



HAL
open science

Bifurcation fourche et ralentissement critique

Renaud Mathevet, Simon Garrigou, Arnaud Le Houelleur, Emeryk Ablonet,
Charlotte Fabre, Nabil Lamrani, Patrice Marchou, Nicolas Combe

► **To cite this version:**

Renaud Mathevet, Simon Garrigou, Arnaud Le Houelleur, Emeryk Ablonet, Charlotte Fabre, et al.. Bifurcation fourche et ralentissement critique. *Le Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie*, 2023, 1056, pp.573. hal-04740382

HAL Id: hal-04740382

<https://hal.science/hal-04740382v1>

Submitted on 17 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Bifurcation fourche et ralentissement critique

Ayguesvives : samedi 12 novembre 2022

par Renaud MATHEVET^{1,2,5}, Simon GARRIGOU³, Arnaud Le HOUELLEUR³, Emeryk ABLONET³,
Charlotte FABRE¹, Nabil LAMRANI¹, Patrice MARCHOU¹ et Nicolas COMBE^{4,5}.

renaud.mathevet@lncmi.cnrs.fr

1 - Groupe recherche-formation « Smartphone instrument de mesure »

Institut de Recherche pour l'Enseignement des Sciences (IRES¹)

Université Paul Sabatier - 31062 Toulouse Cedex 9.

2 – LNCMI, CNRS UPR 3228, UGA, UPS, INSA, EMFL - 31400 Toulouse et 38042 Grenoble.

3 - Centre de préparation à l'agrégation de physique, promotion 2021-2022, Toulouse.

4 - CEMES, CNRS UPR 8011, 31055 Toulouse cedex 4, France.

5 - Université de Toulouse, UPS, F-31055 Toulouse, France.

Nous présentons dans cet article deux études complémentaires d'un phénomène typique de physique non-linéaire : la bifurcation fourche. Les grandeurs mécaniques sont mesurées soit par pointage sur un enregistrement vidéo soit à l'aide d'un smartphone. Dans les deux cas, le modèle théorique développé rend compte des observations à quelques pourcents près. L'étude vidéo est simple à mettre en œuvre et aborde très concrètement le phénomène. L'utilisation du smartphone, tout aussi simple expérimentalement mais plus exigeante en ce qui concerne la manipulation des données, permet une analyse plus détaillée. Nous en présentons un aspect : le ralentissement critique à l'approche de la bifurcation.

INTRODUCTION

Si la physique non linéaire peut être abordée expérimentalement au niveau post-bac [1-4] nous envisageons ici deux notions peu étudiées expérimentalement : bifurcation fourche et ralentissement critique. Nous reprenons le dispositif expérimental original introduit dans [5] pour l'étude de l'accélération d'entraînement. Il est constitué d'un pendule posé sur un plateau tournant. Nous considérons ici, contrairement à notre étude de l'accélération ω Coriolis, les grandes vitesses de rotation du plateau afin d'étudier la dynamique non-linéaire du système {pendule + plateau tournant}. Elle a pour origine l'accélération centrifuge qui s'exerce sur le bras du pendule et tend à écarter le pendule de l'axe vertical de rotation alors que la gravité tend à l'y ramener. En dessous d'une valeur critique Ω_c , la gravité domine, et le pendule possède une seule position d'équilibre stable, à la verticale. Au-delà de Ω_c , cette position d'équilibre devient instable et le système possède 2 positions d'équilibres stable pour deux valeurs d'angles opposés. Ce changement qualitatif de comportement du système, d'un équilibre stable vers un équilibre instable et deux équilibres stables, constitue une bifurcation fourche (Figure 2c).

De plus, nous démontrons, tant théoriquement qu'expérimentalement, que la période d'oscillation du pendule croît et, en principe, diverge à l'approche de Ω_c : c'est le phénomène de *ralentissement critique*. Nous commencerons par une analyse vidéo de la bifurcation. C'est une méthode très directe et simple à mettre en œuvre qui permet néanmoins une analyse quantitative du phénomène. Elle ne donne cependant accès qu'à une analyse de la statique du système dans le référentiel tournant lié au plateau. Aussi, nous reprenons la même expérience à l'aide d'un smartphone pour mettre en évidence à la fois la statique *i.e.* la bifurcation et la dynamique *i.e.* le ralentissement critique.

1. Dispositif expérimental

Le montage utilisé est représenté sur la Figure 1. Il consiste en un pendule posé sur le plateau d'un tabouret tournant. Ce montage est suffisant pour l'analyse vidéo. Une enveloppe est fixée avec du ruban adhésif à l'extrémité du bras du pendule. On y glisse un smartphone qui sera utilisé dans la seconde partie de

Commentaire [rm1]: NC propose « pendule » je préfère système = pendule sur tabouret tournant.

¹ <https://ires.univ-tlse3.fr/sim/>

l'article.

