfrak{o}_F)] = \Omega.$$

D'où l'égalité cherchée :

$$[Y, \mathfrak{g}_\lambda(-i; F)] = [Y, \mathfrak{g}_\lambda(-i; \mathfrak{o}_F)] \otimes_{\mathfrak{o}_F} F = \Omega \otimes_{\mathfrak{o}_F} F = \mathfrak{g}_\lambda(k-i; F).$$

Compte-tenu de 2.6.6, cela achève la démonstration de 2.6.5 dans le cas où G est F -déployé et où F est un corps local non archimédien de caractéristique $p > 1$. On conclut grâce à 2.6.9.

Supposons maintenant que F soit un corps global de caractéristique $p > 1$. Soient λ , k et u comme dans l'énoncé de 2.6.2. Soit v une place de F . Le complété F_v de F en v est une extension séparable de F de degré de transcendance infini. On peut donc appliquer 2.5.1 : le co-caractère λ (supposé (F, u) -optimal) est (F_v, u) -optimal. On vient de démontrer que pour $i = 1, \dots, k-1$, le morphisme

$$\eta_{\lambda,u}(-i; F_v) : \mathfrak{g}_\lambda(-i; F_v) \rightarrow \mathfrak{g}_{\lambda,k-i}(F_v)/\mathfrak{g}_{\lambda,k-i+1}(F_v) = \mathfrak{g}_\lambda(k-i; F_v)$$

est injectif ; cela implique que le morphisme $\eta_{\lambda,u}(-i; F)$ est lui aussi injectif.

3. Mesure de Radon invariante sur les F -strates unipotentes

Dans toute cette section, F est un corps commutatif localement compact non archimédien et la topologie est celle définie par F (Top_F) ; à l'exception de 3.7 où F est un corps global.

3.1. Les objets. — Soit $u \in \mathfrak{U}_F \setminus \{1\}$. Posons $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{F,u}$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{F,u}$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_{F,u}$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{F,u}$ et $P = {}_F P_u$. Les ensembles \mathcal{X} et \mathfrak{X} sont fermés dans $G(F)$, la F -lame \mathcal{Y} est ouverte dans \mathcal{X} et la F -strate \mathfrak{Y} est ouverte dans \mathfrak{X} . La F -lame \mathcal{Y} est ouverte dans son F -saturé \mathcal{X} et \mathcal{X} est fermé dans $G(F)$ (cf. [L, 2.8]). Soit $G(F) \times^{P(F)} \mathcal{X}$ le quotient $(G(F) \times \mathcal{X})/P(F)$ pour l'action de $P(F)$ donnée par $(g, x) \cdot p = (gp, p^{-1}xp)$. Pour un couple $(g, x) \in G(F) \times \mathcal{X}$, on note $[g, x]$ son image dans $G(F) \times^{P(F)} \mathcal{X}$. D'après [L, 2.5.13], l'application (surjective)

$$\pi : G(F) \times^{P(F)} \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{X}, \quad [g, x] \mapsto gxg^{-1}$$

induit par restriction une application bijective

$$G(F) \times^{P(F)} \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{Y}$$

qui est un homéomorphisme. De plus on a (loc. cit.)

$$\pi^{-1}(\mathfrak{Y}) = G(F) \times^{P(F)} \mathcal{Y}.$$

Fixons un $\lambda \in \Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$. Rappelons que $\mathcal{X} = G_{\lambda,k}(F)$ avec $k = m_{F,u} = m_u(\lambda) \geq 1$. En particulier \mathcal{X} est un groupe unipotent (contenu dans $U_P(F)$).

Les groupes $G(F)$ et \mathcal{X} sont unimodulaires. On les munit d'une mesure de Haar, respectivement dg et dx . Le groupe $P(F) = P_\lambda(F)$ n'est pas unimodulaire (il est distinct de $G(F)$ car $u \neq 1$). On le munit d'une mesure de Haar invariante à droite $d_r p$ et on note δ_P son caractère module.

Pour $p \in P(F)$ et $s, t \in \mathbb{N}^*$ avec $s < t$, on pose

$$\delta_{\lambda,s}(p) = |\det(\text{Ad}_p | \mathfrak{g}_{\lambda,s}(F))|_F$$

et

$$\delta_{\lambda,(s,t)}(p) = \delta_{\lambda,s}(p)\delta_{\lambda,t}(p)^{-1} = |\det(\text{Ad}_p | \mathfrak{g}_{\lambda,s}(F)/\mathfrak{g}_{\lambda,t}(F))|_F.$$

On a donc

$$\delta_{\lambda,1}(p) = \delta_P(p) \quad \text{et} \quad \delta_{\lambda,(1,k)}(p) = \delta_P(p)\delta_{\lambda,k}(p)^{-1}.$$

REMARQUE 3.1.1. — Si $\mathcal{X} \neq U_P$, il n'y a pas de mesure de Radon $G(F)$ -invariante à gauche non nulle sur $G(F) \times^{P(F)} \mathcal{X}$ mais il existe une fonctionnelle linéaire $G(F)$ -invariante à gauche non nulle sur l'espace des sections du fibré en droite sur $G(F) \times^{P(F)} \mathcal{X}$ défini par $\delta_{\lambda,(1,k)}^{-1}$. Nous aurons aussi besoin de considérer le quotient

$$P(F) \times^{P(F)} \mathcal{X} = (P(F) \times \mathcal{X})/P(F) \simeq \mathcal{X}.$$

C'est pourquoi nous introduisons le groupe H ci-dessous (en pratique on prendra $H = G$ ou $H = P$).

Soit H un sous-groupe fermé de G défini sur F et contenant P . Le groupe $H(F)$ est localement compact ; on peut donc le munir d'une mesure de Haar invariante à droite $d_r h$. Soit $\mathcal{H}_{F,u}^H$ l'espace des fonctions localement constantes Φ sur $H(F) \times \mathcal{X}$ qui vérifient, pour tout $(h, x) \in H(F) \times \mathcal{X}$:

- $\Phi((h, x) \cdot p) = \delta_{\lambda, (1, k)}(p)^{-1} \Phi(h, x)$ pour tout $p \in P(F)$;
- il existe un sous-ensemble compact $\Omega_\Phi \subset H(F) \times \mathcal{X}$ tel que si $\Phi(h, x) \neq 0$, alors il existe un $p \in P(F)$ tel que $(h, x) \cdot p \in \Omega_\Phi$.

Observons que pour $\Phi \in \mathcal{H}_{F,u}^H$ et $(h, x) \in H(F) \times \mathcal{X}$, on a

$$\Phi(h, xx') = \Phi(hx'^{-1}, x'x) \quad \text{pour tout } x' \in \mathcal{X}.$$

Pour $\theta \in C_c^\infty(H(F) \times \mathcal{X})$ et $(h, x) \in H(F) \times \mathcal{X}$, posons

$$\Phi_\theta(h, x) = \int_{P(F)} \theta(hp, p^{-1}xp) \delta_{\lambda, k}(p)^{-1} d_r p.$$

Puisque $d_l p = \delta_P(p)^{-1} d_r p$ est une mesure de Haar invariante à gauche sur $P(F)$, la fonction Φ_θ appartient à $\mathcal{H}_{F,u}^H$.

LEMME 3.1.2. — (i) L'application linéaire $C_c^\infty(H(F) \times \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{H}_{F,u}^H$, $\theta \mapsto \Phi_\theta$ est surjective.

(ii) Si $\Phi_\theta = 0$ alors

$$\int_{H(F) \times \mathcal{X}} \theta(h, x) d_r h dx = 0.$$

Démonstration. — Posons $\mathcal{C} = C_c^\infty(H(F) \times \mathcal{X})$ et $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{F,u}^H$. Soit Ω un sous-ensemble ouvert compact de $H(F) \times \mathcal{X}$ de la forme $\Omega_1 \times \Omega_2$. On suppose que Ω_1 est de la forme $K_1 h_1$ pour un sous-groupe ouvert compact K_1 de $H(F)$ et un élément $h_1 \in H(F)$. On note \mathcal{C}_Ω le sous-espace de \mathcal{C} formé des fonctions à support dans $\Omega \cdot P(F)$ qui sont constantes sur $\Omega \cdot p = \Omega_1 p \times p^{-1} \Omega_2 p$ pour tout $p \in P(F)$. On définit de la même manière le sous-espace \mathcal{H}_Ω de \mathcal{H} . Observons que si $\Omega \cdot p \cap \Omega \cdot p' \neq \emptyset$ pour des éléments $p, p' \in P(F)$, alors $p' \in h_1^{-1} K_1 h_1 p$ et $\delta_{\lambda, (1, k)}(p') = \delta_{\lambda, (1, k)}(p)$. Cela donne un sens à la définition de \mathcal{H}_Ω : on a $\mathcal{H}_\Omega \neq \{0\}$ et $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_\Omega) = 1$. L'application $\theta \mapsto \Phi_\theta$ envoie \mathcal{C}_Ω dans \mathcal{H}_Ω et il suffit de vérifier les assertions du lemme pour ces deux espaces.

Prouvons (i). Soit $\Phi \in \mathcal{H}_\Omega$. Notons $\mathbf{1}_\Omega$ la fonction caractéristique de Ω et pour $\omega = (h, x) \in \Omega$, posons

$$\kappa(\omega) = \int_{P(F)} \mathbf{1}_\Omega(\omega \cdot p) \delta_{\lambda, (1, k)}(p)^{-1} d_r p > 0.$$

La fonction $\theta = \kappa^{-1} \cdot \mathbf{1}_\Omega \cdot \Phi$ appartient à \mathcal{C}_Ω et on a $\Phi_\theta = \Phi$.

