



HAL
open science

Une histoire de braquet

Nicolas Combe, Corentin Durand

► **To cite this version:**

Nicolas Combe, Corentin Durand. Une histoire de braquet. Le Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie, 2021, 1039, pp.1127. hal-04740362

HAL Id: hal-04740362

<https://hal.science/hal-04740362v1>

Submitted on 17 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une histoire de braquet

Paris: lundi 19 avril 2021

par Nicolas COMBE, Corentin DURAND
Université Paul Sabatier- Toulouse
combe@cemes.fr, durand@cemes.fr

Texte résumé

La pédale d'un vélo est positionnée dans le demi-tour inférieur. Un opérateur exerce une force extérieure dirigée vers l'arrière sur la pédale. Le vélo avance-t-il ou recule-t-il? Cette question d'apparence simple est plus compliquée qu'elle n'y paraît. Nous proposons dans cet article une résolution analytique du problème ainsi qu'une vérification expérimentale.

1. Position du problème et modélisation

1.1. Le vélo avance-t-il ou recule-t-il ?

Soit le vélo schématisé sur la figure 1. La pédale est placée dans le demi-tour inférieur de telle manière qu'une force extérieure dirigée vers l'arrière sur la pédale induit un moment de force sur le pédalier tendant à mettre le vélo en mouvement vers l'avant. Mais d'un autre côté, la force extérieure appliquée sur le vélo est dirigée vers l'arrière, ce qui devrait conduire à un mouvement du vélo vers l'arrière. Quel est le mouvement du vélo ? Comment l'interpréter ?

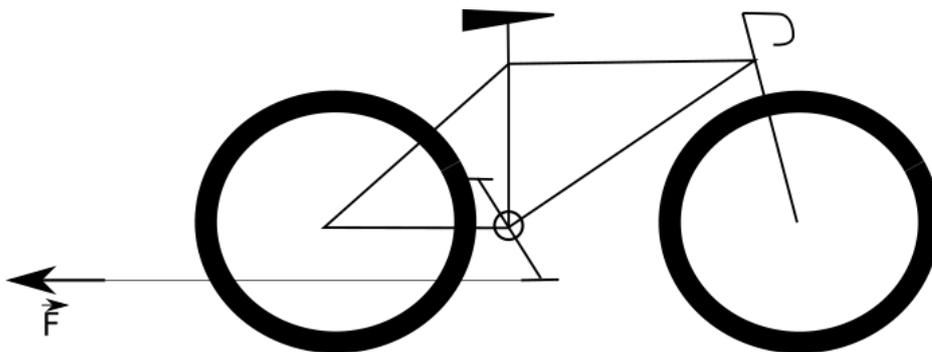


Illustration 1: Schéma de l'expérience

Si vous tentez cette expérience sur votre vélo à la maison, vous constaterez que le vélo recule, ce qui peut paraître contre-intuitif pour un certain nombre de personnes. Un de nos collègues a expliqué à l'un de nous qu'il était finalement naturel de voir le vélo reculer puisque la force exercée sur le vélo est dirigée vers l'arrière. Cette interprétation est en accord avec les expériences que nous avons pu effectuer sur tous les vélos testés. Ainsi, pendant longtemps nous nous sommes contentés de cette explication. Jusqu'au jour où nous avons modélisé et mis en équation le problème pour le donner à un sujet d'examen de licence en mécanique du solide. Nous vous livrons dans cet article ce modèle (amélioré par rapport au sujet d'examen initial) et ses résultats et proposons une vérification expérimentale.

1.2. Modélisation du vélo

Le mouvement du vélo est étudié dans le référentiel du sol supposé galiléen muni du repère (O,xyz) . On modélise le vélo par trois solides indéformables (cf figure 2) : une roue S_1 , le pédalier S_2 et le cadre S_3 . La roue S_1 est modélisée par un cylindre de masse m_1 de barycentre G_1 et de moment d'inertie J_1 par rapport à l'axe (G_1, \mathbf{u}_z) . Le pédalier S_2 est modélisé par un cylindre de masse m_2 de barycentre G_2 et de moment d'inertie J_2 par rapport à l'axe (G_2, \mathbf{u}_z) . La roue et le pédalier ont tous deux des axes de rotation selon \mathbf{u}_z et nous supposons que leurs liaisons avec le cadre sont des liaisons pivots parfaites.