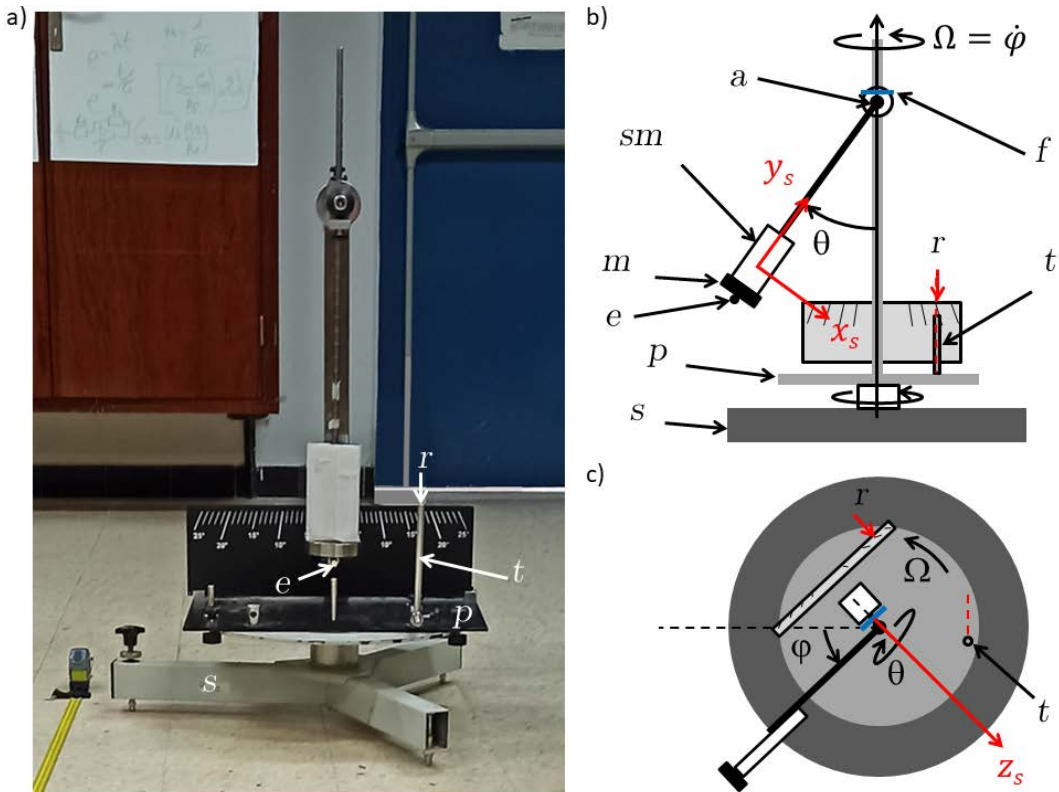


Figure 1 a) Photo du dispositif expérimental. b) Schéma vu de face pour $\varphi = 0$. c) Schéma vu de dessus pour $\varphi \neq 0$. Signification des symboles : s : socle lié au sol, p : plateau tournant, a : axe de rotation du pendule, sm : smartphone, m : masse, f : frottement, r : graduation de référence pour $\varphi = 0$ (18°), t : tige solidaire du support du pendule (le rôle de r et t dans l'analyse vidéo sera explicité plus bas).

Nous procédons dans la partie suivante à une analyse théorique rapide du système (voir [5] pour plus de détails).

2. Équations du mouvement

2.1. Statique dans le référentiel tournant : bifurcation fourche

Le modèle utilisé pour cette expérience constitue un exercice classique de mécanique dans un référentiel non galiléen habituellement utilisé pour illustrer la force centrifuge. Le pendule est modélisé par un pendule simple de masse m et de longueur l_0 écarté d'un angle θ par rapport à la verticale. Il oscille autour d'un axe horizontal. La liaison du pendule à sa potence est donc de type pivot c'est-à-dire qu'il est contraint d'osciller dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation contrairement à une liaison rotule, comme dans l'expérience de Foucault par exemple, qui laisse le pendule osciller librement dans les deux directions autour de la verticale. Nous faisons l'étude dans le référentiel tournant lié au plateau.

Nous recherchons tout d'abord les positions d'équilibre du pendule. Le bilan des forces sur le pendule dans le référentiel tournant fait apparaître la tension \mathbf{T} exercée par le bras qui compense le poids \mathbf{P} et la force d'inertie centrifuge \mathbf{F}_c (Figure 2a)². En projetant la loi de la statique sur la direction orthoradiale il vient :

² Conformément à la convention typographique internationale, les vecteurs sont désignés par des lettres grasses et non pas surmontées d'une flèche.

$$(\mathbf{P} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_c) \cdot \mathbf{e}_\theta = 0 = -mg \sin \theta + 0 + m\Omega^2 l_0 \sin \theta \cos \theta = ml_0 \omega_0^2 \sin \theta \left[\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \cos \theta - 1 \right], \quad (1)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$ la pulsation propre du pendule. On en déduit les angles d'équilibre du pendule :

$$\theta_{\text{éq}} = 0 \text{ pour } \forall \Omega \text{ et } \cos \theta_{\text{éq}} = \frac{\Omega_c^2}{\Omega^2} \text{ pour } \Omega > \Omega_c \quad (2)$$

où $\Omega_c = \omega_0$ désigne la vitesse de rotation critique du plateau. La stabilité de ces positions d'équilibre peut être obtenue à partir de l'énergie potentielle effective E_{peff} (Figure 2b) dont dérive l'équation 1. Son développement à l'ordre 4 en puissances de θ s'écrit :

$$E_{\text{peff}} = \frac{1}{2} ml_0^2 \omega_0^2 \left[\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right) \theta^2 + \frac{1}{12} \left(4 \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} - 1\right) \theta^4 + \dots \right]. \quad (3)$$

Ainsi, pour $\Omega < \Omega_c$, la position verticale $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable. Pour $\Omega > \Omega_c$, elle devient instable (Figure 2b). Deux nouvelles positions d'équilibre stable, symétriques par rapport à $\theta = 0$ apparaissent. Cette modification brutale du comportement qualitatif du pendule constitue une *bifurcation fourche* (Figure 2c).

