



HAL
open science

Les situations fondamentales au coeur de la théorie des situations mathématiques

Annie Bessot, Claire Margolinas

► **To cite this version:**

Annie Bessot, Claire Margolinas. Les situations fondamentales au coeur de la théorie des situations mathématiques. 2024. hal-04752165

HAL Id: hal-04752165

<https://hal.science/hal-04752165v1>

Preprint submitted on 24 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les situations fondamentales au cœur de la théorie des situations mathématiques

Annie Bessot¹
Université Grenoble Alpes
Maitre de Conférence

Claire Margolinas²
Laboratoire ACTé, Université Clermont Auvergne
Maitre de Conférence HDR

Résumé

La théorie des situations mathématiques, composante essentielle de la théorie des situations de Guy Brousseau, conduit à une (re)fondation des connaissances mathématiques en termes de *situations* où un actant interagit avec un milieu à propos d'un savoir visé. Elle établit une distinction déterminante entre deux modes d'existence de la connaissance : connaissance en situation et savoir. Le concept de situation fondamentale d'un savoir, que nous présentons ici, devient alors l'instrument central du questionnement épistémologique. Un exemple du processus de recherche d'une situation fondamentale sera donné à propos des nombres : les valeurs de variables d'une telle situation permettent d'envisager une genèse possible de certains ensembles de nombres. Les nombres et les opérations sur ces nombres, qu'il est possible d'atteindre par cette genèse, sont une conséquence de cette analyse épistémologique. A chaque changement de valeur d'une variable, les constituants des situations ainsi générées seront mis en évidence. : milieu, définition en situation, enjeu.

Mots clés: Théorie des situations mathématiques, Connaissance/Savoir, Situation fondamentale, Signification d'un savoir.

Introduction

La théorie des situations de Guy Brousseau³ est un cadre théorique permettant d'interroger, de problématiser et de comprendre l'existant dans les systèmes didactique sur des bases expérimentales et théoriques : elle n'est pas prescriptive. Elle revendique clairement le domaine de la didactique des

¹ annie.bessot@gmail.com

² claire.margolinas@uca.fr

³ Ce chapitre s'appuie sur une présentation en anglais de la théorie des situations, dont nous sommes les autrices, dans le cadre du projet AMOR <https://www.mathunion.org/icmi/awards/amor/guy-brousseau-unit>. Nous conseillons aux lecteurs de consulter cette présentation pour approfondir ce que nous introduisons ici.

mathématiques comme domaine spécifique. Pour cela elle opère un certain nombre de ruptures. On ne citera ici que les deux plus marquantes de notre point de vue :

La première rupture consiste à se donner le droit d'interroger la discipline de l'intérieur, sans accepter a priori comme des nécessités mathématiques des conceptions ou des pratiques improvisées par des mathématiciens. [...] La prise en charge totale du projet de transposition contrôlée est la première rupture.

La deuxième rupture procède de la même attitude vis-à-vis des autres domaines. Elle consiste à prétendre soumettre à un réexamen tous les apports des diverses disciplines dès lors que ces apports concernent des comportements et des pratiques relatifs à des connaissances mathématiques, à leur compréhension, leur usage ou à leur acquisition... (Brousseau 2006, p. 4)

La théorie des situations lie dialectiquement théorie, observation et pratique. L'observation des pratiques dans les classes (ordinaires ou engagées dans une ingénierie didactique) a même la primauté sur la théorie, au sens où certains résultats des observations apparaissent comme des candidats à être des concepts théoriques. Ils doivent être investis dans des situations didactiques pour être mis à l'épreuve. Les concepts théoriques de la théorie des situations sont donc des émergents de la recherche et de l'observation (cf. le concept de contrat didactique, Brousseau 1980, 1990).

La citation suivante montre la démarche conduisant Guy Brousseau à la notion de situation et à celle de milieu⁴ qui lui est intrinsèquement attachée.

[...] la question, qui, répétée à chaque proposition envisagée, a engendré les travaux dont nous allons parler a été 'pourquoi ?' : pourquoi un sujet ferait-il cela plutôt qu'autre chose ? pourquoi est-ce cette connaissance qui commande ce comportement ?

Cette attitude conduit naturellement à considérer un problème ou un exercice, non pas comme une simple re-formulation d'un savoir, mais comme un dispositif, comme un milieu qui 'répond' au sujet suivant des règles. A quel jeu le sujet doit-il jouer pour avoir besoin de telle connaissance ? quelle aventure - succession de jeux - peut l'amener à la concevoir, ou à l'adopter ? Dans cette approche, le sujet n'a pas besoin d'être mieux décrit que le joueur d'échec, qui pousse les blancs ou les noirs suivant une stratégie impersonnelle. Quelle information, quelle sanction pertinente doit recevoir le sujet de la part du milieu pour orienter ses choix et investir telle connaissance plutôt que telle autre ? (Brousseau 2000, p. 5)

En 1997 Guy Brousseau établit une distinction très éclairante au sein de la théorie des situations : d'un côté, la théorie des situations mathématiques (TSM) à laquelle est associé le concept de situation fondamentale, théorie qui se situe clairement du côté épistémologique de

⁴ Voir le chapitre « La structuration du milieu : méthodologie d'analyse des situations didactiques » dans cet ouvrage.

la didactique des mathématiques, et de l'autre, la théorie des situations didactiques en mathématique (TSDM) « ou comment acculturer les élèves aux pratiques de la communauté mathématique et de la culture. » (Brousseau 2010a, diapo 13)

La TSM est basée sur un principe fondamental : « à toute connaissance mathématique on peut faire correspondre une collection de situations que cette connaissance permet de résoudre. » (Brousseau, 2005, p. 220). Il s'agit d'une révolution épistémologique : l'objectif de la TSM est de reconsidérer les connaissances mathématiques en termes de *situations*, c'est-à-dire en termes de conditions qui conduisent un *actant* à interagir avec un *milieu* à propos d'un savoir visé, au-delà de la seule résolution de problèmes.

En comparant la résolution de problèmes à l'histoire des concepts mathématiques, il apparaît que certaines conditions, qui disparaissent de l'énoncé final, jouent un rôle essentiel. [...] Ainsi chaque concept mathématique peut être associé à des conditions dans lesquelles un être humain est amené à produire, comme réponse, un comportement spécifique témoignant d'une certaine connaissance d'un concept mathématique. (Brousseau, 2010b, diapo 15)

Cette révolution va aussi s'appuyer sur une distinction fondamentale, celle faite entre savoirs et connaissances.

Admettre que les connaissances et les savoirs traités dans les situations didactiques par les professeurs comme par les élèves sont légitimement différents, volontairement ou involontairement transposés des connaissances 'savantes', est le premier 'axiome' de la théorie des situations. (Brousseau 2000, p. 28-29)

1. Distinction connaissance/savoir

L'une des idées centrales de la TSM est donc de distinguer deux modes d'existence de la « connaissance » (au sens générique en anglais de *knowledge*⁵).

- Une connaissance est ce qui réalise l'équilibre entre un sujet et un milieu, c'est ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation.
- Un savoir est une construction sociale et culturelle, qui vit dans une institution et qui est le plus souvent formalisé dans un texte (Laparra & Margolinas, 2010 ;

⁵ En anglais, nous avons introduit les trois dénominations : *knowledge* (générique), *situational knowledge* (connaissance - en situation) et *institutional knowledge* (savoir – dans une institution) dans AMOR <https://www.mathunion.org/icmi/awards/amor/guy-brousseau-unit>.

Margolinas, 2014).

Nous pouvons retenir dans un premier temps l'association connaissance et situation, savoir et institution. Dans ce texte, pour distinguer « connaissance » au sens générique et « connaissance » au sens spécifique dans la « paire » connaissance/savoir, nous utiliserons parfois pour cette dernière l'expression « connaissance en situation » ce que ne fait pas Brousseau.

Margolinas et Bessot (2023) propose de schématiser (figure 1) les deux modes d'existence de la connaissance comme suit : certaines connaissances en situation peuvent être reconnues comme utiles par une institution et, pour cette raison, sont transformées en *savoir* au cours de ce qu'elle appelle *processus d'institutionnalisation* (au sens épistémologique). Inversement, des savoirs explicites ne sont utiles en situation que dans la mesure où ils sont *transposés en connaissances en situation*.

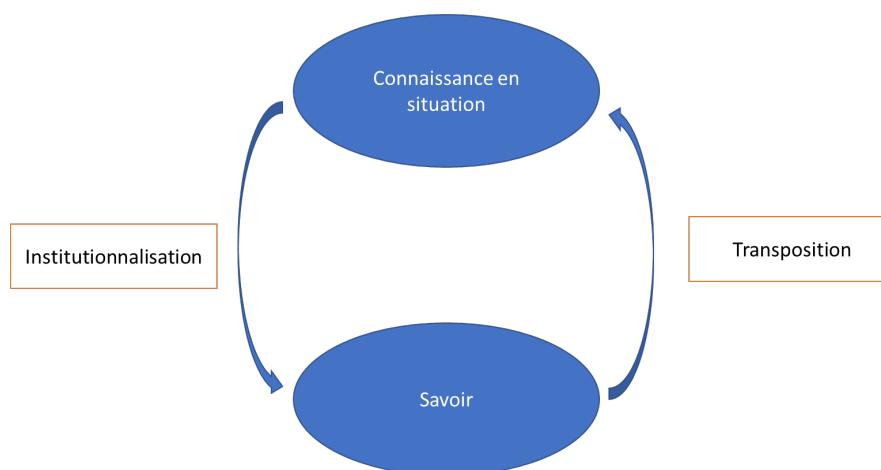


Figure 1.

