



HAL
open science

Diagohexagones et suites diagohexagonales

David Pouvreau, Dominique Tournès

► **To cite this version:**

David Pouvreau, Dominique Tournès. Diagohexagones et suites diagohexagonales. *Quadrature*, 2024, 133, pp.38-48. hal-04738964

HAL Id: hal-04738964

<https://hal.science/hal-04738964v1>

Submitted on 16 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Diago-hexagones et suites diago-hexagonales

Par David Pouvreau¹ et Dominique Tournès²

1. Introduction : vocabulaire et position des problèmes

Soit $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un hexagone strictement convexe d'un plan affine \mathbb{P} . Les intersections de ses neuf diagonales qui sont intérieures à \mathcal{P} forment une « constellation » de quinze ou, éventuellement, treize points distincts. Les diagonales « majeures » (A_1A_4) , (A_2A_5) et (A_3A_6) , qui sont sécantes deux à deux en raison de la stricte convexité de \mathcal{P} , se coupent aux sommets d'un triangle (éventuellement réduit à un point) qu'on appellera ici le *triangle diagonal* de \mathcal{P} : $T_1 = (A_1A_4) \cap (A_2A_5)$, $T_2 = (A_2A_5) \cap (A_3A_6)$ et $T_3 = (A_3A_6) \cap (A_1A_4)$. Il y a par ailleurs deux sous-familles d'intersections diagonales intéressantes, de cardinal 6.

Il est d'abord clair, et on l'admettra ici pour réserver de l'espace dans la suite, que la frontière de l'enveloppe convexe de la constellation est l'hexagone strictement convexe \mathfrak{D}_1 de sommets $(D_k^{(1)})_{1 \leq k \leq 6}$ définis (modulo 6) par $D_k^{(1)} = (A_kA_{k+2}) \cap (A_{k+1}A_{k+3})$. C'est-à-dire :

$$D_1^{(1)} = (A_1A_3) \cap (A_2A_4), \quad D_2^{(1)} = (A_2A_4) \cap (A_3A_5), \quad D_3^{(1)} = (A_3A_5) \cap (A_4A_6),$$

$$D_4^{(1)} = (A_4A_6) \cap (A_5A_1), \quad D_5^{(1)} = (A_5A_1) \cap (A_6A_2), \quad D_6^{(1)} = (A_6A_2) \cap (A_1A_3).$$

On dira que \mathfrak{D}_1 est le *diago-hexagone primaire* de \mathcal{P} et que pour tout $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, $D_k^{(1)}$ est le sommet de \mathfrak{D}_1 correspondant à A_k . Et on appellera *suite diago-hexagonale primaire* de \mathcal{P} la suite d'hexagones strictement convexes $(\mathfrak{D}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue par la construction récurrente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_0 = \mathcal{P} \quad (\forall k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket, D_k^{(0)} = A_k) \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \mathfrak{D}_{n+1} = (D_k^{(n+1)})_{1 \leq k \leq 6} \text{ est le diago-hexagone primaire de } \mathfrak{D}_n = (D_k^{(n)})_{1 \leq k \leq 6} \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'hexagone \mathfrak{D}_n sera alors appelé le diago-hexagone primaire d'ordre n de \mathcal{P} .

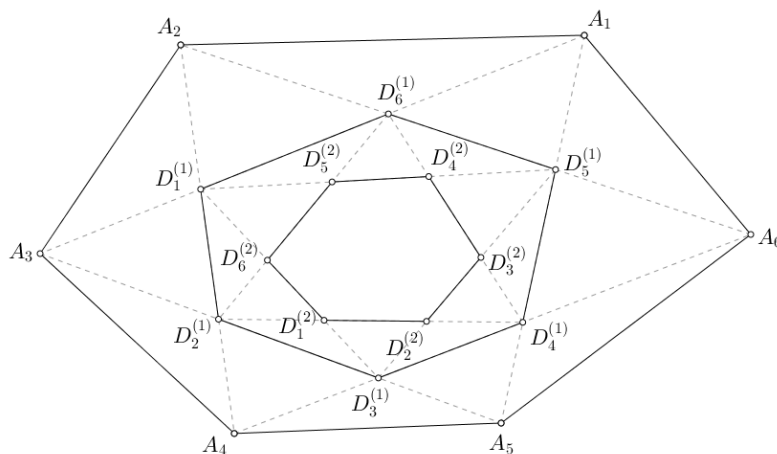


Figure 1 : Trois premiers termes d'une suite diago-hexagonale primaire

Il est de même clair qu'on obtient aussi à partir de l'hexagone \mathcal{P} un hexagone strictement convexe \mathcal{H}_1 de sommets $(H_k^{(1)})_{1 \leq k \leq 6}$ définis (modulo 6) par $H_k^{(1)} = (A_kA_{k+3}) \cap (A_{k+1}A_{k+5})$.

¹ Professeur agrégé de mathématiques en CPGE, Lycée Roland Garros, Le Tampon, La Réunion. Email : pvrddvd@gmail.com

² Professeur de mathématiques à l'Université de La Réunion. Email : dominique.tournes@univ-reunion.fr

C'est-à-dire : $H_1^{(1)} = (A_1A_4) \cap (A_2A_6)$, $H_2^{(1)} = (A_2A_5) \cap (A_3A_1)$, $H_3^{(1)} = (A_3A_6) \cap (A_4A_2)$,
 $H_4^{(1)} = (A_4A_1) \cap (A_5A_3)$, $H_5^{(1)} = (A_5A_2) \cap (A_6A_4)$, $H_6^{(1)} = (A_6A_3) \cap (A_1A_5)$.

On dira ici que \mathcal{H}_1 est le *diago-hexagone secondaire* de \mathcal{P} et que pour tout $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, $H_k^{(1)}$ est le sommet de \mathcal{H}_1 correspondant à A_k . On peut alors définir la *suite diago-hexagonale secondaire* de \mathcal{P} , comme celle des hexagones strictement convexes $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_0 = \mathcal{P} \quad (\forall k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket, H_k^{(0)} = A_k) \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \mathcal{H}_{n+1} = (H_k^{(n+1)})_{1 \leq k \leq 6} \text{ est le diago-hexagone secondaire de } \mathcal{H}_n = (H_k^{(n)})_{1 \leq k \leq 6} \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'hexagone \mathcal{H}_n sera appelé le diago-hexagone secondaire d'ordre n de \mathcal{P} .

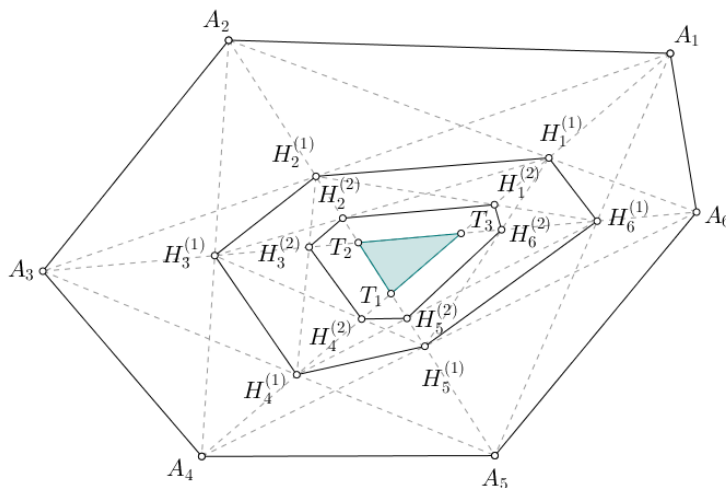


Figure 2 : Trois premiers termes d'une suite diago-hexagonale secondaire et triangle diagonal

Les problèmes posés ici sont, d'une part, celui des propriétés remarquables éventuelles des diago-hexagones et, d'autre part, celui des convergences et des limites des deux types de suite diago-hexagonale. La notion de convergence étant, comme dans l'étude ayant mené à bien la résolution du problème analogue posé pour les pentagones (voir [1], [2] et [3]), entendue au sens de la topologie induite sur \mathbb{P}^6 par toute distance d définie sur \mathbb{P} . Le lecteur est renvoyé ici encore à [4] pour les éléments théoriques de géométrie projective sous-jacents à l'étude qui suit.

2. Représentation canonique de tout hexagone strictement convexe

Soit $A_3A_4A_5A_6$ un carré de centre O . On munit le plan du repère \mathcal{R} centré en O et d'axes parallèles à ses côtés, dans lequel $A_3(1; 1), A_4(-1; 1), A_5(-1; -1)$ et $A_6(1; -1)$. De manière similaire à celle exploitée pour l'étude des pentagones et pour la même raison, il existe pour tout hexagone strictement convexe $\mathcal{P} = B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ une unique homographie τ qui transforme B_k en A_k pour tout $k \in \llbracket 3; 6 \rrbracket$. Notons alors $A_1 = \tau(B_1), A_2 = \tau(B_2)$ et \mathcal{P}' l'hexagone $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Alors τ transforme \mathcal{P} en \mathcal{P}' et il existe un unique quadruplet $(x; y; z; t)$ de réels tel que, dans le repère \mathcal{R} : $A_1(1 + x; y)$ et $A_2(1 + z; t)$, avec les conditions de stricte convexité

$$x > 0, \quad -1 < y < t < 1, \quad x \frac{1-t}{1-y} < z < x \frac{1+t}{1+y}.$$

On dira que \mathcal{P}' , muni du repère \mathcal{R} , est l'*hexagone canonique* associé à \mathcal{P} . Et on appellera *paramètres* de cette représentation dite « canonique » le quadruplet $(x; y; z; t)$ soumis aux conditions précédentes.

