



HAL
open science

Les constantes mathématiques et la physique. Exemples du nombre d'or, de la constante d'Apéry et des alvéoles de cire des abeilles

Jean-Christophe Pain

► To cite this version:

Jean-Christophe Pain. Les constantes mathématiques et la physique. Exemples du nombre d'or, de la constante d'Apéry et des alvéoles de cire des abeilles. Le Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie, A paraître, 118, pp.779-793. hal-04740263

HAL Id: hal-04740263

<https://hal.science/hal-04740263v1>

Submitted on 16 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Les constantes mathématiques et la physique. Exemples du nombre d'or, de la constante d'Apéry et des alvéoles de cire des abeilles

Jean-Christophe Pain

Université Paris-Saclay, CEA, Laboratoire Matière en Conditions Extrêmes, F-91680 Bruyères-le-Châtel, France

jean-christophe.pain@cea.fr

RESUME

Plusieurs constantes mathématiques jouent un rôle clé en physique. Dans certains cas, elles découlent de manière exacte d'un formalisme, comme le nombre d'or dans les zéros de la densité de probabilité du premier niveau excité de l'atome d'hydrogène ou encore la constante d'Apéry dans le calcul du moment magnétique anormal de l'électron, de l'énergie moyenne d'un photon et de l'interaction entre deux sphères dans un fluide. Dans d'autres cas, elles apparaissent de manière approximative, mais avec une précision surprenante, dans des combinaisons de grandeurs physiques, comme π^5 dans le cas du rapport entre la masse du proton et de l'électron. Parfois enfin, elles trouvent plusieurs explications différentes possibles, physiques et mathématiques, comme le grand angle des losanges de la base rhomboédrique des alvéoles de cire des abeilles. Chacun peut adopter l'attitude qu'il souhaite face à ces constatations, les considérer comme des anecdotes où y deviner des intérêts profonds. Tous les exemples abordés ici ne doivent pas être placés au même plan. Quoi qu'il en soit, l'importance de ces constantes dans différents domaines de la physique présente un intérêt didactique certain, à travers la curiosité qu'elles suscitent et les liens entre disciplines qu'elles permettent de tisser.

INTRODUCTION

De nombreuses constantes mathématiques interviennent en physique, et parfois de manière inattendue. Dans certains cas, elles découlent directement de la théorie ; c'est le cas du nombre d'or dans les zéros de la densité de probabilité du premier niveau excité de l'atome d'hydrogène ou de la constante d'Apéry $\zeta(3)$, ζ étant la fonction zêta de Riemann, intervenant dans le calcul du moment magnétique anormal de l'électron, de l'énergie moyenne d'un photon et de l'interaction entre des billes solides dans un fluide en mouvement. Elles peuvent aussi être reconnues comme représentant une étonnamment précise approximation de certaines combinaisons de grandeurs physiques, c'est ainsi le cas de π^5 pour le rapport entre la masse du proton et de l'électron. Les alvéoles de cire des rayons de ruches, qui se présentent sous la forme de prismes d'axe horizontal, ne se raccordent pas par leur base hexagonale : chaque alvéole se raccorde avec trois autres par l'intermédiaire de trois losanges bien particuliers ayant un sommet en commun. Si la forme hexagonale est connue et étudiée dès l'antiquité, les losanges n'ont fait l'objet d'études que bien plus tard, au 18^{ème} siècle. L'hexagone, couvercle « naturel » du prisme, est remplacé par trois losanges dont le sommet commun est situé sur l'axe. Le grand angle des losanges de raccordement est donné par $\theta = \arccos(-1/3)$. Une interprétation purement mathématique a longtemps prévalu. L'hexagone est le polygone régulier qui, pour une surface donnée, a le plus petit périmètre et qui, par conséquent, exige le moins de cire pour les parois, et les dimensions adoptées par les abeilles pour le fond rhomboïdal (formé de losanges) correspondent à la plus petite surface totale pour l'alvéole et de fait à la plus petite quantité de cire. Cependant, depuis peu, c'est une hypothèse physique qui s'impose, liée à la viscoélasticité de la cire :

les alvéoles, initialement circulaires, se compriment entre elles, la cire fond et s'écoule lentement, des angles commencent à se former et la forme circulaire devient hexagonale.

On peut adopter différentes attitudes face à ces résultats. Il est légitime par exemple de se demander si le caractère irrationnel de ces quatre constantes, où le fait que deux d'entre elles (π et θ) soient transcendantes (solutions d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers), qu'une autre soit algébrique (ϕ , solution d'une équation du second degré) et que le caractère transcendant ou algébrique de la dernière ($\zeta(3)$) ne soit pas encore connu et occupe toujours de nombreux mathématiciens, puisse avoir des conséquences en physique. Les situations où des résultats mathématiques a priori abstraits apportent un éclairage sur les propriétés de systèmes physiques sont nombreuses. La conjecture de Montgomery [1] énonce que la corrélation entre les paires de zéros de la fonction zêta de Riemann est, comme le lui a fait remarquer Freeman Dyson [2], identique à la fonction de corrélation de paires de matrices hermitiennes aléatoires. En d'autres termes, la répartition des zéros non triviaux (i.e., situés sur la droite $\Re(s) = 1/2$, \Re représentant la partie réelle d'un nombre complexe) de la fonction zêta de Riemann est analogue à la distribution des écarts entre les niveaux d'énergie voisins d'un système chaotique !

