



HAL
open science

TRANSLATING THE LOGICAL CONSTANTS

Fabrice Pataut

► **To cite this version:**

Fabrice Pataut. TRANSLATING THE LOGICAL CONSTANTS. *Al-Mukhatabat. Trilingual Journal for Logic, Epistemology and Analytic Philosophy*, 2024, Issue n° 50, pp. 46-57. <hal-04785679>

HAL Id: hal-04785679

<https://hal.science/hal-04785679v1>

Submitted on 15 Nov 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

TRADUIRE LES CONSTANTES LOGIQUES

Fabrice Pataut

*(CNRS, Sorbonne Université
UMR 8011 Sciences, Normes, Démocratie)*

Résumé / Abstract

1. *Introduction*

2. *Davidson et Quine*

3. *Gödel*

4. *Stabilité*

Bibliographie

Résumé

Comment argumenter en faveur d'une manière particulière de fixer la signification des constantes logiques qui soit incompatible avec une manière différente ? Comment justifier un choix ? Prenant la loi du tiers-exclu comme paradigmatique, je considère deux cas : celui des langues naturelles, et celui de la logique formelle. Pour le premier, je choisis de commenter la stratégie interprétative de Davidson, en partie héritière des positions de Quine sur l'impossibilité des logiques déviantes. Pour le deuxième, je choisis de commenter la position de Gödel sur les définitions imprédicatives et le recours au tiers-exclu dans le cadre de la construction du système finitaire Σ de théorie récursive des nombres.

Il faudrait, pour justifier pleinement un choix pour ou contre le tiers-exclu, disposer d'une sémantique stable qui repose sur le moins de présuppositions possibles quant à la saisie de la signification des constantes logiques en jeu. Je propose, pour finir, des remarques critiques sur la manière dont Dummett conçoit la stabilité requise et des remarques plus générales sur la possibilité de construire une telle sémantique.

Abstract

How should we argue in favor of a particular way of fixing the meaning of the logical constants that would be incompatible with some other, divergent one? How may we justify our choice? Taking the law of excluded middle as paradigmatic, I consider two cases : that of natural languages, and that of formal logical systems. As regards the first case, I comment on Davidson's interpretative strategy, a strategy that stems from Quine's position on the impossibility of deviant logics. As regards the second, I comment on Gödel's position on impredicative definitions and the use of excluded middle in the construction of the finitary system Σ of recursive number theory.

In order to fully justify a choice either in favor of excluded middle or against it, we should devise a so-called stable semantics, i.e., one with as few presuppositions as possible regarding our correct grasp of the meaning of the constants. I offer critical remarks on Dummett's particular construal of the required stability and on the general prospect of working out such a semantics.

1. Introduction

Je voudrais considérer la question de savoir comment la signification des constantes logiques doit être fixée, et ce de deux points de vues très différents : celui de la théorie de l'interprétation développée par Davidson (*Davidson [1973] 2001 ; [1974] 2001*) à partir des remarques de Quine sur la traduction (*Quine 1970*), et celui de l'intégration ou de l'enchâssement (*embedding*) des systèmes classiques dans les systèmes intuitionnistes correspondants proposé par Gödel (*Gödel [1933a] 1986 ; [1933b] 1986 ; [1941] 1995*). Ma conclusion sera critique dans les deux cas : ni la stratégie davidsonienne envisagée dans le cadre de la traduction radicale, ni les définitions gödéliennes proposées en vue d'obtenir une notion stricte de constructivité ne permettent de donner une réponse entièrement satisfaisante à cette question.

Mon propos sera de montrer que les solutions envisagées sont insatisfaisantes *pour la même raison* en dépit de l'extrême disparité des contextes, à savoir celui des langues naturelles (ou, mieux, des idiolectes, autrement dit des usages personnels et idiosyncrasiques des locuteurs) dans le cas davidsonien, et celui de l'application de la logique intuitionniste à la théorie des nombres dans le cas gödélien. En l'absence d'une sémantique stable relativement aux différences entre lois logiques du langage objet et lois logiques du métalangage, la signification attribuée aux constantes reste arbitraire et la validité ou l'invalidité des lois logiques qui en dépend — typiquement, la loi du tiers exclu — repose sur des particularités tout aussi arbitraires, tant en ce qui concerne l'interprétation des constantes d'un système formel (des « symboles logiques primitifs » dans la terminologie gödélienne (*Gödel [1941] 1995 : [52] 190*) qu'en ce qui concerne celle de

leurs analogues dans les langues naturelles ou les idiolectes des locuteurs particuliers.

Pour finir, je commenterai les remarques de Dummett au sujet de la stabilité en question (*Dummett [1977] 2000 ; 1987*) et proposerai quelques réflexions générales sur la possibilité de construire une sémantique stable.