Nous avons fait le choix de ne pas prendre en compte la roue avant dans notre modélisation du vélo afin de simplifier les calculs : cette simplification est sans d'influence sur notre résultat.

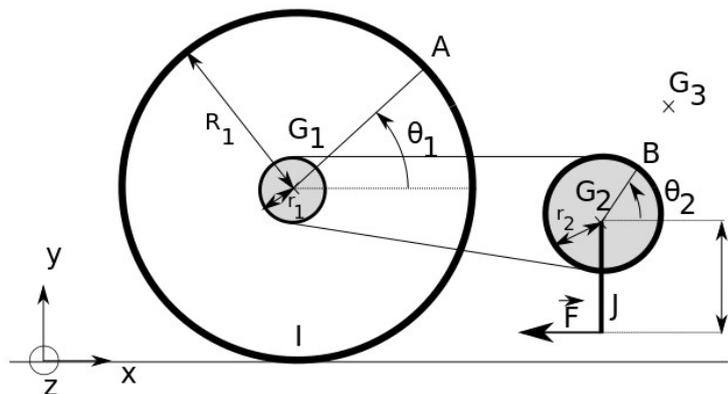


Illustration 2: Modèle du vélo

On repère le barycentre G_1 de la roue de coordonnées $(x_1, R_1, 0)$ dans le repère (O,xyz) . On repère la rotation de la roue par l'angle $\theta_1 = (\mathbf{u}_x, \mathbf{G}_1\mathbf{A})$, avec A un point du pneu. Soit I (avec $\mathbf{G}_1\mathbf{I} = -R_1 \mathbf{u}_y$) le point de contact entre la roue et le sol.

On repère le barycentre G_2 du pédalier de coordonnées $(x_2, y_2, 0)$ dans le repère (O,xyz) . On repère la rotation du pédalier par l'angle $\theta_2 = (\mathbf{u}_x, \mathbf{G}_2\mathbf{B})$, avec B une dent du braquet.

Lorsque le vélo se déplace, le cadre S_3 est en translation : on peut donc ici le modéliser par un point matériel de masse m_3 de position G_3 de coordonnées $(x_3, y_3, 0)$ dans le repère (O,xyz) et ne pas tenir compte de ses degrés de liberté de rotation.

La roue et le pédalier étant reliés au cadre du vélo, les vecteurs $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_3$ et $\mathbf{G}_2\mathbf{G}_3$ sont indépendants du temps lors du déplacement du vélo.

Enfin, une chaîne inextensible et sans masse relie les mouvements du pédalier et de la roue : on suppose pour simplifier les calculs que la portion haute de la chaîne est parallèle au sol et qu'il n'y a aucune tension dans la partie basse de la chaîne. Ces hypothèses sont peu réductrices, et on pourrait facilement s'en passer au prix de calcul un peu plus lourd.

On modélise l'action exercée par l'opérateur sur la pédale par une force ponctuelle sur le pédalier $\mathbf{F} = -F \mathbf{u}_x$ (avec $F > 0$) exercée au point J (avec $\mathbf{G}_2\mathbf{J} = -r \mathbf{u}_y$).

2. Etude Théorique

2.1. Système Roue-pédalier

La chaîne étant supposée inextensible, le rapport des vitesses de rotation du pédalier et de la roue correspond au rapport ρ du nombre de dents sur le plateau du pédalier et sur le pignon de la roue. Ce rapport ρ est souvent appelé braquet par les cyclistes.

$$\rho = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_2}$$

avec r_1 le rayon du pignon de la roue¹ et avec r_2 le rayon du braquet du pédalier. Cette expression s'établit simplement en écrivant que les vitesses de glissement entre la chaîne et le plateau du pédalier d'une part et le pignon de la roue d'autre part sont nulles.