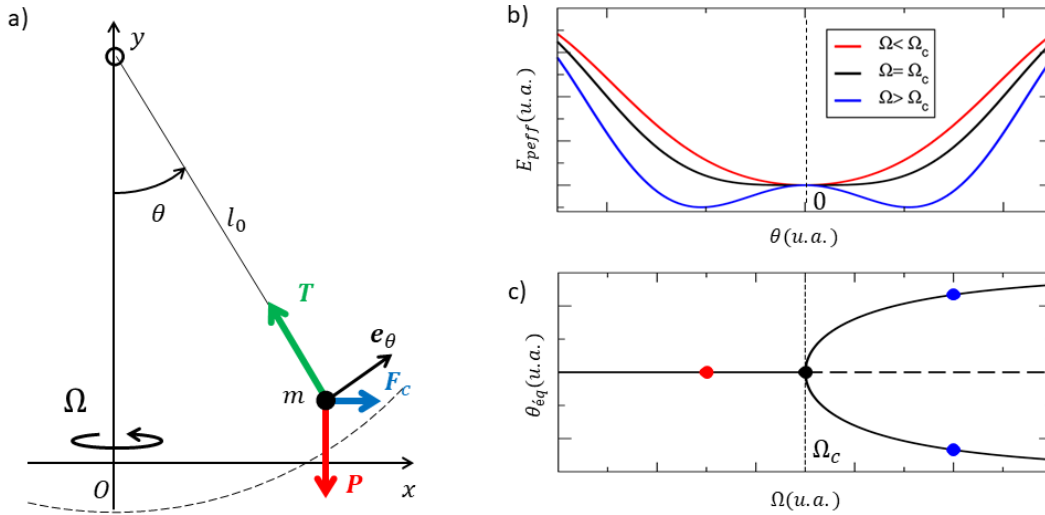


Figure 2 a) Convention de notations et bilan des forces en statique pour un pendule simple de masse m suspendu par un bras de longueur l_0 en rotation à la vitesse angulaire Ω autour de la verticale. \mathbf{P} représente le poids, \mathbf{F}_c la force centrifuge, \mathbf{T} la tension de la tige. **b)** Énergie potentielle effective en fonction de l'angle d'oscillation du pendule pour des vitesses de rotation du plateau sous-critique (rouge), critique (noir) et sur-critique (bleu). *u. a.* signifie unités arbitraires. **c)** Diagramme de bifurcation : pour les vitesses de rotation du plateau supérieures à la vitesse critique, l'angle d'équilibre du pendule cesse d'être $\theta_{\text{éq}} = 0$ qui devient instable (ligne en pointillés). Il apparaît deux positions d'équilibre, symétriques par rapport à $\theta = 0$ et correspondant aux minima de l'énergie potentielle (voir b).

La dynamique du pendule se déduit des grands principes de conservation.

2.2. Dynamique et ralentissement critique

Soient J_S et $J_P = ml_0^2 \sin^2 \theta$ les moments d'inertie du support (plateau tournant + potence fixe du pendule) et du bras du pendule (c'est-à-dire dans ce modèle de la masse m uniquement) par rapport à l'axe vertical de rotation du plateau. Tous les frottements (solide au niveau des liaisons pivots, fluide avec l'air) sont négligés. Ainsi, dans le référentiel du laboratoire, la composante verticale du moment cinétique total de l'ensemble (support + pendule) se conserve :

$$\frac{d}{dt} (J_S + ml_0^2 \sin^2 \theta) = 0. \quad (4)$$

De même pour son énergie mécanique :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_S \Omega^2 + \frac{1}{2} m l_0^2 [\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \Omega^2] - m g l_0 \cos \theta \right) = 0. \quad (5)$$

En dérivant et combinant les Équations 4 et 5 il vient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \quad (6)$$

qui est l'équation d'un pendule simple forcé par un terme lié à l'accélération d'entraînement issu de la rotation du plateau. L'équation 6 peut ainsi s'écrire :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left[1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \cos \theta \right] \sin \theta = 0 \quad (7)$$

et généralise l'équation 1 de la statique où l'on a fait apparaître explicitement la vitesse critique de rotation du plateau $\Omega_c = \omega_0$.

Aux vitesses de rotation du plateau Ω inférieures à la vitesse critique Ω_c , le pendule oscille autour de sa position d'équilibre $\theta_{\text{éq}} = 0$. On peut alors linéariser l'équation 7 sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0, \quad (8)$$

Avec ω la pulsation des petites oscillations et T la période associée :

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right) \quad \text{et} \quad T^2 = \frac{T_0^2}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}} \quad \text{pour} \quad \Omega < \Omega_c. \quad (9)$$

Ainsi, quand la vitesse de rotation du plateau Ω croît et tend vers la vitesse critique Ω_c la période des oscillations du pendule croît et formellement diverge en Ω_c . Ceci constitue, comme nous l'avons évoqué en introduction, le phénomène de *ralentissement critique*. En pratique, le coefficient du terme en θ^4 du potentiel effectif est positif, les oscillations deviennent fortement anharmoniques mais le mouvement reste borné.

Nous n'avons donné ici seulement quelques éléments essentiels à la discussion des résultats expérimentaux et renvoyons à [8] un exposé détaillé et systématique des phénomènes critiques dans l'étude des systèmes dynamiques.

Nous allons montrer ci-dessous comment les équations 2 et 9 vont nous permettre d'interpréter les données expérimentales.

3. Analyse vidéo

Nous commençons par décrire la mesure des positions d'équilibre du pendule par analyse vidéo. Cette expérience est rapide à mettre en œuvre, conduit à une première approche quantitative et attractive auprès des étudiants.

3.1. Protocole

Au préalable, nous mesurons la période des oscillations libres du pendule avec le plateau tournant immobilisé. Puisque notre montage comporte un smartphone, nous avons enregistré une composante de l'accélération (Figure 3a) que nous avons analysé par transformée de Fourier, mais toute autre méthode conviendrait aussi bien : analyse vidéo, chronométrage, montage potentiométrique et acquisition numérique...

On obtient une très bonne approximation de la pulsation propre du pendule (voir des méthodes plus poussées dans [9, 10] : $\omega_0 = 4,40 \pm 0,06 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Pour étudier le diagramme de bifurcation il nous faut mesurer l'angle d'équilibre du pendule dans le référentiel tournant. Afin d'éviter les oscillations du pendule, nous imposons un frottement important sur son axe de sorte que le pendule rejoint sa position d'équilibre après un petit nombre d'oscillations (Figure 3b).