Prouvons (ii). Pour $\theta \in \mathcal{C}_\Omega$ et $p \in P(F)$, notons $\theta^p \in G(F) \times \mathcal{X}$ la fonction définie par $\theta^p(h, x) = \theta(hp, p^{-1}xp)$. C'est encore un élément de \mathcal{C}_Ω et tout élément de \mathcal{C}_Ω est combinaison linéaire (finie) de fonctions $(\mathbf{1}_\Omega)^p$ avec $p \in P(F)$. On en déduit que les fonctionnelles linéaires T sur \mathcal{C}_Ω telles que $T(\theta^p) = \delta_{\lambda, k}(p)T(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathcal{C}_\Omega$ et

tout $p \in P(F)$, forment un espace vectoriel de dimension 1. Comme les fonctionnelles linéaires

$$T(\theta) = \int_{H(F) \times \mathcal{X}} \theta(h, x) d_r h dx \quad \text{et} \quad T'_\omega(\theta) = \Phi_\theta(\omega) \quad \text{avec} \quad \omega \in \Omega$$

sont dans cet espace, elles sont proportionnelles. Cela implique (ii). □

On note $\mu_{F,u}^H$ la fonctionnelle linéaire positive sur l'espace $\mathcal{H}_{F,u}^H$ définie par

$$\langle \mu_{F,u}^H, \Phi \rangle = \int_{H(F) \times \mathcal{X}} \theta(h, x) d_r h dx$$

pour une (i.e. pour toute) fonction $\theta \in C_c^\infty(H(F) \times \mathcal{X})$ telle que $\Phi = \Phi_\theta$. On écrit aussi

$$\langle \mu_{F,u}^H, \Phi \rangle = \int_{H(F) \times P(F) \times \mathcal{X}} \Phi(h, x) d\mu_{F,u}^H(h, x).$$

Le groupe $H(F)$ opère à gauche sur l'espace $H(F) \times \mathcal{X}$ par translations sur la première variable. L'application linéaire $\theta \mapsto \Phi_\theta$ est $H(F)$ -équivariante pour cette action : pour $h \in H(F)$, en notant ${}^h \xi$ la fonction $(h', x) \mapsto \xi(h^{-1}h', x)$ pour toute fonction ξ sur $H(F) \times \mathcal{X}$, on a ${}^h(\Phi_\theta) = \Phi_{{}^h \theta}$. Soit δ_H le caractère-module de $H(F)$. Puisque $d_1 h = \delta_H(h)^{-1} d_r h$ est une mesure de Haar invariante à gauche sur $H(F)$, on a le

LEMME 3.1.3. — *Pour tout $\Phi \in \mathcal{H}_{F,u}^H$ et tout $h \in H(F)$, on a*

$$\langle \mu_{F,u}^H, {}^h \Phi \rangle = \delta_H(h) \langle \mu_{F,u}^H, \Phi \rangle.$$

REMARQUE 3.1.4. —

- (i) On peut de la même manière définir une fonctionnelle linéaire $H(F)$ -invariante à gauche sur l'espace des sections du fibré en droite sur $H(F) \times^{P(F)} \mathcal{X}$ défini par $\delta_H \delta_{\lambda, (1,k)}^{-1}$: il suffit pour cela de remplacer $\delta_{\lambda, k}(p)$ par $\delta_H(p) \delta_{\lambda, k}(p)$ dans la définition de l'application $\theta \mapsto \Phi_\theta$ et $d_r h$ par $d_1 h$ dans celle de la fonctionnelle linéaire $\mu_{F,u}^H$. Mais pour $H = P$, on préfère travailler avec une fonctionnelle linéaire qui se transforme à gauche suivant δ_P .
- (ii) Pour $H = P$ et $\Phi \in \mathcal{H}_{F,u}^P$, la fonction $\Phi(1, \cdot)$ sur \mathcal{X} est lisse et à support compact, et elle vérifie

$$\Phi(1, p x p^{-1}) = \delta_{\lambda, (1,k)}(p) \Phi(p, x) \quad \text{pour tout} \quad (p, x) \in P(F) \times \mathcal{X}.$$

L'application $\Phi \mapsto \Phi(1, \cdot)$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}_{F,u}^P$ sur un sous-espace de $C_c^\infty(\mathcal{X})$ qui n'est pas vraiment commode à utiliser et dont la définition passe de toutes façons par celle de $\mathcal{H}_{F,u}^P$.

Tous les objets que l'on vient de définir ne dépendent que de la F -lame $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{F,u}$ à laquelle appartient u , du groupe $H(F)$ et du choix des mesures de Haar. Rappelons que la F -lame \mathcal{Y} détermine l'ensemble \mathcal{X} , la F -strate \mathfrak{Y} et l'ensemble \mathfrak{X} .

NOTATION 3.1.5. — Pour alléger l'écriture, on pose :

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{F,u}^G$ et $\mu = \mu_{F,u}^G$;
- $\mathcal{H}^P = \mathcal{H}_{F,u}^P$ et $\mu^P = \mu_{F,u}^P$.

On a une action à droite de \mathcal{X} sur $P(F) \times \mathcal{X}$ donnée par $(p, x) \star x' = (p, xp^{-1}x'p)$ pour tout $(p, x) \in P(F) \times \mathcal{X}$ et tout $x' \in \mathcal{X}$. Cette action *ne commute pas* à l'action à gauche de $P(F)$ par translations sur la première variable. Précisément, pour tous $(p, x), (p', x') \in P(F) \times \mathcal{X}$, on a

$$p \cdot ((p', x') \star x) = (p \cdot (p', x')) \star p x p^{-1}.$$

En revanche elle commute à l'action à droite de $P(F)$ donnée par

$$(p, x) \cdot p' = (p p', p'^{-1} x p')$$

et par conséquent rend \mathcal{X} -équivariante l'application $C_c^\infty(P(F) \times \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{H}^P$, $\theta \mapsto \Phi_\theta$: pour tout $x' \in \mathcal{X}$, on a

$$(\Phi_\theta)^{\star x'} = \Phi_{\theta^{\star x'}}$$

où, pour toute fonction ξ sur $P(F) \times \mathcal{X}$, on a posé $\xi^{\star x'}(p, x) = \xi((p, x) \star x')$.

REMARQUE 3.1.6. — Cette action de \mathcal{X} sur \mathcal{H}^P n'est autre que celle déduite des translations à droite via l'isomorphisme $\Phi \mapsto \Phi(1, \cdot)$ de 3.1.4 (ii) : pour $\Phi \in \mathcal{H}^P$ et $x \in \mathcal{X}$, on a $\Phi^{\star x}(1, \cdot) = (\Phi(1, \cdot))^x$ avec $\psi^x(x') = \psi(x'x)$.

On en déduit que la fonctionnelle linéaire μ^P sur \mathcal{H}^P est \mathcal{X} -invariante pour cette action à droite :

LEMME 3.1.7. — *Pour tout $\Phi \in \mathcal{H}^P$ et tout $x \in \mathcal{X}$, on a*

$$\langle \mu^P, \Phi^{\star x} \rangle = \langle \mu^P, \Phi \rangle.$$

Les propriétés d'invariance 3.1.3 et 3.1.7 impliquent le

LEMME 3.1.8. — *À multiplication près par une constante non nulle, μ^P est l'unique fonctionnelle linéaire non nulle sur \mathcal{H}^P qui se transforme à gauche suivant δ_P (3.1.3) et soit \mathcal{X} -invariante à droite (3.1.7).*

Démonstration. — Fixons un système fondamental $\{K^\nu\}_{\nu \in I}$ de voisinages de l'unité dans $P(F) \times \mathcal{X}$ formé de sous-groupes ouverts compacts de la forme $K^\nu = K_1^\nu \times K_2^\nu$ avec $K_1^\nu \subset P(F)$, $K_2^\nu \subset \mathcal{X}$ et tel que K_2^ν soit distingué dans K_1^ν . Pour $\nu \in I$, notons $\mathbf{1}_{K^\nu}$ la fonction caractéristique de K^ν , posons $\xi^\nu = \Phi_{\mathbf{1}_{K^\nu}} \in \mathcal{H}^P$ et notons $\mathcal{H}^{P, \nu}$ le sous-espace de \mathcal{H}^P engendré par les fonctions ${}^p((\xi^\nu)^{\star x})$ pour $(p, x) \in P(F) \times \mathcal{X}$. Puisque ${}^p(\Phi^{\star x}) = ({}^p\Phi)^{\star p x p^{-1}}$, $\mathcal{H}^{P, \nu}$ est aussi le sous-espace de \mathcal{H}^P engendré par les fonctions $({}^p(\xi^\nu))^{\star x}$ pour $(p, x) \in P(F) \times \mathcal{X}$. D'autre part les isomorphismes

$$\mathcal{H}^P \rightarrow \mathcal{H}^P, \Phi \mapsto {}^p((\Phi)^{\star x}) \quad \text{pour } (p, x) \in P(F) \times \mathcal{X}$$

stabilisent $\mathcal{H}^{P, \nu}$.

Puisque $\mathcal{H}^P = \bigcup_{\nu \in I} \mathcal{H}^{P, \nu}$ et $\mathcal{H}^{P, \nu} \supset \mathcal{H}^{P, \nu'}$ si $K^\nu \subset K^{\nu'}$, pour définir une fonctionnelle linéaire η sur \mathcal{H}^P qui se transforme à gauche suivant $P(F)$ et soit \mathcal{X} -invariante à droite, il suffit de définir une famille compatible $\{\eta^\nu\}_{\nu \in I}$ où η^ν est une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{H}^{P, \nu}$ telle que $\langle \eta^\nu, {}^p(\Phi^{\star x}) \rangle = \delta_P(p) \langle \eta^\nu, \Phi \rangle$ pour tout $\Phi \in \mathcal{H}^{P, \nu}$ et tout $(p, x) \in P(F) \times \mathcal{X}$. Une telle fonctionnelle est entièrement déterminée par la valeur $\langle \eta^\nu, \xi^\nu \rangle$. Cela prouve le lemme. \square

3.2. Le lemme-clé. — Continuons avec les notations de 3.1. Posons

$$\overline{\mathcal{X}} = G_\lambda(k; F) (= G_{\lambda, k}(F)/G_{\lambda, k+1}(F))$$

et notons $\overline{\mathcal{Y}}$ l'image de \mathcal{Y} dans $\overline{\mathcal{X}}$. Pour $x \in \mathcal{X}$ d'image \bar{x} dans $\overline{\mathcal{X}}$ et $i \in \mathbb{Z}$, posons (cf. 2.6)

$$\alpha_i(\bar{x}) = \eta_{\lambda, x}(i; F) \quad \text{et} \quad d_i = \dim_F(\mathfrak{g}_\lambda(i; F)).$$

D'après 2.6.2 (prouvé en 2.9) et 2.6.4, pour $i = 1, \dots, k-1$, l'application $\alpha_{-i}(\bar{u})$ est un isomorphisme ; et on a $d_{k-i} = d_{-i} = d_i$. Fixons une F -base $(H_{-i, j})_{1 \leq j \leq d_i}$ de $\mathfrak{g}_\lambda(-i; F)$ et une F -base $(H_{k-i, j})_{1 \leq j \leq d_i}$ de $\mathfrak{g}_\lambda(k-i; F)$; on peut par exemple prendre $H_{k-i, j} = \alpha_{-i}(\bar{u})(H_{-i, j})$. Pour $\bar{x} \in \overline{\mathcal{X}}$, notons $A_{-i}(\bar{x}) \in M(d_i, F)$ la matrice de $\alpha_{-i}(\bar{x})$ relativement à ces bases et posons

$$\varphi_{-i}(\bar{x}) = |\det_F(A_{-i}(\bar{x}))|_F^{1/2}.$$

Soit

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi_{-1}(\bar{x}) \cdots \varphi_{1-k}(\bar{x}) \geq 0.$$

D'après loc. cit., on a

$$\varphi(\bar{y}) > 0 \quad \text{pour tout} \quad \bar{y} \in \overline{\mathcal{Y}}.$$

Observons qu'à multiplication près par une constante > 0 , la fonction φ ne dépend pas du choix des bases $(H_{-i, j})$ et $(H_{k-i, j})$ pour $i = 1, \dots, k-1$.

