



HAL
open science

Exemples d'effets non linéaires sur les oscillateurs Partie 1 Oscillations libres

Nicolas Combe

► **To cite this version:**

Nicolas Combe. Exemples d'effets non linéaires sur les oscillateurs Partie 1 Oscillations libres. Le Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie, 2024, 1067, pp.795. 10.1119/5.0112643 . hal-04740356

HAL Id: hal-04740356

<https://hal.science/hal-04740356v1>

Submitted on 17 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Exemples d'effets non linéaires sur les oscillateurs

Partie 1. Oscillations libres¹⁰

Toulouse: 11 mars 2024

par Nicolas COMBE^{1,2}.

combe@cemes.fr

1 - CEMES, CNRS UPR 8011, 31055 Toulouse cedex 4, France.

2 - Université de Toulouse, UPS, F-31055 Toulouse, France.

Nous présentons dans cet article en deux parties une synthèse de quelques effets anharmoniques sur des oscillateurs. En effet, à notre connaissance, une telle synthèse n'existait pas jusqu'à présent alors que le sujet demeure une partie importante de la physique moderne. Deux effets anharmoniques (terme d'ordre 3 et 4 dans l'énergie potentielle) d'oscillateurs unidimensionnels sont étudiés. Dans cette première partie, nous examinons l'effet des non linéarités sur les oscillations libres : présence d'harmoniques, pulsation propre, propriétés statistiques. La deuxième partie sera consacrée aux oscillations forcées: résonances en amplitude et en puissance, résonances primaire et secondaires.

INTRODUCTION

Un oscillateur est un système présentant une variation alternative d'une quantité physique autour d'une certaine valeur au cours du temps. Les oscillateurs sont l'objet d'une attention toute particulière en physique et dans la formation des physiciens. Cette attention s'explique notamment parce que tout système se comporte comme un oscillateur autour d'une position d'équilibre stable (la réciproque n'étant pas vraie).

Par exemple, pour un système unidimensionnel dérivant d'une énergie potentielle $V(x)$ variant avec une quantité physique x , le développement de $V(x)$ autour d'une position x_{eq} donne

$$V(x) = V(x_{eq}) + (x - x_{eq}) V'(x_{eq}) + \frac{1}{2} (x - x_{eq})^2 V^{(2)}(x_{eq}) + \frac{1}{6} (x - x_{eq})^3 V^{(3)}(x_{eq}) + \frac{1}{24} (x - x_{eq})^4 V^{(4)}(x_{eq}) + \dots \quad (1)$$

Si x_{eq} est une position d'équilibre stable, alors dans le cas le plus fréquent $V'(x_{eq})=0$ et $V^{(2)}(x_{eq})>0$: le premier terme non nul de l'énergie potentielle est un terme en $(x-x_{eq})^2$. Ainsi en s'arrêtant à l'ordre 2, nous obtenons l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique. Dans la suite nous poserons $x_{eq}=0$ sans perte de généralité (puisqu'il convient juste de translater l'origine de la grandeur x).

Au travers du développement (1), nous comprenons aisément la place donnée aux oscillateurs harmoniques dans les différents enseignements du lycée jusqu'à l'université, ils décrivent le comportement d'un système autour de sa position d'équilibre stable à l'ordre le plus bas¹¹, comportement très largement documenté dans la littérature.

L'objet du présent article est d'aller au delà de l'approximation harmonique et d'examiner l'influence des termes d'ordres 3 et 4. Ainsi nous nous proposons dans cet article de synthétiser quelques caractéristiques des oscillateurs anharmoniques présentant des termes d'ordre 3 et d'ordre 4 avec $V^{(2)}(x_{eq})>0$.

L'équation (1) et le raisonnement ci dessus sont basés sur des systèmes unidimensionnels. Leurs généralisations à des systèmes de plus grande dimension ne sont pas forcément évidentes. Le développement du potentiel est relativement facile à faire en dimension supérieure à 1 et dans l'approximation harmonique, la diagonalisation de la matrice dynamique permet de se ramener à des oscillateurs harmoniques indépendants (modes propres). En revanche, en dehors de l'approximation harmonique, les couplages non linéaires intra-modes ou inter-modes peuvent prendre des formes très variées ce qui rend l'analyse délicate et limite la gé-

10 NDLR : la partie 2 de cet article paraîtra dans *Le Bup* n° xxxx en mois année.

11 Nous ne traiterons pas dans cet article les cas moins fréquents pour lesquels $V^{(2)}(x_{eq})=0$.

néralité des conclusions qu'on pourrait en tirer. Pour cette raison, nous limiterons notre propos dans le présent article aux oscillateurs unidimensionnels.

Dans cette première partie, après avoir rappelé brièvement les principales propriétés de l'oscillateur harmonique, nous étudierons l'influence des termes anharmoniques d'ordre 3 et d'ordre 4 sur le régime libre.

Une deuxième partie de l'article sera consacrée au régime forcé de ces oscillateurs.