Institutionnalisation et transposition : transformations réciproques connaissance / savoir.
Margolinas et Bessot (2023, p.44)

La transposition ainsi introduite correspond au même mouvement que celui de la transposition didactique au sens de Chevallard (1991), qui s'intéresse à un autre aspect de la transposition, depuis le savoir « savant » (produit de l'institution mathématique) au savoir enseigné. Cependant, la transposition définie dans le cadre de la TSM questionne non pas la dynamique de la transformation d'un savoir pour permettre son enseignement (la transposition *didactique*) mais une transformation qui s'opère dans un cadre épistémologique plus général, sans intention didactique. C'est pour cela que nous parlons de transposition et non pas de transposition didactique.

Le processus d'institutionnalisation permettant de passer d'une connaissance en situation à un savoir visé s'appuie sur l'utilité des connaissances : connaissances utiles pour l'action en

situation d'action, connaissances utiles pour la formulation en situation de formulation, connaissances utiles pour la validation en situation de validation.

Illustrons le concept de connaissance et le processus de transposition par un exemple bien connu de situation mathématique conçue et expérimentée par Brousseau et son équipe pour de très jeunes élèves (4 à 6 ans) (Briand, Loubet & Salin, 2004 ; Brousseau, 2012 ; Margolinas & Wozniak, 2012).

Dans cette situation, les élèves ont à leur disposition une grande collection de « garages » (cartons rectangulaires, chacun pouvant recevoir une seule voiture), la disponibilité de ces garages étant une variable de la situation (voir plus loin). Chaque élève reçoit une petite collection de voitures (des images de voitures ou bien des petites voitures jouets). La tâche consiste à constituer une collection de garages permettant de poser exactement une voiture et une seule sur chaque garage.

Nous pouvons considérer que cette situation introduit une *définition en situation* de la quantité : deux collections ont la même quantité si l'on peut mettre leurs éléments en correspondance terme à terme.

Une connaissance dans cette situation est ce qui permet d'obtenir l'enjeu visé : une et une seule voiture pour un garage. Ainsi, elle représente une adaptation réussie au milieu de cette situation particulière ou un équilibre en situation comme énoncé plus haut. Nous instancions dans la figure 2 les principaux éléments à prendre en considération dans la situation « voitures-garages ».

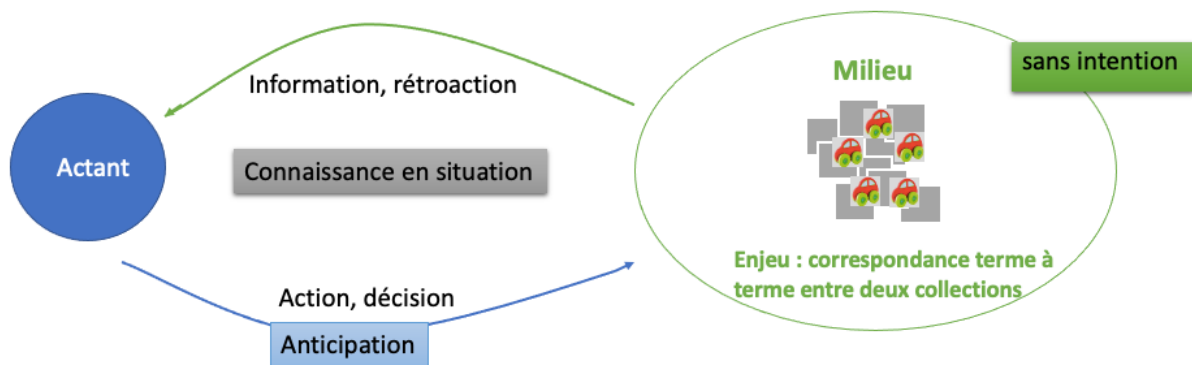


Figure 2.

Principaux éléments d'une situation d'action à propos de la situation « voitures-garages » (d'après Margolinas et Bessot, 2024 module 4)

Le travail de transposition (savoir/connaissance) conduit à interroger les variables et les

valeurs des variables de la situation voiture-garages qui vont rendre utiles ou inutiles certaines connaissances. Par exemple, considérons la variable « disponibilité de la collection des garages ». Cette variable peut prendre plusieurs valeurs, notamment :

1. La collection des garages est proche (dans l'espace) de celle des voitures ;
2. La collection des garages est éloignée (dans l'espace) de celle des voitures ;
3. La collection des garages est éloignée (dans le temps) de celle des voitures ;
4. La collection des garages est disponible pour un sujet et non pour celui qui agit sur les voitures (communication à autrui).

Dans le cas de la première valeur (les deux collections sont proches l'une de l'autre), de nombreuses connaissances sont utiles dans cette situation, c'est-à-dire : elles peuvent conduire à la réussite. Par exemple, une connaissance utile dans cette situation est ce que nous pouvons appeler une « connaissance spatiale » : organiser spatialement les garages et les voitures dans une même disposition. Une autre connaissance utile dans cette situation est ce que nous pouvons appeler la « connaissance du dénombrement par comptage » : il s'agit de prononcer la suite des mots-nombres dans l'ordre en énumérant les voitures (un, deux, trois, quatre, cinq, etc.) et de faire de même avec les garages jusqu'au même mot-nombre.

Dans le cas de la quatrième valeur (communication à autrui) et avec une communication orale, la connaissance spatiale est beaucoup moins utile que le dénombrement par comptage : il sera difficile car coûteux d'expliquer l'organisation spatiale, alors qu'il est très économique de transmettre seulement le dernier mot-nombre prononcé.

L'utilité des connaissances et donc le statut de ces connaissances change en fonction de la valeur de variables de la situation.

Comme déjà mentionné, la notion de situation élargit la notion de problème et permet d'introduire d'autres paramètres que la validité logique, comme par exemple l'efficacité ou l'utilité : les mathématiques sont modélisés comme des réponses *utiles* dans des situations, et donc comme des connaissances en situation.

2. Situation fondamentale

La notion de situation fondamentale apparaît d'après Brousseau dès le début, quand il retrace les conditions d'apparition de sa théorisation :

Hypothèse de la situation fondamentale. La voie empirique consiste à essayer d'améliorer ces pratiques. Nous allons au contraire suivre l'autre voie, celle, qui partant

d'une connaissance déterminée [*un savoir*⁶], cherche quels types de situations sont capables de la faire apparaître, de la faire utiliser, de la faire construire et de la faire apprendre. Pour des raisons heuristiques, nous supposons que chaque connaissance mathématique [*un savoir*] possède au moins une situation qui la caractérise et la différencie de toutes les autres.

De plus, nous conjecturons que l'ensemble des situations qui caractérisent une même notion est structuré et qu'il peut être engendré à partir d'un petit nombre de situations dites fondamentales, par le jeu de variantes, de variables et de bornes sur ces variables. [...] il est important de retenir pour l'instant qu'une situation fondamentale n'est pas a priori une situation « idéale » pour l'enseignement, ni même une solution plus efficace. La valeur d'une situation à usage didactique s'apprécie en fonction d'un grand nombre d'autres paramètres externes tels que la possibilité effective de la mettre en œuvre dans un environnement psycho-socio-culturel déterminé (Brousseau, 2000, p. 8)

En relation avec cette hypothèse, l'objectif du processus de transposition est alors d'établir quelles connaissances en situation correspondent à un savoir donné et de les structurer en termes de situations fondamentales. Cette correspondance entre connaissances (en situation) et savoirs n'est jamais évidente ! En effet, dans une situation donnée, une connaissance est déterminée par les interactions entre un actant et un milieu, et non par le savoir qui émergera à la fin du processus d'institutionnalisation. La question du contrôle de la transposition est donc la suivante : *comment s'assurer qu'une connaissance rencontrée en situation est une transposition adéquate d'un savoir visé ?* Le concept de situation fondamentale est étroitement lié à cette question qui lui-même nécessite de comprendre la notion de *signification* (ou de sens) d'un savoir mathématique.

Pour cela considérons un exemple simple de la soustraction des nombres naturels : $5 - 3$. Si vous avez cinq cubes et que vous enlevez trois cubes vous obtenez deux cubes. C'est l'une des significations de $5 - 3$, celle du *nombre comme cardinal*. Prenons maintenant une droite numérique : si l'on part du point d'abscisse 5 et que l'on recule de 3, on arrive au point 2. C'est une autre signification de la même opération, celle du *nombre comme position* : $5 - 3$.

Ces deux significations différentes ont des conséquences notables. Si vous avez deux cubes et qu'on vous demande d'enlever trois cubes, l'opération est impossible. On ne peut donc pas interpréter $2 - 3$. Par contre, si l'on prend une droite numérique, que l'on part du point 2 de la droite numérique et que l'on recule de 3, on arrive à un point de la droite. On peut alors attribuer à ce point l'abscisse -1 (par symétrisation) et interpréter $2 - 3$.

⁶ Ajouter par nous, en cohérence avec la distinction connaissance/savoir.
Livro sobre a Teoria das Situações

Cet exemple met en évidence l'importance du milieu d'une situation relativement à la question du contrôle de la transposition. Si le milieu des situations est constitué de cubes, et plus généralement d'un ensemble discret (objets), l'opération 2 - 3 n'a pas de sens. Une transposition de la signification de 2 - 3 est possible dans le milieu d'une droite numérique. Ainsi, travailler la signification du nombre comme position dès le début de la scolarité peut avoir une influence sur les connaissances que des élèves pourront investir plus tard dans des situations impliquant des nombres relatifs.

C'est pour cette raison que la démarche d'ingénierie de Brousseau commence par une déconstruction des savoirs, qui consiste à rechercher toutes les significations possibles liées à l'utilité des connaissances en situation.