Par ailleurs, la chaîne est inextensible. Soit T la tension de la chaîne (dans sa partie supérieure). La chaîne exerce sur le pignon un moment $\mathcal{M}(G_1)$ (chaîne \rightarrow S_1) = $-T r_1 \mathbf{u}_z = -\Gamma \mathbf{u}_z$.
De même, la chaîne exerce un moment $\mathcal{M}(G_2)$ (chaîne \rightarrow S_2) = $T r_2 \mathbf{u}_z = \Gamma \rho \mathbf{u}_z$.

Ci dessous nous détaillons dans un premier temps les éléments cinétiques et dynamiques de chaque solide, puis effectuons le bilan des actions mécaniques sur chaque solide.

2.2. Eléments cinétiques et dynamiques

Roue S_1

vecteur rotation $\boldsymbol{\Omega}_1 = \dot{\theta}_1 \mathbf{u}_z$ Résultante dynamique $\mathbf{D}_1 = m_1 \ddot{x}_1 \mathbf{u}_x$; Moment dynamique : $\boldsymbol{\delta}_1(G_1) = J_1 \ddot{\theta}_1 \mathbf{u}_z$ qu'on peut réécrire au point I : $\boldsymbol{\delta}_1(I) = (J_1 \ddot{\theta}_1 - m_1 R_1 \ddot{x}_1) \mathbf{u}_z$

Pédalier S_2

vecteur rotation $\boldsymbol{\Omega}_2 = \dot{\theta}_2 \mathbf{u}_z$. Résultante dynamique $\mathbf{D}_2 = m_2 \ddot{x}_2 \mathbf{u}_x$; Moment dynamique : $\boldsymbol{\delta}_2(G_2) = J_2 \ddot{\theta}_2 \mathbf{u}_z$

Cadre S_3

vecteur rotation $\boldsymbol{\Omega}_3 = \mathbf{0}$. Résultante dynamique $\mathbf{D}_3 = m_3 \ddot{x}_3 \mathbf{u}_x$; Moment dynamique : $\boldsymbol{\delta}_3(G_3) = \mathbf{0}$

2.3. Bilan des actions mécaniques

Action mécanique sur la roue S_1

Action de la gravité : résultante $\mathbf{P}_1 = -m_1 g \mathbf{u}_y$; Moment $\mathcal{M}(G_1)$ (gravité \rightarrow S_1) = $\mathbf{0}$ qu'on peut réécrire au point I : $\mathcal{M}(I)$ (gravité \rightarrow S_1) = $\mathbf{0}$.

Action du sol : résultante $\mathbf{R} = R_x \mathbf{u}_x + R_y \mathbf{u}_y$ (inconnu); Moment $\mathcal{M}(I)$ (sol \rightarrow S_1) = $\mathbf{0}$.

Action du cadre S_3 : résultante $\mathbf{H}_1 = H_{1x} \mathbf{u}_x + H_{1y} \mathbf{u}_y$ (inconnu); Moment $\mathcal{M}(G_1)$ ($S_3 \rightarrow$ S_1) = $\mathbf{0}$.

Action de la chaîne : résultante $\mathbf{T} = T \mathbf{u}_x$; Moment $\mathcal{M}(G_1)$ (chaîne \rightarrow S_1) = $-\Gamma \mathbf{u}_z$.

Action mécanique sur le pédalier S_2

Action de la gravité : résultante $\mathbf{P}_2 = -m_2 g \mathbf{u}_y$; Moment $\mathcal{M}(G_2)$ (gravité \rightarrow S_2) = $\mathbf{0}$.

Action de la force extérieure: résultante $\mathbf{F} = -F \mathbf{u}_x$; Moment $\mathcal{M}(G_2)$ (ext \rightarrow S_2) = $-Fr \mathbf{u}_z$.