1. ORDRE 2

Avant de traiter les oscillateurs non linéaires, nous rappelons très brièvement les principales propriétés d'un oscillateur harmonique. Si l'équation différentielle peut toujours se mettre sous la même forme générique, l'expression de l'énergie totale (cinétique + potentielle) dépend du système étudié. Dans la suite, nous nous appuierons sur le cas d'une masse couplée à un ressort de raideur k . La transposition à d'autres systèmes étant sans difficulté, elle est laissée au lecteur. Ainsi l'énergie totale s'écrira

$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$ avec

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre de l'oscillateur, x la position (en mètre) de la masse m par rapport à sa position d'équilibre .

1.1. Solutions de l'équation différentielle

L'application du principe fondamental permet d'établir l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ de la masse :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2)$$

avec ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur. L'énergie potentielle $V(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$ est une fonction paire de x représentée Fig 2b.

Les solutions de l'équation différentielle (2) s'écrivent : $x(t) = A \cos(\omega_0 t - \Phi)$ avec A et Φ fixés par les conditions initiales. Nous poserons $\Phi=0$ sans perte de généralité (puisqu'il convient juste de translater l'origine des temps). La figure 1 représente cette solution en fonction du temps.

Ainsi $x(t)$ est une grandeur qui varie périodiquement en fonction du temps à la pulsation ω_0 , elle est dite harmonique puisque une seule harmonique (la fondamentale) est présente. Par ailleurs, il y a isochronisme des oscillations i.e. la pulsation de $x(t)$ est indépendante de l'amplitude A des oscillations.

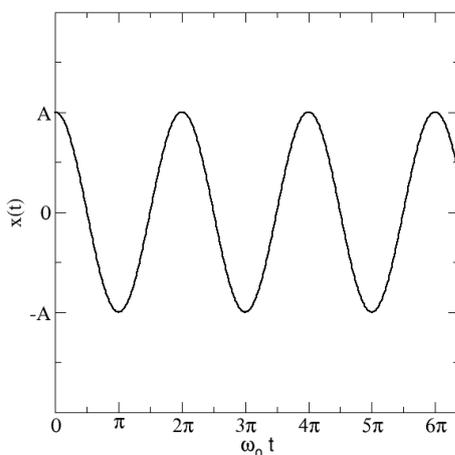


Figure 1: Solution harmonique $x(t)$ en fonction du temps

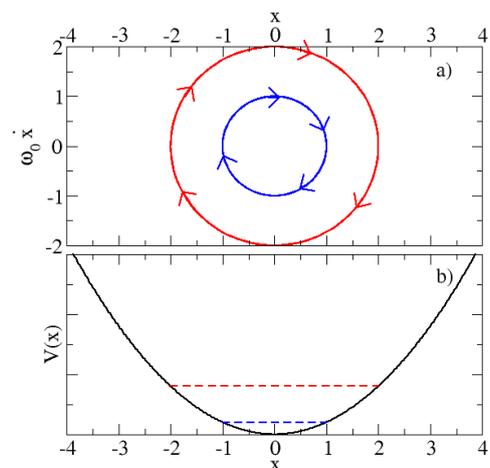


Figure 2: a) Portrait de phase de l'oscillateur harmonique pour deux énergies différentes (rouge et bleu) b) Energie potentielle (noire) et énergie totale pour les deux trajectoires (rouge et bleu) de la Fig.2a.

1.2. Énergie et portrait de phase

L'expression de l'énergie E du système s'obtient facilement $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2$. L'énergie se conserve en accord avec notre hypothèse d'absence de dissipation.

Les solutions de l'équation différentielle (2) peuvent être représentée dans le portrait de phase, espace composé ici des variables $(x, \omega_0 \dot{x})$ [1]. L'utilisation des portraits de phase s'avère très utile pour étudier les systèmes dynamiques. La présence facultative du préfacteur ω_0 dans la définition de l'axe des ordonnées permet d'avoir les mêmes unités sur les deux axes du portrait de phase et d'autre part que les solutions de l'oscillateur harmonique soient représentées par des cercles avec ce choix d'unités. La figure 2a représente deux trajectoires (pour deux conditions initiales différentes ou de manière équivalente deux énergies totales différentes) de l'oscillateur dans l'espace des phases. Les trajectoires sont fermées ce qui rend compte du caractère périodique du mouvement. Elles constituent des cercles dont le rayon A correspond à l'amplitude des oscillations et varie comme la racine carré de l'énergie totale $A = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{2E}{m}}$: nous avons reporté sur la figure 2b les énergies totales correspondantes. Les trajectoires dans le portrait de phase sont symétriques par rapport au plan $x=0$, en accord avec la parité de l'énergie potentielle $V(x)$.