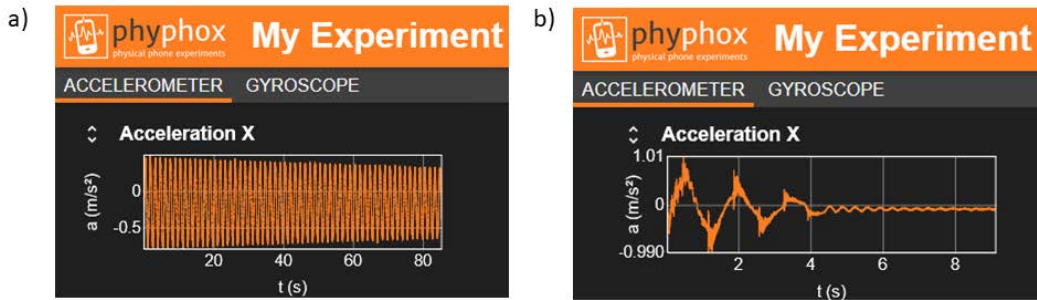


Figure 3 a) Accélération du pendule libre selon l'axe x_s du smartphone. b) Même chose après application d'un frottement sur l'axe. Le frottement est essentiellement de type solide ce qui conduit au caractère fortement non harmonique des oscillations et au bruit important aux extréma de l'accélération (*slip-stick* lors des changements de direction).

Nous démarrons alors l'acquisition vidéo puis mettons manuellement le plateau en rotation rapide $\Omega > \Omega_c$. Le bras du pendule s'élève et rejoint rapidement sa position d'équilibre. À cause de la dissipation sur l'axe de rotation du plateau, la vitesse de rotation Ω décroît lentement, passe par la valeur critique puis tend vers zéro. Ainsi, en une seule fois, tous les régimes dynamiques du système sont explorés.

Plusieurs logiciels, comme Regressi, permettent des analyses de telles séquences vidéo (protocole détaillé en annexe 1). En pratique il s'agit, à chaque tour du plateau, de pointer l'extrémité e du bras du pendule (Figure 1). On obtient ainsi un triplet (t_i, x_i, y_i) représentant la date de l'image et les coordonnées de e suivant la convention de la figure 2 a). Nous en déduisons la vitesse de rotation du plateau et l'angle d'équilibre du pendule :

$$\Omega_i = \frac{2\pi}{t_{i+1} - t_i} \quad \text{et} \quad \theta_{\text{éq}} = \sin^{-1}\left(\frac{y_i}{l_0}\right). \quad (10)$$

Nous avons pris la durée entre deux images du film comme incertitude temporelle $u(t) = 9.6 \text{ ms}$ et estimé les incertitudes sur la position $u(x) = u(y) = 3 \text{ mm}$. l_0 s'obtient en calculant la moyenne des $\sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ ce qui permet de s'assurer de la cohérence des pointages en comparant les valeurs obtenues avec la mesure directe au mètre ruban. Il ne reste plus qu'à tracer les données.

Commentaire [rm2]: Patrice pose la question :

pb notation ? pas certain qu'il s'agisse du l_0 défini en 2.1

il me semble que si mais on passe en force ici : l_0 n'est défini que pour un pendule simple, c'est pas notre cas mais l'essentiel de la masse est à l'extrémité... Faut-il rentrer dans ce détail ?

3.2. Diagramme de bifurcation : statique du système

Deux représentations du diagramme de bifurcation sont présentées sur la figure 4. En a) la représentation la plus intuitive à savoir l'angle d'équilibre en fonction de la vitesse de rotation du plateau. En b) une représentation plus élaborée basée sur l'équation 2 qui permet de remonter à la vitesse critique par un ajustement linéaire ce qui est toujours préférable du point de vue de l'analyse des données. Dans les deux cas, une comparaison avec le modèle donné par l'équation 2 est représentée en rouge.

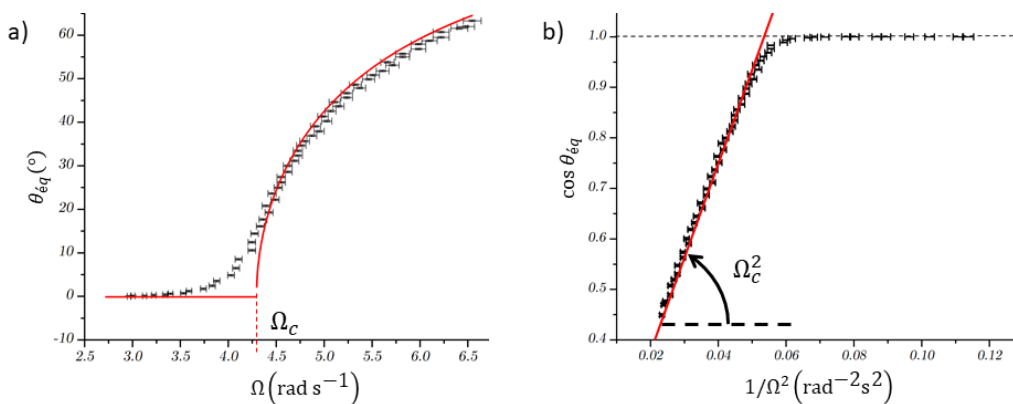


Figure 4 Diagramme de bifurcation expérimental. a) angle d'équilibre (noir) du pendule en fonction de la vitesse de rotation du plateau tournant. b) cosinus de l'angle d'équilibre (noir) en fonction de l'inverse du

carré de la vitesse de rotation du plateau tournant. En rouge, ajustement des données par le modèle théorique (équation 7).