LE NOMBRE D'OR ET LA FONCTION D'ONDE DU PREMIER NIVEAU EXCITE DE L'ATOME D'HYDROGENE

Le nombre de d'or est connu depuis presque trois millénaires. Si on divise un segment en deux parties, l'une de longueur x et l'autre de longueur 1, et si ces longueurs vérifient le rapport $\frac{x}{1} = \frac{(1+x)}{x}$, alors ce rapport est nommé « nombre d'or » et habituellement noté ϕ . Cette notation aurait été introduite par Théodore Cook (critique d'art et écrivain britannique) en 1914 en hommage au sculpteur grec Phidias (né vers 490 et mort vers 430 avant J. C.) qui décora le Parthénon à Athènes. Le prince Matila Costiescu Ghyka, diplomate roumain, ancien élève étranger de l'Ecole Navale à Brest, publie en 1931 l'ouvrage « Le Nombre d'or. Rites et rythmes pythagoriciens dans le développement de la civilisation occidentale » insistant sur la prééminence du nombre d'or et établissant définitivement le mythe [3,4]. Le nombre d'or est très présent dans le monde vivant, par exemple dans la croissance des coquillages (*Nautilus Pompilius*), chez les fleurs, les insectes, etc. On vérifie facilement, en résolvant l'équation du second degré de l'égalité précédente, que sa valeur est $\phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$. Le nombre d'or est lié à de nombreux problèmes, comme les racines cinquièmes de l'unité, l'existence d'axes de symétrie d'ordre 5, les nombres de Fibonacci, etc. Les pavages de Penrose (prix Nobel de Physique 2020 pour ses travaux sur les trous noirs) sont des pavages non périodiques du plan. En 1984, ils ont été exploités comme modèle intéressant de quasi-cristaux, des étranges matériaux présentant une structure ordonnée (icosaédrique ou décagonale) mais non périodiques (objets du prix Nobel de Chimie en 1982), comme l'icosahédrite $\text{Al}_{63}\text{Cu}_{24}\text{Fe}_{13}$, découverte dans des échantillons provenant d'une météorite tombée dans les montagnes de Koriakie en Russie en 2009. Certains présentent une symétrie pentagonale, et s'ils ne sont pas périodiques, ils sont en fait quasi-périodiques, c'est-à-dire que tout motif apparaissant dans le pavage réapparaît régulièrement. Certains pavages de Penrose comportent des pentagones, d'autres ont pour pièces de base des quadrilatères convexes et concaves, désignés respectivement par « cerfs-volants » et « fléchettes » (voir figure 1). On s'est aperçu que ces deux derniers motifs peuvent tous être construits à partir de paires de « triangles d'or ». Les « cerfs-volants » sont obtenus par collage de deux triangles d'or aigus de côtés proportionnels à 1, ϕ et ϕ , et les fléchettes par collage de deux triangles d'or obtus de côtés proportionnels à ϕ , ϕ et ϕ^2 .

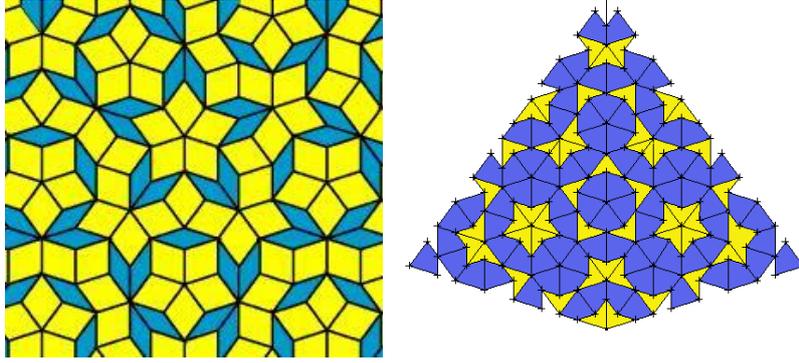


Figure 1 : Deux pavages de Penrose. Les éléments de base du pavage de droite sont les « cerfs-volants » et les « fléchettes ».

Peut-on trouver le nombre d'or à l'échelle microscopique, en physique atomique ? Peut-on trouver un lien entre l'atome d'hydrogène, le seul atome dont on puisse calculer analytiquement les niveaux d'énergie (valeurs propres du Hamiltonien) et fonctions d'onde (états propres), et ϕ ? La réponse est oui [5,6,7]. Considérons le module au carré de la partie radiale de la fonction d'onde (densité de probabilité) du premier niveau excité de l'atome d'hydrogène non relativiste multipliée par r , c'est-à-dire le niveau $2s$, correspondant au nombre quantique principal $n = 2$, et au nombre quantique orbital (ou azimutal) $\ell = 0$: $P_{20}(r) = r^2 R_{20}^2(r)$, où $R_{20}(r)$ est la fonction d'onde radiale du niveau $2s$. Sachant que la fonction d'onde du niveau $n\ell$ s'écrit [8] :

$$R_{n\ell}(r) = \left(\frac{2}{na_0}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{(n-\ell-1)!}{2n[(n+\ell)!]^3}} e^{-\frac{r}{na_0}} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^\ell L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right),$$

où a_0 est le rayon de Bohr et $L_j^k(x)$ est le polynôme de Laguerre généralisé défini à partir du polynôme de Laguerre $L_j(x)$ par

$$L_j^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{j+k}(x),$$

on obtient

$$R_{20}(r) = \frac{1}{\sqrt{2} a_0^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

et la probabilité totale $P_{20}(r)$ de trouver un électron $2s$ entre r et $r + dr$ est

$$4\pi P_{20}(r) dr = 4\pi r^2 R_{20}^2(r) dr.$$

Il est facile de prouver que $P_{20}(r)$ possède deux minima (à $r_1 = 0$ et $r_2 = 2a_0$, où la probabilité de trouver l'électron est nulle) et deux maxima (voir figure 2), respectivement à

$$r_3 = 2\left(1 - \frac{1}{\phi}\right)a_0 \quad \text{et} \quad r_4 = 2(1 + \phi)a_0.$$