1.3. Fluctuations thermiques

Il est possible de calculer les grandeurs moyennes par une approche de physique statistique lorsque cet oscillateur est couplé à un thermostat à la température T . C'est par exemple le cas dans un modèle de molécule diatomique couplé à un thermostat et dont l'élongation est étudiée dans l'approximation harmonique. Il vient facilement:

$$\langle x \rangle = \frac{\int x \exp\left(\frac{-E}{k_B T}\right) \frac{dp dx}{h}}{\int \exp\left(\frac{-E}{k_B T}\right) \frac{dp dx}{h}} = 0 \quad (3)$$

$$\left\langle \frac{m}{2} \omega_0^2 x^2 \right\rangle = \frac{\int \frac{m \omega_0^2 x^2}{2} \exp\left(\frac{-E}{k_B T}\right) \frac{dp dx}{h}}{\int \exp\left(\frac{-E}{k_B T}\right) \frac{dp dx}{h}} = \frac{k_B T}{2} \quad (4)$$

avec E l'énergie de la molécule diatomique, x l'élongation la molécule (par rapport à sa position d'équilibre) et p la quantité de mouvement associée au mouvement de la masse fictive m . L'équation (3) est un résultat évident lié directement à la symétrie (parité) de l'énergie potentielle $V(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$. L'équation (4)

est un cas particulier du théorème d'équipartition de l'énergie. Le principe ergodique assurant l'égalité des moyennes temporelle et statistique, le calcul de la moyenne temporelle de x^2 permet de montrer que

$$A^2 = \frac{2 k_B T}{m \omega_0^2} = \frac{2 k_B T}{V^{(2)}(0)}$$

en notant que la grandeur $m \omega_0^2$ correspond à la dérivé seconde du potentiel à la position d'équilibre Eq. (1). En d'autre terme, l'amplitude des fluctuations thermiques croît avec la température et décroît avec la courbure du potentiel à la position d'équilibre.

Pour aller plus loin, nous calculons la moyenne statistique de l'énergie totale $\langle E \rangle = k_B T$. Nous retrouvons ainsi que la contribution à la capacité calorifique d'un oscillateur (classique) unidimensionnel est k_B . Ce résultat est en accord avec la loi de Dulong Petit stipulant que la capacité calorifique d'un solide formé de N atomes est $3Nk_B$, soit une capacité calorifique molaire de $3R$ (R constante des gaz parfaits) [2]. En effet, à

l'ordre le plus bas, un solide formé de N atomes est modélisable par 3N oscillateurs harmoniques classiques indépendants (phonons)[2].

2. ORDRE 3

Nous considérons à présent les effets d'un terme d'ordre 3 dans l'énergie potentielle. Nous écrivons l'énergie potentielle sous la forme $V(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + m \frac{\alpha}{3} x^3$ dont la courbe est représentée figure 4b (avec α négatif): la présence d'un terme d'ordre 3 brise la parité (symétrie) de l'énergie potentielle. Ce potentiel peut permettre par exemple de décrire (à l'ordre anharmonique le plus bas) les interactions au sein d'une molécule diatomique : l'énergie potentielle en fonction de la distance x entre atomes est fortement répulsive à courte portée et attractive à plus longue portée Fig. 4b.

L'équation différentielle régissant la grandeur x(t) s'écrit alors

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0 \quad (5)$$

Nous conserverons dans la suite l'hypothèse α négatif sans perte de généralité (un changement de variable $x \rightarrow -x$ permet de faire ce choix).

2.1. Solutions de l'équation différentielle

La résolution analytique directe de l'équation (5) n'étant pas possible, nous utilisons une approche perturbative. Nous supposons ainsi que $\alpha x^2 \ll \omega_0^2 x$: nous posons ϵ un paramètre petit et $\alpha = \epsilon \tilde{\alpha}$ avec $\tilde{\alpha}$ d'ordre 0 en ϵ .

Nous posons donc $x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + O(\epsilon^3)$.. avec $x_i(t)$ d'ordre 0 en ϵ . En réinjectant cette expression dans l'équation (5) et en identifiant ordre par ordre chaque terme jusqu'à l'ordre 2, il vient

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (6)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \tilde{\alpha} x_0^2 = 0 \quad (7)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + 2\tilde{\alpha} x_0 x_1 = 0 \quad (8)$$

La résolution donne

$$x_0(t) = A \cos(\omega_0 t) \quad (9)$$

$$x_1(t) = \frac{-\tilde{\alpha} A^2}{2\omega_0^2} + \frac{\tilde{\alpha} A^2}{6\omega_0^2} \cos(2\omega_0 t) \quad (10)$$