De plus, Brousseau prend très au sérieux la question suivante : *comment contrôler, d'un point de vue épistémologique, la nécessité de considérer certaines significations comme différentes ?* Nous le citons :

On peut envisager de multiplier les situations didactiques qui illustrent chacune un aspect différent [...] mais cette stratégie didactique est discutable : elle est chronophage, elle donne une image trop riche et fragmentée et le sens global risque de ne jamais être transmis.

Il est donc avantageux de disposer d'une situation fondamentale qui puisse générer ce champ.

La fonction d'une situation fondamentale est de résumer ce sens global pour permettre de déployer le nombre et la diversité de ses occurrences en fonction des besoins et des possibilités de l'enseignement. (Brousseau 2005, p. 174)

Comment minimiser le nombre de significations nécessaires à la prise en compte d'un savoir donné ? Par exemple, la signification de la soustraction basée sur la cardinalité est suffisante pour définir la soustraction pour les nombres naturels. En revanche, cette signification n'est pas suffisante pour définir la soustraction comme opération interne dans l'ensemble des nombres relatifs.

C'est là qu'intervient la recherche d'une situation fondamentale d'un savoir.

Pour poursuivre, reformulons l'hypothèse de Brousseau (2000) : *pour chaque savoir mathématique, il existe une situation fondamentale qui génère, à travers un ensemble de variables, différentes situations correspondant aux différentes significations de ce savoir.* Nous recherchons *une* situation fondamentale mais nous pouvons découvrir qu'il y a une nécessité épistémologique de considérer plus d'une situation fondamentale, ce qui est en fait un résultat de l'approche de la théorie des situations mathématiques. La recherche d'un *minimum* de situations fondamentales conduira à une organisation fonctionnelle et cohérente des

connaissances et permettra d'éviter un émiettement des connaissances et des situations.

Nous allons maintenant tenter de faire entrer le lecteur dans un exemple d'un tel processus de recherche d'une situation fondamentale concernant les nombres.

3. A la recherche d'une situation fondamentale des nombres

Commençons par la recherche d'une situation fondamentale des entiers naturels. Ce choix est basé sur plusieurs raisons ; du point de vue mathématique : cohérence avec son axiomatique, du point de vue anthropologique : convergence avec l'histoire humaine, du point de vue psychologique : accord avec le développement psychogénétique.

Nous cherchons une situation mathématique qui puisse générer les différentes significations des entiers naturels, en premier lieu la signification de ces nombres comme cardinal.

3.1 Existe-t-il une situation fondamentale pour la signification du nombre entier naturel en tant que cardinal ?

La recherche d'une telle situation fondamentale trouve son origine dans le savoir mathématique suivant : Deux ensembles *finis* ont la même *quantité discrète* s'il existe une bijection entre eux. Les classes d'équivalence de la relation « avoir la même quantité discrète » fonde la définition du nombre cardinal. De façon rapide et intuitive, le processus consiste à donner un nom à chaque classe d'équivalence ou encore à nommer la quantité de toutes les collections d'une même classe. Pour cela on peut utiliser le dernier mot-nombre prononcé du comptage des éléments de l'un des ensembles d'une classe d'équivalence pour nommer la quantité de toutes les collections dans la boîte. C'est la signification du nombre naturel comme cardinal.

Il s'agit maintenant de transposer cette définition mathématique en termes de situations, nommée par la suite *définition en situation*.

La caractérisation mathématique du cardinal formulée ci-dessus nous conduit à préciser de façon générale le milieu et l'enjeu d'une situation fondamentale du nombre cardinal. Le milieu et l'enjeu de cette situation fondamentale sont les *invariants* de toutes les situations représentant des instanciations possibles de la situation fondamentale : la famille des situations voiture-garage précédemment introduite est un exemple d'une telle instanciation. Le milieu de cette situation fondamentale est donc décrit de la façon la plus générale possible en le caractérisant en termes mathématiques. Il s'agit d'un « milieu matériel », composante

invariante de la structuration du milieu (au sens de Brousseau, 1990 ; milieu M-3 dans la modélisation de Margolinas, 1995 ; voir aussi dans le chapitre « La structuration du milieu : méthodologie d'analyse des situations didactiques »). Le milieu d'une situation fondamentale doit pouvoir être instancié.

Nous listons ci-après les constituants d'une situation fondamentale du nombre entier comme cardinal et certains éléments du processus d'institutionnalisation : en cela, cette description est celle d'une sorte de « coquille vide » prête à être instanciée.

- Le milieu est formé de deux ensembles finis distincts, que nous appelons *collections*.

- La définition en situation peut être formulé ainsi : deux collections ont la même quantité s'il est possible de réaliser une correspondance terme à terme entre elles.

- L'enjeu peut être formulé comme suit : étant donné une collection modèle déterminer⁷ si une autre collection a la même quantité que le modèle.

- Le processus d'institutionnalisation transforme les connaissances en des éléments du savoir visé, ici le nombre naturel comme cardinal (ou quantité discrète) :

- Il commence par la reconnaissance d'un élément de connaissance utile.
- La grandeur *quantité discrète* est considérée comme une connaissance utile dans des situations.
- Une séquence orale de mots-nombres, de la même quantité qu'une collection, est une connaissance utile en situation, par exemple pour communiquer une quantité à une autre personne.
- Plusieurs collections d'une même quantité peuvent être associées à une même séquence de mots-nombres.
- La séquence de mots-nombres étant ordonnée, le dernier mot-nombre de la séquence est utilisé pour désigner la quantité correspondant à toutes ces collections. Ce nombre est le cardinal de toutes les collections de la même quantité.

En formalisant mathématiquement ce processus, le cardinal apparaît donc comme une classe d'équivalence de la relation « avoir même quantité que » appliquée à des collections. Au cours de ce processus, d'autres connaissances utiles sont rencontrées et notamment la désignation écrite du cardinal par un représentant symbolique d'une des collections (par

⁷ « Déterminer » peut inclure la construction d'une collection de même quantité.

exemple des traits).

Différentes situations sont générées à partir de cette situation fondamentale en donnant différentes valeurs à la variable *localisation* de l'une des deux collections (dans l'espace ou dans le temps). Cette suite de situations peut être considérée également comme des variantes générales en théorie des situations mathématiques (action, formulation, validation)⁸.

Peut-on par un changement de valeurs de variables de cette situation fondamentale engendrer d'autres significations des nombres entiers naturels ?

Un nombre entier naturel peut être utilisé à deux fins principales. La première est de décrire la taille d'un ensemble fini (collection). C'est la signification d'un entier comme cardinal. Une autre est de décrire la *position* d'un élément dans une séquence. C'est la signification d'un entier comme ordinal.

3.2 Existe-t-il une situation fondamentale pour la signification des nombres entiers naturels en tant qu'ordinal ?

Si la notion de nombre entier comme cardinal se réfère à un ensemble fini sans ordre particulier, la notion de nombre ordinal nécessite un ordre total de ses éléments. Nous allons donc chercher des catégories du monde physique pouvant permettre de construire des milieux pour une situation fondamentale de la signification ordinale des entiers.

- Le temps est totalement ordonné, donc les événements, les gestes, la parole, sont ordonnés. Cependant, le temps s'avère très coûteux comme source possible de milieu en raison de la complexité de sa mise en œuvre.

- L'espace est une autre possibilité. Cependant les espaces bidimensionnels et tridimensionnels ne peuvent pas être totalement ordonnés. Au contraire, un espace unidimensionnel, c'est-à-dire une *ligne*, peut être totalement ordonné. Pour créer cet ordre total, il faut nécessairement une origine et une direction, c'est-à-dire un système de coordonnées. Nous allons d'abord chercher un milieu adéquat dans le contexte de l'espace unidimensionnel.

Pour cela, nous allons introduire succinctement les situations « *fils noués et perles* » issues d'une ingénierie didactique conçue par Claire Margolinas et Floriane Wozniak (Margolinas & Wozniak, 2014).

⁸ On trouvera dans les modules 4, 5 et 6 de AMOR <https://www.mathunion.org/icmi/awards/amor/guy-brousseau-unit> une description détaillée d'un tel processus à propos de la situation voiture-garage.
Livro sobre a Teoria das Situações

Considérons deux collections de perles contenues dans deux sacs. Du point de vue des entiers comme cardinaux, la première collection contient dix perles de couleur rouge et bleue, la deuxième onze perles de couleur jaune et bleue (figure 3). Si nous enfilons les perles de chaque sac sur des fils noués, les objets sont totalement ordonnés : pour chaque fil, le nœud peut être considéré comme l'origine, sa direction allant du nœud à l'autre partie de la ligne (figure 3).

Nous allons maintenant examiner la relation « *avoir la même position* » appliquée aux deux perles bleues sur chaque fil noué. En partant des nœuds sur les fils, une correspondance terme à terme fait rencontrer d'abord les premières perles, rouges ou jaunes, puis les suivantes, jusqu'à la première perle bleue. Elle montre que les perles bleues sont dans la même position sur les deux fils (Figure 3).