Alternativement, un observateur placé au point $r = 2a_0$ où $P_{20}(r)$ s'annule, voit les maxima à des distances respectives de $\left(-\frac{2}{\phi}\right)a_0$ et $(2\phi)a_0$; n'est-ce pas intrigant ?

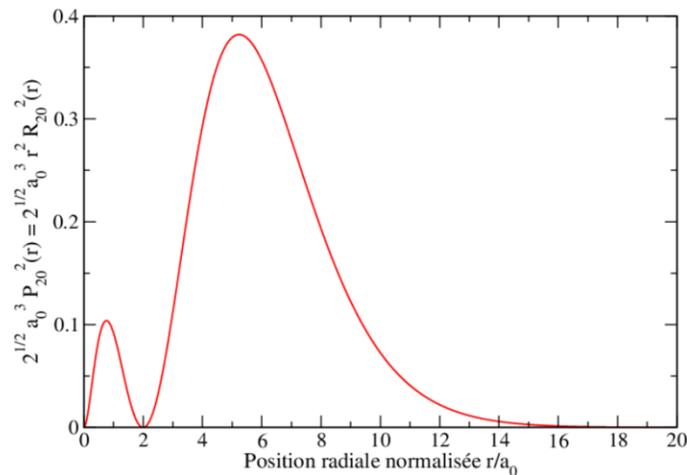


Figure 2 : Représentation (à un facteur multiplicatif constant près) de la densité de probabilité associée au niveau 2s.

π^5 ET LE RAPPORT DES MASSES DU PROTON ET DE L'ÉLECTRON

Dans un article intitulé « The ratio of proton and electron masses », publié par Friedrich Lenz de Düsseldorf (Allemagne) et reçu le 5 avril 1951 par la revue Physical Review, l'auteur déclare que « La valeur la plus exacte à l'heure actuelle [9] pour le rapport entre la masse du proton et celle de l'électron est de $1836,12 \pm 0,05$. Il peut être intéressant de noter que ce nombre coïncide avec $6\pi^5 = 1836,12$. » [10,11]. Comme le mentionne Dubé [12], la note de Lenz est aussi probablement l'article le plus court jamais publié dans la revue Physical Review (27 mots, un nombre, une équation et une référence !). La valeur la plus exacte à l'heure actuelle pour le rapport entre la masse du proton et celle de l'électron est la suivante $\frac{m_p}{m_e} = 1836,152\ 67389(17)$ [13]. Ce nombre coïncide encore, bien que dans une moindre mesure, avec la représentation simple $6\pi^5 = 1836,118108711688720$ avec 20 chiffres significatifs [12]. De telles coïncidences doivent cependant être considérées avec prudence [14], en gardant à l'esprit les mots de George Gamow : « Depuis les travaux de Sir Arthur Eddington, il est devenu habituel de discuter de temps à autre des relations numériques entre diverses constantes fondamentales de la nature. Bien que jusqu'à aujourd'hui ces discussions n'aient pas abouti à des résultats concrets, il est possible d'en tirer des leçons et il peut être intéressant de faire le point sur l'état actuel de cette branche « visionnaire » de la science » [15].

Energie moyenne des photons et rayonnement du corps noir

Marr et Wilkin ont proposé que le concept selon lequel les corps noirs plus chauds émettent en moyenne des photons d'énergie plus élevée, soit enseigné en présentant l'énergie moyenne des photons émis au lieu de la loi de déplacement de Wien [16]. On enseigne souvent le rayonnement du corps noir en suivant l'évolution historique, ce qui est bien entendu tout à fait défendable, mais pas forcément optimal du point de vue pédagogique. Bien que le photon ait été découvert peu de temps après les lois du rayonnement du corps noir, les auteurs défendent l'idée que ces lois seraient mieux et plus facilement assimilées par les étudiants si elles étaient présentées en termes de photons. Il est beaucoup plus facile pour des étudiants de premier cycle de comprendre la signification de l'énergie moyenne des photons que celle correspondant au maximum de la fonction de distribution du rayonnement. La puissance émise par unité de surface par stéradian par intervalle de fréquence ν , notée B_ν , est donnée par la loi de Planck :

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1},$$

où k_B est la constante de Boltzmann, h la constante de Planck et T la température. Un corps noir à une température T , rayonne une puissance totale (par unité de surface et par stéradian) de $\sigma T^4 / \pi$, où σ est la constante de Stefan-Boltzmann (le facteur $1/\pi$ n'apparaît pas dans la loi de Stefan-Boltzmann usuelle du fait de l'intégration de l'intensité sur les angles solides [17]). Cette expression est obtenue en intégrant B_ν sur toutes les fréquences:

$$\int_0^\infty B_\nu d\nu = \sigma \frac{T^4}{\pi},$$

où

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} \approx 5,670374419 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}.$$