Cette méthode fonctionne ici jusqu'à l'ordre 1, et nous pourrions très bien nous arrêter là. Mais à l'ordre 2, le terme en $x_0 x_1$ (Eq. 8) comporte des termes à la pulsation ω_0 qui dans le développement perturbatif constituent un forçage résonnant pour l'oscillateur $x_2(t)$, le conduisant à une divergence : ces termes sont appelés termes séculaires, leur présence est le signe que notre approche perturbative n'est pas adaptée à un développement à l'ordre 2. Physiquement, ces termes ont pour origine le fait que la pulsation ω de la solution périodique de l'Eq (5) est différente de ω_0 : la présence du terme anharmonique dans le potentiel à une influence sur la pulsation des oscillations. Pour traiter ces cas, il existe des approches perturbatives générales (méthodes de Poincaré-Lindstedt, méthode des échelles multiples) qui permettent de supprimer l'apparition des termes séculaires [3]. Ici, et sans rentrer dans le détail de ces méthodes, nous nous contenterons de faire l'hypothèse¹² que $x(t) = \epsilon a_0 + a_1 \cos(\omega t) + \epsilon a_2 \cos(2\omega t) + O(\epsilon^2)$... et $\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + O(\epsilon^3)$ avec a_i et ω_i d'ordre 0 en ϵ [4]. En réinjectant ces expressions dans l'Eq (5) et en identifiant chaque harmonique, le calcul donne :

12 Cette hypothèse est motivée par la méthode de Poincaré Lindstedt.

$$a_0 = \frac{-\tilde{\alpha} a_1^2}{2 \omega_0^2} \quad (11)$$

$$\omega_2 = \frac{-5 \tilde{\alpha}^2 a_1^2}{12 \omega_0^3} \quad \text{soit} \quad \omega = \omega_0 - \frac{5 \alpha^2 a_1^2}{12 \omega_0^3} \quad (12)$$

$$a_2 = \frac{\tilde{\alpha} a_1^2}{6 \omega_0^2} \quad (13)$$

Ainsi la pulsation des oscillations Eq. (12) est bien modifiée par la présence du terme non linéaire. Il n'y a plus isochronisme des oscillations puisque la pulsation dépend désormais de l'amplitude a_1 de la fondamentale.

Une conclusion importante de ce calcul, est que la présence d'un terme non linéaire dans l'équation (5) ne modifie pas la nature périodique du mouvement mais induit la présence d'harmoniques dans le signal : cette conclusion est générale à tous les oscillateurs non linéaires. Par ailleurs, l'effet de la non linéarité est d'autant plus significative que l'amplitude a_1 des oscillations est grande.

La figure 3 montre les solutions de l'équation (5) pour $\alpha = -0.3 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ (courbe noire), $\omega_0 = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Pour comparaison, la solution de l'oscillateur harmonique est tracée courbe magenta. Nous observons clairement la présence d'harmonique dans la solution de l'équation (5) pour $\alpha = -0.3 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$: $x(t)$ se comporte différemment à ses maxima et minima. Par ailleurs, la période est significativement supérieure à 2π en accord avec l'équation (12).

2.2. Énergie et portrait de phase

L'expression de l'énergie du système s'écrit facilement : $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + \frac{m}{3} \alpha x^3$

Les courbes iso-énergies constituent les trajectoires dans l'espace des phases $(x, \omega_0 \dot{x})$. La fig 4a présente quelques trajectoires de cet oscillateur dans l'espace des phases pour différentes conditions initiales¹³. Ces trajectoires sont fermées ce qui rend compte du caractère périodique des solutions. Le fait que ces trajectoires ne constituent plus des cercles traduit l'anharmonicité des solutions. Cette anharmonicité est d'autant plus significative que l'amplitude des oscillations est grande. Par ailleurs, ces trajectoires ne sont pas symétriques par rapport à $x=0$ en lien avec la forme de l'énergie potentielle fig 4b : l'énergie totale étant fixée, les valeurs prises lorsque x est maximal sont plus grandes que l'opposé de celle prise au minima.

13 Nous avons limité la représentation aux trajectoires liées.

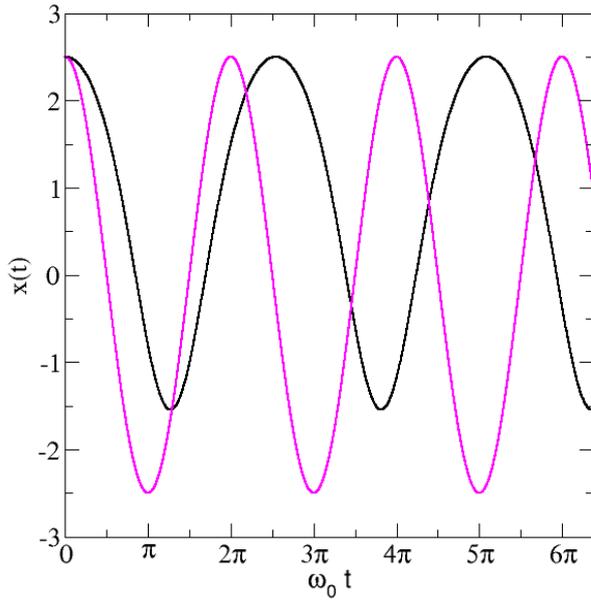


Figure 3: Solutions de $\ddot{x}+x-0.3x^2=0$ (courbe noire) et de $\ddot{x}+x=0$ (courbe magenta) avec pour conditions initiales (2.5,0).