2. Davidson et Quine

Il ne semble pas que la théorie de l'interprétation développée par Davidson permette d'exclure certaines manières de fixer la signification des analogues des constantes logiques lorsque ces analogues figurent dans les phrases des langues naturelles et dans les énoncés et élocutions dont ces phrases sont des types. En particulier, la stratégie interprétative ne peut conduire les interprètes à accepter des significations divergentes pour les constantes — divergentes parce que fixées par les interprétés d'une manière qui serait déviante par rapport à la manière dont les interprètes fixent, eux, la signification des mêmes constantes (c'est-à-dire des mêmes *expressions*). Le principe de charité ne permet aucun désaccord sur ce point. Notre difficulté, voire notre incapacité à traduire les constantes d'un langage ou d'un idiolecte dans celles d'un autre langage ou d'un autre idiolecte viendrait non pas du fait qu'elles seraient particulièrement difficiles à traduire, ou encore d'une incompatibilité contingente relativement au choix des analogues des constantes, mais de l'absence pure et simple de constantes dignes de ce nom,

et peut-être même de l'absence d'un langage ou d'un idiolecte à traduire ¹. Il n'y a aucune place pour un tel conflit dans la perspective davidsonienne. L'idée même qu'il puisse exister un désaccord aussi fondamental ne peut être exprimé par l'interprète qu'au prix de l'incohérence (voir notamment *Davidson [1974] 2001*).

On peut comprendre le principe de charité de deux manières : soit comme un principe faible ou minimal qui requiert que les croyances et attitudes cognitives qu'un interprète attribue aux locuteurs qu'il compte interpréter forment un ensemble cohérent, soit comme un principe plus contraignant selon lequel les croyances et les attitudes attribuées, étant donné leur cohérence, ne doivent pas contredire celles de l'interprète. La possibilité d'ensembles de croyances et d'attitudes incompatibles étant écartée, la question cruciale est de savoir si le principe de charité est utile pour déterminer ce qui *doit* compter comme vérité logique et comme inférence déductivement valide, et donc de quelle manière la signification des analogues des constantes *doit* être fixée aussi bien par les interprètes que par les interprétés.

Pour revenir à Quine, qui a bien sûr largement inspiré cette stratégie, il a toujours été entendu qu'une déviation relativement à la signification des constantes ne concerne rien de plus que les phonèmes (pour les idiolectes parlés) et les notations (pour les idiolectes écrits) (voir *Quine 1970 : ch. 6*). Quinconque utilise « et » conformément aux règles auxquelles nous avons

¹ Cette deuxième possibilité est bien évidemment plus forte que la première du point de vue de l'incompatibilité. Peut-être devrait-elle être reformulée de manière que l'échec de la traduction infirme la supposition qu'un langage ou qu'un idiolecte à traduire a

recours pour utiliser « ou » est superficiellement coupable de ce qui nous apparaît comme un usage impropre de nos constantes. Mais à partir du moment où nous avons compris que la conjonction d'autrui n'est rien de plus que notre disjonction et vice-versa, nous pouvons conclure que nous sommes en réalité d'accord avec le locuteur au sens où nous savons tous pertinemment, en tant qu'interprètes de nos idiolectes respectifs, que ce que nous signifions par « et » est en réalité identique à ce que les autres signifient par « ou » et vice-versa. Si, de plus, nous supposons que ces locuteurs sont aussi rationnels que nous et que nous rejetons l'idée d'une rationalité divergente, différente de la nôtre sur une question aussi centrale que celle de la signification des constantes logiques, nous devons également conclure que ceux qui font un usage déviant de nos symboles devraient arriver à la même conclusion. En ce sens, aucun désaccord profond ou véritable ne peut faire surface quant à l'interprétation de la disjonction, notamment lorsqu'elle figure dans la loi du tiers-exclu.

Reste la question de savoir sur *quoi* exactement les interprètes et les interprétés tombent d'accord dans le cas d'une anomalie. En ce qui concerne les expressions *non* logiques des langages naturels ou des idiolectes, les difficultés liées à l'ambiguïté peuvent dans certains cas être réglées à l'aide d'une référence par ostension, comme lorsque les interprétés parlent systématiquement de poivrier là où leurs interprètes parlent systématiquement de salière. Mais qu'en est-il dans le cas des constantes ou de leurs analogues informels ? Nous ne pouvons certainement pas nous en

suffisamment de structure interne pour autoriser un interprète à distinguer son vocabulaire logique du reste de son vocabulaire.

remettre à « l'essence résiduelle [*residual essence*] de la conjonction et de la disjonction en plus [*over and above*] des sons et des notations » (*Quine loc. cit.*). Pour Quine, il est tout à fait inutile de recourir à de telles entités (abstraites) pour défendre l'idée que les constantes peuvent passer un test de traduction. (Du coup, par parité, et pour rester fidèle à l'idée de Quine, l'échec au test de traduction ne peut être expliqué par un oubli malencontreux des essences ou des résidus réifiés en plus des sons et des inscriptions.)

