



**HAL**  
open science

# Unidades dinámicas fundamentales para una taxonomía del caos a partir del templex

Caterina Mosto, Gisela Daniela Charó, Christophe Letellier, Denisse Sciamarella

► **To cite this version:**

Caterina Mosto, Gisela Daniela Charó, Christophe Letellier, Denisse Sciamarella. Unidades dinámicas fundamentales para una taxonomía del caos a partir del templex. 109<sup>a</sup> Reunión de la Asociación Física Argentina, Sep 2024, San Luis, Argentina. hal-04776008

**HAL Id: hal-04776008**

**<https://hal.science/hal-04776008v1>**

Submitted on 10 Nov 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Unidades dinámicas fundamentales para una taxonomía del caos a partir del templex

Mosto Caterina<sup>1 2</sup>, Charó Gisela D.<sup>1 2</sup>, Letellier Christophe<sup>3</sup>, Sciamarella Denisse<sup>2 4</sup>

<sup>1</sup> Centro de Investigaciones del Mar y la Atmósfera (CIMA)

<sup>2</sup> Universidad de Buenos Aires (UBA), Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Instituto Franco Argentino del Estudio del Clima y sus Impactos (IFAECI)

<sup>3</sup> Campus Universitaire du Madrillet (CORIA)

<sup>4</sup> Centre National de la recherche scientifique (CNRS)

En teoría de sistemas dinámicos se ha intentado, sin éxito por ahora, establecer relaciones entre la estructura algebraica de las ecuaciones de gobierno y el tipo de atractores que producen. La clasificación de estos atractores resulta, pues, un desafío. El examen de la estructura topológica de un flujo en el espacio de fases ofrece una forma sistemática alternativa de describir y tipificar dinámicas diferentes en base a los mecanismos fundamentales (estiramientos y pliegues) que moldean la evolución de un sistema determinista.

Otto Rössler fue el primero en proponer una estructura jerárquica en árbol para los atractores caóticos a partir de los exponentes positivos de Lyapunov. A principios de la década del 70, considera las reacciones químicas complejas como el resultado de la combinación de algunos circuitos básicos. Así, Rössler introdujo su sistema epónimo como una combinación entre un oscilador bidimensional y un interruptor o “switch” no lineal, que resultó ser el sistema caótico más sencillo. Años más tarde, Bo Deng toma el atractor de Rössler como punto de partida y “ensambla” sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias cada vez más complejos a partir de bloques que se combinan de maneras diferentes, como en el juego de construcción LEGO.

En la década del 80, los matemáticos Joan Birman y Robert F. Williams propusieron describir la estructura topológica de un flujo en el espacio de fases en términos de las órbitas periódicas inestables coexistentes con un atractor, estudiando su anudamiento. ¿Pueden anudarse estas órbitas? ¿Qué tipos de nudos pueden producirse? Se denominó soporte de nudos (knot-holder) o templado (template) a la variedad enramada (branched manifold) que permite representar gráficamente el entrelazamiento de dichas órbitas. El procedimiento permitió clasificar sistemas caóticos disipativos tridimensionales. No obstante, la teoría de nudos no permite tratar sistemas dinámicos en dimensiones más altas: los nudos se desatan en más de tres dimensiones.

Para tratar el caos de dimensiones superiores, es necesario apelar a herramientas de la topología sin restricción dimensional, tales como los complejos celulares, introducidos por John H. C. Whitehead en 1940. Un complejo celular es un conjunto estratificado de celdas de diferentes dimensiones sobre el que se define un álgebra de cadenas que permite calcular propiedades topológicas intrínsecas tales como los grupos de homología o los grupos de torsión. La exploración del espacio de fases con complejos celulares comienza en los años 90. Hoy denominamos complejo BraMAH a aquellos complejos construidos de modo tal que las celdas aproximan localmente la variedad enramada subyacente – el acrónimo procede del inglés “Branched Manifold Analysis through Homologies”. Un complejo celular permite describir y clasificar variedades en espacios genéricos, pero no describe el ordenamiento temporal que implica un flujo en el espacio de fases para un sistema dinámico. El objeto matemático que incorpora el flujo ha

sido introducido en 2022 con la denominación de “templex”. Consiste en un complejo BraMAH dotado de un grafo dirigido, cuyos nodos coinciden con las celdas de mayor dimensión local del complejo. Las aristas del grafo contienen la información del flujo sobre la variedad. El templex no es otra cosa que la generalización del complejo celular para la extracción algebraica de las propiedades topológicas de un flujo en el espacio de fases.

Ahora bien, en teoría de homología se estudia cuál es el mínimo número de celdas en un complejo celular para describir una variedad sin flujo asociado. Del mismo modo, cabe preguntarse cuál es el mínimo número de nodos que debe contener el grafo de un templex para describir un flujo. Este trabajo muestra cómo reducir un templex y cómo descomponerlo en unidades similares a los osciladores e interruptores propuestos por Rössler hace medio siglo. Dado un atractor, el templex reducido permite describirlo y clasificarlo en términos de un conjunto de unidades de dos tipos, O (osciladores) y S (“switches”). El templex tiende así un puente entre la topología de los atractores caóticos y las unidades dinámicas necesarias para producirlos.