Le nombre moyen de photons dans le spectre est donné par

$$\langle E_{\text{phot}} \rangle = \frac{\text{Energie totale émise}}{\text{Nombre de photons}} = \frac{\int_0^\infty B_\nu d\nu}{\int_0^\infty \frac{B_\nu}{h\nu} d\nu},$$

et on a

$$\int_0^\infty \frac{B_\nu}{h\nu} d\nu = \frac{30\zeta(3)}{\pi^5 k_B} \sigma T^3,$$

où $\zeta(s)$ est la fonction zêta de Riemann, définie par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

avec $\Re(s) > 1$. La constante d'Apéry vaut $\zeta(3) \approx 1,20205690315959$. Roger Apéry (voir figure 3) est un mathématicien français ayant effectué la plus grande partie de sa carrière à l'université de Caen. Il est principalement connu pour avoir démontré l'irrationalité de $\zeta(3)$ [18-22].

L'application numérique nous donne

$$\langle E_{\text{phot}} \rangle = \frac{\pi^4}{30\zeta(3)} k_B T \approx 3,7294 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \times T.$$

Ainsi, par exemple, on trouve que l'énergie moyenne d'un photon émis à la surface du Soleil est de $2,16 \cdot 10^{-18}$ J, soit environ 13,48 électronvolts, ce qui correspond approximativement à une longueur d'onde de 920 nm [23].



Figure 3 : Roger Apéry (à gauche) et inscriptions de sa pierre tombale au cimetière du Père Lachaise à Paris (à droite).

Le moment magnétique anormal de l'électron

Au moment cinétique orbital d'une particule de charge q et de masse m est associé un moment magnétique orbital $\vec{\mu}_L = (q/2m)\vec{L}$. Le facteur $q/2m$ est appelé rapport gyromagnétique. De même, on associe à une particule de spin S , un *moment magnétique de spin* : $\vec{\mu}_S = g(q/2m)\vec{S}$, où g est appelé facteur de Landé (1921). Ce nombre varie selon la nature de la particule : on a approximativement $g = -2$ pour l'électron, $g = +5,586$ pour le proton, et $g = -3,826$ pour le neutron. Dans le cas de l'électron, les valeurs propres du spin selon un axe sont $S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$, \hbar étant la constante de Planck réduite ; on introduit alors le « quantum de moment magnétique » suivant, appelé *magnéton de Bohr* : $\mu_B = (e\hbar/2m_e)$. L'équation de Dirac prédit pour l'électron un facteur de Landé exactement égal à -2 . Or, la valeur expérimentale admise en 2014 vaut $-2,00231930436182$. Il existe donc un écart, décelé pour la première fois en 1947 dans la structure hyperfine de l'hydrogène et du deutérium. En physique des particules, le moment magnétique anomal désigne l'écart entre la valeur du facteur de Landé g d'un lepton et la valeur 2 donnée par l'équation de Dirac. Cette anomalie est remarquablement bien expliquée par l'électrodynamique quantique, lorsque les fluctuations quantiques du vide sont prises en compte. L'anomalie est une quantité sans dimension, $a = (g - 2)/2$. La contribution dominante à cette anomalie, qui provient de l'électrodynamique quantique perturbative [24,25], se présente sous la forme d'un développement en série de puissances de la constante de structure fine [26], également appelée *constante de couplage*. Plus précisément, on est amené à écrire le développement suivant :

$$a = A_1\alpha_1 + A_2 \alpha_1^2 + A_3 \alpha_1^3 + A_4 \alpha_1^4 + o(\alpha_1^4)$$

en puissances de $\alpha_1 = \frac{\alpha}{\pi} \approx 0,00232281946536$. La notation de Landau $f = o(g)$ en x_0 , fini ou non (on dit que f est un petit o de g en x_0) signifie que f est négligeable devant g ou qu'au voisinage de x_0 , le quotient f/g admet la limite 0 en ce point.

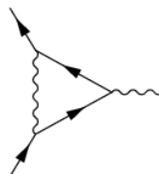


Figure 4 : Diagramme de Feynman : correction à une boucle au vertex électron (représenté par une flèche) – photon (représenté par la ligne ondulée).

Le premier terme du développement, calculé par Schwinger en 1948 et représenté par le diagramme de Feynman de la figure 4, vaut simplement : $A_1 = 1/2$. Ce fut l'un des premiers grands succès de l'électrodynamique quantique. Les calculs des termes suivants sont beaucoup plus compliqués, car le nombre de diagrammes croît de manière exponentielle avec l'ordre du développement. La correction d'ordre 2 fait intervenir 7 diagrammes de Feynman. Un premier résultat – erroné – a été publié en 1950, puis corrigé en 1957-1958. On obtient *in fine*:

$$A_2 = \frac{197}{144} + \left(\frac{1}{2} - 3 \ln 2\right) \frac{\pi^2}{6} + \frac{3\zeta(3)}{4},$$

dont la valeur numérique est : $A_2 \approx -0,328847896557919378$. Le calcul de la correction d'ordre trois fait intervenir 72 diagrammes de Feynman. Le calcul, commencé en 1969, n'a été terminé et publié qu'en 1996 [27]. On obtient une expression analytique assez compliquée: $A_3 = A_{31} + A_{32} + A_{33}$, avec

$$A_{31} = \frac{28259}{5184} + \left(\frac{17101}{135} - \frac{596}{3} \ln 2\right) \zeta(2) + \frac{139}{18} \zeta(3),$$

$$A_{32} = \frac{100}{3} \left[\text{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + (\ln^4 2 - \pi^2 \ln^2 2) \right],$$

et

$$A_{33} = \frac{1}{24} [-239 \zeta(4) + 166 \zeta(2)\zeta(3) - 215 \zeta(5)],$$

où $\text{Li}_n(x)$ désigne la fonction polylogarithme :

$$\text{Li}_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^n}.$$

Numériquement, on obtient : $A_3 \approx 1,181241456587$.