Pourrait-on se fonder sur « les lois en conformité avec lesquelles un homme utilise des sons et ces notations » (*Quine loc. cit.*) ? C'est un peu mieux, mais cela ne fonctionne que dans le cas où les interprètes et les indigènes introduisent et éliminent les constantes exactement de la même manière ². Si l'accord sur ce point est simplement contingent, il semble

² Nous pouvons envisager ici la question de la fixation de la signification dans le cadre du système de déduction naturelle développé par Gentzen (*Gentzen [1935] 1969*) et étendu par la suite par Prawitz (*Prawitz 1965*). Un tel système possède un avantage considérable. La structure logique des expressions bien formées du langage d'un système de déduction naturelle reflète la structure des phrases complexes des langages naturels formées à l'aide des constantes. Les symboles pour les constantes sont introduits dans un système de déduction naturelle par le biais de règles d'introduction et d'élimination qui fonctionnent comme des règles d'inférence ou de formation. Les analogues naturels des symboles introduits dans un calcul à la Gentzen ou à la Prawitz apparaissent ou disparaissent des élocutions d'une manière relativement similaire, de manière qu'un interprète peut rendre compte du phénomène d'occurrence et de disparition en termes d'introduction et d'élimination.

Deuxièmement, la thèse davidsonienne selon laquelle nous ne pouvons spécifier les conditions de vérité des phrases d'un langage naturel sans exhiber leurs relations de conséquence logique avec les autres phrases du même langage correspond assez bien avec l'une des idées directrices des systèmes de déduction naturelle à la Gentzen ou à la Prawitz dans la mesure où la signification des constantes est fixée par les règles d'introduction et d'élimination, ou encore par ce que Harman appelle des « implications logiques caractéristiques » (*Harman 1986*).

Troisièmement, les phrases d'un langage naturel, lorsqu'elles sont assertées de manière justifiée, expriment ce qui, dans un système de déduction naturelle, compte comme un jugement qu'une certaine proposition est vraie. Les preuves qui fondent les

superficiel dans la mesure où aucune justification en faveur d'un choix ne peut reposer sur une coïncidence fortuite. Si au contraire il y a accord parce que l'interprète charitable doit *imposer* ses constantes à ceux qu'il veut interpréter, il ne semble pas possible d'argumenter que la vérité logique doit être « garantie par la traduction [*garanteed under translation*] pour la raison que la logique est intégrée [*built in*] dans la traduction plus pleinement que toute autre partie de la science » (Quine *loc. cit.*). On ne peut simplement *supposer* que la logique est déjà intégrée de fait dans la traduction si l'on doit montrer que les vérités logiques sont garanties par la signification que nous pouvons *légitimement* attribuer aux constantes. Nous serions coupables d'une pétition de principe.

Peut-être pourrions-nous formuler l'idée directrice de Quine que la traduction radicale doit sauver la trivialité [*save the obvious*] en analysant le trivial à la Davidson comme ce à quoi tout le monde, ou quasiment tout le monde, donnera son assentiment dans une communauté linguistique donnée, quelles que soient les croyances idiosyncrasiques ou dispositions aux

jugements que les propositions sont vraies dans un tel système reflètent les structures sous-jacentes des expressions linguistiques du raisonnement ordinaire, par exemple le genre de raisonnement par lequel un interprète, bien qu'il n'ait pas affaire à des preuves formelles, s'autorise néanmoins le recours à des inférences de nature déductive, exprimées dans une langue naturelle régimentée au sens de Quine, et interprète ses interlocuteurs de manière que ceux-ci soient capables de faire les mêmes inférences deductives. Le problème est de déterminer si cette heureuse concordance est toujours garantie dans le cas des inférences deductives que l'interprète juge ses interprétés capables d'effectuer de manière à comprendre leurs élocutions. L'interprète doit être amené à considérer le fait que les inférences deductives que les locuteurs sont disposés à faire sont également celles qu'ils se *croient* autorisés à faire. Il doit donc juger si, oui ou non, ils les font réellement, en quelque sorte en connaissance de cause, et si, de plus, ils se jugent eux-mêmes justifiés dans leur pratique. Cette deuxième tâche n'est pas une tâche *supplémentaire* qui viendrait compléter la stratégie interprétative, mais bien une tâche qui fait partie intégrante de la stratégie.

croyances idiosyncrasiques manifestées par les individus (et quelles que soient, donc, les particularités des idiolectes). L'une des différences notables entre Davidson et Quine sur ce point, est que Davidson s'en remet explicitement au principe de charité pour justifier cette position et que Quine a toujours répudié l'usage des notions intentionnelles essentielles à la stratégie davidsonienne. En ce qui concerne notre problème, cette différence compte peu. L'interprète, qu'il soit strictement quinéen ou plus généreusement davidsonien prétend que si, en quelque sorte *per impossibile*, le désaccord n'était *pas* superficiellement notationnel ou phonétique, c'est uniquement parce que les indigènes à interpréter auraient changé de sujet. Dans cette perspective, ni les interprètes ni les indigènes ne peuvent justifier leur choix en faveur d'une signification pour leurs constantes ; leurs points de vue respectifs sont radicalement divergents et la signification attribuée aux constantes des uns et des autres apparaît à ceux qui ont choisi ou pris l'habitude de la fixer d'une autre manière, comme purement arbitraire ou dépendant de l'habitude.