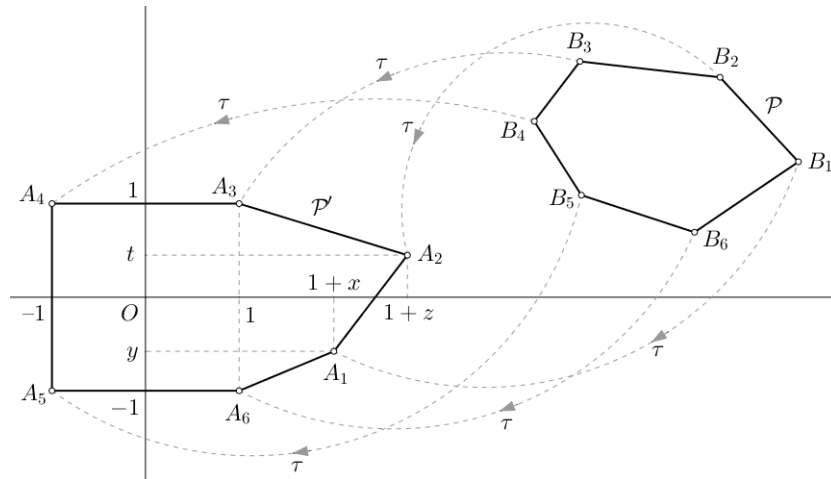


Figure 3 : Représentation canonique de tout hexagone strictement convexe

3. Diago-hexagones primaires et homographies

Dans le cas des pentagones strictement convexes, il a été établi que le premier diago-pentagone est homographique au pentagone initial, mais avec une définition différente des sommets dits « correspondants » ([1] et [3]) ; avec la définition de la correspondance de sommets adoptée ici, on ne détecte l'existence de l'homographie diago-pentagonale qu'avec le diago-pentagone de rang 5. Il s'avère qu'un résultat analogue existe pour les hexagones, permettant donc d'adapter l'approche déployée pour étudier le cas des pentagones :

Théorème 1

Soit $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un hexagone strictement convexe de suite diago-hexagonale primaire associée $(\mathfrak{D}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour tout $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$ et tout $n \in \mathbb{N}$, notons $D_k^{(n)}$ le sommet de \mathfrak{D}_n correspondant à A_k . Alors il existe une unique homographie h telle que $h(A_k) = D_k^{(2)}$ pour tout $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, donc telle que $h(\mathcal{P}) = \mathfrak{D}_2$. Plus généralement $h(\mathfrak{D}_n) = \mathfrak{D}_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On appellera h l'homographie diago-hexagonale de \mathcal{P} .

Démonstration. À l'homographie τ précédemment introduite près, il suffit d'effectuer la démonstration pour un hexagone canonique. On calcule d'abord les coordonnées des sommets de son diago-hexagone primaire \mathfrak{D}_1 , ce qui se fait en principe de manière élémentaire (barycentrique par exemple), mais aussi ici au moyen d'un puissant logiciel de calcul formel (Mathematica) :

$$D_1^{(1)} \left(-\frac{tx - x + yz + 2y - z - 2}{tx - x - yz - 2y + z + 2}; \frac{tx - 2ty + 2t - x - yz + z}{tx - x - yz - 2y + z + 2} \right); D_2^{(1)} \left(-\frac{t + z + 1}{t - z - 3}; -\frac{t + z + 1}{t - z - 3} \right)$$

$$D_3^{(1)}(0; 0); D_4^{(1)} \left(\frac{x - y + 1}{x + y + 3}; -\frac{x - y + 1}{x + y + 3} \right); D_5^{(1)} \left(\frac{tx + 2t + x + yz + z + 2}{tx + 2t + x - yz - z + 2}; -\frac{tx - 2ty + x - yz - 2y - z}{tx + 2t + x - yz - z + 2} \right)$$

$$D_6^{(1)} \left(\frac{tx + 2xz + x - yz + z}{tx + x - yz + z}; \frac{tx + x + yz - z}{tx + x - yz + z} \right)$$

Puis on en déduit de la même manière les coordonnées des sommets de \mathfrak{D}_2 :

$$D_1^{(2)} \left(\frac{tx - x + yz + 2y - z - 2}{tx + 4t - x + yz + 2y - z - 6}; -\frac{tx - 2ty + 2t - x - yz + z}{tx + 4t - x + yz + 2y - z - 6} \right);$$

$$D_2^{(2)} \left(\frac{tx + 2t + x + yz + z + 2}{tx + 2t + x + yz + 4y + z + 6}; -\frac{tx - 2ty + x - yz - 2y - z}{tx + 2t + x + yz + 4y + z + 6} \right);$$

$$D_3^{(2)} \left(\frac{x(tx + 2t + x + yz + z + 2)}{Q_3(x; y; z; t)}; -\frac{x(tx - 2ty + x - yz - 2y - z)}{Q_3(x; y; z; t)} \right)$$

$$\text{où } Q_3(x; y; z; t) = tx^2 + 2txy + 4tx + x^2 - xyz + 2xy - xz + 4x - 2y^2z - 4yz - 2z$$

$$D_4^{(2)} \left(\frac{P_{41}(x; y; z; t)}{Q_4(x; y; z; t)}; \frac{P_{42}(x; y; z; t)}{Q_4(x; y; z; t)} \right)$$

$$\text{où } P_{41}(x; y; z; t) = t^2x^3 + 2t^2x^2 + 2t^2xy + 2t^2x + 2tx^2z - 2txy^2 + 2txyz + 6txz + 2tx - 2ty^2z + 2tz - x^3 - 2x^2yz - 2x^2 - xy^2z^2 - 4xy^2z - 2xy^2 - 6xyz - 2xy + xz^2 + 2xz + 2y^3z - 2yz$$

$$P_{42}(x; y; z; t) = -(t^2x^3 - 2t^2x^2y - 2t^2xy - 2t^2x - 2tx^2yz + 2txy^2z + 2txy^2 - 2txyz - 2tx - 2ty^2z + 2tz - x^3 + 2x^2y + 2x^2z + xy^2z^2 + 2xy^2z + 2xy^2 - 2xyz + 2xy - xz^2 + 2y^3z - 2yz)$$

$$Q_4(x; y; z; t) = t^2x^3 + 2t^2x^2y + 4t^2x^2 + 2t^2xy + 2t^2x - 2tx^2yz - 4txy^2z - 2txy^2 - 6txyz + 2txz + 2tx - 2ty^2z + 2tz - x^3 - 2x^2y + 2x^2z - 4x^2 + xy^2z^2 - 2xy^2 + 2xyz - 2xy - xz^2 + 6xz + 2y^3z^2 + 2y^3z + 2y^2z^2 - 2yz^2 - 2yz - 2z^2$$

$$D_5^{(2)} \left(\frac{P_{51}(x; y; z; t)}{Q_5(x; y; z; t)}; \frac{P_{52}(x; y; z; t)}{Q_5(x; y; z; t)} \right)$$

$$\text{où } P_{51}(x; y; z; t) = 2t^3x + t^2x^2z - 2t^2xy + 4t^2xz - 2t^2yz + 2t^2z - 2txyz - 2txz^2 - 6txz - 2tx + 2ty^2z - 2tz - x^2z + 2xyz^2 + 6xyz + 2xy - 2xz - y^2z^3 - 2y^2z^2 - 2y^2z + 2yz + z^3 + 2z^2$$

$$P_{52}(x; y; z; t) = 2t^3x - t^2x^2z + 2t^2xyz - 2t^2xy - 2t^2xz + 2t^2yz - 2t^2z + 2txyz^2 + 2txyz - 2txz - 2tx - 2ty^2z^2 - 2ty^2z + 2tz^2 + 2tz + x^2z + 2xy - 2xz^2 - y^2z^3 + 2y^2z - 2yz + z^3$$

$$Q_5(x; y; z; t) = 2t^3x^2 + 2t^3x - t^2x^2z - 2t^2x^2 - 4t^2xyz - 2t^2xy - 2t^2yz + 2t^2z - 2tx^2 + 2txyz^2 + 6txyz + 2txz - 2tx + 2ty^2z^2 + 2ty^2z - 2tz^2 - 2tz + x^2z + 2x^2 + 2xyz + 2xy - 2xz^2 - 6xz - y^2z^3 - 4y^2z^2 - 2y^2z + 2yz + z^3 + 4z^2$$

$$D_6^{(2)} \left(\frac{P_{61}(x; y; z; t)}{Q_6(x; y; z; t)}; \frac{P_{62}(x; y; z; t)}{Q_6(x; y; z; t)} \right)$$

$$\text{où } P_{61}(x; y; z; t) = z(tx - x + yz + 2y - z - 2), P_{62}(x; y; z; t) = z(-tx + 2ty - 2t + x + yz - z)$$

$$\text{et } Q_6(x; y; z; t) = 2t^2x - txz - 4tx - 2tyz + 2tz + xz + 2x + yz^2 + 4yz - z^2 - 4z$$