La constante d'Apéry intervient donc dans les expressions de A_2 , A_{31} et A_{33} . La constante A_{33} dépend également d'autres valeurs de la fonction zêta, pour l'argument égal à 2, 4 et 5. La fonction zêta, donnée pour $\Re(s) > 1$, peut être prolongée analytiquement sur tout le plan complexe excepté le pôle en $s = 1$, et il apparaît qu'elle s'annule pour de nombreux points sur

$$z = \frac{1}{2} + ik$$

où k est un nombre réel. Les premières valeurs sont $k_1 \approx 14,1347$, $k_2 \approx 21,0220$, et $k_3 \approx 25,0109$. L'hypothèse de Riemann prédit que tous les zéros non triviaux (différents de $-2, -4, -6, -8, \text{etc.}$) sont sur cette droite. Pour revenir aux travaux de Dyson mentionnés en introduction, si l'hypothèse de Riemann est vraie, alors les zéros de la fonction ζ forment ... un quasi-cristal (voir l'explication de cette notion dans le paragraphe ci-dessus sur le nombre d'or) mono-dimensionnel ! On peut en effet les interpréter comme une distribution de masses ponctuelles sur une droite, et leur transformée de Fourier est analogue elle-même à une distribution de masses ponctuelles, correspondant aux logarithmes des nombres premiers et des puissances de ces derniers. Nous avons mentionné dans la première partie les quasi-cristaux bi-dimensionnels de Penrose. Les quasi-cristaux mono-dimensionnels sont beaucoup plus intéressants. Leur ensemble possède une structure au moins aussi riche que l'ensemble des nombres de Pisot-Vijayaraghavan [28]. En mathématiques, un tel nombre

(parfois simplement appelé nombre de Pisot) se caractérise par le fait que la suite de ses puissances se rapproche rapidement (exponentiellement) d'une suite d'entiers. Les nombres de Pisot sont racines de polynômes à coefficients entiers, comme $P(x) = x^3 - x - 1$ qui a pour unique racine réelle le plus petit nombre de Pisot, $\psi \approx 1,3247$ (c'est le nombre plastique). Les nombres de Pisot qui s'expriment avec une racine carrée sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1 + \sqrt{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, 1 + \sqrt{3}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}, 2 + \sqrt{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}, 2 + \sqrt{3}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}, etc. :$...". Le premier d'entre eux est donc... le nombre d'or !

Et la goutte d'eau qui fait...

La constante d'Apéry intervient également en mécanique des fluides, dans le calcul de la masse ajoutée d'une sphère approchant un plan, pour modéliser une goutte de pluie par exemple [29], sous la forme $3\zeta(3) - 2$. En mécanique des fluides, la masse ajoutée correspond à un supplément de masse (conduisant à une masse effective), destiné à rendre compte des accélérations ressenties par le fluide lors de sa mise en mouvement, ou lors de la mise au repos. Par exemple, l'étude du mouvement du pendule pesant dans l'air doit évidemment intégrer la masse du pendule, mais aussi la masse de l'air qui est mise en mouvement puis ralentie à chaque oscillation. Cette notion n'existe pas en mécanique des fluides stationnaires.

L'étude de l'interaction de deux sphères dans un fluide a des applications pour les écoulements biphasiques, la suspension de particules, le transport de masse et de chaleur, la combustion de gouttelettes inflammables, la pluie, les systèmes biologiques, etc. On peut modéliser cette interaction plus simplement par l'interaction d'une sphère avec un mur plan (important en météorologie par exemple). Une solution exacte de ce problème est présentée dans la référence [30] pour l'écoulement potentiel incompressible axisymétrique autour de deux sphères adjacentes et d'une sphère proche d'un mur. L'équation de Laplace est résolue dans le système de coordonnées bi-sphériques au moyen de la séparation des variables. La solution générale, qui se présente sous forme de série, est ensuite appliquée au calcul de la masse ajoutée d'une sphère approchant un mur, pour laquelle il existe une solution approximative. L'influence du mur est d'augmenter la masse ajoutée, cet incrément atteignant une valeur d'environ 61 % lorsque la sphère s'approche très près du mur.

La masse ajoutée augmente lorsque la sphère s'approche du mur. Si on appelle η le rapport

$$\eta = \frac{\text{masse virtuelle de la sphère en présence d'un mur}}{\text{masse de la sphère en mouvement dans un fluide infini}}$$

on trouve, en se plaçant à bas nombre de Reynolds, si R est le rayon de la sphère et H la distance du centre de la sphère au mur :

$$\eta = 1 + \frac{3}{8} \left(\frac{R}{H}\right)^3 + \frac{3}{8} \frac{\left(\frac{R}{H}\right)^6}{\left[2 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{H}\right)^2\right]^3} + \dots$$

A la limite $\frac{R}{H} \rightarrow 1$, c'est-à-dire lorsque la sphère touche le mur, le rapport tend vers :

$$\eta \rightarrow 3\zeta(3) - 2 \approx 1,60617$$

qui fait intervenir la constante d'Apéry !