Autrement dit, *rien* ne peut nous permettre de conclure que les indigènes introduisent ou éliminent les constantes de manière déviante *et* raisonnent tout aussi naturellement que nous (en un sens analogue à la *natürlichen Schließens* de Gentzen) quoique d'une manière divergente. Pour résumer, dans le cas de la traduction radicale, la signification des constantes du métalangage doit être la même que celle des constantes du langage objet. Il ne peut y avoir aucune différence entre la signification des constantes du langage auquel les interprètes doivent recourir pour décrire la pratique déductive des locuteurs à interpréter, et celles des constantes du langage des

interprétés. Nous sommes dans un cas d'instabilité maximale, c'est-à-dire dans un cas où les lois logiques dont la validité peut être prouvée dans le langage objet sont exactement les mêmes que celles qui sont valides dans le métalangage. En particulier, nous utilisons, pour établir la validité des lois du langage objet les mêmes règles d'introduction et d'élimination pour les constantes que celles que nous utilisons pour les constantes du métalangage. Nous sommes exactement dans le genre de cas où, par exemple, pour établir la correction [*soundness*] de nos règles d'inférence déductive, nous recourons à un usage métalinguistique de ces mêmes règles (voir par exemple *Tennant 1990* : 74).

Tout au moins ne sommes-nous *pas* — et c'est là un avantage indéniable — dans un cas où la théorie (autrement dit la stratégie interprétative en situation de traduction radicale) ne fait rien de plus que décrire les régularités systématiques observées dans le comportement d'agents qui pourraient après tout être engagés dans une activité aberrante ou sans but, autrement dit dans un cas où nous avons, non pas une sémantique à proprement parler, mais une théorie purement descriptive dans laquelle la notion même de vérité logique disparaît. Je reviendrai sur ce point dans la section 4.

3. Gödel

Gödel remarque que les intuitionnistes ont deux objections à faire valoir contre les mathématiques classiques : le recours aux définitions imprédicatives et le recours au tiers exclu (*Gödel [1941] 1995*). Troelstra note à ce propos que bien que la deuxième objection semble plus

fondamentale, « l'intégration [*embedding*] des systèmes classiques dans les systèmes intuitionnistes correspondants » déjà proposée par Gödel in *Gödel [1933a] 1986* montre que cette primauté est « seulement apparente » (*Troelstra 1995*: 186). Ce qui nous intéresse plus particulièrement ici dans ce texte de 1941 qui anticipe l'interprétation *Dialectica* de 1958 (voir *Gödel [1958] 1990* et *Gödel [1972] 1990*) est que l'intégration est obtenue par une *définition* des « termes primitifs » ou des « notions » élémentaires de la logique intuitionniste (autrement des constantes) en « termes de [...] fonctions et de procédures de types plus élevés [*in terms of [...] functions and procedures of higher types*] » (*Gödel [1941] 1995*: [17] 195).

La méthode choisie par Gödel pour garantir aux constantes ou notions « la netteté absolue et la clarté qui devrait être requise pour les termes primitifs d'un système intuitionniste [*the complete perspicuity and clarity which should be required for the primitive terms of an intuitionistic system*] » (*Gödel op. cit.*: [3-4] 190) consiste à construire un système finitaire Σ de théorie récursive des nombres traitant uniquement le cas des entiers, des fonctions sur les entiers, des fonctions de fonctions sur les entiers, etc.³

En ce qui concerne la question de savoir comment la signification des constantes ou des termes primitifs *doit* être fixée, et la question afférente d'un désaccord possible entre le point de vue classique et le point de vue intuitionniste sur la réponse à apporter, le point crucial de l'approche gödélienne est le suivant :

³ Le système Σ diffère du système \mathbf{T} de l'interprétation *Dialectica* (*Gödel [1958] 1990*) quant au fait que les énoncés de Σ contiennent des quantificateurs.

[i] est vrai que les intuitionnistes rejettent la loi du tiers exclu $p \vee \neg p$ pour leur notion de disjonction, mais il est possible de définir en termes de *leurs** autres symboles logiques primitifs une autre notion de disjonction pour laquelle la loi du tiers exclu est également valide [*also holds*] en logique intuitionniste. C'est tout à fait trivial : il vous suffit de définir $p \vee q = \neg(\neg p.\neg q)$. [La disjonction] $p \vee \neg p$ devient alors $\neg(\neg p.\neg\neg p)$, et ceci est un cas de la loi de contradiction, qui est également valide en logique intuitionniste. Mais il s'avère que cette procédure s'applique non seulement à la loi du tiers exclu elle-même, mais également à toutes ses conséquences, en particulier aux soit-disant preuves d'existence non constructives, pour peu, et cela est suffisant, que nous ne recourions pas aux définitions imprédicatives. Il vous suffit de *définir** la notion d'existence par l'équivalence $(\exists x)A(x) \stackrel{\text{df}}{=} \neg(x)\neg A(x)$, pour qu'une preuve non constructive d'existence rejetée par Brouwer comme dénuée de sens [*meaningless*] devienne une preuve correcte du point de vue intuitionniste pour l'existence prise dans ce sens. Et l'on peut montrer [*it can be shown*] de manière tout à fait générale que, tant qu'aucune définition imprédicative n'intervient, chaque preuve des mathématiques classiques devient une preuve intuitionniste correcte si l'existence et la disjonction sont définies de cette manière. Cela s'applique en particulier à toutes les preuves purement algébriques ou restreintes à la théorie des nombres, dans lesquelles les définitions imprédicatives ne figurent jamais.