Action du cadre S_3 : résultante $\mathbf{H}_2 = H_{2x} \mathbf{u}_x + H_{2y} \mathbf{u}_y$ (inconnu); Moment $\mathcal{M}(G_2)$ ($S_3 \rightarrow$ S_2) = $\mathbf{0}$.

Action de la chaîne : résultante $-\mathbf{T}$; Moment $\mathcal{M}(G_2)$ (chaîne \rightarrow S_2) = $+\Gamma \rho \mathbf{u}_z$.

¹ On notera que r_1 , rayon du pignon et R_1 , rayon de la roue sont différents.

Action mécanique sur le cadre S_3

Action de la gravité : résultante $\mathbf{P}_3 = -m_3 g \mathbf{u}_y$; Moment $\mathcal{M}(G_3)$ (gravité $\rightarrow S_3$) = $\mathbf{0}$.

Action de la roue S_1 : résultante $-\mathbf{H}_1$ (inconnu) ; Moment $\mathcal{M}(G_1)$ ($S_1 \rightarrow S_3$) = $\mathbf{0}$.

Action de la roue S_2 : résultante $-\mathbf{H}_2$ (inconnu) ; Moment $\mathcal{M}(G_2)$ ($S_2 \rightarrow S_3$) = $\mathbf{0}$.

2.4. Principe fondamentale de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique (PFD) pour un solide, soit l'égalité des torseur dynamique et des actions mécaniques, s'écrit pour la roue S_1 :

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{R} + \mathbf{H}_1 + \mathbf{T} \quad (1)$$

$$\delta(I) = \mathbf{M}(I)(\text{gravité} \rightarrow S_1) + \mathbf{M}(I)(\text{sol} \rightarrow S_1) + \mathbf{M}(I)(S_3 \rightarrow S_1) + \mathbf{M}(I)(\text{chaîne} \rightarrow S_1) \quad (2)$$

Le PFD appliquée au pédalier S_2 s'écrit :

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{P}_2 + \mathbf{H}_2 - \mathbf{T} + \mathbf{F} \quad (3)$$

$$\delta_2(G_2) = \mathbf{M}(G_2)(\text{gravité} \rightarrow S_2) + \mathbf{M}(G_2)(S_3 \rightarrow S_2) + \mathbf{M}(G_2)(\text{chaîne} \rightarrow S_2) + \mathbf{M}(G_2)(\text{ext} \rightarrow S_2) \quad (4)$$

Enfin le PFD pour le cadre S_3 s'écrit:

$$\mathbf{D}_3 = \mathbf{P}_3 - \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 \quad (5)$$

$$\delta_3(G_3) = \mathbf{M}(G_3)(\text{gravité} \rightarrow S_3) + \mathbf{M}(G_3)(S_1 \rightarrow S_3) + \mathbf{M}(G_3)(S_2 \rightarrow S_3) \quad (6)$$

2.5. Résolution

Les projections des équations (1,3,5) sur x,y donnent 6 équations couplées.

$$m_1 \ddot{x}_1 = T + H_{1x} + R_x$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = H_{2x} - T - F$$

$$m_3 \ddot{x}_3 = -H_{1x} - H_{2x}$$

$$0 = -m_1 g + R_y + H_{1y}$$

$$0 = -m_2 g + H_{2y}$$

$$0 = -m_3 g - H_{1y} - H_{2y}$$

d'où l'on tire les relations suivantes.

$$R_x - F = (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x}$$

$$H_{1x} + T + F = -(m_2 + m_3) \ddot{x}$$

$$H_{2x} - T - F = m_2 \ddot{x}$$

$$H_{1y} = -(m_2 + m_3) g$$

$$H_{2y} = m_2 g$$

$$R_y = (m_1 + m_2 + m_3) g$$

où nous avons utilisé la relation : $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}_3 = \ddot{x}$ puisque les vecteurs $\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_3$ et $\mathbf{G}_2 \mathbf{G}_3$ sont indépendants du temps.