LEMME 3.2.1. — Pour $\bar{x} \in \overline{\mathcal{X}}$, on a $\varphi(\bar{x}^{-1}) = \varphi(\bar{x})$.

Démonstration. — On peut supposer u en position standard et $\lambda \in \check{X}(A_0)$. Le F -isomorphisme $j_0 : u_0 \rightarrow U_0$ induit par restriction et passage aux quotients un F -isomorphisme $j_\lambda(k) : \mathfrak{g}_\lambda(k) \rightarrow G_\lambda(k) = G_{\lambda, k}/G_{\lambda, k+1}$. Pour $\bar{x} \in \overline{\mathcal{X}}$ et $i = 1, \dots, k-1$, en posant $\overline{X} = j_\lambda(k)^{-1}(\bar{x}) \in \mathfrak{g}_\lambda(k; F)$, on a

$$\alpha_{-i}(\bar{x}) = [\overline{X}, \cdot] : \mathfrak{g}_\lambda(-i; F) \rightarrow \mathfrak{g}_\lambda(k-i; F).$$

D'où le lemme, puisque $\bar{x}^{-1} = j_\lambda(k)(-\overline{X})$. □

Le lemme suivant est l'analogie du lemma 2 de [RR] :

LEMME 3.2.2. — Pour tout $\bar{x} \in \overline{\mathcal{X}}$ et tout $m \in M_\lambda(F)$, on a

$$\varphi(\text{Int}_m(\bar{x})) = \delta_{\lambda, (1, k)}(m) \varphi(\bar{x}).$$

Démonstration. — Pour $i \in \{\pm 1, \dots, \pm(k-1)\}$, notons $B_i(m) \in M(d_i, F)$ la matrice de l'automorphisme Ad_m de $\mathfrak{g}_\lambda(i; F)$ relativement à la base $(H_{i, j})$. On a

$$A_{-i}(\text{Int}_m(\bar{x})) = B_{k-i}(m) A_{-i}(\bar{x}) B_{-i}(m^{-1})$$

En observant que $|\det_F(B_{-i}(m^{-1}))|_F^{1/2} = |\det_F(B_i(m))|_F^{1/2}$, on obtient

$$\varphi(\text{Int}_m(\bar{x})) = |\det_F(B_1(m))|_F \cdots |\det_F(B_{k-1}(m))|_F \varphi(\bar{x}).$$

Or on a

$$|\det_F(B_1(m))|_F \cdots |\det_F(B_{k-1}(m))|_F = |\det_F(\text{Ad}_m | \mathfrak{g}_{\lambda, 1}(F)/\mathfrak{g}_{\lambda, k}(F))|_F,$$

ce qui achève la démonstration du lemme. □

3.3. Le résultat principal. — La F -paire parabolique minimale (P_0, A_0) de G étant fixée, on choisit un sous-groupe ouvert compact maximal K de $G(F)$ tel que

$$G(F) = KP_0(F).$$

Quitte à remplacer u par un conjugué dans $G(F)$, on peut supposer que u est en position standard (cf. 2.4) et $\lambda \in \check{X}(A_0)$. On a donc

$$\mathfrak{Y} = \text{Int}_K(\mathcal{Y}) (= \{kyk^{-1} \mid y \in \mathcal{Y}, k \in K\}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{X} = \text{Int}_K(\mathcal{X}).$$

Rappelons qu'il existe constante $c > 0$ (qui ne dépend que du choix des mesures de Haar) telle que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, on ait

$$\int_{K \times P(F)} f(kp) dk d_{\mathfrak{r}}p = c \int_{G(F)} f(g) dg$$

où dk est la mesure de Haar sur K déduite de dg par restriction. On normalise dg et $d_{\mathfrak{r}}p$ de telle manière que $c = 1$. Pour une fonction ϕ sur $G(F)$ ou sur $P(F)$, on note ${}^p\phi = \phi^{p^{-1}}$ la fonction $\phi \circ \text{Int}_{p^{-1}}$. Pour $f \in C_c^\infty(G(F))$ et $g \in G(F)$, on pose

$$f^K(g) = \int_K f(kgk^{-1}) dk.$$

LEMME 3.3.1. — Soit Λ une distribution sur $P(F)$. Si pour tout $p \in P(F)$, on a

$$\Lambda({}^p\phi) = \delta_P(p)\Lambda(\phi) \quad \text{pour toute fonction} \quad \phi \in C_c^\infty(P(F)),$$

alors la distribution D_Λ sur $G(F)$ définie par

$$D_\Lambda(f) = \Lambda(f^K) (= \Lambda(f^K|_{P(F)}))$$

est $G(F)$ -invariante (pour la conjugaison).

Démonstration. — Soit \mathcal{F}_P l'espace des fonctions localement constantes ϕ sur $G(F)$ telles que $\phi(gp) = \delta_P(p)^{-1}\phi(g)$ pour tout $(g, p) \in G(F) \times P(F)$. Pour $f \in C_c^\infty(G(F))$ et $g \in G(F)$, posons

$$\phi_f(g) = \int_{P(F)} f(gp) d_{\mathfrak{r}}p.$$

La fonction ϕ_f appartient à \mathcal{F}_P . L'application linéaire $C_c^\infty(G(F)) \rightarrow \mathcal{F}_P$, $f \mapsto \phi_f$ est surjective et $G(F)$ -équivariante pour l'action de $G(F)$ par translations à gauche sur les deux espaces. Considérons la fonctionnelle linéaire α sur \mathcal{F}_P donnée par

$$\langle \alpha, \phi \rangle = \int_K \phi(k) dk.$$

Puisque

$$\langle \alpha, \phi_f \rangle = \int_{G(F)} f(g) dg,$$

elle est invariante pour l'action de $G(F)$ par translations à gauche sur \mathcal{F}_P .

Pour $f \in C_c^\infty(G(F))$ et $g \in G(F)$, posons $\Theta_f(g) = \Lambda(f \circ \text{Int}_g|_{P(F)})$. La fonction Θ_f appartient à \mathcal{F}_P et l'application linéaire $f \mapsto \Theta_f$ est $G(F)$ -équivariante pour l'action de $G(F)$ par conjugaison sur $C_c^\infty(G(F))$ et par translations à gauche sur \mathcal{F}_P :

$$\Theta_f(xg) = \Theta_{f \circ \text{Int}_x}(g) \quad \text{pour tout} \quad x \in G(F).$$

Comme

$$\langle \alpha, \Theta_f \rangle = D_\Lambda(f),$$

cela démontre le lemme. □

Soient $d\bar{x}$ et dv des mesures de Haar sur $\overline{\mathcal{X}}$ et $\mathcal{V} = G_{\lambda, k+1}(F)$, choisies de telle manière que pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathcal{X})$, on ait l'égalité

$$\int_{\mathcal{X}} \phi(x) dx = \int_{\overline{\mathcal{X}} \times \mathcal{V}} \phi(\bar{x}v) d\bar{x} dv.$$

Pour $x \in \mathcal{X}$, on pose $\varphi(x) = \varphi(\bar{x})$.

PROPOSITION 3.3.2. — Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{Y}} \varphi(y) f^K(y) dy = \int_{\overline{\mathfrak{Y}} \times \mathcal{V}} \varphi(\bar{y}) f^K(\bar{y}v) d\bar{y} dv$$

est absolument convergente et définit une distribution $G(F)$ -invariante (pour la conjugaison) sur $G(F)$, que l'on note $I_{\mathfrak{Y}}(f) = I_{\mathfrak{Y}}^P(f^K)$. Observons que $I_{\mathfrak{Y}}(f) = 0$ pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$ qui s'annule sur \mathfrak{Y} .

Démonstration. — Il est clair que l'intégrale $I_{\mathfrak{Y}}(f)$ est absolument convergente et définit une distribution sur $G(F)$. Il faut prouver que cette distribution est $G(F)$ -invariante. Pour $\phi \in C_c^\infty(P(F))$, posons

$$\Lambda(\phi) = \int_{\overline{\mathfrak{Y}} \times \mathcal{V}} \varphi(\bar{y}) \phi(\bar{y}v) d\bar{y} dv.$$

Pour $p \in P(F)$ ($= P_\lambda(F)$), calculons $\Lambda(p\phi)$ avec ${}^p\phi = \phi \circ \text{Int}_{p^{-1}}$. Écrivons $p = mu$ avec $m \in M_\lambda(F)$ et $u \in U_\lambda(F)$. On a

$$\begin{aligned} \Lambda(p\phi) &= \int_{\overline{\mathfrak{Y}} \times \mathcal{V}} \varphi(\bar{y}) \phi(\text{Int}_{m^{-1}}(\bar{y}) \text{Int}_{p^{-1}}(v)) d\bar{y} dv \\ &= \delta_{\lambda, (k, k+1)}(m) \delta_{\lambda, k+1}(p) \int_{\overline{\mathfrak{Y}} \times \mathcal{V}} \varphi(\text{Int}_m(\bar{y})) \phi(\bar{y}v) d\bar{y} dv. \end{aligned}$$

En utilisant 3.2.2 et l'égalité $\delta_{\lambda, (1, k)}(m) \delta_{\lambda, (k, k+1)}(m) \delta_{\lambda, k+1}(p) = \delta_P(p)$, on obtient

$$\Lambda(p\phi) = \delta_P(p) \Lambda(\phi).$$

On conclut grâce à 3.3.1. □

REMARQUE 3.3.3. — La F -paire parabolique minimale $P_0 = M_0 \times U_0$ étant fixée, la F -lame standard \mathfrak{Y} est déterminée par la F -strate \mathfrak{Y} . Observons que la distribution $I_{\mathfrak{Y}}$ sur $G(F)$ dépend bien sûr du choix de la mesure de Haar dx sur \mathcal{X} mais aussi de celui du sous-groupe compact maximal K de $G(F)$ tel que $G(F) = KP_0(F)$. En effet, remplaçons par exemple K par $K' = pKp^{-1}$ pour un $p \in P_0(F)$ et notons $I'_{\mathfrak{Y}}$ la distribution sur $G(F)$ obtenue en remplaçant K par K' dans la définition de $I_{\mathfrak{Y}}$. Pour $f \in C_c^\infty(G(F))$ et $y \in \mathfrak{Y}$, on a $f^{K'}(y) = (p^{-1}f)^K(p^{-1}yp)$. On en déduit que

$$I'_{\mathfrak{Y}}(f) = I_{\mathfrak{Y}}^P(f^{K'}) = \delta_P(p) I_{\mathfrak{Y}}^P((p^{-1}f)^K) = \delta_P(p) I_{\mathfrak{Y}}(f).$$

Pour $\Phi \in \mathcal{H}$ et $(g, x) \in G(F) \times \mathcal{X}$, posons

$$\Phi_K(g, x) = \int_K \Phi(kg, x) dk.$$

La restriction de Φ_K à $P(F) \times \mathcal{X}$ appartient à \mathcal{H}^P .