Gödel [1941] 1995 : [1-2] 1995

[* c'est moi qui souligne]

Que vaut cette réponse ? Elle est me semble-t-il particulièrement problématique parce que si une conclusion ϕ , intuitionnistiquement déductible

d'un ensemble de prémisses Δ , en est également classiquement déductible, la réciproque n'est pas généralement vraie. Si nous prenons le calcul propositionnel intuitionniste comme point de départ, il nous faut *ajouter* soit le tiers exclu, soit la règle du dilemme, soit la *reductio* classique, soit encore l'élimination de la double négation, pour obtenir la logique classique (voir par exemple *Tennant 1990*: 59). Autrement dit, nous devons *élargir* notre notion de preuve pour aller de la déductibilité intuitionniste $\Delta \vdash_I \phi$ à la déductibilité classique $\Delta \vdash_C \phi$.

De plus, une preuve de correction (*soundness*) pour la sémantique intuitionniste nous permet de fournir un contre-exemple à la loi du tiers exclu de l'intérieur même de la sémantique intuitionniste et de démontrer, par là-même, l'invalidité de la loi du tiers exclu du point de vue constructif. Nous pouvons trouver un modèle K de Kripke, tel que $K = (\{i/i \in I\}, \geq)^4$ ne permet pas de « forcer » $p \vee \neg p$, autrement dit ne permet pas d'asserter la loi classique étant donné que K est un modèle des conditions de vérité entendues au sens intuitionniste, autrement dit au sens des conditions d'assertabilité, ou encore au sens des conditions de vérité contraintes par l'assertabilité (voir *Tennant 1990* : ch. 5.8, p. 112).

⁴ K est constitué d'un ensemble I avec une ordre partiel \geq pour ses membres — appelés *index* — et une fonction qui assigne à chaque membre i de I un ensemble \underline{i} de phrases atomiques. On dira que i force ϕ en vertu d'une preuve qui force ϕ *pour toujours* (par le *Lemme de l'éternité* — voir *Tennant 1990* : 110 pour une présentation claire de la sémantique de Kripke pour la logique intuitionniste). Intuitivement, un ensemble I d'index contient toutes les positions possibles i, j partiellement ordonnées par la relation \geq (de manière que $j \geq i$), et la relation est une relation de succession temporelle des positions auxquelles les phrases ou formules peuvent être « forcées ».

L'idée gödélienne que « nous pouvons donner une interprétation des notions classiques en termes des notions intuitionnistes *de manière que toutes les propositions démontrables à partir des axiomes classiques sont également valides* [hold as well] *pour l'intuitionisme* » (Gödel [1933a] 1986: [35] 289) est en contradiction flagrante avec cette conception.

Nous pouvons prendre note à ce propos de deux éléments remarquables pour la question qui nous concerne. Premièrement, l'idée gödélienne que la logique intuitionniste est un nouveau baptême [*renaming*] et une réinterprétation de la logique classique plutôt qu'un renoncement au point de vue classique ou un écart relativement à ce point de vue (Gödel [1941] 1995 : [3] 190), trouve sa justification non pas tant au niveau du calcul des propositions et du calcul des prédicats qu'au niveau de l'arithmétique et de la théorie des nombres. L'idée que le point de vue classique est plus large ou plus englobant est en effet réfutable par la construction du système finitaire Σ : « le système d'arithmétique et de théorie des nombres intuitionnistes est plus étroit que le système classique seulement en apparence ; en vérité il le contient » (Gödel [1933a] 1986 : [37] 295).

Deuxièmement, Gödel concède que l'inclusion du point de vue classique dans le point de vue constructif est obtenu « quoi que selon une interprétation quelque peu déviante » (*albeit with a somewhat deviant interpretation* [abweichenden Interpretation]) (Gödel *loc. cit.*), laquelle est justifiée de la manière suivante :

La justification de ce caractère déviant doit être trouvée dans le fait que l'interdiction intuitionniste concernant la réécriture [*restating*] les propositions universelles niées comme de pures propositions existentielles cessent d'avoir le moindre effet parce que le prédicat d'absurdité peut s'appliquer aux propositions universelles, et ceci nous conduit à des propositions qui sont, du point de vue formel, exactement les mêmes que celles qui sont assertées dans les mathématiques classiques.

Gödel [1933a] 1986 : [37] 295.

Si la quantification existentielle peut être envisagée de cette manière pour le cas particulier de la théorie des nombres, l'interdiction intuitionniste du tiers-exclu *en général* me semble plus problématique. Si les mathématiques classiques *peuvent* très bien contenir des preuves constructives, les mathématiques intuitionnistes ne peuvent en revanche, contenir de preuves classiques. *Toutes* les preuves intuitionnistes *doivent* être constructives.