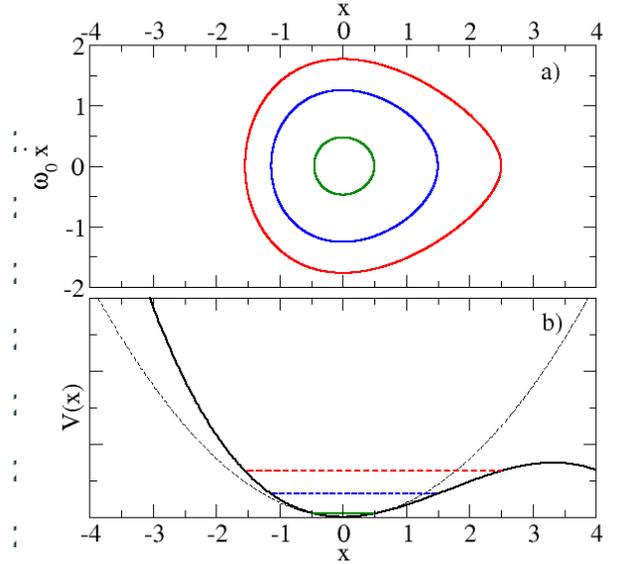


Figure 4: a) Portrait de phase pour différentes conditions initiales (2.5,0) (rouge), (1.5,0) (bleu) et (0.5,0) (vert). b) Energie potentielle $V(x)$ (noir), approximation harmonique (pointillés noir) et énergie totale pour les trois trajectoires (rouge, bleu et vert) de la Fig.4a.

Fluctuations thermiques

Pour un système en contact avec un thermostat, la position moyenne de l'oscillateur peut être obtenue par:

$$\langle x \rangle = \frac{\int x \exp\left(\frac{-E}{k_B T}\right) \frac{dp dx}{h}}{\int \exp\left(\frac{-E}{k_B T}\right) \frac{dp dx}{h}} \quad (14).$$

En faisant l'approximation[5]

$$\exp\left(\frac{-E}{k_B T}\right) = \exp\left(\frac{-m\dot{x}^2}{2k_B T}\right) \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - \frac{m}{3}\alpha x^3}{k_B T}\right) \quad (15),$$

$$\approx \left[1 - \frac{m\alpha x^3}{3k_B T} + \frac{m^2 \alpha^2 x^6}{18(k_B T)^2} + \dots\right] \exp\left(\frac{-m\dot{x}^2}{2k_B T}\right) \exp\left(\frac{-m\omega_0^2 x^2}{2k_B T}\right)$$

nous obtenons à l'ordre 1 en α :

$$\langle x \rangle = \frac{-m\alpha}{3k_B T} \frac{\int x^4 \exp\left(\frac{-m\omega_0^2 x^2}{2k_B T}\right) dx}{\int \exp\left(\frac{-m\omega_0^2 x^2}{2k_B T}\right) dx} = \frac{-\alpha}{m\omega_0^4} k_B T \quad (16)^{14}$$

La valeur non nulle de la valeur moyenne $\langle x \rangle$ Eq. (16) permet d'interpréter la dilatation d'une molécule diatomique. Comme dit précédemment, la distance entre les atomes est en première approximation et à l'ordre anharmonique le plus bas, pilotée par l'équation (5) avec $\alpha < 0$. L'équation (16) traduit ainsi que la distance interatomique moyenne d'une telle molécule augmente linéairement (au premier ordre en α) avec la température ($\alpha < 0$ pour une molécule), c'est le phénomène de dilatation thermique.

Qualitativement, la dilatation des solides s'explique de la même manière : néanmoins, une différence notable

14 Pour rappel $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp(-ax^2) dx = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$

avec le présent modèle est la présence de très nombreux modes propres de vibration (phonons) dans les solides. S'il serait très réducteur de les réduire à un seul mode propre, c'est bien leur couplage non linéaire qui est responsable de la dilatation des solides.

Le calcul de $\langle x^2 \rangle$ se fait en utilisant l'approximation Eq. (15). le calcul donne :

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int x^2 \exp\left(\frac{-E}{k_B T}\right) \frac{dp dx}{h}}{\int \exp\left(\frac{-E}{k_B T}\right) \frac{dp dx}{h}} = \frac{k_B T}{m \omega_0^2} + \frac{35 \alpha^2}{6 m^3 \omega_0^8} (k_B T)^2$$

En poursuivant le raisonnement effectué au 1.4 et en utilisant le développement de équation (15), le calcul mène à la valeur moyenne de l'énergie

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \langle 1/2 m \dot{x}^2 + 1/2 m \omega_0^2 x^2 + \frac{m}{3} \alpha x^3 \rangle \\ &= k_B T + \frac{5 \alpha^2 (k_B T)^2}{3 m \omega_0^6} \end{aligned}$$

Ainsi l'anharmonicité d'ordre 3 induit une correction à la capacité calorifique de cet oscillateur : cette correction varie linéairement avec la température à l'ordre le plus bas.