Observons maintenant que la stricte convexité de \mathcal{P} assure l'existence d'une unique homographie h telle que $h(A_k) = D_k^{(2)}$ pour tout $k \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$: pour chacun des deux polygones concernés, les quatre sommets choisis ne sont jamais alignés trois à trois. La connaissance par les formules précédentes des coordonnées des huit points impliqués ici permet, par un calcul similaire à celui exposé pour la détermination d'une matrice d'homographie diago-pentagonale ([3]), c'est-à-dire la résolution d'un système de Cramer à un paramètre et neuf inconnues, d'obtenir la matrice de l'homographie h . Les neuf coefficients m_{ij} (pour $(i; j) \in \llbracket 1; 3 \rrbracket^2$) de cette matrice M_{xyzt} s'avèrent être des fonctions polynomiales de $(x; y; z; t)$, de degré 5 ou 6 selon $(i; j)$, que les auteurs ont là encore obtenues au moyen de Mathematica :

$$m_{11}(x; y; z; t) = 2(1 - t)(y + 1)(t - y)(tx + 2xz + x - yz + z)$$

$$m_{12}(x; y; z; t) = t^3x^3 + 2t^3x^2 - t^2x^3 - t^2x^2yz + t^2x^2z - 2t^2x^2 - 2t^2xyz + 2t^2xz - tx^3 - 2tx^2yz - 2tx^2z - 2tx^2 - txy^2z^2 - 2txy^2z + 2txyz^2 + 3txz^2 + 2txz + x^3 + 3x^2yz + x^2z + 2x^2 - xy^2z^2 - 2xy^2z - 2xyz^2 + 2xyz - xz^2 + y^3z^3 + 2y^3z^2 + y^2z^3 + 2y^2z^2 - yz^3 - 2yz^2 - z^3 - 2z^2$$

$$m_{13}(x; y; z; t) = t^3x^3 + 2t^3x^2 + 2t^3xy + 2t^3x - t^2x^3 + t^2x^2yz + 3t^2x^2z - 2t^2x^2 - 2t^2xy^2 + 2t^2xyz - 2t^2xy + 6t^2xz - 2t^2y^2z + 2t^2z - tx^3 - 2tx^2yz - 2tx^2z - 2tx^2 - txy^2z^2 - 2txy^2z - 2txyz^2 - 8txyz - 2txy - txz^2 - 6txz - 2tx + 2ty^3z + 2ty^2z - 2tyz - 2tz + x^3 + x^2yz - x^2z + 2x^2 + 3xy^2z^2 + 6xy^2z + 2xy^2 + 2xyz^2 + 6xyz + 2xy - xz^2 - 4xz - y^3z^3 - 2y^3z^2 - 2y^3z - y^2z^3 - 2y^2z^2 + yz^3 + 2yz^2 + 2yz + z^3 + 2z^2$$

$$m_{21}(x; y; z; t) = 2(1 - t)(y + 1)(t - y)(tx + x + yz - z)$$

$$m_{22}(x; y; z; t) = -t^3x^3 + 2t^3x^2y + t^2x^3 + 3t^2x^2yz - 2t^2x^2y + t^2x^2z - 4t^2xy^2z + 2t^2xyz + 2t^2xz + tx^3 - 2tx^2yz - 2tx^2ty - 2tx^2z - 3txy^2z^2 - 2txy^2z - 2txyz^2 + txz^2 + 2txz + 2ty^3z^2 + 2ty^2z^2 - 2tyz^2 - 2tz^2 - x^3 - x^2yz + 2x^2y + x^2z + xy^2z^2 + 2xy^2z + 2xyz^2 - 2xyz + xz^2 + y^3z^3 + y^2z^3 - yz^3 - z^3$$

$$m_{23}(x; y; z; t) = -t^3x^3 + 2t^3x^2y + 2t^3xy + 2t^3x + t^2x^3 + t^2x^2yz - 2t^2x^2y - t^2x^2z - 2t^2xy^2 + 2t^2xyz - 2t^2xy - 2t^2xz + 2t^2y^2z - 2t^2z + tx^3 - 2tx^2yz - 2tx^2y - 2tx^2z + txy^2z^2 + 2txy^2z + 2txyz^2 - 2txy + txz^2 - 2t^2xz + 2t^2y^2z - 2t^2z + tx^3 - 2tx^2yz - 2tx^2y - 2tx^2z + txy^2z^2 + 2txy^2z + 2txyz^2 - 2txy + txz^2 - 2txz - 2tx - 2ty^3z^2 - 2ty^3z - 2ty^2z^2 - 2ty^2z + 2tyz^2 + 2tyz + 2tz^2 + 2tz - x^3 + x^2yz + 2x^2y + 3x^2z + xy^2z^2 + 2xy^2z + 2xy^2 - 2xyz^2 - 2xyz - 2xyz^2 - 2xyz + 2xy - 3xz^2 - y^3z^3 + 2y^3z - y^2z^3 + yz^3 - 2yz + z^3$$

$$m_{31}(x; y; z; t) = 2(1-t)(y+1)(t-y)(tx+x-yz+z)$$

$$m_{32}(x; y; z; t) = t^3x^3 + 2t^3x^2 - t^2x^3 - t^2x^2yz + t^2x^2z - 2t^2x^2 - 2t^2xyz + 2t^2xz - tx^3 + 2tx^2yz + 2tx^2z - 2tx^2 - txy^2z^2 - 2txy^2z - 2txyz^2 - txz^2 + 2txz + x^3 - x^2yz - 3x^2z + 2x^2 - xy^2z^2 - 2xy^2z + 2xyz^2 + 2xyz + 3xz^2 + y^3z^3 + 2y^3z^2 + y^2z^3 + 2y^3z^2 + y^2z^3 + 2y^2z^2 - yz^3 - 2yz^2 - z^3 - 2z^2$$

$$m_{33}(x; y; z; t) = t^3x^3 + 4t^3x^2y + 6t^3x^2 + 2t^3xy + 2t^3x - t^2x^3 - 3t^2x^2yz - 4t^2x^2y - t^2x^2z - 6t^2x^2 - 8t^2xy^2z - 2t^2xy^2 - 10t^2xyz - 2t^2xy + 2t^2xz - 2t^2y^2z + 2t^2z - tx^3 + 2tx^2yz - 4tx^2y + 2tx^2z - 6tx^2 + 3txy^2z^2 + 10txy^2z + 2txyz^2 + 16txyz - 2txy - txz^2 + 6txz - 2tx + 4ty^3z^2 + 2ty^3z + 4ty^2z^2 + 2ty^2z - 4tyz^2 - 2tyz - 4tz^2 - 2tz + x^3 + x^2yz + 4x^2y - x^2z + 6x^2 - xy^2z^2 + 2xy^2z + 2xy^2 - 2xyz^2 - 6xyz + 2xy - xz^2 - 12xz - y^3z^3 - 6y^3z^2 - 2y^3z - y^2z^3 - 6y^2z^2 + yz^3 + 6yz^2 + 2yz + z^3 + 6z^2$$

Une fois obtenue M_{xyzt} , on vérifie les deux égalités suivantes en coordonnées homogènes :

$$M_{xyzt} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P_{51}(x; y; z; t)}{Q_5(x; y; z; t)} \\ \frac{P_{52}(x; y; z; t)}{Q_5(x; y; z; t)} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{xyzt} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P_{61}(x; y; z; t)}{Q_6(x; y; z; t)} \\ \frac{P_{62}(x; y; z; t)}{Q_6(x; y; z; t)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Celles-ci établissent respectivement que $h(A_5) = D_5^{(2)}$ et $h(A_6) = D_6^{(2)}$, ce qui montre que h transforme bien \mathcal{P} en \mathcal{D}_2 .

On peut ensuite vérifier par six calculs matriciels analogues aux précédents les six égalités $h(D_k^{(1)}) = D_k^{(3)}$ pour $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, qui montrent que h transforme \mathcal{D}_1 en \mathcal{D}_3 .

La transformation par h de \mathcal{D}_n en \mathcal{D}_{n+2} pour tout $n \in \mathbb{N}$ découle enfin sans difficulté d'un raisonnement par récurrence utilisant les deux résultats ainsi obtenus.

Remarquons, ce qui va avoir son importance dans ce qui suit, qu'une illustration tangible du résultat abstrait formulé avec le théorème 1 est le fait qu'en cas d'inscriptibilité de \mathcal{P} dans une conique, l'action de l'homographie h transfère ce même type d'inscriptibilité à tous les diago-hexagones d'ordre pair, ce qu'elle ne fait par contre pas pour ceux d'ordre impair.

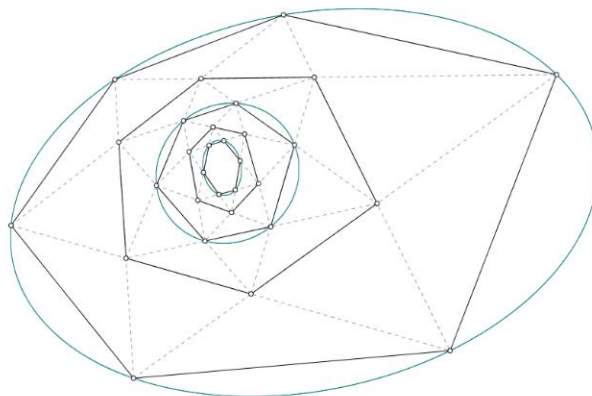


Figure 4 : Inscriptibilité de chaque diago-hexagone primaire d'ordre pair d'un hexagone inscriptible

L'inscriptibilité dans une conique des diago-hexagones primaires d'ordre impair est en fait une exception. Car une condition aussi contraignante qu'esthétique s'impose au premier d'entre eux :

Théorème 2

Les diagonales majeures d'un hexagone strictement convexe sont concourantes si, et seulement si son diago-hexagone primaire d'ordre 1 est inscriptible dans une conique.