L'ANGLE DES ALVEOLES DES ABEILLES : PHYSIQUE OU MATHEMATIQUE ?

La cire fabriquée par les abeilles sert à bâtir les alvéoles des ruches. Ce sont les cellules à six côtés des rayons de cire dont le rôle est de protéger le couvain et de stocker la nourriture des abeilles. La construction des alvéoles se déroule sur chaque face d'un rayon disposé à la verticale. L'élaboration d'un rayon débute par le plafond de la ruche puis s'étend vers le bas. Le gâteau de cire est constitué par des alvéoles juxtaposées. La partie émergée de chacune des alvéoles est un hexagone régulier dont le côté mesure environ 3 mm. La profondeur d'une alvéole est de 11,5 mm. L'épaisseur de ses parois est d'environ 1/20 de mm. Chaque cellule est adossée à trois autres cellules (voir figure 5) au moyen d'une surface formée de trois losanges (rhombes). Les alvéoles ne sont en fait pas placées parfaitement à l'horizontale. Elles font un angle de 7 à 8 degrés vers le haut, pour éviter que le miel s'écoule hors des cellules par capillarité. Le gâteau de cire par sa forme et son agencement est gage d'une grande solidité.

Nous savons que le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone sont les seuls polygones réguliers qui puissent paver le plan. Les deux premiers présenteraient trop d'espaces angulaires non utilisés pour les larves ; l'hexagone, au contraire, se rapproche davantage du cercle et est à cet égard plus commode. On peut penser que l'abeille cherche surtout à économiser la cire, qui n'a pas d'autre utilité pour elle. L'adossement des cellules permet déjà de supprimer un fond : de plus l'hexagone est celui qui pour une surface donnée a le plus petit périmètre et qui, par conséquent, exige le moins de cire pour les parois. Enfin, les dimensions adoptées par les abeilles pour le fond rhomboïdal (formé de losanges) correspondent à la plus petite surface totale pour l'alvéole et par la suite à la plus petite quantité de cire. L'instinct des abeilles les conduit donc à résoudre deux intéressants problèmes de minimisation [31]. Le calcul, accessible à des élèves de terminale, donne un angle de

$$\theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109,471^\circ.$$

En 1660, Rasmus Bartholin, mathématicien danois, émet l'hypothèse que la forme hexagonale des alvéoles n'a rien d'extraordinaire et qu'elle serait simplement due à la pression qu'exerce chaque abeille sur les parois du cadre. En 1661, Johannes Kepler compare les alvéoles aux cristaux et postule l'idée que les abeilles auraient un esprit mathématique. En 1719, Réaumur défend l'idée que la forme hexagonale des alvéoles est motivée par un souci d'économie, de la part des abeilles. En 1859, Charles Darwin rejette toutes ces hypothèses et pense qu'au début de sa construction l'alvéole a une forme circulaire qui à la fin du processus finit par devenir hexagonale. Selon Darwin, l'explication n'est donc pas un problème d'optimisation, mais guidée par des effets physiques. Il semble que la forme rhomboïdale du fond n'ait été remarquée qu'au 18^{ème} siècle. Le mathématicien et astronome franco-italien Maraldi détermine expérimentalement avec précision les angles des losanges.

Beaucoup plus tard, en 1943, le mathématicien hongrois László Fejes Tóth démontre, en faisant l'hypothèse de convexité des tuiles du pavage, que le pavage hexagonal régulier est toujours la partition du plan en surfaces égales ayant le plus petit périmètre. Ce n'est qu'en 1999 que Thomas Hales présente sa preuve en 19 pages du théorème du nid d'abeille ("The Honeycomb conjecture"), énonçant que le pavage hexagonal régulier est la partition du plan en surfaces égales ayant le plus petit périmètre. Mais que se passe-t-il lorsque les côtés sont incurvés ? Fejes Tóth pense alors que la structure hexagonale régulière reste en pratique la plus efficace, mais il parvient à montrer qu'il existe une autre forme qui permettrait une occupation encore meilleure de l'espace en faisant économiser aux abeilles 0,35 % de cire [32]. Il faut attendre 2013 pour avoir une réponse exhaustive et

convaincante expliquant la forme hexagonale des alvéoles. Le professeur Bhushan Lal Karihaloo, et son équipe de l'Université de Cardiff confirment l'hypothèse de Darwin [33]. Les alvéoles ont à l'origine une forme circulaire et ensuite sous l'effet de la chaleur de la ruche qui peut aller jusqu'à 45°C (vu le nombre énorme d'abeilles et leur activité frénétique), conformément au principe de la viscoélasticité, les alvéoles se compriment entre elles, la cire fond et s'écoule lentement, tel un caramel. Des angles commencent alors à se former mécaniquement et la forme circulaire devient hexagonale. On peut donc considérer qu'à l'heure actuelle et depuis peu, c'est l'interprétation physique qui l'emporte !