Les projections selon z des équations (2,4) donnent :

$$J_1 \ddot{\theta}_1 - m_1 R_1 \ddot{x}_1 = -\Gamma - R_1 [T + H_{1x}]$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = \Gamma \rho - Fr$$

En tenant compte de la relation de roulement sans glissement au point I qui donne $\dot{x} + R_1 \dot{\theta}_1 = 0$, nous établissons la relation suivante :

$$\ddot{x} = -F \frac{[R_1 \rho - r]}{\left[\rho \frac{J_1 + M_{tot} R_1^2}{R_1} + \frac{J_2}{R_1 \rho} \right]} \quad (7)$$

avec $M_{tot} = m_1 + m_2 + m_3$.

Le signe de l'accélération du vélo dépend donc du signe $R_1 \rho - r$. Deux résultantes antagonistes d'actions mécaniques extérieures ayant une composante horizontale non nulle s'appliquent sur le vélo, la force F et la réaction R du sol. Le signe de l'accélération dépend de la différence entre ces deux forces ($R_x - F$).

2.6. Centre instantané de rotation de la manivelle du pédalier

Dans la partie précédente, nous avons utilisé les outils de la dynamique du solide pour déterminer le mouvement du vélo. Une analyse complémentaire consiste à étudier la trajectoire du point J, point d'application de la force extérieure F . Nous allons montrer que quelque soit le mouvement du vélo (avance ou recule), le mouvement du point J s'effectue toujours vers l'arrière dans le référentiel du laboratoire lorsqu'on exerce la force F (vers l'arrière).

En effet, en supposant qu'à $t=0$, $\theta_1(t=0) = \theta_2(t=0) = 0$, la position du point J s'écrit :

$$\begin{aligned} x_J(t) &= x_2(0) - R_1 \theta_1(t) + r \sin(\theta_2(t)) \\ &= x_2(0) - R_1 \theta_1(t) + r \sin\left(\frac{\theta_1(t)}{\rho}\right) \end{aligned}$$

L'accélération de ce point au temps $t=0$ s'écrit donc :

$$\ddot{x}_J(0) = -(R_1 - \frac{r}{\rho}) \ddot{\theta}_1(0) \quad \text{soit en utilisant l'équation (7)} \quad \ddot{x}_J(0) = -F \frac{[R_1 \rho - r]^2}{\left[\rho^2 [J_1 + M_{tot} R_1^2] + J_2 \right]}$$

Quelque soit le signe de $R_1 \rho - r$, le point J recule.

Lorsque J est tel que $r = r_c = R_1 \rho$, Le point J a une accélération nulle, il est alors confondu avec le centre instantané de rotation de la manivelle du pédalier. Le mouvement du vélo peut donc aussi s'interpréter en disant que le point J doit reculer, et selon la valeur de r , supérieur ou inférieur à r_c , cela correspond à un mouvement vers l'avant ou vers l'arrière du vélo.

3. Etude expérimentale

Pour un vélo classique R_1 et r (si l'on tire sur la pédale) sont respectivement de l'ordre de 32-35cm et de 18 cm. Le rapport ρ est quant à lui généralement supérieur à 1 : le vélo recule donc puisque $R_1 \rho - r > 0$.

Suite à quelques recherches, sur certains vélos tout terrain actuels, on peut rencontrer des braquets ρ aussi petits que 0.6, mais même avec un braquet de 0.6, si $R_1 = 32\text{cm}$ et $r = 18\text{cm}$, $R_1 \rho - r$ reste positif et le vélo recule.

Pourrait-on voir un vélo avancer?

Nous avons fixé solidairement au pédalier une barre rigide, nous permettant d'appliquer la force F à des distances r variables et potentiellement plus grande que R_1 . La figure 3 montre une image de notre dispositif expérimental compatible avec un confinement très sévère. Le mouvement du vélo est contraint par un maintien latéral du vélo imposant un déplacement en translation rectiligne.

maintien latéral du vélo



barre rigide solidaire du pédalier

Illustration 3: Photo du dispositif expérimental

Nous avons pu vérifier que le vélo recule lorsqu'on tire sur la pédale, mais si on applique la force F en un point avec une valeur de r suffisamment grande, le vélo avance.