Commentaire [rm3]: Nicolas propose de faire apparaître l'origine (0,0) sur la figure comme on a fait dans AJP. J'ai préféré centrer la figure sur les données... A voir.

La pulsation propre du pendule préalablement définie s'identifie avec la vitesse de rotation critique du plateau. Les valeurs de Ω_c déduites des ajustements numériques en rouge sur les Figures 4a-b) sont respectivement $\Omega_c = 4,27 \pm 0,06 \text{ rad.s}^{-1}$, $\Omega_c = 4,34 \pm 0,06 \text{ rad.s}^{-1}$. Ces deux valeurs sont compatibles entre elles et marginalement compatibles avec la valeur de ω_0 déterminée précédemment. L'écart ne peut être considéré significatif étant donné que notre modèle néglige les frottements. De fait, les facteurs de qualité du pendule et du plateau sont de l'ordre de quelques dizaines de sorte que la pertinence du modèle ne saurait dépasser quelques pourcents ce qui correspond aux écarts observés.

Nous avons pu ainsi mesurer, de façon assez intuitive, l'angle d'équilibre du pendule dans le référentiel tournant et mettre quantitativement en évidence la bifurcation attendue. La dynamique de ce système est toutefois beaucoup plus riche et nous allons montrer comment l'utilisation des capteurs d'un smartphone nous permet d'aborder l'un de ses aspects plus avancé, le ralentissement critique.

4. Analyse avec un smartphone

Le smartphone est piloté depuis un ordinateur portable au moyen de l'application Phyphox et on enregistre simultanément les trois composantes de l'accélération et de la vitesse de rotation mesurées par les capteurs. L'accès à distance et simultané à un nombre important de grandeurs mécaniques permet une analyse détaillée du système. Nous avons choisi le smartphone pour le confort d'utilisation mais l'utilisation d'un microcontrôleur est aussi possible [11].

4.1. Grandeurs mesurées

Les capteurs d'accélération et les gyromètres des smartphones utilisent la convention d'axes (x_s, y_s, z_s) définie sur la figure 1b. Dans ces conditions, en supposant le smartphone convenablement positionné dans l'enveloppe c'est-à-dire avec y_s vertical au repos et z_s perpendiculaire au plan d'oscillation du pendule, les vitesses angulaires d'oscillation du pendule et de rotation du plateau s'obtiennent à partir des gyromètres du smartphone selon :

$$\omega = \dot{\theta} = \omega_{zs} \quad \text{et} \quad \Omega = \sqrt{\omega_{xs}^2 + \omega_{ys}^2} \quad (11)$$

Naturellement, la pulsation propre du pendule ω_0 s'obtient à partir de ω_{zs} pour $\Omega = 0$ comme on l'a vu lors de l'analyse vidéo.

Par ailleurs, la condition d'équilibre du pendule sur le plateau tournant s'écrit en accélérations (a_{xs}, a_{ys}, a_{zs}) mesurées par le smartphone³ :

$$a_{xs} \sin \theta_{\text{éq}} + a_{ys} \cos \theta_{\text{éq}} = g, \quad (12)$$

d'où :

$$\theta_{\text{éq}} = \cos^{-1} \left(\frac{g}{\sqrt{a_{xs}^2 + a_{ys}^2}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{a_{xs}}{a_{ys}} \right). \quad (13)$$

Commentaire [rm4]: Emyrk a du mal sur ce passage. Faut-il détailler davantage ou voir ce qu'en pensent les rapporteurs?

Les mesures réalisées à l'aide des capteurs du smartphone permettent d'accéder à toutes les grandeurs apparaissant dans les équations 2 et 9. Par voie de conséquence, ils permettent de confronter le modèle proposé aux données expérimentales. Nous commençons par la même analyse de la statique du système que celle réalisée avec la technique vidéo.

4.2. Diagramme de bifurcation

Tout comme dans l'analyse vidéo, on impose un fort frottement sur l'axe du pendule. À partir des mesures, on exprime tout d'abord la vitesse de rotation du plateau Ω et l'angle d'équilibre du pendule $\theta_{\text{éq}}$ au moyen des équations 11 et 13. Cela nous permet de tracer sur la figure 5 les deux mêmes représentations du

³ Les accéléromètres des smartphones, de par leur principe de fonctionnement, mesurent aussi l'accélération de la pesanteur g . Ainsi pour un pendule statique dans le référentiel tournant, la projection de l'accélération sur l'axe vertical se réduit à g .

diagramme de bifurcation (figure 4). Les lignes rouges sont là encore des ajustements issus du modèle théorique (équation 7). Nous en déduisons deux estimations de la vitesse de rotation critique Ω_c , respectivement $3,50 \text{ rad.s}^{-1}$ et $3,57 \text{ rad.s}^{-1}$.

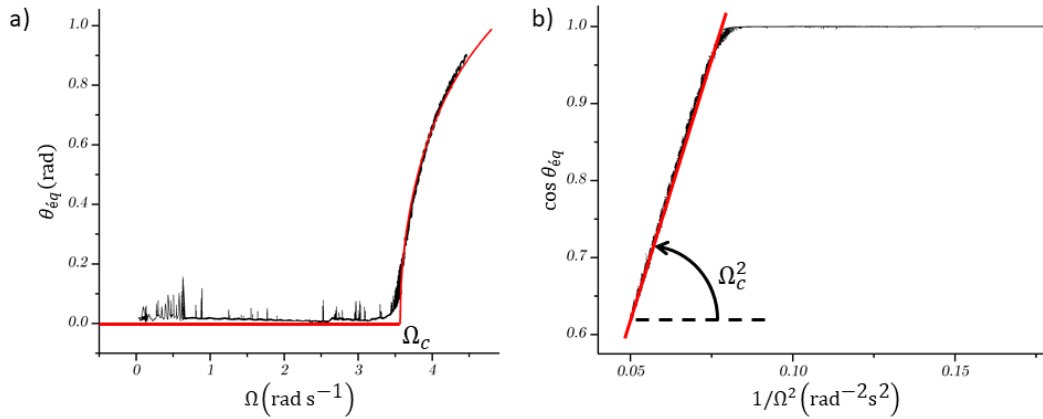


Figure 5 a) Diagramme de bifurcation expérimental (noir) et ajustement numérique (rouge). **b)** Réinterprétation des mêmes données pour obtenir une relation linéaire.