4. Stabilité

La question reste maintenant de savoir comment nous pouvons *justifier* la traduction des constantes ou de leurs analogues informels au vu du fait que la traduction permet ou, contraire, empêche, une preuve de validité. Dans le cas davidsonien (ou quinéen), il s'agira de la validité du tiers exclu exprimé avec les ressources d'une langue naturelle. Dans le cas gödélien, il s'agira de la traduction qui permet de transformer la loi du tiers exclu en loi de contradiction, ou de la traduction qui permet le recours à la notion d'absurdité, notamment au vu du fait que la notion primitive *classique*

d'absurdité est différente de la notion primitive *intuitionniste* d'absurdité. Ce qui doit être montré du point de vue classique, c'est l'absurdité de la supposition que p est vraie indépendamment des moyens que nous avons de le déterminer. Ce qui doit être montré du point de vue intuitionniste c'est l'absurdité de la supposition que nous pourrions avoir une preuve de p (voir *Dummett [1977] 2000* : 17). En ce qui concerne la quantification, la raison pour laquelle nous *ne* pouvons conclure $(\exists x) \neg F(x)$ à partir de $\neg (x) Fx$, est bien que, si le domaine de quantification est l'ensemble des entiers naturels, il est possible que nous sachions qu'il nous est impossible de prouver $(x) Fx$ sans pour autant être à même d'exhiber un n particulier pour lequel nous avons une preuve de $\neg Fn$ (*Dummett [1977] 2000* : 29).

Gödel peut bien évidemment répondre sur ce point que Σ doit satisfaire trois exigences. Premièrement, toutes les fonctions primitives (non définies) doivent être calculables pour tout argument, et toutes les relations primitives doivent être décidables pour tout argument. Deuxièmement, les assertions existentielles ont une signification [*meaning*] uniquement dans la mesure où elles constituent des abréviations de constructions réelles [*actual*], de manière que le quantificateur existentiel ne fasse *pas* partie des constantes logiques. Enfin, les assertions universelles peuvent être niées seulement au cas où il existe un contre-exemple, c'est-à-dire seulement au cas où il existe une abréviation d'une construction réelle d'un contre-exemple au sens retenu ci-dessus (*Gödel op. cit.*: [5-6] 191).

C'est sur ces points particuliers que la question de la stabilité, telle qu'elle est exposée par Dummett, est cruciale.

Une sémantique est maximale­ment instable seulement au cas où les lois logiques dont on peut prouver la validité dans le langage objet sont exactement celles dont on peut prouver la validité dans le métalangage. Une sémantique est au contraire maximale­ment stable si ses présuppositions concernant ce qui est requis pour saisir la signification des constantes logiques du langage objet sont minimales de manière que la part la plus large possible de la signification ainsi saisie peut-être rendue explicite.

Dummett (*Dummett 1987*) tend à présenter l'instabilité en termes de preuves de validité et la stabilité en termes de saisie de la signification des constantes, mais nous pourrions choisir de procéder de manière inverse, et remarquer qu'une sémantique instable est incapable de rendre compte d'une saisie explicite de la signification des constantes logiques du langage objet, et qu'une sémantique stable laisse ouverte la possibilité que les lois logiques du langage objet soient différentes de celles du métalangage.

Quelle que soit la manière dont on veut présenter les choses, la stabilité est fonction de deux choses : de la saisie de la signification des constantes du langage objet ainsi que de notre capacité à démontrer la validité de ses lois logiques ou, au contraire, l'invalidité de ses lois logiques supposées. Mais elle l'est à deux conditions :

(i) Pour saisir la signification attribuée aux constantes, nous devons comprendre *pourquoi* cette signification a été attribuée plutôt qu'une autre, pourquoi nous avons choisi une règle d'introduction et d'élimination plutôt qu'une autre,

(ii) La théorie sémantique stable doit nous permettre de démontrer la validité ou l'invalidité strictement sur la base d'une *explication explicite* de

la signification des constantes du langage objet, de manière que quiconque ne comprend pas ces significations *indépendamment* de cette explication peut être par la suite capable de démontrer soit la validité des lois véritables, soit l'invalidité des lois supposées.

En ce qui concerne les arbres de Beth, ceux-ci devraient nous permettre de nous placer dans une situation où l'acceptation de la loi du tiers exclu pour le métalangage bloque le contre-argument selon lequel une preuve de l'invalidité de $p \vee \neg p$ pour le langage objet repose sur un déni, à savoir le déni de notre capacité à exprimer ce que nous sommes parfaitement à même d'appréhender (*Dummett [1977] 2000* : 18). Il doit être au contraire parfaitement possible de saisir pleinement la signification *non* classique de la disjonction et d'accepter la loi dont l'ajout au langage objet rendrait la sémantique maximalement instable. Mais les remarques négatives de Dummett sur les arbres de Beth (*Dummett [1977] 2000* : 409-410) l'autorisent finalement à conclure qu'ils ne permettent pas de construire une sémantique pour un langage intuitionniste du premier ordre (*Dummett op. cit.* : 418).