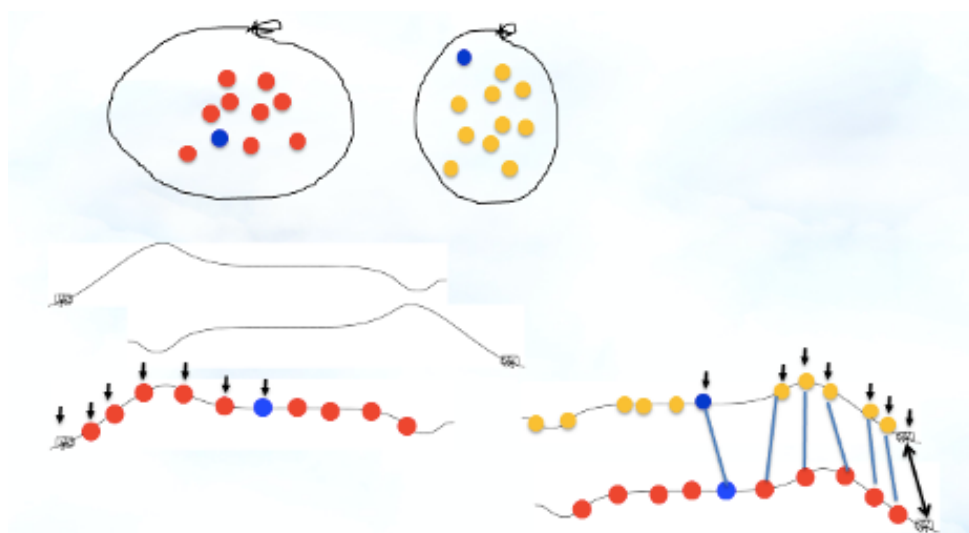


Figure 3.

*Du cardinal à l'ordinal : les perles bleues ont-elle la même position ?
(d'après Margolinas & Wozniak 2014)*

Nous pourrions également dire qu'en partant des nœuds, nous rencontrons la première perle, puis la deuxième, la troisième, la quatrième, la cinquième : les perles bleues sont les sixièmes perles sur les deux fils. Nous pourrions également dire qu'en partant des nœuds, nous arrivons sur les perles numéro un, puis numéro deux, numéro trois, numéro quatre, numéro cinq : les perles bleues sont au numéro six sur les deux fils⁹. Le nombre total de perles, c'est-à-

⁹ Dans la plupart des langues, il existe deux séquences de mots numériques : la séquence des ordinaux qui sont utilisés spécifiquement pour décrire des positions, dans le temps ou sur une ligne, et la séquence des mots numériques « ordinaires » qui sont utilisés à la fois pour nommer les cardinaux et à d'autres fins.

dire l'aspect cardinal, sur chaque fil n'est pas le même, puisque nous avons 10 perles sur le fil rouge et bleue et 11 perles sur le fil jaune et bleue. Mais la perle bleue est à la même place sur chaque fil, ce qui est l'aspect ordinal. Le nombre de perles rouges et jaunes entre le nœud et la perle bleue est le même sur chaque fil : 5. Il y a donc une relation entre ce cardinal 5 et la position de la perle bleue. Remarquons que si l'espacement des perles est différent sur chacun des fils, cela ne change rien à la conclusion : les perles bleues sont dans la même position sur chacun des fils de perles. C'est ce que nous appelons la *position discrète*.

Un aspect très important de la signification *position discrète* des entiers est le suivant. Pour définir la position des objets sur une ligne par un entier, nous avons besoin d'une origine. *Cette origine peut être désignée par le nombre zéro*. Cette désignation n'est pas nécessaire dans le contexte de la cardinalité, alors qu'elle est un élément essentiel pour déterminer la position qu'est l'origine. Sur la figure 4.1, l'origine se trouve à une extrémité de la ligne, la direction étant implicitement définie de bas en haut : on peut en déduire les nombres qui désignent la position des objets sur la ligne, zéro pour l'origine, un pour le smiley, deux pour le cœur et trois pour l'étoile. L'étoile se trouve en troisième position dans ce système de coordonnées. Choisissons maintenant l'autre extrémité de la ligne comme origine (figure 4.2.). Cette origine est toujours désignée par le nombre zéro, mais les objets sur la ligne sont alors désignés par des nombres différents : les nombres qui indiquent la position discrète d'un objet dépendent du système de coordonnées.

La correspondance entre entier et position discrète n'est donc établie que s'il y a une origine et une direction. Ce ne sont pas les objets eux-mêmes qui sont associés à un nombre, mais la position des objets dans une liste ordonnée.

Il est important de remarquer à nouveau qu'il n'y a pas d'unité de mesure associée à la position discrète. Cela peut être illustré par la position d'une personne dans une file d'attente. Être cinquième dans une file d'attente ne signifie pas être à la même distance de la quatrième personne de la file d'attente que de la sixième personne. *La position discrète se réfère uniquement à l'ordre et n'implique pas de mesure*.

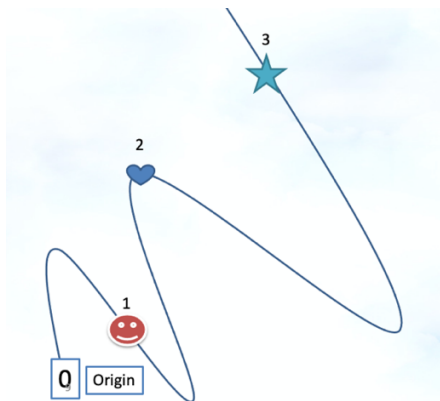


Figure 4.1.

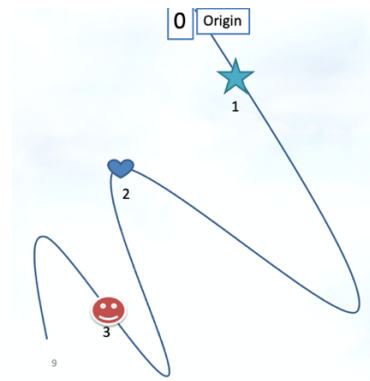


Figure 4.2.

Correspondance entre nombre et position discrète selon la position de l'origine

Nous pouvons maintenant lister les composants d'une situation fondamentale des entiers naturels comme ordinaux, identifiés *via* les situations « fils noués et perles ».

- Le milieu est formé de deux séquences finies totalement ordonnées que nous appelons *listes*.

- La définition en situation peut être formulée ainsi : deux éléments appartenant chacun à deux listes différentes ont la même position discrète ou non dans leurs listes respectives s'il est possible de d'établir une correspondre terme à terme ordonnée entre ses éléments. Cette correspondance commence par la mise en correspondance des deux origines de chaque liste, puis se poursuit avec les deux éléments successifs, et est répétée jusqu'à ce que les éléments distingués soient atteints ensemble, auquel cas ils ont la même position discrète dans les listes, ou jusqu'à ce qu'un élément distingué soit atteint et pas l'autre, auquel cas ils n'ont pas la même position discrète dans les listes.

- L'enjeu peut être formulé comme suit : étant donné une liste modèle et un élément distingué de cette liste, déterminer si un élément distingué d'une autre liste se trouve dans la même position discrète que celui de la liste modèle.

- Le processus d'institutionnalisation transforme les connaissances en des éléments du savoir visé, ici le nombre naturel comme ordinal (ou position discrète). Un processus possible d'institutionnalisation est le suivant.

- Il commence par la reconnaissance d'un élément de connaissance utile.
- La « position » sur une liste est considérée comme un élément de connaissance utile dans les situations.
- Une séquence orale de mots numériques ordonnés est une connaissance utile en situation pour indiquer une position.

- La position des éléments d'une liste peut être associée à une séquence de mots numériques.
- Puisque cette séquence de mots numériques est ordonnée, chaque mot numérique peut être utilisé pour indiquer la position de chaque élément de la liste.
- La liste des mots-nombres peut être une liste spéciale : zéro pour l'origine, premier, deuxième, troisième, etc. ou la liste habituelle des nombres : zéro pour l'origine, puis un, deux, trois, etc. pour les éléments successifs. C'est la signification ordinale des nombres

Nous présentons maintenant une première synthèse de la recherche d'une situation fondamentale de la position discrète, c'est-à-dire des nombres naturels comme ordinal.

Comme les ensembles discrets ne sont pas ordonnés, nous devons introduire l'ordre comme *variable de la situation fondamentale de l'entier naturel*, et les invariants du milieu que nous avons appelés listes. Les situations « fils noués et perles » créées par Margolinas et Wozniak (2014) sont une instantiation possible de ce milieu et du processus d'institutionnalisation. La relation entre listes « avoir la même position discrète » est une relation d'équivalence et les classes équivalentes de la relation sont les nombres ordinaux, liés à la position discrète. Une autre signification des entiers naturels, celle de position discrète, est donc obtenue par cette situation fondamentale.

Nous synthétisons dans la figure 5 la recherche menée jusqu'ici d'une situation fondamentale des nombres entiers naturels en leurs deux significations, cardinal et ordinal.

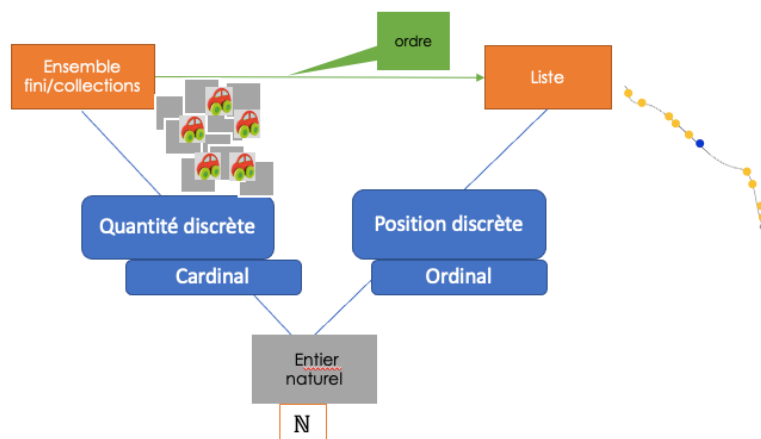


Figure 5.

État de la recherche d'une situation fondamentale des nombres

Dans cette figure (et dans toutes les suivantes, faisant état de notre recherche d'une situation fondamentale des nombres) nous représentons : en première ligne (en orange), les invariants du milieu et dans la bulle (en vert) les valeurs de variables permettant le passage d'une variante de la situation fondamentale à l'autre et qui changent ce milieu ; en deuxième ligne (en bleu) les significations du savoir visé ; en dernière ligne (grisé) les savoirs visés. Nous avons aussi imaginé les instanciations du milieu par les deux premières situations évoquées ici : « voitures-garages » et « fils noué et perles ».