Démonstration. Les notations de géométrie vectorielle utilisées dans ce qui suit sont celles en usage en géométrie projective analytique ; un rappel de leurs justifications est fourni en annexe. Il va s'agir ici d'utiliser le fameux théorème de Pascal relatif aux hexagones pour rendre le problème accessible à un calcul algébrique multilinéaire relativement simple dans son principe. Ce théorème permet en effet de traduire l'inscriptibilité d'un hexagone convexe dans une conique par l'alignement des points d'intersection de ses côtés opposés, que l'on sait caractériser par une succession de produits vectoriels dans \mathbb{R}^3 et, en définitive, par des calculs de déterminants – tous les calculs ayant ici encore été réalisés au moyen de l'assistance de Mathematica.

Il suffit d'établir le résultat pour un hexagone canonique $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ de paramètres $(x; y; z; t)$: ce cas est suffisant à l'action de l'homographie τ près. Ses sommets ont les coordonnées homogènes suivantes :

$$A_1 \begin{pmatrix} 1+x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}; A_2 \begin{pmatrix} 1+z \\ t \\ 1 \end{pmatrix}; A_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; A_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; A_5 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; A_6 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les sommets du diago-hexagone primaire \mathcal{D}_1 de \mathcal{P} se calculent alors par les successions de produits vectoriels :

$$D_1^{(1)} = (A_1 \wedge A_3) \wedge (A_2 \wedge A_4) ; D_2^{(1)} = (A_2 \wedge A_4) \wedge (A_3 \wedge A_5) ; D_3^{(1)} = (A_3 \wedge A_5) \wedge (A_4 \wedge A_6) ;$$

$$D_4^{(1)} = (A_4 \wedge A_6) \wedge (A_5 \wedge A_1) ; D_5^{(1)} = (A_5 \wedge A_1) \wedge (A_6 \wedge A_2) ; D_6^{(1)} = (A_6 \wedge A_2) \wedge (A_1 \wedge A_3).$$

On peut ensuite calculer, en vue de caractériser le concours des diagonales majeures par la nullité du produit mixte :

$$[A_1 \wedge A_4 ; A_2 \wedge A_5 ; A_3 \wedge A_6] = -4\varphi(x; y; z; t), \text{ où } \varphi(x; y; z; t) = 2t - x + tx - 2y - z - xz - yz$$

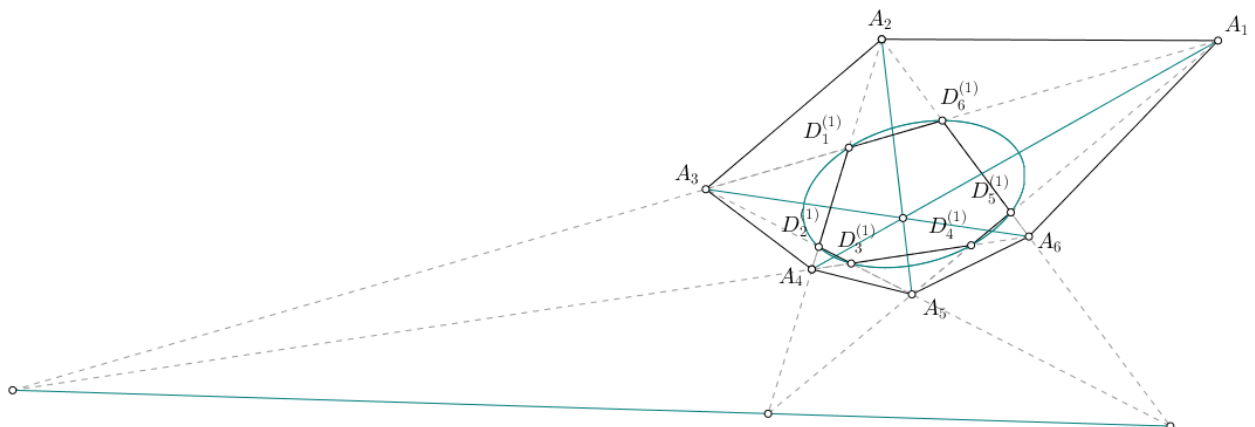


Figure 5 : Illustration à homographie près de la preuve du théorème 2 au moyen du théorème de Pascal

On peut enfin calculer une autre succession de produits vectoriels puis un autre produit mixte, pour caractériser l'inscriptibilité dans une conique du diago-hexagone primaire d'ordre 1 de \mathcal{P} par l'alignement des points d'intersection de ses côtés opposés, et donc par la nullité de ce produit :

$$\left[\left(D_1^{(1)} \wedge D_2^{(1)} \right) \wedge \left(D_4^{(1)} \wedge D_5^{(1)} \right) ; \left(D_2^{(1)} \wedge D_3^{(1)} \right) \wedge \left(D_5^{(1)} \wedge D_6^{(1)} \right) ; \left(D_3^{(1)} \wedge D_4^{(1)} \right) \wedge \left(D_6^{(1)} \wedge D_1^{(1)} \right) \right]$$

$$= 65536 (1 - t) (1 + x - y)^4 (1 + y) (1 + t + z)^4 (x + tx - z - yz) \varphi(x; y; z; t)$$

En conséquence des conditions de stricte convexité de \mathcal{P} , tous les facteurs du produit précédent sont non nuls, à l'exception en général du dernier. L'équivalence annoncée découle de ces deux calculs et du théorème de Pascal.

Comme dans l'étude analogue des suites diago-pentagonales ([3]), le rôle majeur de l'homographie diago-hexagonale h de \mathcal{P} pour l'étude de la convergence de sa suite diago-hexagonale primaire se manifeste par deux résultats préliminaires essentiels. Le premier tient au fait que h étant continue sur cette partie compacte et convexe du plan qu'est l'enveloppe convexe de \mathcal{P} , il résulte du théorème du point fixe de Brouwer que :

Proposition 1

L'homographie diago-hexagonale h de tout hexagone strictement convexe \mathcal{P} a au moins un point fixe intérieur à \mathcal{P} .

Quant au second résultat, il découle d'arguments classiques de continuité et d'unicité de la limite :

Proposition 2

Soit h l'homographie diago-hexagonale d'un hexagone $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ strictement convexe. Si l'une des suites de points $(D_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (h^n(A_k))_{n \in \mathbb{N}}$ pour $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$ converge, alors sa limite est un point fixe de h intérieur à \mathcal{P} .

En conséquence logique, l'étude de la suite diago-hexagonale primaire d'un hexagone va dans une large mesure s'articuler autour des points fixes de son homographie diago-hexagonale, ce qui revient algébriquement à déterminer les éléments propres de l'une de ses matrices et leur positionnement. Compte tenu des difficultés calculatoires rédhibitoires à cet égard, une approche topologique va s'avérer nécessaire afin de contourner ce chemin algébrique qui avait abouti à un succès dans l'étude des suites diago-pentagonales, mais qui se révèle ici impraticable.

4. Suite diago-hexagonale primaire

Théorème 3

L'homographie diago-hexagonale de tout hexagone strictement convexe \mathcal{P} a un unique point fixe Ω intérieur à \mathcal{P} et la suite diago-hexagonale primaire de \mathcal{P} converge vers Ω .

On appellera Ω le *centre diagonal* de \mathcal{P} .

Démonstration. Considérons l'hexagone strictement convexe $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ et notons h son homographie diago-hexagonale. Nous savons d'après la proposition 1 que h admet au moins un point fixe intérieur à \mathcal{P} , point fixe que nous noterons Ω . La suite $\left((D_1^{(n)}; D_2^{(n)}; D_4^{(n)}; D_5^{(n)}; D_6^{(n)}) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments d'une partie compacte (car fermée et bornée) de \mathbb{P}^6 . On peut donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, en extraire une suite qui converge vers un élément $(L_1; L_2; L_3; L_4; L_5; L_6)$ de \mathbb{P}^6 . Notons $\left((D_1^{(\psi(n))}; D_2^{(\psi(n))}; D_3^{(\psi(n))}; D_4^{(\psi(n))}; D_5^{(\psi(n))}; D_6^{(\psi(n))}) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ cette suite extraite, où $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante. On obtient ainsi une suite extraite $(\mathfrak{D}_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite

diago-hexagonale $(\mathcal{D}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{P} qui converge vers un polygone $Q = L_1L_2L_3L_4L_5L_6$, lequel est la frontière d'une partie convexe et compacte de \mathbb{P} . De plus, le point Ω étant inclus dans l'enveloppe convexe de tous les diago-hexagones, il appartient également à celle de Q . Par ailleurs, la suite $\left((D_1^{(\psi(n)+2)}; D_2^{(\psi(n)+2)}; D_3^{(\psi(n)+2)}; D_4^{(\psi(n)+2)}; D_5^{(\psi(n)+2)}; D_6^{(\psi(n)+2)}) \right)_{n \in \mathbb{N}}$, qui est égale à $\left((h(D_1^{(\psi(n))}); h(D_2^{(\psi(n))}); h(D_3^{(\psi(n))}); h(D_4^{(\psi(n))}); h(D_5^{(\psi(n))}); h(D_6^{(\psi(n))})) \right)_{n \in \mathbb{N}}$, converge, en raison de la continuité de h , vers l'élément $(h(L_1); h(L_2); h(L_3); h(L_4); h(L_5); h(L_6))$ de \mathbb{P}^6 . La suite $(\mathcal{D}_{\psi(n)+2})_{n \in \mathbb{N}}$ converge ainsi vers le polygone $h(Q) = h(L_1)h(L_2)h(L_3)h(L_4)h(L_5)h(L_6)$. L'enveloppe convexe de $\mathcal{D}_{\psi(n)+2}$ étant (du fait de la stricte croissance de ψ) incluse dans celle de $\mathcal{D}_{\psi(n)+1}$, qui est elle-même incluse dans celle de $\mathcal{D}_{\psi(n)}$, il vient que $h(Q) = Q$.