LEMME 3.3.4. — Pour $\Phi \in \mathcal{H}$, on a

$$\langle \mu, \Phi \rangle = \langle \mu^P, \Phi_K \rangle.$$

Démonstration. — Pour $f \in C_c^\infty(G(F) \times \mathcal{X})$, on a

$$\int_{G \times \mathcal{X}} f(g, x) dg dx = \int_{P(F) \times \mathcal{X}} f_K(p, x) d_r p dx$$

où $f_K \in C_c^\infty(P(F) \times \mathcal{X})$ est définie comme Φ_K . D'autre part pour $\Phi = \Phi_f$ ($\in \mathcal{H}$), on a $\Phi_K = \Phi_{f_K}$. D'où le lemme. \square

THÉORÈME 3.3.5. — Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, on a l'égalité

$$I_{\mathfrak{y}}(f) = \int_{P(F) \times P(F) \times \mathcal{Y}} f^K(pyp^{-1}) \varphi(y) d\mu^P(p, y);$$

l'intégrale étant absolument convergente.

Démonstration. — Notons $\tilde{\mathcal{H}}^P$ le sous-espace de \mathcal{H}^P formé des fonctions à support dans $P(F) \times \mathcal{Y}$. Soient

$$\tilde{\mathcal{H}}^P \rightarrow C_c^\infty(\mathcal{Y}), \Phi \mapsto \psi_\Phi \quad \text{et} \quad C_c^\infty(\mathcal{Y}) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}^P, \psi \mapsto \Phi^\psi$$

les applications linéaires définies par

$$\psi_\Phi(y) = \varphi(y)^{-1} \Phi(1, y) \quad \text{et} \quad \Phi^\psi(p, y) = \varphi(y) \psi(pyp^{-1}).$$

Puisque

$$\psi_\phi(pyp^{-1}) = \varphi(y)^{-1} \Phi(p, y) \quad \text{pour tout } p \in P(F),$$

elles sont inverses l'une de l'autre ; ce sont donc des isomorphismes⁽¹²⁾.

Soit Λ' la distribution sur \mathcal{Y} définie par

$$\Lambda'(\psi) = \langle \mu^P, \Phi^\psi \rangle \quad \text{pour toute fonction } \psi \in C_c^\infty(\mathcal{Y}).$$

Observons que pour $p \in P(F)$, puisque $\Phi^{p\psi} = {}^p(\Phi^\psi)$ avec ${}^p\psi = \psi \circ \text{Int}_{p^{-1}}$, on a bien

$$\Lambda'({}^p\psi) = \delta_P(p) \Lambda'(\psi).$$

Soit $\psi \in C_c^\infty(\mathcal{Y})$. Posons $\Phi = \Phi^\psi$ et écrivons $\Phi = \Phi_\theta$ avec $\theta \in C_c^\infty(P(F) \times \mathcal{Y})$ comme en 3.1 :

$$\Phi(p, y) = \int_{P(F)} \theta(pp', p'^{-1}yp) \delta_{\lambda, k}(p') d_r p'.$$

⁽¹²⁾Notons \mathcal{X}^* l'ouvert de \mathcal{X} défini par $\mathcal{X}^* = \{x \in \mathcal{X} \mid \varphi(x) \neq 0\}$ et $\mathcal{H}^{P,*}$ ($\supset \tilde{\mathcal{H}}^P$) le sous-espace de \mathcal{H}^P formé des fonctions à support dans $P(F) \times \mathcal{X}^*$. On obtient de la même manière un isomorphisme $\mathcal{H}^{P,*} \simeq C_c^\infty(\mathcal{X}^*)$.

On a donc

$$\Lambda'(\psi) = \int_{P(F) \times P(F) \mathcal{Y}} \Phi(p, y) \, d\mu^P(p, y) = \int_{P(F) \times \mathcal{Y}} \theta(p, y) \, d_r p \, dy.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \int_{P(F) \times \mathcal{Y}} \theta(p, y) \, d_r p \, dy &= \int_{P(F)} \left(\int_{\mathcal{Y}} \theta(p, p^{-1}yp) \, d(p^{-1}yp) \right) \, d_r p \\ &= \int_{P(F)} \left(\int_{\mathcal{Y}} \theta(p, p^{-1}yp) \delta_{1,k}(p)^{-1} \, dy \right) \, d_r p \\ &= \int_{\mathcal{Y}} \Phi(1, y) \, dy. \end{aligned}$$

Puisque $\Phi(1, y) = \varphi(y)\psi(y)$, on a donc

$$\Lambda'(\psi) = \int_{\mathcal{Y}} \varphi(y)\psi(y) \, dy.$$

On a prouvé que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$ et tout sous-ensemble ouvert compact ω de \mathcal{Y} , on a l'égalité

$$\Lambda'(\mathbf{1}_\omega \cdot f^K|_{\mathcal{Y}}) = \int_{\omega} \varphi(y)f^K(y) \, dy.$$

Puisque l'intégrale $\int_{\mathcal{Y}} \varphi(y)f^K(y) \, dy = I_{\mathfrak{Y}}(f)$ est absolument convergente, le théorème de convergence dominée assure que l'intégrale

$$\Lambda'(f^K|_{\mathcal{Y}}) = \int_{P(F) \times P(F) \mathcal{Y}} f^K(pyp^{-1})\varphi(y) \, d\mu^P(p, y)$$

l'est aussi et qu'on a l'égalité $\Lambda'(f^K|_{\mathcal{Y}}) = I_{\mathfrak{Y}}(f)$. □

COROLLAIRE 3.3.6. — La mesure $\mu_{\mathcal{Y}}^\varphi$ sur $G(F) \times^{P(F)} \mathcal{Y}$ définie par

$$d\mu_{\mathcal{Y}}^\varphi(g, y) = \varphi(y) \, d\mu(g, y)$$

donne via l'homéomorphisme $\pi : G(F) \times^{P(F)} \mathcal{Y} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{Y}$ une mesure sur \mathfrak{Y} qui définit une mesure de Radon positive $G(F)$ -invariante non nulle sur $G(F)$. Précisément, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, on a l'égalité

$$I_{\mathfrak{Y}}(f) = \int_{G(F) \times^{P(F)} \mathcal{Y}} f(gyg^{-1})\varphi(y) \, d\mu(g, y);$$

l'intégrale étant absolument convergente.

REMARQUE 3.3.7. — Le même résultat vaut bien sûr pour les F -strates de \mathfrak{N}_F . D'ailleurs pour construire la fonction φ nous avons dû travailler avec la F -strate de \mathfrak{N}_F associée à \mathfrak{Y} (cf. 2.4).

3.4. Le cas où la $G(F)$ -orbite est ouverte dans la F -strate. — Continuons avec les hypothèses de 3.3. Si Ω est un sous-ensemble ouvert $P(F)$ -invariant de \mathcal{Y} , en remplaçant \mathcal{Y} par Ω dans la définition de $I_{\mathfrak{Y}}$, on obtient une distribution positive $G(F)$ -invariante non nulle sur $G(F)$: pour $f \in C_c^\infty(G(F))$, on pose

$$I_{\text{Int}_K(\Omega)}(f) = \int_{\Omega} \varphi(y) f^K(y) \, dy.$$

L'intégrale est absolument convergente et la distribution $I_{\text{Int}_K(\Omega)}$ annule toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$ qui s'annule sur $\text{Int}_K(\Omega)$. Observons que $\text{Int}_K(\Omega) \cap \mathcal{Y} = \Omega$.

On suppose dans cette sous-section que la $G(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,u}$ est ouverte dans la F -strate $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_{F,u}$. Puisque

$$(1) \quad \mathcal{O}_{F,u} \cap \mathcal{Y} = \{p^{-1}yp \mid p \in P(F)\} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_{F,u}^P \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{F,u} = \text{Int}_K(\mathcal{O}_{F,u}^P),$$

cela revient à supposer que la $P(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,u}^P$ est ouverte dans la F -lame $\mathcal{Y} = \mathfrak{Y}_{F,u}$. Pour $f \in C_c^\infty(G(F))$, on pose

$$I_u(f) = I_{\mathcal{O}_{F,u}}(f).$$

PROPOSITION 3.4.1. — *On suppose que la $P(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,u}^P$ est ouverte dans la F -lame $\mathcal{Y} = \mathfrak{Y}_{F,u}$.*

- (i) *Le centralisateur $G^u(F)$ de u dans $G(F)$ est unimodulaire.*
- (ii) *Si dg^u est une mesure de Haar sur $G^u(F)$, il existe une constante $c = c(dg^u) > 0$ telle que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, on ait*

$$\int_{G^u(F) \backslash G(F)} f(g^{-1}ug) \frac{dg}{dg^u} = c I_u(f);$$

l'intégrale étant absolument convergente.