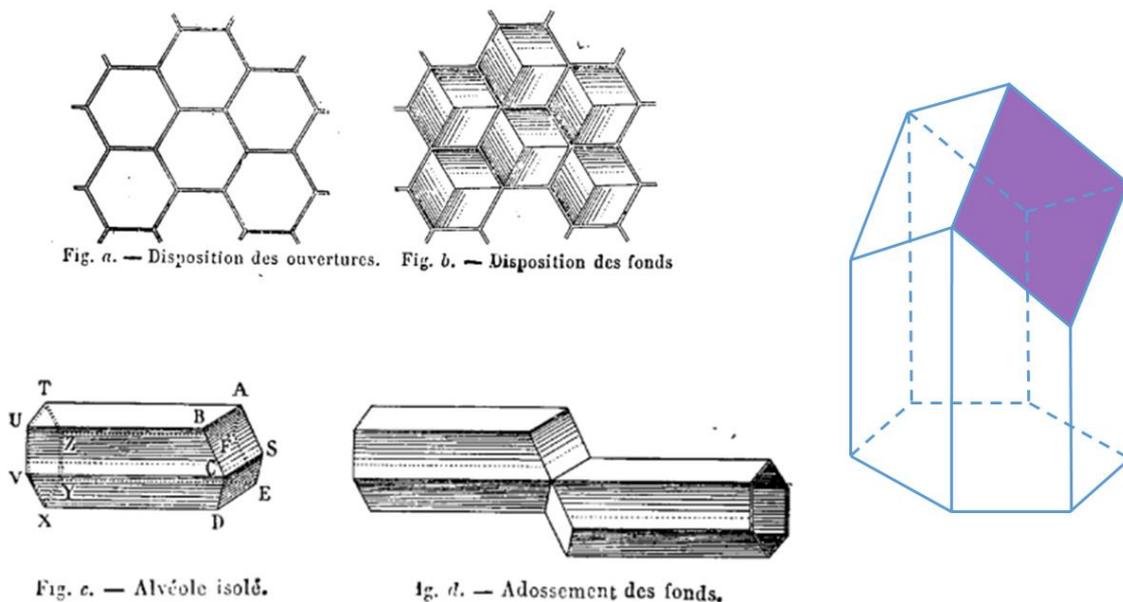


Figure 5 : Formes des alvéoles d'abeille. Les deux croquis de gauche sont issus de la référence [31]. A droite, l'un des trois losanges du fond rhomboédrique est coloré en violet. L'entrée de l'alvéole est en bas.

CONCLUSION

La présence de certaines constantes mathématiques dans différentes spécialités de la physique, qui n'ont pas forcément de lien entre elles, y compris à l'échelle microscopique, est fascinante. Certaines valeurs ou zéros de la fonction zêta de Riemann en particulier jouent un rôle déterminant. Il est légitime de se demander si le caractère irrationnel d'une constante, où le fait qu'elle soit, comme π , transcendante (racine d'aucun polynôme non nul à coefficients entiers) ou encore que le caractère transcendant ou algébrique de $\zeta(3)$ ne soit pas encore connu et occupe toujours de nombreux mathématiciens, pourraient avoir des conséquences en physique [34]. L'importance de certaines constantes mathématiques concerne également les sciences sociales, avec par exemple la probabilité d'impossibilité du vote de Condorcet (consistant à donner ses préférences entre a et b , entre a et c et entre b et c) en théorie du choix social. [35]. C'est aussi l'angle magique, c'est-à-dire la mesure en radians de l'angle entre la diagonale d'un cube et une arête adjacente, qui vaut $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Il intervient en particulier en spectroscopie par résonance magnétique nucléaire (RMN), domaine qui lui a donné son nom ! Quoi qu'il en soit, l'intervention de ces constantes dans différentes thématiques de la physique peut s'avérer un outil pédagogique intéressant, ne serait-ce que pour « titiller » la curiosité des élèves ou des étudiants. Le fait de créer des ponts entre différents sujets permet de faciliter l'assimilation des concepts, en partie en favorisant la surprise et l'émerveillement. Il me semble que

l'introduction du célèbre article « Birds and frogs in mathematics and physics » du regretté Freeman Dyson résume bien cette complémentarité [36] :

« Certains scientifiques sont des oiseaux, d'autres sont des grenouilles. Les oiseaux volent haut dans les airs et jusqu'à l'horizon lointain. Ils se réjouissent des concepts qui unifient notre pensée et rassemblent des problèmes divers provenant de différentes parties du paysage. Les grenouilles vivent dans la boue et ne voient que les fleurs qui poussent à proximité. Elles se délectent des détails d'objets particuliers et résolvent les problèmes un par un. Il se trouve que je suis une grenouille, mais beaucoup de mes meilleurs amis sont des oiseaux. [...]. Le monde des sciences est à la fois vaste et profond, et nous avons besoin d'oiseaux et de grenouilles qui travaillent ensemble pour l'explorer. »

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Claude Morin pour ses relectures attentives du manuscrit et ses corrections.

BIBLIOGRAPHIE ET NETOGRAPHIE

[1] H. L. Montgomery, "The pair correlation of zeros of the zeta function", *Analytic number theory*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. XXIV, Providence, R.I.: American Mathematical Society, pp. 181–193 (1973).

[2] F. J. Dyson, "Correlations between eigenvalues of a random matrix", *Comm. Math. Phys.* **19**, 235-250 (1970).

[3] M. C. Ghyka, « Le Nombre d'or. Rites et rythmes pythagoriciens dans le développement de la civilisation occidentale » (Nouvelle revue française, Gallimard, 1931).