Plaçons-nous dans l'hypothèse où les points $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$ ne sont pas confondus. Le polygone Q a alors entre deux et six sommets. Supposons que l'un des points L_k , par exemple L_1 , soit tout seul à l'un des sommets de ce polygone. Introduisons une droite Δ séparant strictement le point L_1 des autres (figure 6). Il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, le point $D_1^{(\psi(n))}$ est dans le demi-plan ouvert de frontière Δ contenant L_1 , et les autres points $D_k^{(\psi(n))}$ dans l'autre demi-plan ouvert. Tous les diago-hexagones suivants sont alors dans le demi-plan ouvert ne contenant pas L_1 , et en particulier le point $D_1^{(\psi(n+1))}$, en contradiction avec la définition de n_0 .

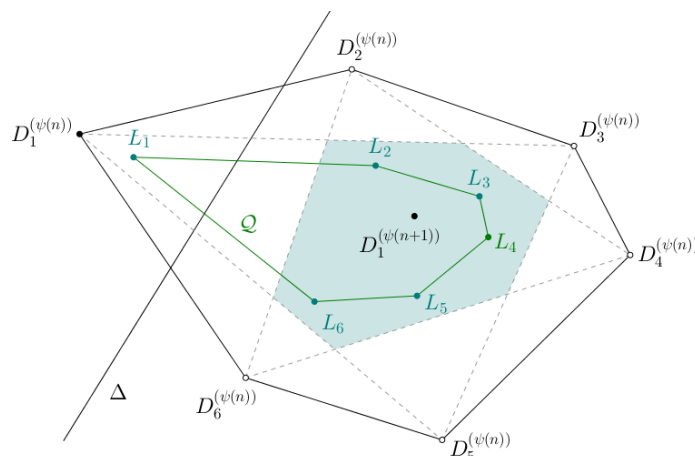


Figure 6 : Impossibilité pour un point L_k d'être seul à l'un des sommets de Q

Aucun point L_k ne pouvant être tout seul à l'un des sommets de Q , les seules possibilités sont que Q soit un triangle d'intérieur non vide ayant deux des points L_k à chacun de ses sommets, ou un segment non réduit à un point ayant au moins deux des points L_k à chacune de ses extrémités.

Étudions d'abord le cas où Q est un triangle. À permutation près, on peut supposer que ses sommets sont $L_1 = L_2, L_3 = L_4$ et $L_5 = L_6$ (figure 7). Comme h transforme un sommet d'un triangle en un sommet de son triangle image, il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1; 3; 5\}$ telle que $h(L_1) = L_{\sigma(1)}, h(L_3) = L_{\sigma(3)}$ et $h(L_5) = L_{\sigma(5)}$.

Si σ est une permutation circulaire, d'ordre 3, on a donc $h^3(L_1) = L_1, h^3(L_3) = L_3$ et $h^3(L_5) = L_5$. Or, on a aussi $h(\Omega) = \Omega$, d'où $h^3(\Omega) = \Omega$, et on sait que Ω appartient à l'enveloppe convexe de Q . Si Ω était distinct de L_1, L_3 et L_5 , l'homographie h^3 aurait quatre points fixes distincts, dont trois au moins ne sont pas alignés. Comme elle transforme \mathcal{P} en son diago-hexagone primaire \mathcal{D}_6 , qui est intérieur à \mathcal{P} , h^3 est distincte de l'identité de \mathbb{P} . La classification des homographies d'un plan projectif réel en fonction de leurs points fixes ([4], p. 38) permet alors d'en déduire que h^3 admet une droite de points fixes passant par trois des quatre points

précédents. Mais cette droite couperait \mathcal{P} en deux points fixes de h^3 , ce qui est impossible pour la même raison que h^3 transforme \mathcal{P} en \mathcal{D}_6 , intérieur à \mathcal{P} . On a donc, par exemple, $\Omega = L_1$. En résulte alors la contradiction $L_1 = \Omega = h(\Omega) = h(L_1) = L_{\sigma(1)} \neq L_1$, puisque σ est supposée être une permutation circulaire.

Puisque σ ne peut pas être une permutation circulaire, il existe au moins un élément de $\{1; 3; 5\}$ fixé par σ . Supposons, par exemple, que $h(L_1) = L_1$ (les points L_3 et L_5 sont alors soit tous deux fixés par h , soit permutés par h). Soit ε un réel strictement positif. Considérons des boules ouvertes B_1, B_3 et B_5 , de centres respectifs L_1, L_3 et L_5 , et de rayon ε choisi assez petit pour que la boule B_1 soit disjointe de l'enveloppe convexe \mathcal{B} des boules B_3 et B_5 .

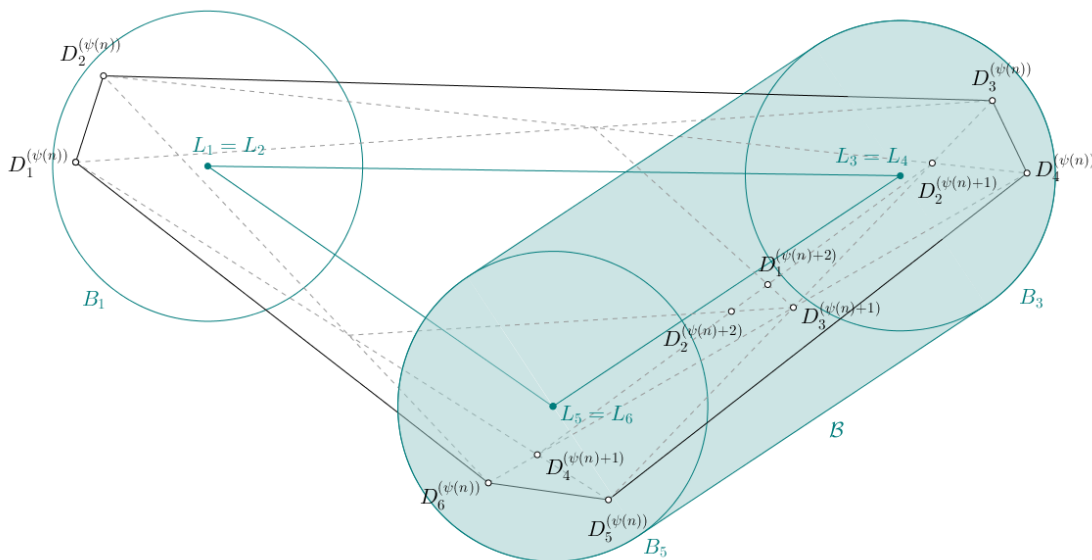


Figure 7 : Cas où Q est un triangle

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_1^{(\psi(n))} = \lim_{n \rightarrow +\infty} D_2^{(\psi(n))} = \lim_{n \rightarrow +\infty} D_1^{(\psi(n)+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} D_2^{(\psi(n)+2)} = L_1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_3^{(\psi(n))} = \lim_{n \rightarrow +\infty} D_4^{(\psi(n))} = L_3 \text{ (ou } L_5) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} D_5^{(\psi(n))} = \lim_{n \rightarrow +\infty} D_6^{(\psi(n))} = L_5 \text{ (ou } L_3)$$

Il existe donc un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, les points $D_1^{(\psi(n))}, D_2^{(\psi(n))}, D_1^{(\psi(n)+2)}$ et $D_2^{(\psi(n)+2)}$ sont dans B_1 , tandis que $D_3^{(\psi(n))}, D_4^{(\psi(n))}, D_5^{(\psi(n))}$ et $D_6^{(\psi(n))}$ sont dans \mathcal{B} (les deux premiers sont dans B_3 et les deux derniers dans B_5 , ou le contraire). En raison de la convexité de \mathcal{B} et du mode de construction des diago-hexagones, les segments $[D_3^{(\psi(n))} D_5^{(\psi(n))}]$ et $[D_4^{(\psi(n))} D_6^{(\psi(n))}]$ sont inclus dans \mathcal{B} , donc aussi le segment $[D_2^{(\psi(n)+1)} D_4^{(\psi(n)+1)}]$ et, finalement, les points $D_1^{(\psi(n)+2)}$ et $D_2^{(\psi(n)+2)}$ sont inclus dans \mathcal{B} , d'où une contradiction puisque, par hypothèse, ces points sont dans B_1 , qui est disjointe de \mathcal{B} . En résulte que Q ne peut pas être un triangle.

Supposons maintenant que le polygone $Q = L_1 L_2 L_3 L_4 L_5 L_6$ soit un segment non réduit à un point, avec au moins deux points L_k confondus à chacune de ses extrémités. À une permutation près, on peut supposer que $L_1 = L_2$ à l'une des extrémités, et $L_j = L_{j+1}$ à l'autre extrémité, avec $L_1 \neq L_j$. L'homographie transformant une extrémité du segment en une autre, cela laisse deux possibilités : soit $h(L_1) = L_1$ et $h(L_j) = L_j$, soit $h(L_1) = L_j$ et $h(L_j) = L_1$.

Dans le cas où $h(L_1) = L_j$ et $h(L_j) = L_1$, il vient $h^2(L_1) = L_1$ et $h^2(L_j) = L_j$. On a également $h(\Omega) = \Omega$, d'où $h^2(\Omega) = \Omega$, et on sait que Ω appartient au segment $[L_1 L_j]$. Si Ω était distinct de L_1 et de L_j , l'homographie h^2 aurait trois points fixes distincts et alignés, de sorte qu'en vertu d'une

propriété classique des homographies ([4], p. 39), la droite (L_1L_j) serait une droite de points fixes de h^2 . Elle couperait alors \mathcal{P} en deux points fixes de h^2 , ce qui est impossible car h^2 transforme \mathcal{P} en son diago-hexagone primaire \mathcal{D}_4 , intérieur à \mathcal{P} . Le point Ω est donc confondu avec l'un des points L_1 et L_j , par exemple avec L_1 . D'où la contradiction que $L_1 = \Omega = h(\Omega) = h(L_1) = L_j \neq L_1$.