Démonstration. — L'application $f \mapsto I_{\mathfrak{Y}}(f)$ définit *a fortiori* une mesure de Radon positive $G(F)$ -invariante (pour la conjugaison) non nulle $\mu_u = \mu_{\mathcal{O}_{F,u}}$ sur $\mathcal{O}_{F,u}$: pour toute fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathcal{O}_{F,u})$, on a

$$\langle \mu_u, \psi \rangle = \int_{K \times \mathcal{O}_{F,u}^P} \varphi(y) \psi(kyk^{-1}) \, dk \, dy.$$

Via l'homéomorphisme

$$G^u(F) \backslash G(F) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{F,u}, \quad g \mapsto g^{-1}ug,$$

on a donc une mesure de Radon positive $G(F)$ -invariante (à droite) non nulle sur $G^u(F) \backslash G(F)$. L'existence d'une telle mesure entraîne (i). Comme une telle mesure est unique à une constante (> 0) près, si dg^u est une mesure de Haar sur $G^u(F)$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathcal{O}_{F,u})$, on ait

$$\int_{G^u(F) \backslash G(F)} \psi(g^{-1}ug) \frac{dg}{dg^u} = c \langle \mu_u, \psi \rangle.$$

On en déduit que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$ et tout sous-ensemble ouvert compact ω de $\mathcal{O}_{F,u}$, on a l'égalité

$$\int_{G^u(F) \backslash G(F)} \mathbf{1}_\omega(g^{-1}ug) f(g^{-1}ug) \frac{dg}{dg^u} = c \langle \boldsymbol{\mu}_u, \mathbf{1}_\omega \cdot f |_{\mathcal{O}_{F,u}} \rangle.$$

Puisque l'intégrale

$$\int_{\mathcal{O}_{F,u}^P} \varphi(y) f^K(y) dy = I_u(f)$$

est absolument convergente, d'après le théorème de convergence dominée, cela prouve (ii). \square

COROLLAIRE 3.4.2. — *Supposons que toutes les $P(F)$ -orbites $\mathcal{O}_{F,y}^P$ avec $y \in \mathcal{Y}$ soient ouvertes (et donc aussi fermées) dans \mathcal{Y} . Choisissons un ensemble représentants $\{u_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{Y}$ des $P(F)$ -orbites dans \mathcal{Y} . Pour chaque $i \in I$, normalisons la mesure de Haar dg^{u_i} sur $G^{u_i}(F)$ par $c(dg^{u_i}) = 1$. Alors pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, on a*

$$I_{\mathfrak{Y}}(f) = \sum_{i \in I} I_{u_i}(f).$$

REMARQUE 3.4.3. — On a la même proposition pour $Y \in \mathfrak{N}_F$, sous l'hypothèse où la $G(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,Y}$ est ouverte dans la F -strate $\mathfrak{Y}_{F,Y}$.

3.5. Comparaison avec les résultats connus. — Pour $x \in G$, on note \mathcal{O}_x l'orbite géométrique $\text{Int}_G(x)$; de même pour $X \in \mathfrak{g}$, on pose $\mathcal{O}_X = \text{Ad}_G(X)$.

Supposons tout d'abord $p = 1$. Dans ce cas on sait que la F -strate $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_{F,u}$ d'un élément $u \in \mathfrak{U}_F$ est l'ensemble $\mathcal{O}_u(F)$ des points F -rationnels de l'orbite géométrique \mathcal{O}_u . Cet ensemble est réunion finie de $G(F)$ -orbites, l'une d'elle étant la $G(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,u}$, et chacune de ces $G(F)$ -orbites est ouverte et fermée dans \mathfrak{Y} . La mesure sur \mathfrak{Y} définie par 3.3.6 donne une mesure de Radon positive $G(F)$ -invariante non nulle sur $\mathcal{O}_{F,u}$ qui (d'après 3.4.1) définit une mesure de Radon sur $G(F)$; c'est le théorème de Deligne-Ranga Rao [RR].

Supposons maintenant $p > 1$. Pour les éléments séparables de \mathfrak{U}_F , resp. \mathfrak{N}_F , on sait d'après [L, 3.5.6] que les points F -rationnels de l'orbite géométrique sont contenus dans la F -strate : pour $u \in \mathfrak{U}_F$ séparable, on a l'inclusion $\mathcal{O}_u(F) \subset \mathfrak{Y}_{F,u}$; et pour $Y \in \mathfrak{N}_F$ séparable, on a l'inclusion $\mathcal{O}_Y(F) \subset \mathfrak{Y}_{F,Y}$. Si de plus p est très bon pour G , alors tous les éléments de \mathfrak{U}_F , resp. \mathfrak{N}_F , sont séparables (cf. [L, 3.5.4]) et les inclusions précédentes sont des égalités [L, 3.5.7].

Avant de poursuivre, introduisons une notion intermédiaire entre « p très bon » et « p bon » pour G , celle de groupe « F -standard » (McNinch [MN, 2.2, def. 3]). Le groupe G est dit F -standard s'il existe une F -isogénie séparable (donc centrale) entre G et un groupe réductif connexe H défini sur F telle que :

- (S1) le groupe dérivé H_{der} de H soit simplement connexe ;
- (S2) p soit bon pour H , i.e. pour H_{der} ;
- (S3) il existe une forme bilinéaire H -invariante non dégénérée sur $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$.

Observons que la condition (S3) porte sur \mathfrak{h} et non sur $\mathfrak{h}_{\text{der}} = \text{Lie}(H_{\text{der}})$ et qu'elle est préservée par les isogénies séparables. Elle assure que \mathfrak{h} est une somme directe d'algèbres de Lie de la forme suivante (cf. [J, 2.9]) : une algèbre de Lie simple qui n'est pas de type \mathbf{A}_l ; une algèbre de Lie isomorphe à \mathfrak{sl}_n avec $(p, n) = 1$; une algèbre de Lie isomorphe à \mathfrak{gl}_n ; une algèbre de Lie commutative (formée d'éléments centraux dans \mathfrak{h}). En particulier p n'est pas forcément *très bon* pour H . Néanmoins, la description ci-dessus assure que \mathfrak{h} est muni d'une forme bilinéaire H -invariante *symétrique* non dégénérée ; observons que tout comme (S3), cette propriété est invariante par isogénie séparable.

Si G est F -standard, on sait d'après [MN, prop. 6] que toutes les orbites géométriques nilpotentes dans \mathfrak{h} , resp. \mathfrak{g} , sont séparables.

La proposition suivante, jointe à 3.4.1, donne le théorème de Deligne-Ranga Rao pour les orbites rationnelles.

PROPOSITION 3.5.1. — *Supposons que G soit F -standard.*

- (i) *Pour $u \in \mathfrak{U}_F$, la $G(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,u}$ est ouverte dans la F -strate $\mathfrak{Y}_{F,u}$.*
- (ii) *Pour $Y \in \mathfrak{N}_F$, la $G(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,Y}$ est ouverte dans la F -strate $\mathfrak{Y}_{F,Y}$.*

Démonstration. — Commençons par le point (ii). Soient $Y \in \mathfrak{N}_F \setminus \{0\}$ (pour $Y = 0$ il n'y a rien à démontrer), $\lambda \in \Lambda_{F,Y}^{\text{opt}}$ et $k = m_Y(\lambda)$. Posons $Y' = Y(k) \in \mathfrak{g}_\lambda(k; F)$. Puisque λ est (F, Y') -optimal (d'après [L, 2.8.2]) et Y' est séparable, on a

$$\mathfrak{g}^{Y'} = \text{Lie}(G^{Y'}) \subset \mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{g}_{\lambda,0}.$$

Puisque G est F -standard, on sait que :

- toutes les orbites géométriques nilpotentes de \mathfrak{g} sont séparables ;
- il existe une forme bilinéaire G -invariante *symétrique* non dégénérée sur \mathfrak{g} .

On en déduit comme dans la preuve de [J, lemma 5.7] que

$$(1) \quad [Y', \mathfrak{g}_\lambda(i-k)] = \mathfrak{g}_\lambda(i) \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{N}^*.$$

Comme $\mathfrak{p}_\lambda = \bigoplus_{i \geq k} \mathfrak{g}_\lambda(i-k)$, on obtient que $[Y', \mathfrak{p}_\lambda] = \mathfrak{g}_{\lambda,k}$ puis (par approximations successives) que $[Y, \mathfrak{p}_\lambda] = \mathfrak{g}_{\lambda,k}$. Par conséquent l'application $P_\lambda \rightarrow \mathfrak{g}_{\lambda,k}$, $p \mapsto \text{Ad}_p(Y)$ est submersive. Elle induit une application ouverte $P_\lambda(F) \rightarrow \mathfrak{g}_{\lambda,k}(F)$ qui assure que la $P_\lambda(F)$ -orbite de Y est ouverte dans la F -lame $\mathcal{Y}_{F,Y}$.

Prouvons (i). Soit $u \in \mathfrak{U}_F \setminus \{1\}$. On suppose que u est en position standard. Soient λ l'unique élément de $\tilde{X}(A_0)$ qui soit (F, u) -optimal et $k = m_u(\lambda)$. Posons $Y = j_0^{-1}(u) \in \mathfrak{g}_{\lambda,k}(F)$. Le F -isomorphisme $j_0 : \mathfrak{u}_0 \rightarrow U_0(F)$ induit par restriction et passage aux quotients un F -isomorphisme de variétés

$$j_\lambda(k) : \mathfrak{g}_\lambda(k) \rightarrow G_\lambda(k) = G_{\lambda,k}/G_{\lambda,k+1}.$$

D'après [L, 3.4.2], l'isomorphisme $j_\lambda(k)$ est M_λ -équivariant et c'est un isomorphisme de groupes⁽¹³⁾. Notons $\mathcal{O}_{F,u}^{M_\lambda}$ la $M_\lambda(F)$ -orbite de u . Compte-tenu de ce que l'on a prouvé pour Y , on obtient via $j_\lambda(k)$ que l'ensemble $\mathcal{O}_{F,u}^{M_\lambda} G_{\lambda,k+1}(F)$ est ouvert dans

⁽¹³⁾ Observons que si de plus G est F -déployé, alors $j_\lambda(k)$ munit $G_\lambda(k)$ d'une structure de M_λ -module défini sur F (loc. cit.).

$G_{\lambda,k}(F)$. D'autre part grâce à (1) on obtient (par approximations successives) que la $U_\lambda(F)$ -orbite de u est égale à $uG_{\lambda,k+1}(F)$. Cela prouve que la $P_\lambda(F)$ -orbite de u est égale à $\mathcal{O}_{F,u}^{M_\lambda} G_{\lambda,k+1}(F)$, donc ouverte dans la F -lame $\mathcal{Y}_{F,u}$. On en déduit que la $G(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,u}$ est ouverte dans la F -strate $\mathfrak{Y}_{F,u}$. \square

REMARQUE 3.5.2. —

- (i) Si p est *bon* pour G , d'après la théorie de Bala-Carter (cf. [J, 4]), il n'y a qu'un nombre fini d'orbites géométriques nilpotentes dans \mathfrak{g} . Si de plus on sait que toutes les orbites géométriques des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}(F)$ sont séparables, e.g. si p est *très bon*, alors d'après McNinch [MN, theorem 40], il n'y a qu'un nombre fini de $G(F)$ -orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}(F)$.
- (ii) L'hypothèse « G est F -standard » est meilleure que « p est très bon » mais elle n'est pas optimale. Par exemple $G = \mathrm{PGL}_{mp}$ n'est pas F -standard ; or dans ce cas les F -strates de \mathfrak{U}_F , resp. \mathfrak{N}_F , coïncident avec les $G(F)$ -orbites et les points (i) et (ii) de 3.5.1 sont trivialement vrais.

3.6. Désintégration de la mesure sur la F -lame. — On prouve dans cette sous-section que sous certaines hypothèses moins fortes que celle de 3.4 (voir 3.6.4), on peut désintégrer la mesure $\varphi(y) dy$ au voisinage de u dans la F -lame \mathcal{Y} et en déduire la convergence de l'intégrale orbitale unipotente associée à la $G(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,u}$. Cela améliore les résultats connus (cf. 3.5).