Poursuivons un peu notre recherche d'une situation fondamentale des nombres en jouant sur les valeurs d'une autre variable de la dernière situation fondamentale, celle des entiers comme position discrète.

Considérons le cas d'une origine qui n'est pas à une extrémité de la ligne (figure 6). Dans ce cas, il y a nécessité de définir une direction explicite. Une fois cette direction définie, on note le cœur par 1 et l'étoile par 2. Comment noter le smiley ? Par symétrie, on peut décider de désigner la position du le smiley par -1, ce qui renforce la nécessité de désigner la position de l'origine par zéro. Une fois cette décision prise, si nous changeons la direction, le visage est désigné par 1, le cœur par -1 et l'étoile par -2 . L'instanciation de cette situation reste à concevoir.

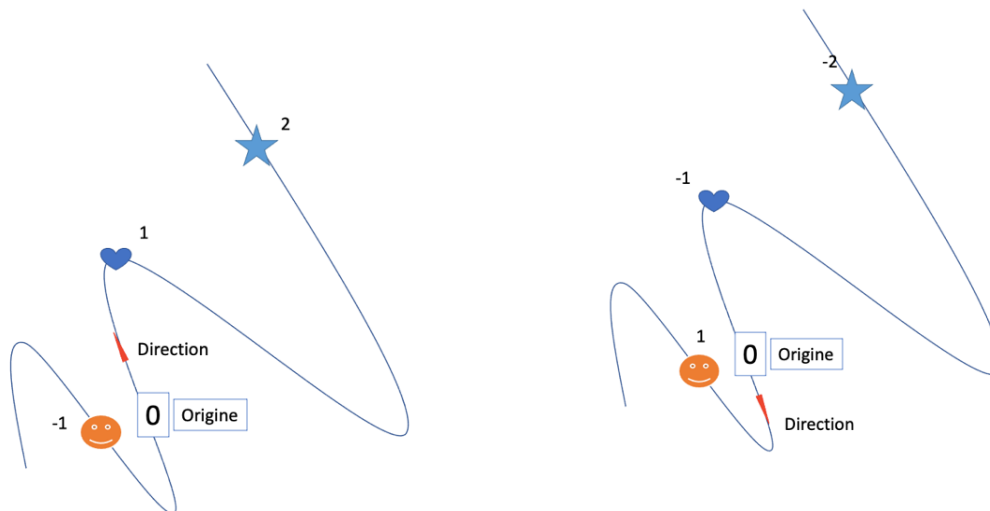


Figure 6.

Nombre et position discrète quand l'origine n'est pas une extrémité de la ligne

Si l'origine n'est pas à une extrémité d'une demi-droite, alors les entiers négatifs sont une connaissance utile dans le cadre de cette situation fondamentale. La figure 7 schématise un chemin possible vers les entiers relatifs comme position (figure 7) : pour ce faire, nous changeons judicieusement les valeurs de la variable *position de l'origine*.

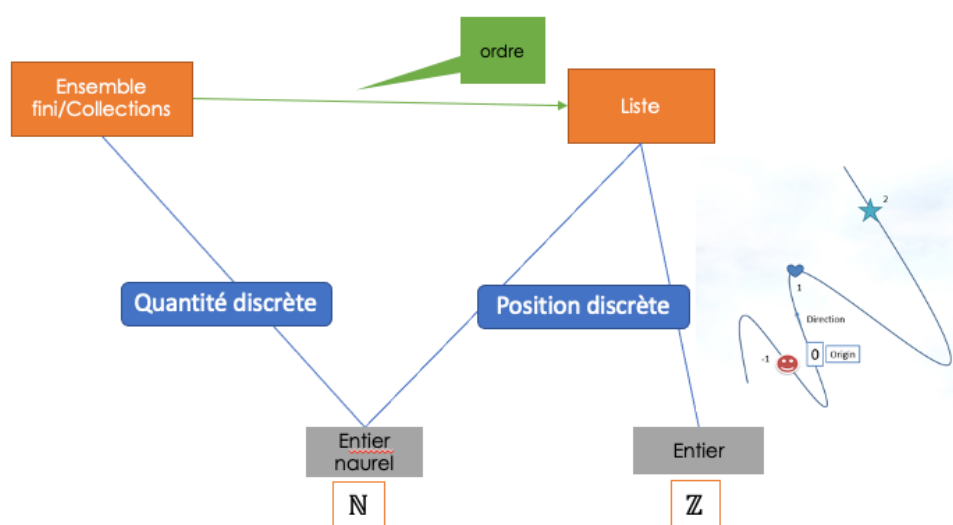


Figure 7.

État de la recherche d'une situation fondamentale des nombres

Cependant, les entiers ne sont pas les seuls nombres ! Nous poursuivrons notre recherche d'une situation fondamentale des nombres en revisitant le travail emblématique d'ingénierie didactique de Guy et Nadine Brousseau (1987).

3.3 A la recherche d'une situation fondamentale concernant les nombres rationnels

Le travail de Brousseau & Brousseau (1987) n'envisage pas la signification des entiers naturels comme position discrète, signification qui, comme nous l'avons écrit précédemment, peut conduire à une approche des entiers négatifs. Par contre l'ingénierie didactique décrite dans ce travail prend appui sur la situation fondamentale des entiers naturels comme quantité discrète en jouant sur deux variables de cette situation.

La *première variable* concerne la mesure des longueurs : les objets du milieu de la situation sont alors des segments. Une *unité* de longueur étant choisi (valeur de la variable), la mesure d'un segment est donnée par un nombre entier associé à cette unité. Ainsi, seuls certains segments ont une mesure dans cette situation. Nous appelons *mesure discrète* cette mesure puisqu'elle ne concerne que les entiers. Nous avons ainsi une nouvelle signification d'un entier naturel, celle de mesure discrète (liée au choix d'une unité).

Remarque. La signification de mesure discrète est implicite dans les entiers naturels en tant que quantités discrètes : une voiture, deux voitures, trois voitures, consiste à compter des unités de voitures. Avec les mêmes objets du monde, on aurait pu compter des roues : le nombre de roues aurait été différent du nombre de voitures. Il s'agit d'un changement d'unité de mesure, de l'unité *voiture* à l'unité *roue des voitures*.

Dans la situation de mesure discrète, certains segments n'ont pas de mesure ! Il est donc nécessaire de créer de nouveaux nombres.

3.4 Existe-t-il une situation fondamentale pour de nouveaux nombres : les nombres rationnels comme mesure

Afin de générer une situation fondamentale de ces nouveaux nombres, Brousseau & Brousseau (1987) considère une *deuxième variable* : la longueur des objets du milieu, cette longueur prenant la valeur « être inférieure à l'unité ». L'enjeu est alors de comparer la longueur de ces objets, en utilisant uniquement la quantité discrète et la mesure discrète, deux connaissances déjà institutionnalisées. Pour cela, on peut associer une mesure discrète et un entier naturel en une paire. Brousseau nomme *commensuration* cette conception de la mesure des grandeurs. Ce mot fait référence à des grandeurs qui peuvent être mesurées par un étalon commun. Par exemple, si 4 unités mesurent la longueur de 15 bâtons *verts* identiques entre eux et alignés, les deux éléments, 4 et 15, respectivement mesure discrète et quantité discrète, forment une paire qui caractérise la longueur d'un bâton bleu. Cette paire permet une comparaison des longueurs, l'unité étant fixée : si la mesure de 15 bâtons *bleus* identiques entre eux et alignés est 6 unités, on peut affirmer qu'un bâton bleu est plus long qu'un bâton vert. La

quantité discrète 15 est un étalon commun de la paire.

Brousseau & Brousseau (1987) ont choisi la commensuration, et non le fractionnement de l'unité de mesure, comme méthode de mesure, pour des raisons qui ne seront pas abordées ici. Vous pouvez consulter l'article de Ratsimba-Rajohn (1982) pour un développement de la comparaison théorique et expérimentale de ces deux conceptions de la mesure que sont la commensuration et le fractionnement de l'unité.

Nous avons choisi pour la variable didactique « grandeur des objets », un domaine mettant en défaut le modèle implicite naturel [celui du fractionnement de l'unité] sans toutefois exclure des manipulations. [...] le nombre qui mesure l'épaisseur devient alors le seul moyen – le seul « concret » - d'appréhender cette épaisseur, de construire les expériences de comparaison, de prévoir la somme etc...

La représentation mathématique a été réintégrée dans son rôle fondamental de théorie en construction, dans son rapport dialectique avec le constructeur et avec la situation. (Brousseau, 1981, p. 104-105)

Décrivons brièvement l'instanciation bien connue de Brousseau de la situation fondamentale des nombres rationnels dans leur *signification de mesure*. Le milieu est constitué de plusieurs grandes tas de feuilles blanches de différentes épaisseurs, chaque tas étant constitué de feuilles de même épaisseur (tas A, B, etc.), et d'un pied à coulisse peu précis, dont les graduations sont millimétriques¹⁰. Il s'agit d'une situation de communication écrite : un élève dispose de plusieurs feuilles de papier de même épaisseur (tirées d'un même tas). Cet élève doit écrire un message à un autre élève pour qu'il puisse déterminer le tas de feuilles de papier dont sont issues ces feuilles (sans nommer le tas !).