Quantitativement, nous avons mesuré la distance r_c pour laquelle l'accélération était nulle. Cette mesure a été répétée pour différents braquets sur un vélo avec une roue de $R_1^{theo}=350\text{mm}$ de rayon théorique (spécification fabricant). Les résultats sont reportés dans le tableau ci-dessous.

Dentures plateau	Dentures pignon	Braquet ρ	Mesure r_c	Valeur théorique r_c^{theo}
24	28	0,8571	29,5±2,5 cm	30,43
24	24	1	34±3 cm	35,5
24	22	1,091	38,25±4,3 cm	38,73
24	20	1,2	41,75±3,8 cm	42,6
24	18	1,333	46±4 cm	47,3
34	28	1,214	42±3,5 cm	43,11

Le braquet ρ et la valeur théorique r_c^{theo} ont été respectivement calculé comme le rapport des dentures du pignon et du plateau et $r_c^{theo} = \rho R_1^{theo}$.

Les valeurs de r_c mesurées sont compatibles aux erreurs de mesure près avec les valeurs théoriques r_c^{theo} . Les incertitudes sur les mesures de r_c sont de l'ordre de 8 à 11 %. En pratique, il existe un intervalle de valeur de r pour lequel nous n'arrivons pas à mettre en mouvement le vélo : c'est précisément cet intervalle qui est utilisé pour déterminer l'incerti-

tude sur r_c . Dans notre modèle et calcul, cet intervalle n'apparaît pas car nous n'avons pas tenu compte des frottements (au niveau des roulements du pédalier et du pignon, des maillons de la chaîne) ni de la déformation du pneu et cadre. Dans la gamme de valeur de r (proche de r_c) où le vélo ne se met pas en mouvement, nous avons tenté d'augmenter la valeur de F , pour d'une part s'opposer aux frottements solides et d'autre part, générer une accélération plus importante. Malheureusement, en augmentant F , on augmente aussi R_x , la composante tangentielle de la réaction du sol, ce qui conduit dans certains cas à un glissement de la roue sur le sol. L'augmentation du poids du cadre, en le lestant, n'a pas permis de diminuer significativement l'incertitude sur r_c .

La figure 4 montre l'évolution du rayon critique r_c en fonction du braquet ρ . Un ajustement linéaire donne un rayon de la roue $R_1 = 35,0\text{cm} \pm 3\text{cm}$ en accord avec la valeur théorique R_1^{theo} du rayon de la roue. La mesure directe du diamètre de la roue donne un rayon de $35,2 \pm 0,1\text{cm}$ en accord avec notre mesure indirecte issue de la figure 3. Le modèle théorique ci-dessus est donc en bon accord avec notre expérience.