Soient $u \in \mathfrak{U}_F \setminus \{1\}$, $\lambda \in \Lambda_{F,u}^{\mathrm{opt}}$ et $k = m_u(\lambda)$. On suppose comme en 3.3 que u est en position standard et que $\lambda \in \check{X}(A_0)$. On pose $P = P_\lambda$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{F,u}$ et $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_{F,u}$.

Pour $y \in \mathcal{Y}$, si le centralisateur $G^y(F)$ de y dans $G(F)$ est unimodulaire, le choix d'une mesure de Haar dg^y sur $G^y(F)$ définit une « mesure de Haar » $d\bar{g}_y = \frac{dg^y}{dg^y}$ sur l'espace quotient $G^y(F) \backslash G(F)$, c'est-à-dire une fonctionnelle linéaire positive non nulle et $G(F)$ -invariante à droite sur $C_c^\infty(G^y(F) \backslash G(F))$. La question est : via l'homéomorphisme

$$G^y(G) \backslash G(F) \rightarrow \mathcal{O}_{F,y}, g \mapsto g^{-1}yg,$$

cette fonctionnelle linéaire définit-elle une mesure de Radon sur $G(F)$? Autrement dit, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, l'intégrale orbitale

$$(1) \quad I_y(f) = \int_{G^y(F) \backslash G(F)} f(g^{-1}yg) d\bar{g}_y$$

est-elle absolument convergente?

Pour $y \in \mathcal{Y}$, commençons par rappeler la notion de « mesure de Haar » sur l'espace quotient $G^y(F) \backslash P(F)$. Même si ce n'est pas nécessaire, on suppose toujours que $G^y(F)$ est unimodulaire. Notons \mathcal{F}_y l'espace des fonctions $h \in C^\infty(P(F))$ telles que :

- $h(gp) = \delta_P(g)^{-1}h(p)$ pour tout $g \in G^y(F)$ et tout $p \in P(F)$;
- il existe un sous-ensemble compact Ω_h de $P(F)$ tel que le support de f soit contenu dans $G^y(F)\Omega_h$.

REMARQUE 3.6.1. — Observons que pour $y \in \mathcal{Y}$, puisque $\varphi(y) \neq 0$, pour tout $g \in G^y(F)$, on a $\delta_{\lambda,(1,k)}(g) = 1$ c'est-à-dire $\delta_P(g) = \delta_{\lambda,k}(g)$.

À une constante > 0 près, il existe une unique fonctionnelle linéaire positive non nulle ν_y sur \mathcal{F}_y qui soit invariante par translations à droite par $P(F)$. Concrètement, on choisit une mesure de Haar dg^y sur $G^y(F)$. Toute fonction $h \in \mathcal{F}_y$ s'écrit

$$h(p) = \int_{G^y(F)} \Psi(gp) \delta_P(g) dg^y$$

pour une fonction $\Psi \in C_c^\infty(P(F))$. Cette fonction n'est pas unique mais l'intégrale $\int_{P(F)} \Psi(p) d_r p$ est bien définie (i.e. elle ne dépend pas du choix de Ψ) ; on la note

$$\langle \nu_y, h \rangle = \int_{G^y(F) \backslash P(F)} h(p) d\nu_y(p).$$

La mesure de Haar à droite $d_r p$ sur $P(F)$ étant fixée, la mesure de Haar dg^y sur $G^y(F)$ détermine ν_y et réciproquement.

La question posée plus haut, à savoir la convergence absolue de l'intégrale (1), est équivalente à : via l'homéomorphisme

$$G^y(F) \backslash P(F) \rightarrow \mathcal{O}_{F,y}^P, p \mapsto p^{-1}yp,$$

la fonctionnelle linéaire ν_y définit-elle une mesure de Radon sur $P(F)$? Autrement dit, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(P(F))$, l'intégrale orbitale

$$(2) \quad I_y^P(\phi) = \int_{G^y(F) \backslash P(F)} \phi(p^{-1}yp) \delta_P(p)^{-1} d\nu_y(p)$$

est-elle absolument convergente?

REMARQUE 3.6.2. — Rappelons que $G(F) = KP(F) = P(F)K$ et que les mesures de Haar dg , dk et $d_r p$ sont normalisées de telle manière que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, on ait l'égalité $\int_{G(F)} f(g) dg = \int_{K \times P(F)} f(kp) dk d_r p$. Alors pour $f \in C_c^\infty(G(F))$, on a l'égalité (au moins formellement)

$$I_y(f) = I_y^P(f^K).$$

Soit

$$\mathcal{Y}/P(F) (= \mathfrak{Y}/G(F))$$

l'espace des $P(F)$ -orbites dans \mathcal{Y} , que l'on munit de la topologie quotient. Si ω est un ouvert de \mathcal{Y} , l'ensemble $\bigcup_{p \in P(F)} p^{-1}\omega p$ est encore ouvert dans \mathcal{Y} . Par conséquent le morphisme quotient

$$\mathbf{q} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}/P(F)$$

est une application ouverte. Pour $y \in \mathcal{Y}$, on note

$$\mathcal{O}_{F,y}^P = \{p^{-1}yp \mid p \in P(F)\}$$

la $P(F)$ -orbite de y , que l'on identifie à l'élément $\mathbf{q}(y)$ de $\mathcal{Y}/P(F)$.

On veut décrire le comportement des $P(F)$ -orbites de \mathcal{Y} au voisinage de u , en imposant certaines conditions de « régularité » aux centralisateurs $G^y(F)$ des éléments $y \in \mathcal{Y}$ au voisinage de u . Pour cela il est commode d'introduire la définition suivante.

DÉFINITION 3.6.3. — Pour un sous-groupe fermé \mathcal{Z} de $P(F)$, un sous-ensemble S de \mathcal{Y} est appelé \mathcal{Z} -feuillelet⁽¹⁴⁾ (dans \mathcal{Y} relativement à l'action de $P(F)$) s'il vérifie les conditions suivantes :

- S est \mathcal{Z} -invariant, i.e. $\text{Int}_{\mathcal{Z}}(S) = S$;
- $\tilde{S} = \text{Int}_{P(F)}(S)$ est ouvert dans \mathcal{Y} et S est fermé dans \tilde{S} ;
- pour tout $p \in P(F)$, on a $p^{-1}Sp \cap S \neq \emptyset \Rightarrow p \in \mathcal{Z}$.

La troisième condition assure que pour tout $s \in S$, le centralisateur $G^s(F)$ de s dans $G(F)$, qui est un sous-groupe de $P(F)$, est contenu dans \mathcal{Z} . Si $y \in \mathcal{Y}$, un *feuillelet pour* y (dans \mathcal{Y} relativement à l'action de $P(F)$) est un $G^y(F)$ -feuillelet S tel que :

- $y \in S$;
- $G^s(F) = G^y(F)$ pour tout $s \in S$.

Si S est un \mathcal{Z} -feuillelet pour un sous-groupe fermé \mathcal{Z} de $P(F)$, alors S est localement fermé dans \mathcal{Y} . On le munit de la topologie induite par celle de \mathcal{Y} , ce qui en fait un *td-espace* au sens de Bernstein-Zelevinski [BZ], i.e. Hausdorff, localement compact et totalement discontinu. Soit $P(F) \times^{\mathcal{Z}} S$ le quotient $(P(F) \times S)/\mathcal{Z}$ pour l'action à droite de \mathcal{Z} donnée par $(p, s) \cdot z = (pz, z^{-1}sz)$. On munit $P(F) \times S$ de la topologie produit et $P(F) \times^{\mathcal{Z}} S$ de la topologie quotient. Alors l'application $P(F) \times S \rightarrow \tilde{S}$, $(p, s) \mapsto psp^{-1}$ se quotiente en un homéomorphisme

$$\alpha : P(F) \times^{\mathcal{Z}} S \xrightarrow{\cong} \tilde{S}.$$

Observons que pour $y \in \tilde{S}$, il existe un $p \in P(F)$ tel que $pyp^{-1} \in S$ et le centralisateur $G^y(F)$ de y dans $G(F)$ vérifie $\text{Int}_p(G^y(F)) = G^{pyp^{-1}}(F) \subset \mathcal{Z}$.

Supposons de plus que pour tout $s \in S$, l'inclusion $G^s(F) \subset \mathcal{Z}$ soit une égalité, c'est-à-dire que S soit un feuillelet pour un (i.e. pour tout) $s \in S$. Alors

$$P(F) \times^{\mathcal{Z}} S = (P(F)/\mathcal{Z}) \times S.$$

La projection sur le second facteur $P(F) \times S \rightarrow S$ se quotiente en une application continue (surjective) $\beta : P(F) \times^{\mathcal{Z}} S \rightarrow S$ et l'application composée $\beta \circ \alpha^{-1} : \tilde{S} \rightarrow S$ se quotiente en une bijection continue

$$\mathbf{s} : \tilde{S}/P(F) \rightarrow S.$$

Pour tout $y \in \tilde{S}$, on a $S \cap \mathcal{O}_{F,y}^P = \{\beta \circ \alpha^{-1}(y)\}$. Puisque \mathbf{s} est une section continue du morphisme quotient $\mathbf{q}|_{\tilde{S}} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}/P(F)$, l'application $\mathbf{q}|_S : S \rightarrow \tilde{S}/P(F)$ est un homéomorphisme et $\mathbf{q}(S) = \tilde{S}/P(F)$ est un td-espace. En particulier pour tout $y \in \tilde{S}$, la $P(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,y}^P$ est fermée dans \tilde{S} . Observons aussi que pour tout sous-ensemble ω de \tilde{S} , on a $\mathbf{q}(\omega) = \mathbf{q}(S \cap \omega)$. On en déduit que le morphisme quotient

$$\mathbf{q}|_{\tilde{S}} : \tilde{S} \rightarrow \mathbf{q}(\tilde{S}) = \tilde{S}/P(F)$$

est une application (ouverte et) fermée.

Considérons maintenant les hypothèses suivantes.

⁽¹⁴⁾ \mathcal{Z} -slice en anglais.

HYPOTHÈSES 3.6.4. —

(H1) Le centralisateur $G^u(F)$ de u dans $G(F)$ est unimodulaire.

(H2) Il existe un feuillet S pour u (dans \mathscr{Y} relativement à l'action de $P(F)$).

REMARQUE 3.6.5. —

(i) L'hypothèse (H2) assure que pour tout $y \in \tilde{S} = \text{Int}_{P(F)}(S)$, la $P(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,y}^P$ est fermée dans l'ouvert $\tilde{\mathscr{Y}}$ de \mathscr{Y} ; ou, ce qui revient au même d'après 3.4 (1), la $G(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,y}$ est fermée dans l'ouvert $\text{Int}_K(\tilde{\mathscr{Y}})$ de \mathfrak{Y} . En particulier la $P(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,y}^P$ est localement fermée dans $\mathscr{Y}^{(15)}$ et la $G(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,y}$ est localement fermée dans \mathfrak{Y} .