La connaissance utile dans cette situation est d'associer deux nombres, c'est-à-dire une *paire* : un nombre n de feuilles identiques (quantité discrète) et la mesure entière totale en millimètres d'une pile de n feuilles ainsi constitué (mesure discrète). Dans ce milieu, comme nous l'avons vu pour les bâtonnets, il est possible de *comparer* des paires.

De plus, une propriété très importante de la commensuration peut être expliquée à partir d'un exemple dans la situation des feuilles de papier. Si on prend deux fois plus de feuilles d'un même tas, on double la mesure de la pile de feuille, mais l'épaisseur d'une feuille est invariante. Donc 4 mm pour une pile de 7 feuilles d'un même tas est associé à la même épaisseur que 6 mm pour 32 feuilles du même tas. On dira que le couple (4,7) est équivalent au couple (8,14) obtenu

¹⁰ Voir également le chapitre «La structuration du milieu : méthodologie d'analyse des situations didactiques »
Livro sobre a Teoria das Situações

en doublant le nombre de feuilles. Plus généralement (4,7) est équivalent à tout couple ($n \times 7$, $n \times 4$) obtenu en multipliant le nombre de feuilles par n .

Dans les situations suivantes, au lieu de la paire, nombre de feuilles et nombre entier de millimètres, on introduit un *couple*, c'est-à-dire une paire *ordonnée*, pour désigner l'épaisseur d'une feuille de papier. Par exemple le couple (4,7) (lu 4 pour 7) signifie que 4 mm est la mesure de l'épaisseur d'une pile de 7 feuilles. L'écriture utilisée pour communiquer l'épaisseur d'une feuille de papier change ainsi de statut. L'écriture fractionnaire peut alors être introduite comme une notation sociale 4/7, toujours lue comme 4 pour 7 dans le contexte de la commensuration.

Ci-après ce qu'écrivent Brousseau, Brousseau & Warfield (2014) sur cet exemple.

La paire ordonnée (4,7) indique qu'une pile de sept feuilles a une épaisseur totale de 4 mm. L'épaisseur d'une feuille s'exprime

- par la commensuration 4/7,
- ou par la fraction 4/7.

[...] commensuration et fraction [...] partagent la même notation symbolique. Les conceptions ne le sont pas.

Les commensurations n'utilisent que des opérations qui peuvent être conçues, réalisées et effectuées matériellement ou par des calculs dans le domaine connu des entiers naturels. (Brousseau, Brousseau, & Warfield 2014, p.161, notre traduction)

Cependant, rien n'indique que ce qui a été progressivement introduit de cette manière soit effectivement un nombre. En effet, dans 4/7 (lue 4 pour 7), il y a deux nombres, donc affirmer qu'il s'agit d'un seul nombre est une proposition délicate. Brousseau & Brousseau (1987) proposent d'étudier ces objets pour voir s'ils se comportent comme des nombres : *peut-on les ordonner ? et surtout, peut-on les additionner ?* Si l'addition de ces « nombres » a une signification, on peut aussi donner une signification à la multiplication de ces nombres par un entier, celle d'une addition répétée. Les réponses positives à ces questions proviennent des propriétés de la mesure discrète qui permettent d'ordonner et d'additionner les épaisseurs des feuilles de papier. Pour nous faire comprendre, citons ci-après un extrait d'une observation de l'ingénierie didactique de Brousseau & Brousseau (1987) avec des élèves de CM¹¹.

« 8/100, 9/45 [10/50, 40/100], ... sont-ils des nombres ? Ce que nous avons fabriqué pour mesurer les épaisseurs est-ce que c'est des nombres ? »

Débat et conclusion du débat :

[...] « Pour décider si ce sont des nombres il faut essayer de faire des opérations. Par exemple des additions... »

Des enfants suggèrent de coller les feuilles l'une contre l'autre et viennent montrer

¹¹ Fin de l'école primaire en France.
1166

comment ; d'autres viennent écrire la somme $10/50 + 40/100$. Ceci devrait représenter cela,..

[...] « Pouvez-vous prévoir de votre place quelle est l'épaisseur de cette nouvelle feuille ? »

Pari : beaucoup d'enfants croient que c'est facile et proposent $50/150$ (ils ont effectué $10 + 40$ et $50+100$) ; mais d'autres ont des doutes et écrivent d'autres choses (par ex $50/100$).

[...] « Comment savoir si ce résultat est correct ? »

Première vérification.

Les élèves : « il faut faire un nombre suffisant de feuilles nouvelles et mesurer. »

[...] Il [*l'enseignant*] écrit donc 50 feuilles de type B et 100 feuilles de type E et fait préciser l'épaisseur de ces tas (10 mm et 40 mm), si les enfants ne le demandent pas. Il peut demander l'épaisseur totale du tas (50 mm) et le nombre total de feuilles (150).

« Je prends une feuille de type B et une feuille de type E et je fais une nouvelle feuille... » L'enseignant continue en décrivant cette correspondance à haute voix, jusqu'à ce que les enfants l'arrêtent et disent ça ne va pas, il y aura trop de feuilles E, il faut le même nombre de feuilles dans les deux tas ; pour faire 100 nouvelles, il faut 100 feuilles B et 100 feuilles E (ou 50 et 50, ou 150 et 150).

« Voulez-vous changer vos paris ? »

La plupart des enfants font alors le calcul correct et déclare la vérification inutile.

[...] $10/50 + 40/100 = 20/100 + 40/100 = 60/100$. (Brousseau & Brousseau 1987, pp. 20-21)

Comme il n'est pas dans notre propos de décrire tout le processus de construction de ce que Brousseau a appelé « les nombres rationnels comme mesure », pour plus de détails, nous vous renvoyons à la très importante bibliographie sur ce sujet.

Nous synthétisons dans la figure 8, notre relecture du travail d'ingénierie didactique de Brousseau & Brousseau (1987) en l'entendant comme une instanciation d'une situation fondamentale des nombres rationnels comme mesure en leur signification de commensuration, en jouant sur deux variables successives d'une situation fondamentale des nombres entiers naturels en leurs significations quantité discrète (ou cardinal) et mesure discrète.

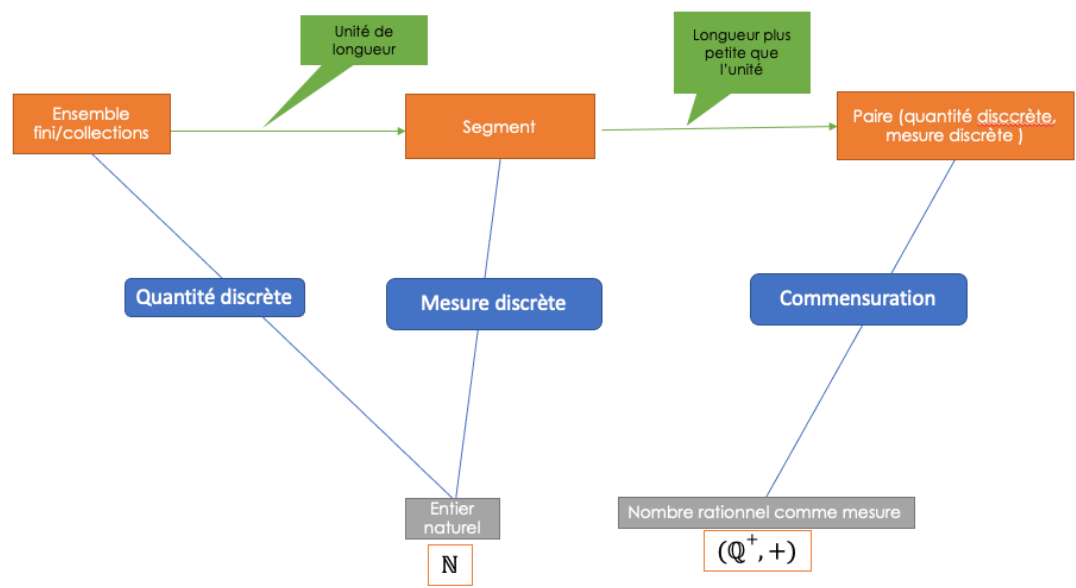


Figure 8¹².

État de la recherche d'une situation fondamentale des nombres

La situation fondamentale des nombres rationnels comme mesure donne à la multiplication des rationnels – mesure (couple d'entiers) une signification restreinte, celle de l'addition répétée comme on peut l'illustrer par la citation suivante. Dans cette citation les élèves de CM sont mis en groupe et doivent déterminer l'épaisseur d'une feuille de papier constituée par le collage de 3 feuilles issues d'un même tas (catégorie d'une feuille), puis de 5 feuilles, puis de 20, 100 et 120. Il y a 3 tas.

Calculer l'épaisseur des cartons réalisés avec 3 feuilles, 5 feuilles, 20 feuilles, 100 feuilles, 120 feuilles de chaque catégorie. Vous êtes groupés en 5 équipes : chaque équipe va avoir une catégorie de papier (2 équipes auront forcément la même).

Discussion :

Par exemple, l'équipe III a marqué :

$$3/19 \times 3 = 9/57.$$

L'équipe II a marqué au-dessous :

$$3/19 \times 3 = 9/19.$$

Il faut donc expliquer ces résultats et invalider au moins l'un des deux. Une discussion s'engage entre les équipes : l'équipe II explique que pour multiplier par 3 elle a multiplié les 2 termes de la fraction par 3, mais elle ne sait pas prouver que son résultat est correct. Par contre, l'équipe I explique que, puisqu'on a collé ensemble 3 feuilles, l'épaisseur du carton peut être trouvée en faisant une addition : $3/19+3/19+3/19=9/19$

[...]