Conformément à l'explication intuitive des constantes logiques, on présuppose que la question de savoir si une construction donnée constitue une preuve (canonique) d'un certain énoncé est décidable, et donc que, très probablement, à n'importe quelle étape, nous possédons une telle preuve ; exactement de la même manière que, dans la théorie du sujet créatif, nous supposons qu'il est décidable, pour n'importe quel n et n'importe quel A , si $\vdash_n A$. [...] (En particulier, il est bien évidemment inoffensif de présupposer une connaissance de la signification des opérateurs de phrases lorsqu'on les

applique aux énoncés décidables puisqu'il s'agit simplement d'une question de connaissance pratique d'une procédure de décision.)

Par ailleurs, en ce qui concerne les arbres de Beth, bien que nous supposons que la question de savoir si une formule fermée est vérifiée à un nœud donné est décidable, cela ne sera pas le cas en général pour les formules fermées ; il n'y a par exemple aucun moyen général de déterminer si $P \rightarrow Q$ ou $(x) Fx$ est vérifiée à un nœud donné a . Par conséquent, si la définition de « A est vérifiée en a » devait être proposée comme moyen d'expliquer la signification des constantes logiques, elle ferait preuve de la même circularité que les explications classiques. [...] [d]'un point de vue intuitif, la question de savoir si nous avons, à n'importe quel moment, une démonstration [*demonstration*] d'un énoncé donné devrait être décidable ; mais la question de savoir si une formule fermée est vraie à un nœud particulier n'est pas décidable sur un arbre de Beth ; par conséquent la définition de vérité à un nœud [*truth at a node*], en tant qu'explication de la signification des constantes logiques, souffrirait du même défaut.

Dummett [1977] 2000 : 409-410

La situation dans laquelle nous nous trouvons si nous prenons au sérieux les objections dummettiennes à la possibilité d'une preuve de validité du tiers-exclu est la suivante : il nous faut sélectionner les éléments nécessaires de *l'explication explicite* de manière à donner pleinement satisfaction à l'exigence de stabilité maximale telle qu'elle figure dans le tableau ci-dessous.

<i>Dumett 1987 : "Reply to John McDowell"</i>	<i>Saisie ou compréhension de la signification des constantes logiques</i>	<i>Preuves de la validité des lois logiques, ou de l'invalidité des lois logiques supposées</i>
<p>UNE THÉORIE DESCRIPTIVE MAIS PAS UNE SÉMANTIQUE</p> <p><i>Exclue</i></p>	<p>La soi-disant théorie sémantique ne fait <i>aucune</i> présupposition à propos des ressources conceptuelles requises pour la saisie de la signification des constantes.</p> <p><i>Verdict:</i> la théorie ne fait que décrire les régularités systématiques observées dans le comportement d'agents qui pourraient après tout être engagés dans une activité irrationnelle et sans but.</p>	<p>Il n'y a aucune loi logique dont la validité pourrait être prouvée, et pas plus de lois supposées dont l'invalidité pourrait être prouvée.</p> <p><i>Verdict:</i> Les notions mêmes d'inférence déductive de jugements à jugements et de conséquence logique entre propositions antécédentes et propositions conséquentes, disparaissent complètement.</p>
<p>MAXIMALEMENT STABLE</p> <p>Position de Dummett</p>	<p>La théorie sémantique fait <i>le moins</i> de présuppositions possibles concernant les ressources conceptuelles requises pour la saisie : elle en donne une analyse partiellement explicite dont la partie implicite est la plus petite possible mais reste <i>non vide</i>.</p> <p>Ex. : la sémantique des arbres de Beth</p>	<p>Les lois logiques dont la validité peut être prouvée dans le langage objet doivent être différentes de celles du métalangage.</p> <p>Ex. : le métalangage est classique et la sémantique donne une preuve de l'invalidité des lois classiques pour le langage objet.</p>
<p>MAXIMALEMENT INSTABLE</p> <p>Sémantique homophone</p> <p><i>Insatisfaisante</i></p>	<p>La théorie sémantique fait <i>trop</i> de présuppositions concernant les ressources conceptuelles requises pour la saisie : elle en livre une analyse <i>implicite</i>.</p> <p><i>Verdict :</i> utile parce que fidèle à la signification attendue des constantes du langage objet, mais néanmoins coupable de pétition de principe en ce qui concerne l'explication explicite de leur signification.</p>	<p>Les lois logiques dont la validité peut être prouvée dans le langage objet sont les mêmes que celles qui sont valides dans le métalangage.</p> <p>Ex. : la preuve de l'impossibilité d'une preuve intuitionniste de la complétude de la logique intuitionniste du premier ordre fournie par Kreisel.</p>

Toute la question est de savoir si une stabilité maximale peut effectivement être garantie. Dans le cas des langues naturelles, il faudrait

non seulement qu'interprétés et interprétants se comprennent, ce qui constitue bien entendu une condition minimale, mais, qui plus est, qu'ils tombent entièrement d'accord dans tous les cas réputés non problématiques, c'est-à-dire tous ceux dans lesquels les élocutions soumises à la loi du tiers exclu soient, en un sens informel, décidables. Dans la mesure où la partie « implicite » de la saisie ne peut être vidée de tout contenu, rien ne garantit que les ressources conceptuelles requises pour cet accord soient exactement les mêmes pour les interprétants et les interprétés.