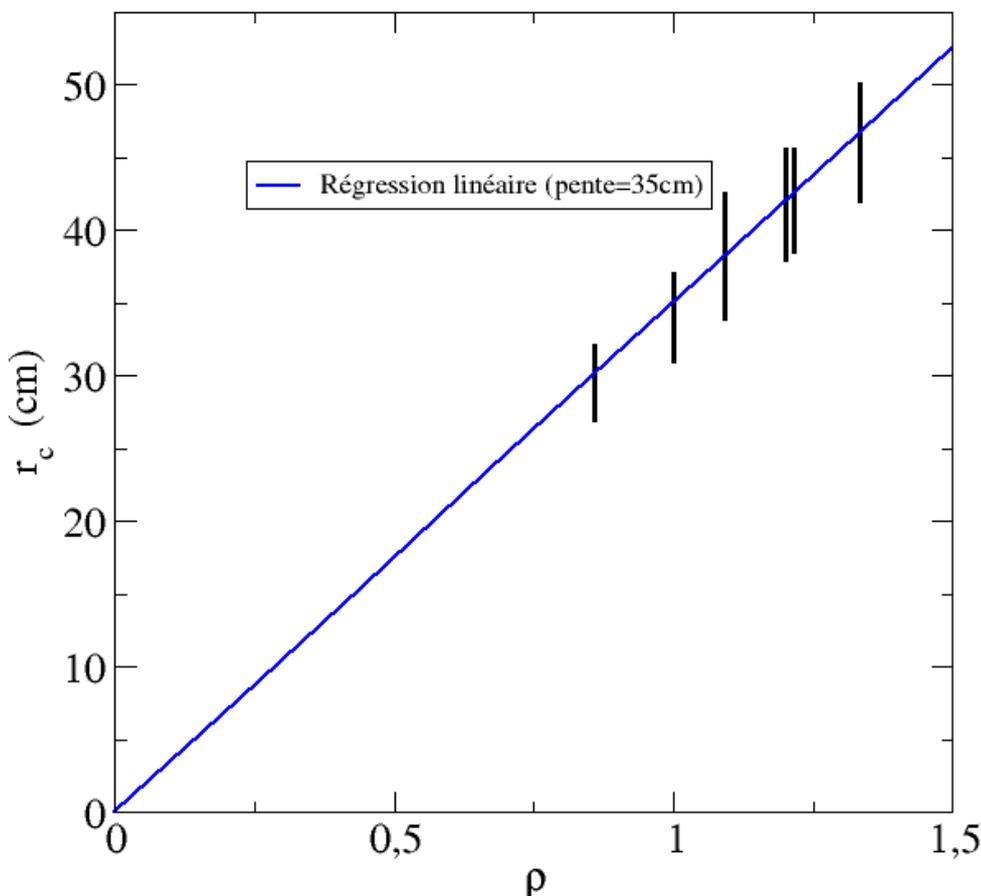


Illustration 4: Braquet ρ en fonction r_c (en noir) et régression linéaire (en bleu).

4. Conclusion

Cette petite expérience très simple montre d'une part qu'il est possible de mettre en œuvre de la physique loin d'être évidente à la maison, tout en s'amusant, et qu'il convient d'éviter de généraliser un résultat vérifié, même par de nombreuses expériences.

L'expérience mériterait d'être significativement améliorée afin de diminuer les incertitudes sur les mesures de r_c en limitant notamment les frottements solides (éléments de vélo et notamment roulements de meilleur qualité).

Le modèle pourrait être amélioré en tenant compte de la roue avant, des frottements solides dans les différents éléments du vélo ou encore des frottements de la roue avec le sol. Nous pourrions dans ce cas espérer mesurer le coefficient de frottement pneu sol en se plaçant dans une situation où le vélo devrait avancer mais où la roue patine (la mesure de F pourrait être faite avec un dynamomètre). Néanmoins, une mesure directe de ce coefficient de frottement en bloquant la rotation de la roue et en appliquant une force sur le vélo serait plus simple à mettre en œuvre et plus fiable (car elle ne ferait intervenir ni la chaîne, ni le pédalier).

Un autre point d'amélioration possible de la relation entre nos expériences et le modèle consiste soit à prendre en compte le rôle du dérailleur et de son ressort (qui tend la chaîne) dans notre modèle, soit à faire les expériences sur un vélo sans dérailleur.

Finalement, si on compare cette expérience à une utilisation normale d'un vélo. Il convient de remarquer que lors d'une utilisation normale, la force exercée par le cycliste est une force intérieure au système (vélo+cycliste), les forces extérieures qui s'appliquent sur le système (vélo+cycliste) sont exercées par la route (et les frottements de l'air). Dans le cas étudié dans cet article, la force F est une force extérieure qui s'applique sur le système (vélo).

Nicolas COMBE

Enseignant chercheur

Université Paul Sabatier

Toulouse

Corentin Durand

Enseignant Chercheur

Université Paul Sabatier

Toulouse