[4] J.-P. Delahaye, « La numérologie du nombre d'or », *Pour La Science* no 262, août 1999.

[5] V. M. Petruševski, S. M. Kalajdžievski and Ž. M. Najdoski, "Quasi-crystals: comparison with crystals, construction of 2D lattices and demonstrations using a laser pointer, *Chem. Educator* **8**, 358–363 (2003).

[6] V. M. Petruševski, "The H–Atom and the Golden Ratio: A Possible Link?", *J. Chem. Educ.* **83**, No. 1, 40, January 2006.

[7] V. M. Petruševski, "The first excited state of the hydrogen atom and the golden ratio: a link or a mere coincidence?", *Bull. Chem. Technol. Macedonia* **25**, No. 1, 61-63 (2006).

[8] C. Cohen-Tannoudji, F. Laloe and B. Diu, « Mécanique quantique », Hermann (1997).

[9] H. Sommer, H. A. Thomas and J. A. Hipple, "Values of μ_p , F , and M_p/m_e using the Omegatron", *Phys. Rev.* **80**, 487-487 (1950).

[10] F. Lenz, "The Ratio of Proton and Electron Masses", *Phys. Rev.* **82**, 554-554 (1951).

[11] J.-C. Pain, "The fifth power of π : new series representation involving the golden ratio and an application in physics" (2022), <https://doi.org/10.5281/zenodo.6915559>

- [12] L. J. Dubé, “A reminder of the powers of π ”, *Physics Today* **70**, 13 (2017).
- [13] P. J. Mohr, D. B. Newell and B. N. Taylor, “CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2014”, *Rev. Mod. Phys.* **88**, 035009 (2016).
- [14] M. A. Sherbon, “Constants of nature from the dynamics of time” (2008), <https://ssrn.com/abstract=1296854> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1296854>
- [15] G. Gamow, “Numerology of the Constants of Nature”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **59**, 313-318 (1968).
- [16] J. M. Marr and F. P. Wilkin, “A better presentation of Planck’s radiation law”, *Am. J. Phys.* **80** (5), 399-405 (2012).
- [17] G. F. Gray, “The Observation and Analysis of Stellar Photospheres”, 2nd ed. (Cambridge U.P., Cambridge, UK, 1992), pp. 95–96.
- [18] R. Apéry, « Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ », *Astérisque* **61**, 11–13 (1979).
- [19] F. Beukers, “A note on the irrationality of $\zeta(3)$ ”, *Bull. London Math. Soc.* **11**, 268-272 (1979).
- [20] A. van der Poorten, “A Proof that Euler missed...Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$ ”, *Math. Intelligencer* **1**, 196-203 (1979).
- [21] W. Zudilin, "One of the numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ is irrational", *Russ. Math. Surv.*, **56** (4): 774–776 (2001).
- [22] P. Levrie, « The ubiquitous Apéry number », *The mathematical intelligencer* 118-119 (2020).
- [23] D. Broadhurst, “Feynman's sunshine numbers”, arXiv 1004.4238, April 2010.
- [24] S. S. Schweber, “QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga”, Princeton Series in Physics 104 (Princeton University Press, 1994).
- [25] M. Knecht, “The anomalous magnetic moments of the electron and the muon”, séminaire Poincaré, Paris, 12 octobre 2002, publié dans : B. Duplantier et V. Rivasseau (Eds.), Poincaré Seminar 2002, Progress in Mathematical Physics 30, Birkhäuser, 2002.
- [26] J.-C. Pain, « Fascinante constante de structure fine : de la numérologie à l'électrodynamique quantique », *Bulletin de l'union des physiciens*, vol. 112, n° 1000, 2018, p. 239-248.
- [27] S. Laporta and E. Remiddi, “The analytical value of the electron ($g - 2$) at order α^3 in QED”, *Phys. Lett. B* **379**, 283-291 (1996).
- [28] M. J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse and J. P. Schreiber, “Pisot and Salem Numbers” (Birkhäuser, Boston, 1992). Voir aussi: Composition de Mathématiques C, Concours d’admission aux Ecoles Normales Supérieures, 2012.
- [29] D. Weihs and R. D. Small, “An exact solution of the motion of two adjacent spheres in axisymmetric potential flow”, *Israel J. Technol.* **13**, 1-6 (1975).

- [30] G. Mison et R. Gauthier, « Les abeilles, le problème des alvéoles », Bulletin de L'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) n° 428, p. 403-408 (1999).
- [31] É. Fourrey, « Curiosités géométriques », chapitre III, « Alvéoles des abeilles », p. 372 (Vuibert, 1907).
- [32] L. F. Tóth, “What the bees know and what they do not know”, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (4), 468-482 (1964).
- [33] B. L. Karihaloo, K. Zhang and J. Wang, « Honeybee combs : how the circular cells transform into rounded hexagons », Journal of the Royal Society. Interface, vol. 10, no 86, 6 septembre 2013.
- [34] J.-P. Delahaye, “La physique a-t-elle besoin des nombres réels”, Pour La Science **506**, 80-85 (2019).
- [35] G. Th. Guilbaud, « Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation », Économie appliquée, **5** (4), p. 501-584 (1952).
- [36] F. J. Dyson, « Birds and frogs in mathematics and physics », *Phys.-Usp.* **53** (8), 825-834 (2010) ; *Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **180** (8), 859-870 (2010).