Pour cette expérience, nous avons utilisé un pendule différent de celui utilisé pour l'analyse vidéo. Sa pulsation propre $\omega_0 = 3,55 \text{ rad.s}^{-1}$ est en accord à quelques pourcents près avec déterminations de la vitesse de rotation critique⁴. On retrouve qualitativement et quantitativement les mêmes résultats que l'analyse vidéo avec toutefois un traitement plus complexe des données issues des capteurs du smartphone (équation 13). L'intérêt majeur de l'utilisation d'un smartphone dans cette expérience est de permettre une analyse de la dynamique des petites oscillations autour des positions d'équilibre du pendule.

4.3. Ralentissement critique : dynamique autour des positions d'équilibre.

Nous procédons à un nouvel enregistrement (deuxième enregistrement en annexe) après avoir retiré le fort frottement que nous avons imposé sur l'axe du pendule.

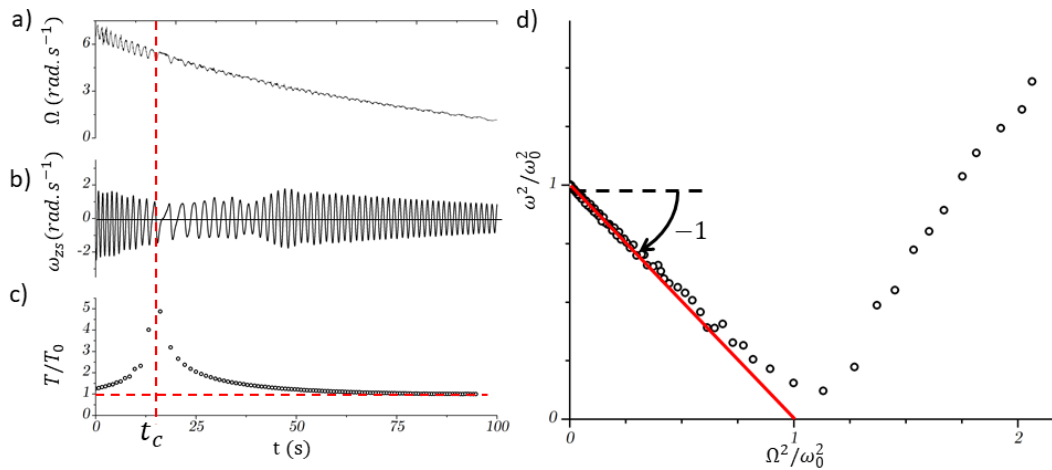


Figure 6 a) Vitesse angulaire de rotation du plateau en fonction du temps. **b)** Vitesse angulaire d'oscillation du pendule mesurée par le gyromètre selon l'axe z_s du smartphone. **c)** Évolution temporelle de la période du pendule normalisée par sa période propre : ralentissement critique au voisinage de $t_c = 19 \text{ s}$. **d)** Réinterprétation du ralentissement critique au moyen de l'équation 9 (ligne rouge de pente -1).

⁴ La masse en bout du bras du pendule (m sur la Figure 1) utilisée pour cette expérience était différente de celle utilisée lors de l'étude vidéo (§3) ce qui explique les valeurs différentes de ω_0 .

La figure 6a représente la vitesse de rotation du plateau en fonction du temps qui décroît à cause des frottements au niveau du pivot du plateau avec son support. De l'enregistrement temporel de la vitesse angulaire d'oscillation du pendule en b), nous déduisons en c), l'évolution de la période T par la méthode des passages par zéro [9, 10] : nous repérons sur la figure 6 b) les instants t_i tels que $\omega_{zs}(t_i) = 0$. La demi-période d'oscillation est la différence de temps entre deux passages par zéro successifs : $\frac{1}{2} T_{i+1} - t_i$. La figure 6 c) met clairement en évidence la divergence de la période correspondant au ralentissement critique au voisinage de $t_c = 19$ s.

Puisque le plateau ralentit à cause des frottements, il convient d'interpréter les figures 6 b et c) de droite à gauche : à la fin de l'enregistrement, la période T tend vers la période propre T_0 du pendule. Partant de t grand et décroissant, Ω croît ainsi que la période du pendule (ralentissement critique) jusqu'en t_c où le comportement change brutalement (bifurcation) : le bras s'élève et les petites oscillations ont lieu autour de $\theta_{\text{éq}}$ non nul. C'est bien le comportement qualitatif attendu.

On peut toutefois être plus quantitatif. On peut calculer la pulsation « instantanée » du pendule $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$ puis son carré que l'on compare à $\Omega^2(t_i)$ le carré de la vitesse « instantanée » de rotation du plateau. Pour plus de clarté nous avons normalisé ces grandeurs par le carré de la pulsation propre sur la figure 6 d). La ligne rouge est une droite de pente -1 comme prédit par l'équation 9. L'accord est manifeste aux petites vitesses de rotation puis se dégrade à l'approche de Ω_c où les oscillations deviennent de plus en plus anharmoniques, effet qui n'est pas pris en compte dans l'équation 9.

Le lecteur intéressé par davantage de détails, et notamment une discussion plus rigoureuse et quantitative, pourra consulter la référence [7].