Lorsque $h(L_1) = L_1$ et $h(L_j) = L_j$, raisonnons pour fixer les idées dans le cas où $j = 4$ (les autres cas se traiteraient de manière tout à fait analogue). Étant donné un réel ε strictement positif, considérons des boules disjointes B_1 et B_4 de centres respectifs L_1 et L_4 , et de rayon ε (figure 8). Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_1^{(\psi(n))} = \lim_{n \rightarrow +\infty} D_2^{(\psi(n))} = \lim_{n \rightarrow +\infty} D_1^{(\psi(n)+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} D_2^{(\psi(n)+2)} = L_1$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_4^{(\psi(n))} = \lim_{n \rightarrow +\infty} D_5^{(\psi(n))} = \lim_{n \rightarrow +\infty} D_4^{(\psi(n)+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} D_5^{(\psi(n)+2)} = L_4$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, les points $D_1^{(\psi(n))}, D_2^{(\psi(n))}, D_1^{(\psi(n)+2)}, D_2^{(\psi(n)+2)}$ sont dans B_1 , tandis que les points $D_4^{(\psi(n))}, D_5^{(\psi(n))}, D_4^{(\psi(n)+2)}, D_5^{(\psi(n)+2)}$ sont dans B_4 . Le point $D_6^{(\psi(n)+1)}$ est nécessairement dans B_1 car sinon, les diago-hexagones suivants seraient à l'extérieur de la boule B_1 et, en particulier, le point $D_1^{(\psi(n+1))}$ serait en dehors de B_1 , contrairement à l'hypothèse. De par la construction des diago-hexagones, le pentagone $D_6^{(\psi(n)+1)}D_5^{(\psi(n)+2)}D_1^{(\psi(n)+2)}D_2^{(\psi(n)+2)}D_4^{(\psi(n)+2)}$ doit être convexe, ce qui est impossible, car $D_6^{(\psi(n)+1)}, D_1^{(\psi(n)+2)}$ et $D_2^{(\psi(n)+2)}$ sont dans B_1 , tandis que $D_5^{(\psi(n)+2)}$ et $D_4^{(\psi(n)+2)}$ sont dans B_4 . En fin de compte, les points $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$ ne peuvent être que confondus.

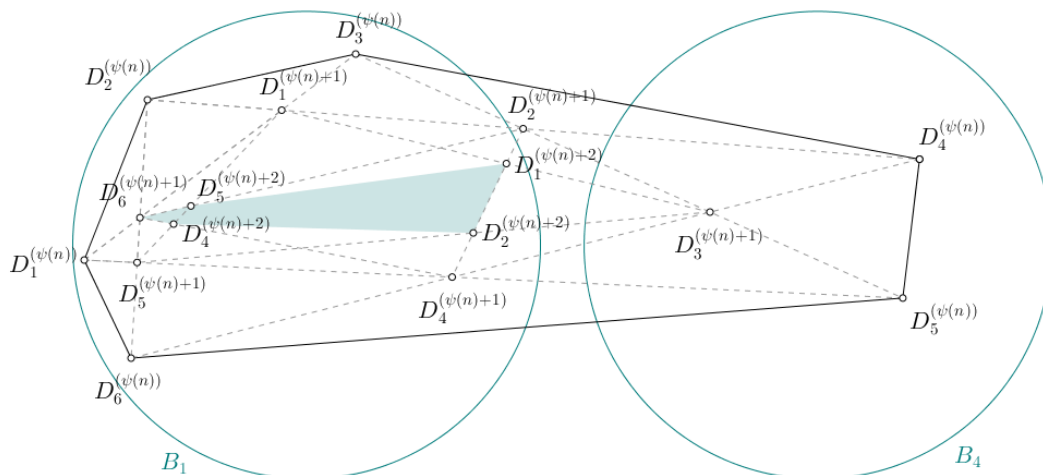


Figure 8 : Cas où Q est un segment

Il est ainsi montré que la suite extraite $(\mathcal{D}_{\psi(n)})$ converge vers un point L . Il reste à observer que si on suppose que h a deux points fixes Ω_1 et Ω_2 intérieurs à \mathcal{P} , alors du fait de la contrainte pour ces points d'être intérieurs à tous les hexagones de la suite $(\mathcal{D}_{\psi(n)})$, le segment $[\Omega_1\Omega_2]$ est nécessairement inclus dans la limite de cette suite, qu'on sait désormais être le point L . On en déduit que $\Omega_1 = \Omega_2 = L$, d'où l'unicité du point Ω de la proposition 1.

Il suffit pour achever la démonstration de considérer la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des diamètres des enveloppes convexes des termes de la suite (\mathcal{D}_n) . C'est une suite réelle strictement décroissante et positive, donc convergente. Comme sa suite extraite $(\delta_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 d'après ce qui précède, on en déduit que $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge elle-même vers 0. On peut alors déduire la conclusion annoncée du théorème dit des « fermés emboîtés », qui s'applique ici à la suite des enveloppes convexes des termes de la suite diago-hexagonale : la suite (\mathcal{D}_n) converge vers Ω .

5. Diago-hexagones secondaires et suite diago-hexagonale secondaire

Se pose naturellement la question de savoir si les diago-hexagones secondaires ont des propriétés similaires à celles mises en évidence pour les diago-hexagones primaires. La recherche d'inscriptibilité dans des coniques (indice de potentielles transformations homographiques) révèle d'abord que tous les diago-hexagones secondaires satisfont une propriété de transfert d'inscriptibilité que seuls leurs analogues primaires de rang pair satisfont, comme vu au 3. :

Théorème 4

Si un hexagone strictement convexe est inscrit dans une conique, alors chacun de ses diago-hexagones secondaires est inscrit dans une conique.

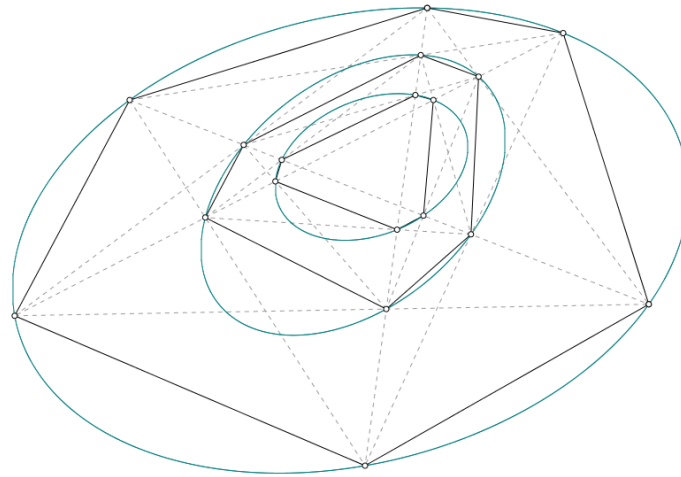


Figure 9 : Inscriptibilité de chaque diago-hexagone secondaire d'un hexagone inscrit

Démonstration. Comme dans la preuve du théorème 2, identifions chacun des sommets de $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ à celui d'un hexagone canonique de paramètres $(x; y; z; t)$: ce cas suffit à l'action de l'homographie τ près. Au moyen des coordonnées homogènes des sommets de \mathcal{P} déjà précisées plus haut, on obtient les sommets du diago-hexagone secondaire d'ordre 1 de \mathcal{P} par :

$$H_1^{(1)} = (A_1 \wedge A_4) \wedge (A_2 \wedge A_6) ; H_2^{(1)} = (A_2 \wedge A_5) \wedge (A_3 \wedge A_1) ; H_3^{(1)} = (A_3 \wedge A_6) \wedge (A_4 \wedge A_2) ;$$

$$H_4^{(1)} = (A_4 \wedge A_1) \wedge (A_5 \wedge A_3) ; H_5^{(1)} = (A_5 \wedge A_2) \wedge (A_6 \wedge A_4) ; H_6^{(1)} = (A_6 \wedge A_3) \wedge (A_1 \wedge A_5).$$

Les points d'intersection, éventuellement à l'infini, des côtés opposés de \mathcal{P} , sont déterminés par $R_1 = (A_1 \wedge A_2) \wedge (A_4 \wedge A_5)$, $R_2 = (A_2 \wedge A_3) \wedge (A_5 \wedge A_6)$ et $R_3 = (A_3 \wedge A_4) \wedge (A_6 \wedge A_1)$.