(ii) Si la $P(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,u}^P$ de u est ouverte dans $P(F)$, alors on sait d'après 3.4.1 (i) que le centralisateur $G^u(F)$ est unimodulaire ; d'autre part $S = \{u\}$ est un feuillet pour u .

On suppose jusqu'à la fin de 3.6 que les hypothèses 3.6.4 sont vérifiées. D'après 3.6.5 (ii), il s'agit bien d'une généralisation de 3.4.

On définit comme suit, pour chaque $y \in \tilde{S} = \text{Int}_{P(F)}(S)$, une mesure de Haar dg^y sur $G^y(F)$ et donc une fonctionnelle linéaire ν_y sur \mathcal{F}_y . On fixe une mesure de Haar dg^u sur $G^u(F)$ et pour $s \in S$, on prend $dg^s = dg^u$. Pour $y = p^{-1}sp$ avec $s \in S$ et $p \in P(F)$, on prend pour dg^y la mesure déduite de $dg^s = dg^u$ via l'homéomorphisme $\text{Int}_{p^{-1}} : G^s(F) \rightarrow G^y(F)$. Alors ν_y se déduit de $\delta_P(p)^{-1}\nu_s$ via l'isomorphisme

$$\mathcal{F}_s \rightarrow \mathcal{F}_y, h \mapsto h \circ \text{Int}_p.$$

En d'autres termes, on a

$$\langle \nu_y, h \circ \text{Int}_p \rangle = \delta_P(p)^{-1} \langle \nu_s, h \rangle \quad \text{pour tout } h \in \mathcal{F}_y.$$

La fonctionnelle linéaire ν_y sur \mathcal{F}_y est bien définie car si $y = p'^{-1}s'p'$ avec $s' \in S$ et $p' \in P(F)$, alors $s' = s$ et $pp'^{-1} \in G^s(F)$; or $\langle \nu_s, h \circ \text{Int}_{pp'^{-1}} \rangle = \delta_P(p'p'^{-1}) \langle \nu_s, h \rangle$. Pour $\phi \in C_c^\infty(G(F))$, on a donc les égalités (au moins formellement)

$$I_{p^{-1}sp}^P(\phi) = \delta_P(p)^{-1} I_s^P(p\phi) = I_s^P(\phi).$$

On en déduit que pour tout $(y, p) \in \tilde{S} \times P(F)$ et toute fonction $\phi \in C_c^\infty(G(F))$, on a l'égalité (formelle)

$$(3) \quad I_{p^{-1}yp}^P(\phi) = I_y^P(\phi).$$

Pour $y \in \tilde{S}$, puisque la $P(F)$ -orbite $\mathcal{O}_{F,u}^P$ est fermée dans \tilde{S} , pour toute fonction $\psi \in C_c^\infty(\tilde{S})$, l'intégrale (2)

$$I_y^P(\psi) = \int_{G^y(F) \setminus P(F)} \psi(p^{-1}yp) \delta_P(p)^{-1} d\nu_y(p)$$

⁽¹⁵⁾Ce que l'on savait déjà d'après Bernstein-Zelevinski [BZ, Appendix] : $\mathscr{Y}_{F,u} = \mathscr{Y}_u(F)$ et l'action de $P(F)$ sur $\mathscr{Y}_{F,u}$ provient d'une action algébrique (définie sur F) de $P = P_u$ sur la variété \mathscr{Y}_u .

est absolument convergente. L'hypothèse (H2) assure que $\mathbf{q}(S) = \tilde{S}/P(F)$ est un td-espace. On peut donc introduire l'espace $C_c^\infty(\tilde{S}/P(F))$ des fonctions localement constantes et à support compact sur $\tilde{S}/P(F)$.

LEMME 3.6.6. — Pour $\psi \in C_c^\infty(\tilde{S})$, la fonction $y \mapsto I_y^P(\psi)$ est dans $C_c^\infty(\tilde{S}/P(F))$.

Démonstration. — Soit $\psi \in C_c^\infty(\tilde{S})$. D'après l'égalité (3), la fonction $y \mapsto I_y^P(\psi)$ sur \tilde{S} se factorise par $\tilde{S}/P(F)$; et elle est à support le compact ouvert $\mathbf{q}(\text{Supp}(\psi))$ de $\tilde{S}/P(F)$ (rappelons que l'application continue $\mathbf{q}|_{\tilde{S}} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}/P(F)$ est ouverte et fermée). Il reste à vérifier que la fonction $y \mapsto I_y^P(\psi)$ est lisse sur $\tilde{S}/P(F)$. Pour cela reprenons l'isomorphisme $\tilde{\mathcal{H}}^P \rightarrow C_c^\infty(\mathcal{Y})$, $\Phi \mapsto \psi_\Phi$ du début de la preuve de 3.3.5. Il induit par restriction un isomorphisme du sous-espace $\tilde{\mathcal{H}}^{P,*} \subset \tilde{\mathcal{H}}^P$ formé des fonctions à support dans $P(F) \times \tilde{S}$ sur le sous-espace $C_c^\infty(\tilde{S}) \subset C_c^\infty(\mathcal{Y})$. Écrivons $\psi = \psi_\Phi$ avec $\Phi \in \tilde{\mathcal{H}}^{P,*}$. Pour $y \in \tilde{S}$, on a

$$\begin{aligned} I_y^P(\psi) &= \int_{G^y(F) \backslash P(F)} \varphi(p^{-1}yp)^{-1} \Phi(1, p^{-1}yp) \delta_P(p)^{-1} d\nu_y(p) \\ &= \varphi(y)^{-1} \int_{G^y(F) \backslash P(F)} \Phi(p^{-1}, y) \delta_P(p)^{-1} d\nu_y(p). \end{aligned}$$

La fonction $y \mapsto \int_{G^y(F) \backslash P(F)} \Phi(p^{-1}, y) \delta_P(p)^{-1} d\nu_y(p)$ est localement constante sur S . Puisque la fonction $y \mapsto \varphi(y)^{-1}$ est localement constante sur \mathcal{Y} , elle l'est *a fortiori* sur S . Par conséquent la fonction $y \mapsto I_y^P(\psi)$ est localement constante sur S , donc sur \tilde{S} puisqu'elle est $P(F)$ -invariante. \square

LEMME 3.6.7. — (i) L'application linéaire

$$C_c^\infty(\tilde{S}) \rightarrow C_c^\infty(\tilde{S}/P(F)), \psi \mapsto (y \mapsto I_y^P(\psi))$$

est surjective.

(ii) Si $I_y^P(\psi) = 0$ pour tout $y \in \tilde{S}$, alors

$$\int_{\tilde{S}} \varphi(y) \psi(y) dy = 0.$$

Démonstration. — Il suffit d'adapter celle du lemme 3.1.2. Posons $\mathcal{C} = C_c^\infty(\tilde{S})$ et $\mathcal{F} = C_c^\infty(\tilde{S}/P(F))$. Soit Ω un sous-ensemble ouvert compact de \tilde{S} . Posons

$$\tilde{\Omega} = \text{Int}_{P(F)}(\Omega) = \bigcup_{p \in P(F)} p^{-1}\Omega p.$$

Soit \mathcal{C}_Ω le sous-espace de \mathcal{C} formé des fonctions à support dans $\tilde{\Omega}$ et qui sont constantes sur les sous-ensembles $p^{-1}\Omega p$ pour tout $p \in P(F)$. Soit $\mathcal{F}_{\mathbf{q}(\Omega)}$ le sous-espace de \mathcal{F} formé des fonctions à support dans $\mathbf{q}(\Omega) = \tilde{\Omega}/P(F)$ et qui sont constantes sur $\mathbf{q}(\Omega)$. On a $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}_{\mathbf{q}(\Omega)}) = 1$. L'application $\psi \mapsto (y \mapsto I_y^P(\psi))$ envoie \mathcal{C}_Ω dans $\mathcal{F}_{\mathbf{q}(\Omega)}$ et il suffit de vérifier les assertions du lemme pour ces deux espaces.

Prouvons (i). Soit $\xi \in \mathcal{F}_{q(\Omega)}$. Notons κ l'élément de $\mathcal{F}_{q(\Omega)}$ défini par

$$\kappa(y) = I_y^P(\mathbf{1}_\Omega) > 0 \quad \text{pour tout } y \in \tilde{\Omega}.$$

Soit $\psi \in \mathcal{C}_\Omega$ la fonction définie par $\psi = \kappa^{-1} \cdot \mathbf{1}_\Omega \cdot \xi$. Elle vérifie

$$\psi(p^{-1}yp) = \kappa(y)^{-1} \mathbf{1}_\Omega(p^{-1}yp) \xi(y) \quad \text{pour tout } (y, p) \in \tilde{\Omega} \times P(F).$$

On en déduit que $I_y^P(\psi) = \xi(y)$ pour tout $y \in \tilde{\Omega}$.

Prouvons (ii). Tout élément de \mathcal{C}_Ω est combinaison linéaire (finie) de fonctions $p(\mathbf{1}_\Omega) = \mathbf{1}_\Omega \circ \text{Int}_{p^{-1}}$ avec $p \in P(F)$. On en déduit que les fonctionnelles linéaires T sur \mathcal{C}_Ω telles que $T(p\psi) = \delta_P(p)T(\psi)$ pour tout $\psi \in \mathcal{C}_\Omega$ et tout $p \in P(F)$, forment un espace vectoriel de dimension 1. Pour $y' \in \tilde{\Omega}$, les fonctionnelles linéaires

$$T(\psi) = \int_{\mathcal{Y}} \varphi(y) \psi(y) dy \quad \text{et} \quad T'(\psi) = I_{y'}^P(\psi)$$

sont dans cet espace ; elles sont donc proportionnelles. Cela implique (ii). \square

Soit η_S la fonctionnelle linéaire sur $C_c^\infty(\tilde{S}/P(F))$ définie par

$$\langle \eta_S, \xi \rangle = \int_{\tilde{S}} \varphi(y) \psi(y) dy$$

pour toute fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathcal{Y})$ telle que $\xi(y) = I_y^P(\psi)$. On écrit aussi

$$\langle \eta_S, \xi \rangle = \int_{\tilde{S}/P(F)} \xi(y) d\eta_S(y).$$

PROPOSITION 3.6.8. — *On suppose que les hypothèses 3.6.4 sont vérifiées. Soit S un feuillet pour u (dans \mathcal{Y} relativement à l'action de $P(F)$) et soit $\tilde{S} = \text{Int}_{P(F)}(S)$.*

(i) *Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$ et tout $y \in \tilde{S}$, l'intégrale orbitale*

$$I_y(f) (= I_y^P(f^K))$$

est absolument convergente.