Principales caractéristiques des oscillateurs anharmoniques d'ordre 3

- réponse périodique mais présence d'harmoniques (aussi bien les ordres paires qu'impaires)
- valeur moyenne non nulle permettant d'expliquer la dilatation des solides
- portrait de phase présentant des trajectoires fermées dissymétriques par rapport à $x=0$
- pulsation corrigée au 2ième ordre par rapport à la perturbation : la période dépend de l'amplitude des oscillations

3. ORDRE 4

Nous considérons à présent les effets du terme d'ordre 4 sur l'oscillateur. Nous écrivons l'énergie potentielle sous la forme $V(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + m \frac{\beta}{4} x^4$ dont la courbe est représentée Fig 6b (avec β négatif). La présence d'un terme d'ordre 4 ne modifie pas la parité (symétrie) de l'énergie potentielle par rapport à l'oscillateur harmonique. Ce potentiel permet par exemple de décrire (à l'ordre anharmonique le plus bas) le mouvement d'un pendule (dans ce cas la grandeur x désigne l'angle repérant le pendule par rapport à la verticale).

L'équation différentielle régissant la grandeur $x(t)$ est alors la suivante

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0 \quad (17)$$

Cet oscillateur est aussi connu sous le nom d'oscillateur de Duffing.

3.1. Solutions de l'équation différentielle

Comme précédemment, nous utilisons une approche perturbative pour résoudre l'équation (17). Nous supposons ainsi que $\beta x^3 \ll \omega_0^2 x$. Nous posons ϵ un paramètre petit et $\beta = \epsilon \tilde{\beta}$ avec $\tilde{\beta}$ d'ordre 0 en ϵ .

Une approche perturbative simple $x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + O(\epsilon^3)$.. avec $x_i(t)$ d'ordre 0 en ϵ

fait apparaître des termes séculaires dès l'ordre 1. Comme précédemment, la pulsation ω de la solution périodique de l'Eq (17) n'est pas ω_0 . Nous ferons ici l'hypothèse que $x(t) = a_1 \cos(\omega t) + \epsilon a_2 \cos(2\omega t) + \epsilon^2 a_3 \cos(3\omega t) + O(\epsilon^3) \dots$ et $\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + O(\epsilon^3)$ avec a_i et ω_i d'ordre 0 en ϵ [4]. En réinjectant $x(t)$ dans l'équation (17) et en identifiant ordre par ordre et chaque harmonique, il vient à l'ordre le plus bas pour chaque terme¹⁵

$$\omega_1 = \frac{3\tilde{\beta}a_1^2}{8\omega_0} \text{ soit } \omega = \omega_0 + \frac{3\beta a_1^2}{8\omega_0} \quad (18)$$

$$a_2 = 0 \quad (19)$$

$$a_3 = \frac{\tilde{\beta}a_1^3}{32\omega_0^2} \quad (20)$$

Ainsi la pulsation des oscillations Eq. (18) est bien modifiée par la présence du terme non linéaire. Il n'y a pas isochronisme des oscillations : la période dépend de l'amplitude a_1 du fondamental. Dans le cas du pendule simple pour lequel le développement de l'énergie potentielle donne $\beta = \frac{-\omega_0^2}{6}$, il vient

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{a_1^2}{16}\right) \text{ ou } T = T_0 \left(1 + \frac{a_1^2}{16}\right) \text{ avec } T \text{ la période : cette dernière formule est appelée formule de Borda. Nous renvoyons le lecteur à la littérature pour l'étude expérimentale des pendules [6,7,8].}$$

La deuxième harmonique est nulle $a_2=0$ Eq. (19) ce que nous aurions aussi pu conclure sans calcul à partir des symétries de l'équation (17) ou de l'énergie potentielle : en effet l'équation (17) est invariante par transformation $x \rightarrow -x$ (correspondant à une translation dans le temps $t \rightarrow t + \pi/\omega$). Ainsi pour cette raison de symétrie, toutes les harmoniques impaires sont absentes du développement de $x(t)$.

Comme précédemment, la présence d'un terme non linéaire dans l'équation (17) ne modifie pas la nature périodique du mouvement mais induit la présence d'harmoniques dans la réponse. Par ailleurs, l'effet de la non linéarité est d'autant plus significatif que l'amplitude de l'oscillateur est grande.

La figure 5 présente la solution (courbe noire) de l'équation $\ddot{x} + x - 0.02x^3 = 0$ avec pour condition initiales (5,0). Pour comparaison, la solution de l'oscillateur harmonique avec les mêmes conditions initiales est tracée courbe magenta. La période des oscillations est significativement supérieure à 2π en accord avec l'équation (18) et la valeur négative de β utilisée dans cette simulation.