C'est alors qu'un enfant intervient et fait remarquer que 9/57 et 3/19 désignent les

¹² Rappel. En première ligne (en orange), les invariants du milieu et dans la bulle (en vert) les valeurs de variables permettant le passage d'une variante de la situation fondamentale à l'autre et qui changent le milieu ; en deuxième ligne (en bleu) les significations du savoir visé, ; en dernière ligne (grisé) les savoirs visés.

mêmes épaisseurs car les fractions sont égales.

$$x 3 \begin{pmatrix} 3/19 \\ 9/57 \end{pmatrix} x 3$$

(Brousseau & Brousseau 1987, pp. 34-35)

3.5 Existe-t-il une situation fondamentale des nombres rationnels donnant un sens à leur multiplication ?

Dans la situation de commensuration, la multiplication de deux épaisseurs n'a pas de sens et en conséquence, la multiplication de deux rationnels comme mesure n'a pas de sens non plus. Cette limitation est au cœur de l'analyse épistémologique de Brousseau (1981) concernant les nombres rationnels. Brousseau considère que le passage entre les rationnels mesures (couple d'entiers) et les nombres rationnels « abstraits » nécessite une nouvelle situation fondamentale. Cette nouvelle situation fondamentale s'appuie sur la connaissance préalable des rationnels comme mesure, et son milieu est celui des agrandissement et réduction de figures planes (applications linéaires rationnelles). C'est seulement dans un tel milieu que la multiplication de deux rationnels acquiert une signification, celle de la composition de deux applications linéaires rationnelles. Nous n'entrerons pas ici dans les détails de cette dernière situation fondamentale, mais renvoyons le lecteur aux nombreuses publications en différentes langues sur l'ingénierie de Brousseau & Brousseau (1987). Ci-après la dernière synthèse de la situation fondamentale des nombres étudiée suite au travail de Brousseau & Brousseau (figure 9).

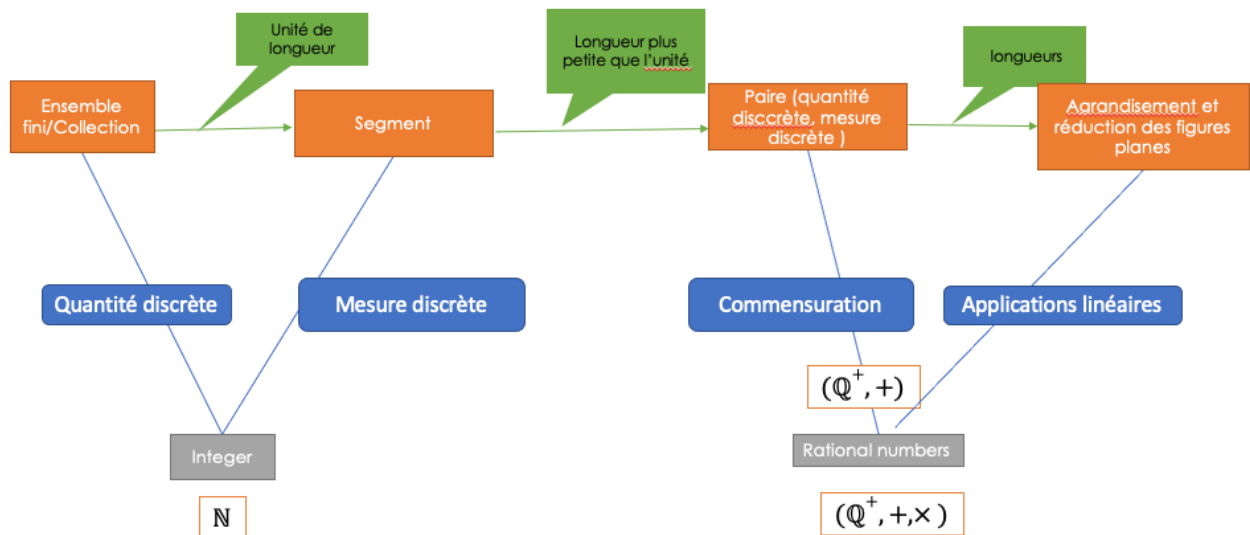


Figure 9¹³.

État de la recherche d'une situation fondamentale des nombres

Il reste une limite à cette dernière situation fondamentale, puisque les nombres impliqués dans l'agrandissement (ou réduction) d'une figure ne peuvent être que positifs, puisqu'ils représentent des longueurs. Nous n'avons donc pas encore atteint l'ensemble des nombres rationnels.

Remarquons que la rupture considérée par Brousseau pour envisager la multiplication comme une opération interne (dans Q) est également présente en ce qui concerne la position dans Z : il est possible d'envisager des déplacements positifs et négatifs à partir de positions positives et négatives, mais cela ne conduit qu'à $(Z, +)$ car la multiplication de deux entiers négatifs ne peut pas s'envisager dans un tel milieu, et demanderait une autre situation fondamentale tout à fait différente, sans doute de nature algébrique (Ruiz-Munzón, Matheron, Bosch & Gascón, 2012 ; Ruiz-Munzón, Bosch & Gascón, 2020 ; Schubring, 1986).

Pour conclure ce paragraphe, voici ce que Brousseau écrit à propos de son travail d'ingénierie sur les nombres rationnels, et qui conforte l'intérêt de l'approche épistémologique qu'incarne la recherche d'une situation fondamentale.

Toute la construction est donc fondée sur la possibilité de donner à chaque notion mathématique à enseigner un sens à la fois significatif, correct et fécond. Ce sens est traditionnellement donné par les moyens linguistiques offerts par la culture : définitions verbales, explications et preuves - essentiellement par des textes. L'enseignement des mathématiques est ainsi réduit à l'étude d'un texte avec l'aide de textes qui peuvent être illustrés par un discours. Ces moyens paraissent économiques car ils facilitent la communication du texte du savoir. Mais en réalité, ils ne sont pas économiques pour les élèves, qui appréhendent mieux les concepts par leur fonction dans le déroulement d'une action en situation et par les décisions qu'elle appelle que par des descriptions et des preuves intellectuelles. Les situations d'action, au sens large, sont donc la base de tout l'édifice pour tous les élèves. (Brousseau, Brousseau, & Warfield., 2014, p. 152, notre traduction)

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé le noyau épistémologique de la théorie des situations, à savoir le concept de situation fondamentale. Dans le contexte de cette théorie, le

¹³ Rappel. En première ligne (en orange), les invariants du milieu et dans la bulle (en vert) les valeurs de variables permettant le passage d'une variante de la situation fondamentale à l'autre et qui changent le milieu ; en deuxième ligne (en bleu) les significations du savoir visé, ; en dernière ligne (grisé) les savoirs visés.

terme situation est un terme générique qui désigne le modèle d'interaction entre un actant et un milieu à propos d'un savoir (figure 1). Comme nous avons essayé de le montrer, les conditions d'utilité et par là même les différentes significations d'un savoir sont les moteurs de la recherche d'une situation fondamentale. Le problème didactique qui se pose alors à la théorie des situations *didactiques* est de créer les conditions de l'utilité et de la signification des savoirs au sein des institutions d'enseignement. En effet, d'une manière générale, l'utilité des connaissances se révèle dans des situations qui ne sont pas construites pour l'enseignement, mais qui existent dans différentes institutions : dans la vie quotidienne, au travail, en mathématique, en physique etc. Dans la théorie des situations didactique, une *situation didactique*, liée à une intention d'enseigner, représente une modélisation des interactions complexes qui s'instaurent entre un enseignant, un élève, un savoir à enseigner et un milieu. Il en découle que la mise en œuvre, dans une telle situation, des conditions d'utilité, au cœur de l'étude d'une situation fondamentale, nécessite de s'engager dans un autre type d'étude.

Entrons brièvement dans le processus de modélisation d'une situation didactique, initié par Brousseau, pour en présenter les principaux concepts : nous le faisons en référence avec ce que nous avons présenté dans le cadre de la théorie des situations mathématiques.

Une situation mathématique, instanciation d'une situation fondamentale et installée dans une situation didactique, sera nommée par Guy Brousseau *situation adidactique*. Une telle situation est conçue comme le cœur d'une situation didactique et vise à permettre les interactions sujet - milieu les plus appropriées vis-à-vis du savoir à enseigner. Dans une situation adidactique, l'élève peut, pour un temps, assumer la position d'un actant par rapport au milieu de cette situation. De plus, la qualité d'une situation didactique, c'est-à-dire ses propriétés pour l'acquisition des connaissances visées, n'est pas purement théorique, elle relève de l'ingénierie didactique et de l'observation expérimentale.

En effet, l'enseignant est responsable de l'enseignement du savoir à enseigner, c'est-à-dire du lien possible entre les connaissances en situation et le savoir visé : c'est donc lui qui choisit de mettre en place une situation adidactique afin de représenter la signification du savoir en jeu. Cette responsabilité entraîne nécessairement la mise en jeu d'autres composantes essentielles dans le modèle qu'est la situation didactique. Par exemple, l'interprétation des

observations d'un élève en difficulté élective¹⁴ a conduit Guy Brousseau à créer un concept de la théorie des situations didactiques : le *contrat didactique* (Brousseau, 1980 ; Brousseau & Warfield, 1999).

Au cours d'une séance ayant pour objet l'enseignement à un élève d'une connaissance déterminée (situation didactique), l'élève interprète la situation qui lui est présentée, les questions qui lui sont posées, les informations qui lui sont fournies, les contraintes qui lui sont imposées, en fonction de ce que le maître reproduit, consciemment ou non, de façon répétitive dans sa pratique de l'enseignement. Nous nous intéressons plus particulièrement à ce qui, dans ces habitudes, est spécifique des connaissances enseignées. (Brousseau, 1980, p. 127)

Dans le cadre de la théorie des situations mathématiques, nous avons introduit la différence essentielle entre connaissances et savoir et les deux processus intervenant dans leur transformation réciproque : l'institutionnalisation et la transposition.