Le calcul au moyen de Mathematica de tous ces produits vectoriels successifs permet ensuite celui du produit mixte $[R_1; R_2; R_3] = 16 (2x - 2t^2x + x^2 - t^2x^2 - 2z + 2y^2z - z^2 + y^2z^2)$. D'après le théorème de Pascal, l'inscriptibilité de \mathcal{P} dans une conique est donc équivalente à

$$2x - 2t^2x + x^2 - t^2x^2 - 2z + 2y^2z - z^2 + y^2z^2 = 0.$$

Par ailleurs, les points d'intersection, éventuellement à l'infini, des côtés opposés du diago-hexagone secondaire \mathcal{H}_1 se calculent par $S_1 = (H_1^{(1)} \wedge H_2^{(1)}) \wedge (H_4^{(1)} \wedge H_5^{(1)})$, $S_2 = (H_2^{(1)} \wedge H_3^{(1)}) \wedge (H_5^{(1)} \wedge H_6^{(1)})$ et $S_3 = (H_3^{(1)} \wedge H_4^{(1)}) \wedge (H_6^{(1)} \wedge H_1^{(1)})$. Ce qui permet ensuite d'obtenir le produit mixte :

$$[S_1; S_2; S_3] = 65536 (2x - 2t^2x + x^2 - t^2x^2 - 2z + 2y^2z - z^2 + y^2z^2) F(x; y; z; t),$$

où

$$F(x; y; z; t) = (1 + t + 2x - y - ty + xz)(1 + t - y - ty + 2z + xz)(2t + x + tx - 2y + z + xz - yz) \\ (-4tx + 4t^3x + 2x^2 - 4tx^2 - 2t^2x^2 + 4t^3x^2 + x^3 - tx^3 - t^2x^3 + t^3x^3 + 4xy - 4t^2xy + 2x^2y - 2t^2x^2y \\ - 4tz - 4xz - 10txz - 2t^2xz - x^2z - 4tx^2z - 3t^2x^2z + x^3z - t^2x^3z + 4yz + 10xyz + 8txyz - 2t^2xyz \\ + 5x^2yz + 4tx^2yz - t^2x^2yz + 4ty^2z - 2xy^2z + 2txy^2z - 4y^3z + 2z^2 - 2tz^2 - xz^2 - 5txz^2 - 2x^2z^2 \\ - 2tx^2z^2 + 4yz^2 + 4xyz^2 + 4txyz^2 + 2x^2yz^2 + 2tx^2yz^2 - 2y^2z^2 + 2ty^2z^2 - 3xy^2z^2 + txy^2z^2 - 4y^3z^2 \\ + z^3 + xz^3 + yz^3 - y^2z^3 - xy^2z^3 - y^3z^3)$$

On en déduit l'identité $[S_1; S_2; S_3] = 4096 F(x; y; z; t) [R_1; R_2; R_3]$, qui met en évidence *via* le théorème de Pascal le fait que l'inscriptibilité de \mathcal{P} dans une conique ($[R_1; R_2; R_3] = 0$) implique celle de \mathcal{H}_1 ($[S_1; S_2; S_3] = 0$). La formulation du théorème s'en déduit au moyen d'une récurrence immédiate, par construction même de la suite.

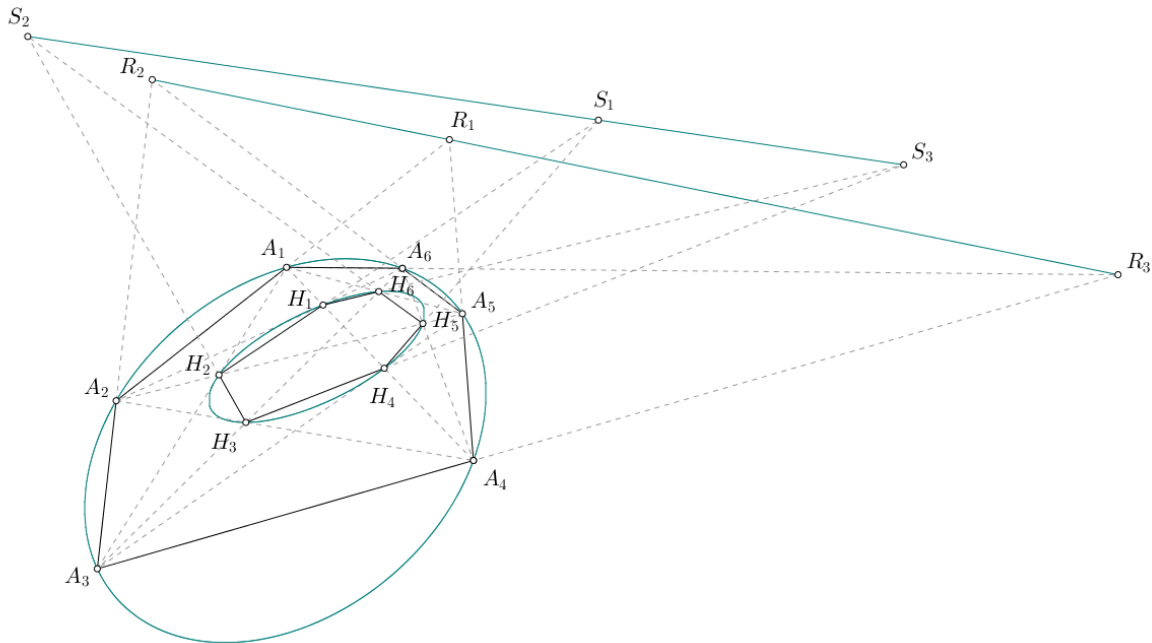


Figure 10 : Illustration à homographie près de la preuve du théorème 4 au moyen du théorème de Pascal

En dépit du théorème 4, toutes les recherches d'une éventuelle homographie transformant systématiquement l'hexagone initial en l'un quelconque de ses diago-hexagones secondaires semblent vaines. L'observation de la figure 2 révèle toutefois un fait remarquable :

Proposition 3

Soit $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un hexagone strictement convexe de suite diago-hexagonale secondaire associée $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $H_k^{(n)}$ désignant le sommet de \mathcal{H}_n correspondant à A_k pour tout $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$ et tout $n \in \mathbb{N}$, les éléments de chacune des six suites de points $(H_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ sont alignés sur l'une des trois diagonales majeures de \mathcal{P} . Plus précisément :

$$\forall k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket, \forall n \in \mathbb{N}, H_k^{(n)} \in (A_kA_{k+3}) \quad (\text{avec } k \text{ modulo } 6)$$

Démonstration. Ce résultat découle du fait que par définition de \mathcal{H}_1 , chaque diagonale majeure de \mathcal{P} est aussi une diagonale majeure de \mathcal{H}_1 . Il suffit ensuite de généraliser par récurrence.

Cette observation inaugure la solution du problème de la convergence et de la limite de toute suite diago-hexagonale secondaire, avec un théorème qu'illustre déjà la figure 2 :

Théorème 5

La suite diago-hexagonale secondaire de tout hexagone strictement convexe \mathcal{P} converge vers le triangle diagonal de \mathcal{P} .

Démonstration. Notons $\alpha_1^{(n)}$ les réels tels que $\overrightarrow{A_1 H_1^{(n)}} = \alpha_1^{(n)} \overrightarrow{A_1 T_1}$. La stricte convexité de tous les hexagones de la suite diago-pentagonale secondaire $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ implique que $\alpha_1^{(n)} \in]0; 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le strict emboîtement de ces hexagones implique que la suite $(\alpha_1^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. Elle converge donc vers un réel $\beta_1 \leq 1$. De sorte que $(H_1^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le point L_1 de $[A_1 T_1]$ tel que $\overrightarrow{A_1 L_1} = \beta_1 \overrightarrow{A_1 T_1}$. De même, $(H_2^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point L_2 de $[A_2 T_1]$, $(H_3^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point L_3 de $[A_3 T_3]$, $(H_4^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point L_4 de $[A_4 T_3]$, $(H_5^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point L_5 de $[A_5 T_2]$ et $(H_6^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point L_6 de $[A_6 T_2]$. La suite diago-hexagonale $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers le polygone limite $L_1 L_2 L_3 L_4 L_5 L_6$, qui a entre un et six sommets (étant entendu qu'on supprime l'un des sommets de la liste s'il est confondu avec le suivant), qui est lui-même convexe et qui contient le triangle diagonal $T_1 T_2 T_3$ (lui-même éventuellement réduit à un point).

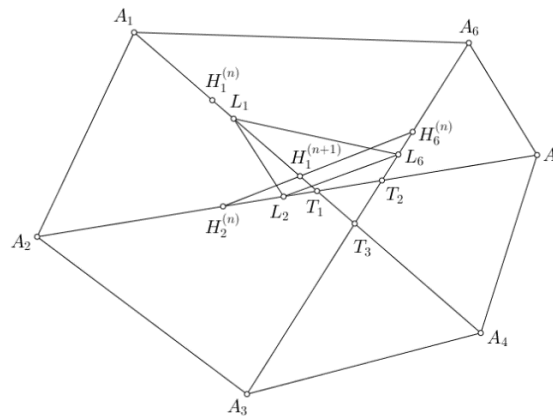


Figure 11 : Illustration de la preuve du théorème 5

Supposons maintenant que $\beta_1 < 1$, donc que $L_1 \neq T_1$ (voir la figure 11). Dans ce cas, on a toujours $L_2 \neq L_1$ (que L_2 soit égal ou non à T_1) et $L_6 \neq L_1$ (que L_6 soit égal ou non à T_2). Comme la suite de couples $(H_2^{(n)}; H_6^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le couple $(L_2; L_6)$, il existe un entier n tel que la droite $(H_2^{(n)} H_6^{(n)})$ coupe les segments $[L_1 L_2]$ et $[L_1 L_6]$ en des points différents de L_1 , et donc aussi la diagonale majeure $(A_1 A_4)$, en un point $H_1^{(n+1)}$ différent de L_1 , et appartenant au segment $[L_1 T_1]$ de par la convexité du polygone $L_1 L_2 L_3 L_4 L_5 L_6$. On en déduit que $\alpha_1^{(n+1)} > \beta_1$, qui contredit la définition de β_1 . Par l'absurde, on a donc $L_1 = T_1$. On obtient de même les cinq autres égalités $L_2 = T_1, L_3 = T_3, L_4 = T_3, L_5 = T_2$ et $L_6 = T_2$.