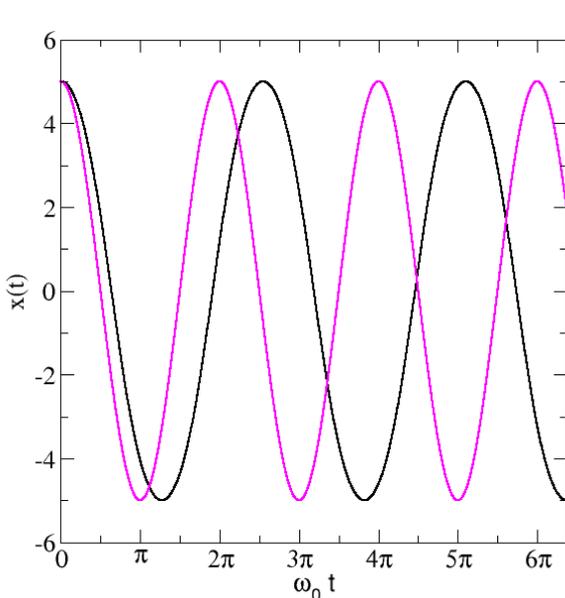


Figure 5: Solution de l'équation $\ddot{x} + x - 0.02x^3 = 0$ (courbe noire) et de $\ddot{x} + x = 0$ (courbe magenta) avec pour conditions initiales (5,0).

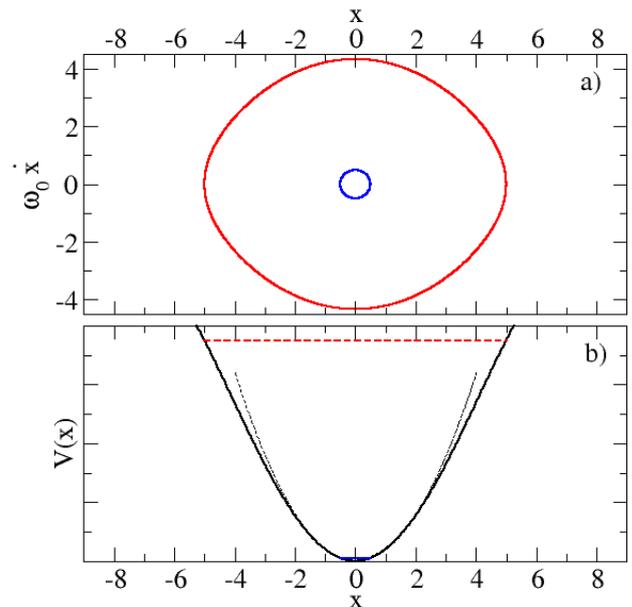


Figure 6: a) Portrait de phase présentant deux trajectoires avec pour conditions initiales (5,0) (rouge) et (0.5,0) (bleu) b) b) Energie potentielle $V(x)$ (noir), approximation harmonique (pointillés noir) et énergie totale pour les deux trajectoires (rouge, bleu) de la Fig.6a.

15 Il convient d'utiliser la formule trigonométrique $\cos^3(\alpha) = \frac{3}{4}\cos(\alpha) + \frac{1}{4}\cos(3\alpha)$

3.2. Energie et portrait de phase

L'expression de l'énergie du système s'écrit facilement : $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + \frac{m}{4} \beta x^4$

Les courbes iso-énergies constituent les trajectoires dans l'espace des phases $(x, \omega_0 \dot{x})$. La figure 6a représente deux de ces trajectoires dans le portrait de phase pour deux conditions initiales différentes. Les trajectoires sont fermées (périodicité) et ne sont pas circulaires (anharmonicité des solutions). Par ailleurs les trajectoires sont symétriques par rapport à $x=0$ en lien direct avec la parité de l'énergie potentielle. Lorsque l'amplitude a_1 des oscillations est faible (selon le critère $\beta a_1^3 \ll \omega_0^2 a_1$), nous retrouvons des trajectoires quasi-circulaires.

3.3. Fluctuations thermiques

Lorsque cet oscillateur est couplé à un thermostat à la température T , le calcul conduit à l'ordre le plus bas en β .

$$\langle x \rangle = \frac{\int x \exp\left(\frac{-E}{k_B T}\right) \frac{dp dx}{h}}{\int \exp\left(\frac{-E}{k_B T}\right) \frac{dp dx}{h}} = 0 \quad (21)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int x^2 \exp\left(\frac{-E}{k_B T}\right) \frac{dp dx}{h}}{\int \exp\left(\frac{-E}{k_B T}\right) \frac{dp dx}{h}} = \frac{k_B T}{m \omega_0^2} + \frac{15 \beta (k_B T)^2}{4 m^2 \omega_0^6} \quad (22)$$

La valeur moyenne de x est nulle ce qui est une conséquence directe de la parité de l'énergie potentielle. L'équation (22) s'établit en utilisant un développement analogue à l'équation (15). Le calcul de $\langle x^2 \rangle$ donne à nouveau une correction en T^2 par rapport au résultat de l'oscillateur harmonique. Le calcul peut se poursuivre pour établir l'énergie moyenne de l'oscillateur anharmonique d'ordre 4.

$$\langle E \rangle = k_B T - \frac{3 \beta (k_B T)^2}{4 m \omega_0^4}$$

Ainsi, nous trouvons qu'une anharmonicité d'ordre 4 induirait une correction à la capacité calorifique linéaire en température à l'ordre le plus bas.