Dans le cas formel, il faudrait qu'un métalangage classique, bien que pleinement classique, autorise une preuve de l'invalidité du tiers exclu, ou, inversement, qu'un métalangage intuitionniste, bien que pleinement intuitionniste, autorise une preuve de la validité de la même loi. Mais là également, il n'est nullement garanti qu'un tel accord puisse être trouvé. En particulier, il faudrait que la signification des constantes, en tant qu'elle est fixée par un ensemble de règles d'inférence, notamment d'introduction et d'élimination, soit exactement la même quel que soit le choix.

Cette exigence est bien évidemment distincte de l'exigence d'harmonie dans la mesure où l'harmonie *garantit* que les règles d'introduction fixent la signification d'une constante et que les règles d'élimination sont des conséquences de la signification ainsi fixée, au sens de « conséquence » où nous jugeons que la règle d'élimination est valide seulement au cas où, si nous sommes autorisés à affirmer les prémisses, nous sommes également justifiés à asserter la conclusion. Rien d'aussi rassurant n'est garanti dans le cas de la stabilité dans la mesure où les règles ne peuvent contenir aucune part d'arbitraire. Toute la difficulté est ici d'assurer

que la partie *non* vide de la sémantique maximale stable ne repose sur aucune pétition de principe.

BIBLIOGRAPHIE

- Davidson (Donald), [1973] 2001, "Radical Interpretation," *Inquiries into Truth and Interpretation*, Clarendon Press, Oxford, 2nd edition, pp. 125-140.
- [1974] 2001, "On the Very Idea of a Conceptual Scheme," *Inquiries into Truth and Interpretation*, Clarendon Press, Oxford, 2nd edition, pp. 183-198.
- Dummett (Michael A. E.), [1977] 2000, with the assistance of Roberto Minio, *Elements of Intuitionism*, 2nd ed., Oxford Logic Guides 2, Clarendon Press, Oxford.
- 1987, "Reply to John McDowell," *Michael Dummett: Contributions to Philosophy*, B. M. Taylor, ed., Nijhoff International Philosophy Series, vol. 25, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, pp. 253-268.
- Gentzen (Gerhard), [1935] 1969, "Investigations into Natural Deduction," english translation by M. E. Szabo, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, M. E. Szabo, ed., North-Holland, Amsterdam, pp. 68-131.
- Glivenko (Valerii Ivanovich), 1929, "Sur quelques points de la logique de M. Brouwer," *Académie royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences*, vol. 5 (15), pp. 183-188.
- Gödel (Kurt), [1933a] 1986, "Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie / On intuitionistic arithmetic and number theory," *Collected Works*, Volume I: *Publications 1929-1936*, S. Feferman, Ed.-in-Chief, english translation by S. Bauer-Mengelberg and J. van Heijennort, Oxford UP, New York and Oxford, pp. 286-295.
- [1933b] 1986, "Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalkülls / An interpretation of the intuitionistic propositional calculus," *Collected Works*, Volume I: *Publications 1929-1936*, S. Feferman, Ed.-in-Chief, english translation by S. Bauer-Mengelberg and J. van Heijennort, Oxford UP, New York and Oxford, pp. 300-303.
- [1938] 1995, "Vortrag bei Zilsel / Lecture at Zilsel's," *Collected Works*, Volume III: *Unpublished Essays and Lectures*, S. Feferman, Ed.-in-Chief, english translation by C. Parsons, Oxford UP, New York and Oxford, pp. 86-113.

- [1941] 1995, "In what sense is intuitionistic logic constructive?," *Collected Works*, Volume III: *Unpublished Essays and Lectures*, S. Feferman, Ed.-in-Chief, Oxford UP, New York and Oxford, pp. 189-200.
 - [1958] 1990, "Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes / On a hitherto unutilized extension of the finitary standpoint," *Collected Works*, Volume II: *Publications 1938-1974*, S. Feferman, Ed.-in-Chief, Oxford UP, New York and Oxford, pp. [280-287] 241-251.
 - [1972] 1990, "On an extension of a finitary mathematics which has not yet been used," revised and expanded version in English of [1958] by W. Hodges and B. Watson, *Collected Works*, Volume II: *Publications 1938-1974*, S. Feferman, Ed.-in-Chief, Oxford UP, New York and Oxford, pp. 271-280.
- Harman (Gilbert), 1986, "The Meanings of Logical Constants," *Truth and Interpretation – Perspectives on the Philosophy of Donald Davidson*, E. LePore, ed., Basil Blackwell, Oxford and New York, pp. 125-134.
- Prawitz (Dag), 1965, *Natural Deduction: A Proof Theoretical Study*, Almqvist & Wiksell Förlag, Stockholm.
- Quine (Willard Van Orman), 1970, *Philosophy of Logic*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Tennant (Neil W.), 1990, *Natural Logic*, Edinburgh University Press, 2nd ed. with corrections.