Le processus de *transposition*, transformation d'un savoir en connaissances en situation, sous-tend la recherche d'une situation fondamentale d'un savoir relativement à ses différentes significations. Dans une situation didactique, nous considérons que ce travail de recherche de transposition a déjà été effectué : par un chercheur, par l'enseignant, par des auteurs de ressources, etc. Une situation mathématique représentant une signification du savoir peut donc être installée comme une situation adidactique. Le processus d'installation d'une situation adidactique dans une situation didactique, dont l'enseignant est responsable, a été appelé *dévolution* par Brousseau. C'est l'un des rôles principaux d'un enseignant en situation didactique.

Dans la théorie des situations mathématiques, nous avons considéré la transformation des connaissances en situation en savoirs comme un processus d'*institutionnalisation*. C'est le point de vue d'une recherche qui vise à contrôler que les connaissances rencontrées en situation sont candidates à représenter une transposition adéquate d'un savoir déterminé. Ce travail d'institutionnalisation en tant que travail de la recherche sur le contrôle de la transposition a déjà été effectué. L'enseignant peut donc légitimement penser qu'il peut, d'une certaine manière, faire confiance à la situation qu'il met en place : cette situation peut être, en partie, une situation adidactique. De son côté, l'élève sait que l'enseignant lui demande de s'engager dans cette situation pour lui apprendre un savoir ; cette certitude de l'élève sur les attentes de l'enseignant fait partie du contrat didactique. Cependant, au sein des institutions d'enseignement, les choix

¹⁴ C'est-à-dire réussissant dans toutes les disciplines enseignées sauf en mathématiques.

et les décisions concernant la transformation progressive des connaissances en savoir sont de la responsabilité de l'enseignant. Les observations de séances d'ingénierie en classe ont conduit Brousseau à identifier ce processus de transformation progressive, de connaissances en savoir, comme l'un des deux rôles principaux d'un enseignant (à côté de la dévolution), et l'a nommé : institutionnalisation. Nous disposons donc d'un seul terme : institutionnalisation, pour désigner deux processus dont la finalité est différente selon qu'il s'agit de la théorie des situations mathématiques (institutionnalisation du point de vue épistémologique) ou de la théorie des situations didactiques (institutionnalisation du point de vue didactique).

Dans la figure 10, nous résumons par un schéma la complexité du modèle qu'est une situation didactique.

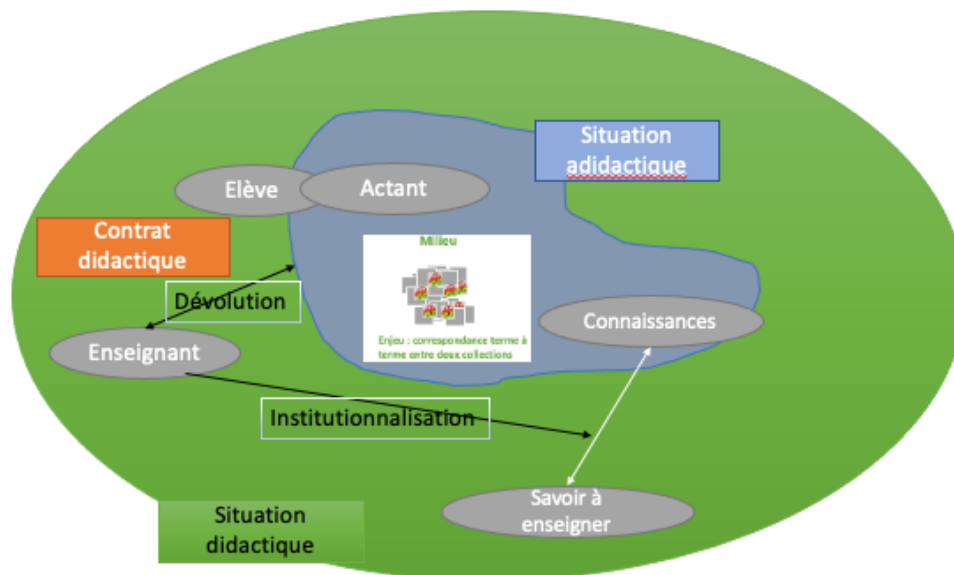


Figure 10.

Situation didactique comme modèle dans la théorie des situations didactiques

Les nombreux concepts produits dans la théorie des situations didactique peuvent avoir des implications générales, comme par exemple le contrat didactique, la dévolution, l'institutionnalisation et ainsi de suite. Ils peuvent être considérés comme opératoires dans une théorie des situations plus générale. Cependant, les recherches de Guy Brousseau se situent strictement dans le cadre des mathématiques. En 2000, à Mexico, il fait un commentaire important à ce sujet, justifiant ainsi sa position qui est celle de la primauté de la réflexion épistémologique dans la théorie des situations que nous avons présenté dans ce chapitre.

Accepter d'emblée l'idée d'une didactique générale préalable me semble propre à écarter

de l'étude tout ce qui est propre au didactique [...] C'est pourquoi la théorie des situations commence par l'étude et la modélisation des situations didactiques propres à tel ou tel savoir précis. (Brousseau 2000, p.24)

Nous espérons avoir rendu compte dans ce chapitre de la richesse et de l'originalité de l'œuvre de Guy Brousseau, et de sa contribution essentielle à la didactique des mathématiques et plus généralement, aux mathématiques et à son enseignement. En particulier, nous pensons que le processus de recherche de situations fondamentales concernant les savoirs à enseigner, à tous les niveaux des institutions d'enseignement, permet une analyse du point de vue épistémologique non seulement des ingénieries didactiques mais aussi des situations « ordinaires » telles qu'elles existent dans des classes ou bien telles qu'elles sont proposées dans la documentation à la disposition des enseignants. En effet, ce processus peut fournir des références épistémologiques pour caractériser la structure et la cohérence de ces situations « ordinaires » vis-à-vis du savoir visé, la complétude ou l'incomplétude de l'institutionnalisation (au sens épistémologique) vis-à-vis de l'utilité du savoir (sur le long ou le court terme de l'enseignement), et par là peut permettre l'étude de la présence ou de l'absence de significations cruciales du savoir enseigné.

Références

- Briand, J., Loubet, M. & Salin, M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Paris: Hatier.
- Brousseau, G (1980). Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire. *Revue de Laryngologie*. 101(3/4). 107–131. <https://hal.science/hal-00582614/>
- Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux : deuxième partie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 2, n. 1. 37–127.
- Brousseau, G. & Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux: IREM.
- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 9, n. 3. 309–336.
- Brousseau, G., & Warfield, V. M. (1999). The Case of Gaël. *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(1), 7-52. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6W5B-3Y2NBSY-K/2/aebd19d0e81ab68e152cdf430309082b>
- Brousseau, G. (2000). Education et Didactique des mathématiques. *Educacion mathematica*. Vol. 12, n°1, Mexico. 5-39. <https://hal.science/hal-00466260>
- Brousseau, G. (2005). Situations fondamentales et processus génétiques de la statistique. In Mercier, A.; Margolinas, C. (Eds.). *Balises pour la Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La pensée sauvage. 165–19.
- Brousseau, G., & Brousseau, N. (2006). L'ingénierie didactique en mathématiques. *Séminaire du DAEST*. Bordeaux.
- Brousseau, G. (2010a). *Les situations mathématiques : propriétés et composantes*. Diaporama: cours 2010. Diaporama. <http://guy-brousseau.com/cours-2010-les-situations-mathematiques-proprietes-et-composantes>

- Brousseau, G. (2010b). *De l'art d'enseigner les mathématiques à la didactique et à l'étude des situations*. Diaporama : cours 2010.
- Brousseau, G. (2012). Des dispositifs Piagétien... aux situations didactiques. *Éducation et didactique*, v. 6, n. 2, p. 103–129, 2012.
- Brousseau, G., Brousseau, N. & Warfield, G. (2014). *Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment*. Dordrecht Heidelberg New-York London: Springer.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse *a posteriori* des situations. Em: Margolinas, C. (Ed.). *Les débats de didactique des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage. 89–102.
- Margolinas, C. (2021). Construire des points de vue d'élèves: des défis théoriques et méthodologiques pour la recherche en didactique des mathématiques. In: Chaachoua, H. et al. (Eds.). *Nouvelles perspectives en didactique: le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure*. Grenoble: La Pensée Sauvage. 19–48
- Margolinas, C. & Wozniak, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle. Une approche didactique*. (Publication chez academia prévue 2024) ed. Bruxelles: De Boeck.
- Margolinas, C. & Wozniak, F. (2014). Early construction of number as position with young children: a teaching experiment. *ZDM - The International Journal of Mathematics Education*, V. 46, n. 1. 29–44.
- Margolinas, C., & Bessot, A. (2023). Le savoir et la théorie des situations. *CEMeR - Caminhos da Educação Matemática em Revista*, 14(4), 39-60.
- Margolinas C. & Bessot A. (2024) Brousseau Unit. AMOR (Awardees Multimédia Online Ressources). <https://www.mathunion.org/icmi/awards/amor/guy-brousseau-unit>
- Ratsimba-Rajohn, H. (1982). Eléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(1), 65–113.
- Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y, Bosch, M & Gascón, J (2012). Autour de l'algèbre: les entiers relatifs et la modélisation algébrique-fonctionnelle. In: Coulange et al. (Eds.). *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives*. Recherches en didactique des mathématiques (numéro spécial) ed. [s.l: s.n.]. 81–101.
- Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2020). Un modèle épistémologique de référence pour la recherche sur l'algèbre élémentaire. *Nouveaux Cahiers de la Recherche en Education*, v. 22, n. 1. 123–144.
- Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. *Petit x*, v. 12. 5–32.