CONCLUSION

Nous avons présenté deux approches complémentaires d'un phénomène physique non linéaire. La première, basée sur l'enregistrement vidéo de l'évolution temporelle du système, donne très concrètement accès au diagramme de bifurcation. La seconde, exploite l'ensemble des mesures fournies par les capteurs d'accélération et de vitesse de rotation d'un smartphone. Elle est peut-être plus objective, tout aussi quantitative, mais plus technique à mettre en œuvre et abstraite car il faut combiner de façon relativement complexe les 6 données expérimentales recueillies pour remonter aux paramètres dynamiques pertinents. Elle est cependant plus riche car elle permet d'étudier, outre la statique du système, sa dynamique singulière au voisinage du point critique.

Dans les deux cas, l'approximation à l'ordre le plus bas du modèle le plus simple du système que nous avons proposé est en accord à quelques pourcents près avec les données recueillies. Ce modèle repose sur les lois de conservation en physique dont il illustre très directement l'importance.

L'utilisation du smartphone, en plus de l'attrait pédagogique évident, met en évidence l'intérêt de la richesse de l'enregistrement simultané de nombreuses données quantitatives puisque finalement les trois coordonnées d'accélération et les trois de vitesse de rotation sont mises à profit dans l'interprétation de l'expérience. L'analyse vidéo, elle-même tout aussi attractive mais beaucoup plus concrète, permet d'accéder très directement à certains aspects de cette même expérience. On peut concevoir ainsi une progression pédagogique telle que nous l'avons mise en œuvre dans la structuration de l'article. Une première approche d'un phénomène difficile en soi par une méthode intuitive mais limitée puis une analyse plus rigoureuse et plus riche.

Cette analyse pourrait certainement être développée davantage. Par exemple, les frottements et l'anharmonicité jouent à plein au voisinage de la pulsation critique du plateau tournant. Ainsi, il n'est pas surprenant que l'écart observé entre les données mesurées et le modèle soit très clairement significatif au voisinage de la bifurcation ($\Omega \approx \Omega_c$ Figures 5a ou 6d). Il pourrait être intéressant de détailler l'étude au voisinage de ce point singulier mais cela dépasse le cadre que nous nous sommes fixés dans cet article, à savoir une introduction à l'étude des phénomènes non linéaires donnant toute sa place à une approche expérimentale quantitative.

Ce type de phénomène est complexe par essence mais tire son intérêt de son caractère relativement universel. Il intervient, par certains aspects du moins, dans des domaines aussi divers que les transitions de phase du second ordre [12] ou le mécanisme de Higgs qui, dans la théorie communément acceptée de nos jours, confère leur inertie aux particules fondamentales [13]. Les technologies modernes en permettent toutefois une approche concrète, quantitative et très attractive, propre à motiver les étudiants dans l'étude de ces

questions difficiles.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Krob, « Exemples d'oscillateurs non linéaires », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 90, n° 785, p. 131-150, juin 1996.
- [2] M. Krob, « Identification de systèmes non linéaires », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 91, n° 795, p. 73-92, juin 1997.
- [3] C. Jai et K. Caiveau, « Étude d'oscillations non linéaires avec un smartphone », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 115, n° 1034, p. 573-586, mai 2021.
- [4] R. Duffait, « Étude expérimentale des oscillateurs mécaniques », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 98, n° 867, p. 1307-1338, octobre 2001.
- [5] R. Mathevet *et al.*, « Études quantitatives des accélérations d'inertie avec un smartphone 1. Accélération de Coriolis », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. XXX, n° XXX, p. XXX-XXX, mars 2022.
- [6] R. Mathevet *et al.*, « Études quantitatives des accélérations d'inertie avec un smartphone 2. Accélération d'entraînement », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. XXX, n° XXX, p. XXX-XXX, mars 2022.
- [7] R. Mathevet *et al.*, « Coriolis acceleration and critical slowing-down : a quantitative laboratory experiment », à paraître dans *AJP*.
- [8] P. Manneville, *Instabilités, Chaos et Turbulence*, École Polytechnique, Paris, 2004.
- [9] Ch. Fabre *et al.*, « Pendule à la maison avec un smartphone », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 116, n° 1042, p. 309-323, mars 2022.
- [10] R. Mathevet *et al.*, « Quantitative analysis of a smartphone pendulum beyond linear approximation: A lockdown practical homework », *AJP*, **90**, 344 (2022).
- [11] J. Vince *et al.*, « Des mesures sans fil avec son smartphone », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 116, n° 1047, p. 935-944, octobre 2022.
- [12] L. Landau and E. Lifchitz, *Physique Statistique*, Mir, Moscou, 2^{ème} édition, 1984. En particulier Chapitre 162. Pour une introduction rapide É. Brillaux, *JPCE ENS de Lyon*, vol. 1, n° 1, p. 23-30, février 2016.
- [13] V. Bourges, « Interactions de Jauge des particules élémentaires » *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 88, n° spécial, p. 5-40, juin 1994 (en particulier le § « Brisure spontanée de symétrie » et les carrés 8 et 9). B. Diu, « Vers l'unification des interactions fondamentales », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, n° 667, p. 1-28, octobre 1984 (en particulier le §III4).

ANNEXE

1. Protocoles

1.1. Préparation

- 1) Placer une caméra rapide (Nova120 de chez Nova Physics, 120 images/s) à 3 m environ du montage afin d'en avoir une vision complète.

- 2) Faire tourner le plateau de sorte pour que le plan d'oscillation du pendule soit bien perpendiculaire à la ligne de visée (voir Figure 1, $\varphi = 0$). Sur l'avant du socle du pendule nous avons fixé une tige verticale (t sur la Figure 1). Par effet de parallaxe, vue depuis la caméra, la tige est alignée avec la graduation 18° (r sur la Figure 1). Chaque passage du plateau par $\varphi = 0$ sera ensuite identifié par l'alignement de r et t sur les images. On peut se convaincre de la méthode en constatant sur la Figure 1c tracée pour $\varphi \neq 0$ que r et t ne sont pas alignés.