(ii) *Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, on a l'égalité*

$$\int_{\tilde{S}/P(F)} \varphi(y) I_y^P(f^K) d\eta_S(y) = \int_{\tilde{S}} \varphi(y) f^K(y) dy,$$

les deux intégrales étant absolument convergente.

Démonstration. — Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$ et tout sous-ensemble ouvert compact ω de \tilde{S} , l'intégrale orbitale $I_y^P(\mathbf{1}_\omega \cdot f^K|_{\tilde{S}})$ est bien définie et elle est absolument convergente ; et d'après la définition de la fonctionnelle linéaire η_S , on a

$$\int_{\tilde{S}/P(F)} \varphi(y) I_y^P(\mathbf{1}_\omega \cdot f^K|_{\tilde{S}}) d\eta_S(y) = \int_\omega \varphi(y) f^K(y) dy.$$

Posons $\mathfrak{S} = \text{Int}_K(\tilde{S}) = \text{Int}_{G(F)}(S)$; c'est un ouvert $G(F)$ -invariant de la F -strate \mathfrak{Y} . Puisque l'intégrale

$$I_{\mathfrak{S}}(f) = \int_{\tilde{S}} \varphi(y) f^K(y) dy$$

est absolument convergente (cf. 3.4), d'après le théorème de convergence dominée, l'intégrale

$$\int_{\tilde{S}/P(F)} \varphi(y) I_y^P(f^K) d\eta_S(y)$$

l'est aussi et elle coïncide avec $I_{\mathfrak{S}}(f)$; cela prouve (ii). On en déduit que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$ avec $f \geq 0$, on a $I_y^P(f^K) < +\infty$, ce qui prouve (i). \square

REMARQUE 3.6.9. — On a une proposition analogue pour les $G(F)$ -orbites dans une F -strate de \mathfrak{N}_F , sous les mêmes hypothèses que 3.6.4.

REMARQUE 3.6.10. —

- (i) Le cas où l'orbite $\mathcal{O}_{F,u}$ est ouverte dans \mathfrak{Y} (3.4.1) est un cas particulier de 3.6.8 : il suffit en effet de prendre $S = \{u\}$ (cf. 3.6.5 (ii)).
- (ii) Pour désintégrer la mesure globale $\varphi(y) dy$ sur \mathcal{Y} , il suffit qu'il existe une famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ (forcément dénombrable) d'ouverts $P(F)$ -invariants Ω_i de \mathcal{Y} deux-à-deux disjoints telle que :
 - L'ouvert $\mathcal{Y}^* = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ de \mathcal{Y} est dense dans \mathcal{Y} (pour Top_F) ;
 - Pour chaque $i \in I$, les centralisateurs $G^y(F)$ des éléments $y \in \Omega_i$ sont unimodulaires et conjugués dans $P(F)$;
 - Pour chaque $i \in I$ et pour un (i.e. pour tout) $u_i \in \Omega_i$, il existe un feuillet S_i pour u_i tel que $\tilde{S}_i = \Omega_i$.

Alors pour toute fonction $f \in C_c^\infty(F(F))$, on a

$$I_{\mathfrak{Y}}(f) = \sum_{i \in I} I_{\text{Int}_K(\Omega_i)}(f) = \int_{\Omega_i/P(F)} \varphi(y) I_y^P(f^K) d\eta_{S_i}(y).$$

3.7. Une remarque sur les corps globaux. — Dans cette sous-section, on suppose que F est un corps global, c'est-à-dire un corps de nombres ($p = 1$) ou un corps de fonctions ($p > 1$). Soit $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ l'anneau des adèles de F . On note $||_{\mathbb{A}}$ la valeur absolue sur \mathbb{A} définie par

$$|x|_{\mathbb{A}} = \prod_v |x_v|_{F_v} \quad \text{pour } x = \prod_v x_v \in \mathbb{A}$$

où v parcourt les places de F et $x_v \in F_v$ (le complété de F en v).

Soit $u \in \mathfrak{U}_F \setminus \{1\}$. On pose $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{F,u}$ et $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{F,u}$. Soient aussi $\lambda \in \Lambda_{F,u}^{\text{opt}}$ et $k = m_u(\lambda)$. Alors $\mathcal{X} = G_{\lambda,k}(F)$ et on pose $\overline{\mathcal{X}} = G_{\lambda,k}(F)/G_{\lambda,k+1}(F)$. On pose aussi

$$\mathcal{X}_{\mathbb{A}} = G_{\lambda,k}(\mathbb{A}) \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{X}}_{\mathbb{A}} = G_{\lambda,k}(\mathbb{A})/G_{\lambda,k+1}(\mathbb{A}).$$

Reprenons les constructions de 2.6 en remplaçant le corps de base F par l'anneau \mathbb{A} . Pour $x \in \mathcal{X}_{\mathbb{A}}$ et $i \in \mathbb{Z}$, le \mathbb{A} -endomorphisme $\text{Ad}_x - \text{Id}$ de $\mathfrak{g}(\mathbb{A})$ induit par restriction et passage aux quotients un morphisme \mathbb{A} -linéaire

$$\eta_{\lambda,x}(i; \mathbb{A}) : \mathfrak{g}_{\lambda}(i; \mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{g}_{\lambda}(k+i; \mathbb{A})$$

qui ne dépend que l'image \bar{x} de x dans $\overline{\mathcal{X}}_{\mathbb{A}}$. Pour $i = 1, \dots, k-1$, fixons une F -base $(H_{-i,j})_{1 \leq j \leq d_i}$ de $\mathfrak{g}_{\lambda}(-i; F)$ et une F -base $(H_{k-i,j})_{1 \leq j \leq d_i}$ de $\mathfrak{g}_{\lambda}(k-i; F)$; rappelons

que $d_i = \dim_F(\mathfrak{g}_\lambda(i; F))$ et que l'on sait que $d_{-i} (= d_i) = d_{k-i}$. Pour $\bar{x} \in \overline{\mathcal{X}_\mathbb{A}}$, notons $A_{-i}(\bar{x}) \in M(d_i, \mathbb{A})$ la matrice de $\eta_{\lambda, \bar{x}}(-i; \mathbb{A})$ relativement à ces bases et posons

$$\varphi_{-i}(\bar{x}) = |\det_{\mathbb{A}}(A_{-i}(\bar{x}))|_{\mathbb{A}}^{1/2}.$$

Enfin posons

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi_{-1}(\bar{x}) \cdots \varphi_{1-k}(\bar{x}) \geq 0.$$

On relève φ en une fonction sur $\mathcal{X}_\mathbb{A}$. On a clairement :

LEMME 3.7.1. — *L'application $\varphi : \mathcal{X}_\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ainsi définie ne dépend pas du choix des F -bases $(H_{-i,j})$ et $(H_{k-i,j})$ pour $i = 1, \dots, k-1$.*

On note $\mathcal{Y}_\mathbb{A}$ la \mathbb{A} -lame dans $\mathfrak{U}_\mathbb{A} = (\prod_v \mathfrak{U}_{F_v}) \cap G(\mathbb{A})$ définie par

$$\mathcal{Y}_\mathbb{A} = \left(\prod_v \mathcal{Y}_v \right) \cap G(\mathbb{A}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{Y}_v = \mathcal{Y}_{F_v, u}$$

où v parcourt les places de F (voir aussi à [L, Annexe C]). Pour chaque v , puisque l'extension F_v/F est séparable de degré de transcendance infini, d'après 2.5.1, le co-caractère λ est (F_v, u) -optimal (pour l'action par conjugaison de $G(F_v)$) et on a l'égalité $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_v \cap G(F)$. En d'autres termes la F -lame \mathcal{Y} se plonge diagonalement dans la \mathbb{A} -lame $\mathcal{Y}_\mathbb{A}$. On a

$$\varphi(y) > 0 \quad \text{pour tout} \quad y \in \mathcal{Y}_\mathbb{A}$$

et

$$\varphi(y) = 1 \quad \text{pour tout} \quad y \in \mathcal{Y}.$$

Cette fonction $\varphi > 0$ sur $\mathcal{Y}_\mathbb{A}$ jouera un rôle essentiel dans la décomposition en produit de distributions locales de la contribution à la formule des traces pour $G(\mathbb{A})$ associée en [L] à la F -strate \mathfrak{Y} de \mathfrak{U}_F .

Références

- [B] BOREL A., *Linear algebraic groups, second enlarged ed.*, Grad. texts in Math., vol. **126**, Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [BZ] BERNSTEIN I.N., ZELEVINSKY A.V., *Representations of the group $GL(n, F)$ where F is a local non-archimedean field*, Uspekhi Mat. Nauk **31** (1976), pp. 5–70.
- [CP] CLARKE M., PREMETS A., *The Hesselink stratification of nullcones and base change*, Invent. Math. **191** (2013), pp. 631–669.
- [H1] HESSELINK W.H., *Uniform instability in reductive groups*, J. reine Angew Math. **303-304** (1978), pp. 74–96.
- [H2] HESSELINK W.H., *Desingularization of varieties of nullforms*, Invent. Math. **55** (1979), pp. 141–163.
- [J] JANTZEN J.S., *Nilpotent orbits in representation theory*, Lie Theory, Progr. Math. **228**, Birkhäuser, 2004, pp. 1–211.
- [K] KEMPF G., *Instability in invariant theory*, Ann. Math. (2) **108** (1978), pp. 299–316.
- [L] LEMAIRE B., *Développement fin de la contribution unipotente à la formule des traces sur un corps global de caractéristique $p > 0$* , prépublication arXiv : 2212.03792 (2022)

- [Lu] LUSZTIG G., *Unipotent elements in small characteristic*, *Transf. Groups* **10** (2005), pp. 449-487.
- [MN] MCNINCH G., *Nilpotent orbits over ground fields over good characteristic*, *Mathematische Annalen* **329** (2004), pp. 49-85.
- [RR] RANGA RAO R., *Orbital integrals in reductive groups*, *Ann. of Math.* **96** (1972), pp. 505-510.
- [R] ROUSSEAU G., *Immeubles sphériques et théorie des invariants*, *C. R. Acad. Sc. Paris* **286** (1978), pp. 247-250.
- [S] SPRINGER T.A., *Linear algebraic groups, second ed.*, *Progress Mth.*, vol. **9**, Birkhäuser, Boston, 1998.

BERTRAND LEMAIRE • *E-mail* : Bertrand.Lemaire@univ-amu.fr, Institut de Mathématique de Marseille (I2M), Aix-Marseille Université (AMU), CNRS (UMR 7373), France