6. Conclusion : quid des diago-polygones en général ?

Inévitable est la question de savoir si l'on peut généraliser à tout entier $p \geq 7$ et pour tout p -gone strictement convexe $\mathcal{P} = A_1 A_2 \dots A_p$ les résultats analogues obtenus pour les pentagones et les hexagones concernant leurs suites diago-polygonales primaires, ainsi que ceux, spécifiques, obtenus ici au sujet des deux types de diago-hexagones. Comme observé dans [3], on peut toujours définir une suite diago-polygonale primaire au moyen des intersections, intérieures à \mathcal{P} , des p segments diagonaux $[A_j A_{j+2}]$ (avec j modulo p). Remarquons qu'on peut aussi, puisque chacun

de ces segments contient nécessairement exactement $p - 5$ points d'intersections diagonales distincts, définir au moins $p - 5$ suites diagopolygones secondaires distinctes de \mathcal{P} si $p \geq 6$.

Peut-on alors énoncer pour tous les types de diagopolygones de \mathcal{P} des critères et propriétés similaires à ceux obtenus ici dans le cas $p = 6$? Les problèmes les plus ardues sont évidemment ceux de l'existence d'une homographie diagopolygonale et de la convergence de toute suite diagopolygonale primaire (\mathcal{D}_n) . Les investigations exploratoires menées par les auteurs laissent penser que l'existence d'une homographie diagopolygonale, qui équivaut à celle d'un plus petit entier $\delta(p)$ tel que $\mathcal{D}_{\delta(p)}$ soit homographique à \mathcal{P} , n'est aucunement assurée pour tout $p \geq 7$.

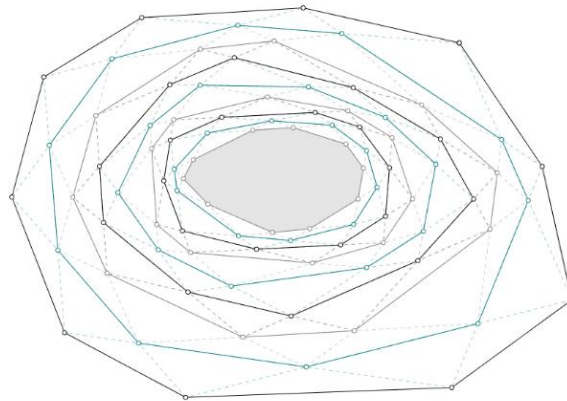


Figure 12 : Premiers termes d'une suite diagodécagonale primaire

Or, sans elle le problème de la convergence des suites diagopolygones primaires apparaît d'une difficulté insondable sous sa forme générale, et peut-être même déjà pour $p = 7$. En effet, la possibilité de résoudre ce problème pour $p = 5$ et $p = 6$ est intimement liée dans les deux cas à la mise en évidence d'une homographie diagopolygonale. Aucune voie de résolution alternative n'est apparente, d'autant moins qu'il n'y en a pas d'autre dans ces cas là puisque la solution du problème y repose précisément sur une telle homographie, celle-ci servant dans toutes les étapes cruciales des démonstrations, même et surtout pour la preuve de la nature ponctuelle de la limite.

Il pourrait être utile de prendre en compte quelques différences entre les approches des cas $p = 5$ et $p = 6$ qu'ont eues les auteurs. L'une d'entre elles est que la preuve topologique de l'alignement des sommets limites (première étape importante de la démonstration du théorème 3) a été rendue nécessaire ici, tandis qu'elle ne l'était pas dans le cas des pentagones. La connaissance récemment acquise (au moyen de puissants outils artificiels de calcul formel) de la majoration du rapport d'aire entre \mathcal{D}_1 et \mathcal{P} par $\frac{7-3\sqrt{5}}{2} < 1$ avait permis de conclure immédiatement à cet alignement (théorème 1 dans [2]). Rien n'a été établi au sujet du rapport d'aire entre \mathcal{D}_2 et \mathcal{P} dans le cas des hexagones, d'où la nécessité ici de contourner cet obstacle.

Observons par ailleurs que la preuve de convergence d'une suite diago-hexagonale primaire a été réalisée ici sans utiliser l'unicité d'un point fixe de l'homographie diago-hexagonale intérieur à \mathcal{P} , cette unicité apparaissant plutôt comme une conclusion ; tandis qu'elle avait été établie dans [3] avant la preuve du théorème de convergence diagopentagonale, puis utilisée dans cette preuve. Il est toutefois possible de reprendre pour les pentagones toute la démonstration faite pour les hexagones en se dispensant – au prix d'un rallongement de celle fournie dans [5] – du recours à l'unicité en question, pour la retrouver en conclusion. De sorte qu'une preuve purement topologique et géométrique de cette unicité est en fait possible dans les deux cas.

Une différence significative apparaît par contre d'un autre point de vue. La solution fournie est plus précise pour les pentagones que pour les hexagones : la formulation algébrique exacte du

centre diagonal a été obtenue dans le seul premier cas. Et ce fait traduit un problème important. Les calculs, en dépit de leur complication notable, n'ont pu aboutir à ce résultat dans le cas des pentagones que parce que cette complication restait assez limitée pour que des raisonnements puissent être entrepris à partir de ces mêmes calculs. Si les auteurs ont renoncé à une identification analogue dans le cas des hexagones, c'est précisément parce que déjà pour la valeur $p = 6$, les calculs sont d'une longueur et d'une complication telles qu'ils sont inexploitablement pour des raisonnements. Le lecteur s'en convaincra en tentant les calculs nécessaires à la détermination des éléments propres de la matrice formulée dans la preuve du théorème 1, et la démonstration que le centre diagonal peut être formellement discriminé avec ces calculs... Il importe de plus de voir que si le théorème de convergence diago-hexagonale primaire a pu être démontré topologiquement sans le moindre calcul, c'est parce que des calculs très conséquents ont permis au préalable de mettre au jour l'existence de l'homographie diago-hexagonale. Aucune preuve purement géométrique de cette existence n'a été trouvée par les auteurs. Il est dès lors possible et même probable qu'une éventuelle résolution du problème pour $p \geq 7$ requiert soit une preuve purement géométrique de l'existence (éventuelle) d'un entier $\delta(p)$ pour tout $p \geq 5$ (sachant qu'une telle preuve est au moins possible et déjà réalisée dans [1] pour le cas $p = 5$); soit carrément un changement de perspective utilisant des outils plus puissants que ceux utilisés ici.

Nos études des suites diago-pentagonales et diago-hexagonales, par nécessité très riches du fait de la multiplicité des domaines des mathématiques impliqués, auront finalement débouché sur une collection de nouveaux résultats universels en soi intéressants et esthétiques, mais aussi sur une série de problèmes ouverts passionnants qu'il reste désormais à explorer.

Annexe : Notations en géométrie projective analytique

On identifie un point du plan projectif à ses coordonnées homogènes dans un repère fixé de ce plan : elles forment un triplet de réels défini à un facteur multiplicatif près, dont le troisième est égal à 0 si le point est à l'infini et peut être pris égal à 1 sinon, auquel cas les deux premiers sont ses coordonnées cartésiennes classiques. Ce triplet sera noté en matrice colonne. Une droite d du plan projectif a de ce point de vue une équation de la forme $ux + vy + wz = 0$. On identifie d au triplet $(u; v; w)$, appelé coordonnées tangentielles de d , qui sera plutôt noté en matrice ligne.

Si $A_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ et $A_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ sont deux points distincts, alors la droite (A_1A_2) a pour équation $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 \\ y & b_1 & b_2 \\ z & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$, qui équivaut à : $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} z = 0$. Ainsi, (A_1A_2) a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$, de sorte qu'il est légitime de noter $(A_1A_2) = A_1 \wedge A_2$.

De manière duale, si d_1 et d_2 sont deux droites distinctes de coordonnées tangentielles respectives $(u_1; v_1; w_1)$ et $(u_2; v_2; w_2)$, leur point d'intersection a pour coordonnées homogènes

$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} w_1 & u_1 \\ w_2 & u_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$; de sorte qu'il apparaît aussi bien légitime de noter $d_1 \cap d_2 = d_1 \wedge d_2$.

Le point d'intersection de deux droites distinctes (AB) et (CD) se calcule de ce point de vue par : $(AB) \cap (CD) = (A \wedge B) \wedge (C \wedge D)$.

Trois points $A_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $A_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ et $A_3 \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$ étant donnés, ils sont alignés si, et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 ; \text{ ce qui peut donc se noter en termes de produit mixte } [A_1; A_2; A_3] = 0.$$

Enfin, étant données trois droites d_1 , d_2 et d_3 de coordonnées tangentielles $(u_1; v_1; w_1)$, $(u_2; v_2; w_2)$ et $(u_3; v_3; w_3)$, elles sont concourantes si, et seulement si $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$; ce qui peut encore se noter en termes de produit mixte $[d_1; d_2; d_3] = 0$.

Bibliographie

- [1] Pamfilos P., « On the diagonal and inscribed pentagons of a pentagon », *Forum Geometricorum*, Vol. 16, 2016, pp. 207-225.
- [2] Pouvreau D., « Suites diago-pentagonales – Partie 1 : généralités et cas des pentagones quadrisocèles », *Quadrature*, n°130, 2023, pp. 28-38.
- [3] Pouvreau D., Tournès D. « Suites diago-pentagonales – Partie 2 : le cas général », *Quadrature*, n°131, 2024, pp. 25-33.
- [4] Sidler J.C., *Géométrie projective*, 2^e édition, Paris : Dunod, 2000.