Principales caractéristiques des oscillateurs anharmoniques d'ordre 4

- réponse périodique mais présence d'harmoniques (ordres impairs uniquement)
- valeur moyenne nulle
- portrait de phase présentant des trajectoires fermées symétriques par rapport à $x=0$, mais non circulaires
- pulsation corrigée au 1er ordre par rapport à la perturbation. Non isochronisme des oscillations : la période dépend de l'amplitude des oscillations.

CONCLUSION

Différents exemples d'effets non linéaires ont été mis en lumière dans cet article à travers l'étude des oscillations libres d'oscillateurs présentant des termes d'ordre 3 et 4 dans l'énergie potentielle. Nous avons montré que dans tous les cas, l'oscillateur oscille de manière périodique mais les non linéarités se traduisent par la présence d'harmoniques dans le comportement de l'oscillateur libre, la symétrie de l'énergie potentielle pouvant annuler certaines harmoniques. Par ailleurs, la présence d'une non linéarité induit le non isochronisme des oscillations: la période des oscillations libres est dépendante de l'amplitude des oscillations. La position moyenne de l'oscillateur libre est modifiée si la non linéarité est d'ordre 3 dans l'énergie potentielle.

Les non linéarités ici étudiées interviennent uniquement au travers de forces conservatives, si bien que l'énergie mécanique des oscillateurs libres sans dissipation vu ci-dessus était toujours une quantité conservée. Dans le cas de systèmes conservatifs, il existe des cas plus exotiques présentant une énergie potentielle Eq (1) dont le terme d'ordre le plus bas non nul est un terme d'ordre 4 par exemple [5] (soit $V^{(2)}(x_{eq})=0, V^{(3)}(x_{eq})=0$ et $V^{(4)}(x_{eq})>0$) : un tel système est aussi un oscillateur non-linéaire conservatif mais son traitement dépasse le cadre du présent article [9].

Au delà des systèmes conservatifs, certains systèmes échangent de l'énergie avec un système extérieur. Ces échanges peuvent parfois permettre d'entretenir des oscillations même en présence de dissipation. Le cas des oscillations forcées d'oscillateurs anharmoniques qui sera traitées dans la deuxième partie de cet article en constitue un cas simple. Mais il existe des cas de couplages avec l'extérieur très divers permettant d'observer des oscillations : que ce soit des effet dissipatifs non linéaires comme dans le cas de l'oscillateur de Van Der Pol, ou par exemple dans le cas d'un système extérieur modulant la pulsation propre de l'oscillateur pour un oscillateur paramétrique [10]. Notamment, l'effet des non linéarités produit parfois des phénomènes contre-intuitifs : par exemple, une excitation paramétrique permet de stabiliser un pendule autour de sa position d'équilibre instable, celui-ci oscillant autour de cette dernière position (pendule de Kapitza) [11].

Pour finir, nous avons limité nos investigations aux oscillateurs classiques, mais il est possible via des développements en perturbation de traiter les effets d'anharmonicité sur les oscillateurs quantiques. [12,13].

REMERCIEMENTS

L'auteur remercie R. Mathevet pour sa relecture et ses critiques constructives du manuscrit.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. Gié et J.P. Sarmant, *Portrait de phase*, BUP, 744, 719 (1992)
- [2] C.Kittel, *Introduction à la physique de l'état solide*, Dunod (1958)
- [3] P. Manneville, *Instabilités, Chaos et Turbulence*, École Polytechnique, Paris, 2004.
- [4] L. Landau et E.Lifschitz, *Mécanique*, Mir, Moscou, 1969.
- [5] Y.Quéré, *Physique de Matériaux* Ellipses, Paris, 1998
- [6] R.Duffait, *Étude expérimentale des oscillateurs mécaniques*, BUP 867,1307 (2004)
- [7] C. Fabre, N. Lamrani, P.Marchou, R. Mathevet *Pendule à la maison avec un smartphone*, BUP 1042, 309 (2022)
- [8] R.Mathevet, N. Lamrani, L. Martin, P. Ferrand, J. P. Castro, P. Marchou, et C. M. Fabre, *Quantitative analysis of a smartphone pendulum beyond linear approximation: A lockdown practical homework*, Am. J. Phys. 90 (5), 344 – 350 (2022).
- [9] A. H. Nayfeh et D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*, John Wiley and sons, (1979)
- [10] M. Krob, *Exemples d'oscillateurs non linéaires*, BUP, 785, 131 (1996)
- [11] Michel Fruchart, Pierre Lidon, Etienne Thibierge, Maxime Champion, Arnaud Le Diffon, *Physique expérimentale*, DeBoeck, (2016)
- [12] Müller, H.J.W. On the anharmonic oscillator in quantum mechanics and in field theory. *Z. Physik* **205**, 149–158 (1967)
- [13] R. W. Robinett, *Average value of the position of a anharmonic oscillator : classical versus quntum results*, Am. J. phys. 65, 190 (1997)