1.2. Acquisition au moyen du logiciel VirtualDub:

- 1) Lancer l'enregistrement du film (File/SetCaptureFile *nom du fichier*, puis File/CaptureAvi et enfin Capture/Capture Video).
- 2) Mettre manuellement le plateau en rotation à $\Omega > \Omega_c$: le bras du pendule s'élève et se stabilise rapidement à θ_{eq} (voir vidéo en annexe).
- 3) La rotation du plateau ralentit progressivement, le bras s'abaisse lentement puis brutalement rejoint $\theta_{eq} = 0$. La rotation s'arrête au bout de deux minutes environ.
- 4) Arrêter l'enregistrement du film (Capture/Stop Capture). Attention, le fichier fait couramment plusieurs Go. Vérifier que toutes les images sont correctement enregistrées (0 frames dropped).

1.3. Traitement des images avec le logiciel Regressi:

- 1) Importer le film (Fichier/Nouveau/Vidéo puis cliquer sur le bouton « Ouvrir » et sélectionner la vidéo enregistrée). Placer l'origine du repère sur l'extrémité du bras du pendule (e sur la Figure 1). En principe, si l'alignement de la caméra et l'horizontalité du plateau tournant sont corrects, l'axe y du repère passe par l'axe de rotation du pendule (a sur la Figure 1).
- 2) Placer la règle entre o et a et renseigner la case « Échelle » par la longueur du bras du pendule, dans notre cas $oa = 0.54$ m.
- 3) Faire défiler le film jusqu'à la première image où le bras du pendule est élevé, les petites oscillations amorties et le plateau en $\varphi = 0$.
- 4) Cliquer sur le bouton « Mesurer » (qui bascule en rouge « Stop »). Un réticule apparaît. Le positionner sur l'extrémité du bras du pendule (le point e). Cliquer : les coordonnées de temps et de position du réticule sont automatiquement ajoutées dans le tableau et haut à droite de la fenêtre.
- 5) Faire défiler le film jusqu'au tour suivant et recommencer le pointage. Nous avons obtenu ainsi 61 triplets (t, x, y).

Cliquer sur le bouton « Traiter » pour faire le traitement avec Regressi.

1.4. Traitement des données avec le logiciel Regressi:

- 1) Calculer les différentes grandeurs dynamiques dans l'onglet « Grandeur/Expression » (voir programme ci-dessous).
- 2) Passer sous l'onglet « Grandeur/Tableau » et cliquer le bouton « incertitudes ». Pour l'incertitude sur le temps nous avons pris la durée entre deux images du film $u(t) = 9.6$ ms et estimé l'erreur de de position $u(x) = u(y) = 3$ mm en répétant plusieurs pointages sur la même image et sur les images immédiatement précédente ou suivante car le plateau sur l'image sélectionnée n'est jamais parfaitement en $\varphi = 0$.
- 3) Passer alors aux représentations graphiques et aux modélisations sous l'onglet « Graphe ».

La figure ci-dessous représente un exemple typique de données issues du pointage vidéo.

Commentaire [rm5]: J'ai supprimé ici :

et interprétation alternative du diagramme de bifurcation. On peut tracer $\sqrt{\cos \theta_{eq}}$ en fonction de la période de rotation du plateau $T_{pt} = \frac{2\pi}{\Omega}$ dont la pente en régime sur-critique donne directement la fréquence critique de rotation:

$$\sqrt{\cos \theta_{eq}} = v_c T_{pt} \quad \text{pour } \Omega > \Omega_c \quad (8)$$

avec $v_c = \frac{\Omega_c}{2\pi}$ d'après l'Equation 7. De l'ajustement numérique on tire $\Omega_c = 4.34 \pm 0.06$ rad.s⁻¹ en cohérence avec les valeurs données dans l'article.

Ainsi que la partie b) de la figure :
b) Diagramme de bifurcation expérimental (violet) et ajustement numérique (rouge) selon l'Equation 8.

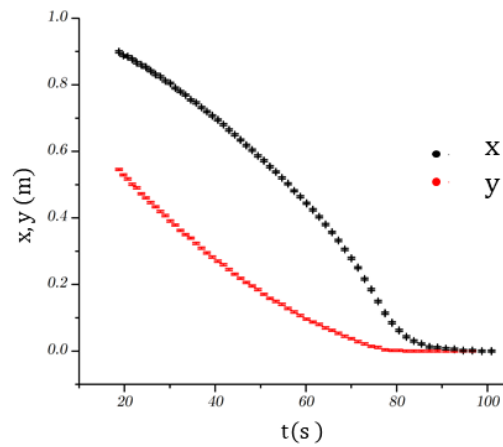


Figure 8 Coordonnées de l'extrémité du pendule mesurée sur l'enregistrement vidéo.

2. Programme Regressi

Voici un exemple de script Regressi pour le traitement des données (l'usage du `'` permet de commenter le programme):

```
't=Temps
'x=Abscisse
'y=Ordonnée
'les 3 lignes précédentes sont générées automatiquement par Regressi. Le programme à
proprement parler commence ci-dessous

'longueur du bras du pendule
10 = 0.54
'période rotation du plateau
Tpl = t[i+1]-t[i]
'vitesse angulaire du plateau
Omega = 2*Pi/Tpl
'angle d'équilibre du pendule
ThetaEq = ASIN(y/10)
'cosinus de l'angle d'équilibre du pendule
CosThetaEq = Cos(ThetaEq)
'inverse carré de la vitesse angulaire du plateau
InvOmega2 = 1/Omega^2
```

3. Video

L'enregistrement vidéo est disponible ici : XXXXXX