



**HAL**  
open science

# Mouvements d'une corde vibrante en présence d'un obstacle rectiligne

Henri Cabannes

► **To cite this version:**

Henri Cabannes. Mouvements d'une corde vibrante en présence d'un obstacle rectiligne. Comptes Rendus Mécanique, 1982, 295, pp.637-640. hal-04729384

**HAL Id: hal-04729384**

**<https://hal.science/hal-04729384v1>**

Submitted on 10 Oct 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

**VIBRATIONS. — Mouvements d'une corde vibrante en présence d'un obstacle rectiligne.**  
 Note (\*) de **Henri Cabannes**, présentée par Maurice Roseau.

A partir du développement en série de Fourier de la fonction qui représente certains mouvements d'une corde vibrante en présence d'un obstacle, on exprime cette fonction de deux variables à l'aide d'une fonction d'une seule variable généralisant ainsi les résultats relatifs à l'oscillation libre. On établit ensuite des propriétés des mouvements.

**VIBRATIONS. — Motions of a String Vibrating in the Presence of a Straight Rectilinear Obstacle.**

*From the expansion in Fourier series of the function, which represents certain motions of a string vibrating against an obstacle, we express this function of two variables in terms of a function of one variable, generalizing the results related to the free oscillation. Then we establish some properties of these motions.*

1. INTRODUCTION. — Une corde vibrante fixée à ses deux extrémités oscille dans un plan en présence d'un obstacle rectiligne fixe, parallèle à la position d'équilibre de la corde, c'est-à-dire parallèle au segment qui joint les extrémités fixes de la corde. Le mouvement de la corde est défini par une fonction  $u(x, t)$  de l'abscisse  $x$  et du temps  $t$ , satisfaisant les conditions suivantes :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{si } u > -h \quad (h > 0),$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t+0) = -\frac{\partial u}{\partial t}(x, t-0) \quad \text{si } u = -h,$$

$$(3) \quad u\left(\pm \frac{1}{2}, t\right) = 0,$$

$$(4) \quad \begin{cases} u(x, 0) = \alpha(x) > -h & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \beta(x) & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Les fonctions  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$ , nulles pour  $x = \pm 1/2$ , sont données.

A partir de toute solution  $v(x, t)$  du problème (1)-(4), on obtient une famille de solutions en posant ([1], [2]) :

$$(5) \quad u(x, t) = v\{X(x, t), T(x, t)\},$$

$$(6) \quad \begin{cases} X(x, t) = \frac{F(x+t) + F(x-t)}{2}, \\ T(x, t) = \frac{F(x+t) - F(x-t)}{2}. \end{cases}$$

La fonction  $F(y)$  est non décroissante et satisfait les conditions :

$$(7) \quad \begin{cases} F(1+y) = 1 - F(-y), \\ F(2+y) = 2 + F(y). \end{cases}$$

Lorsque la corde est initialement au repos dans une position unimodale, c'est-à-dire lorsque la fonction  $\beta(x)$  est nulle et lorsque la fonction  $\alpha(x)$  possède un seul maximum

dans l'intervalle  $-1/2 \leq x \leq 1/2$ , on a démontré, dans la Note [1], que le mouvement de la corde est une fonction presque périodique du temps. La démonstration est basée sur le choix  $\tilde{v}(x, t)$  de la fonction  $v(x, t)$ , qui correspond au cas de la corde pincée symétrique :

$$(8) \quad \begin{cases} \tilde{v}(x, 0) = 1 - 2|x| & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2. SÉRIE DE FOURIER. — Le mouvement défini par la fonction  $\tilde{v}(x, t)$  est une fonction périodique du temps; si on a  $h > 1$  la corde ne rencontre jamais l'obstacle et la période est 2, si on a  $h \leq 1$  la corde rencontre l'obstacle et la période est  $1+h$ . La fonction  $\tilde{v}(x, t)$  peut être développée en série de Fourier :

$$(9) \quad \tilde{v}(x, t) = a_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} a_p(x) \cdot \cos p \omega t;$$

pour  $h < 1$ , on a  $\omega = 2\pi/(1+h)$  et les valeurs des coefficients de Fourier sont différentes suivant qu'il s'agit de points de la corde qui rencontrent l'obstacle ( $2|x| \leq 1-h$ , formules (10)), ou des points de la corde qui ne rencontrent pas l'obstacle ( $1-h \leq 2|x| \leq 1$ , formules (11)) :

$$(10) \quad \begin{cases} \text{si } 2|x| \leq 1-h : a_0(x) = \frac{1-h}{2} - \frac{2x^2}{1+h}, \\ a_p(x) = 2(1+h) \frac{\cos p \omega x - \cos p \pi}{(p \pi)^2} \quad (p=1, 2, \dots), \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} \text{si } 1-h \leq 2|x| \leq 1 : a_0(x) = \frac{1-h}{1+h} (1-2|x|), \\ a_p(x) = 2(1+h) \frac{\cos p \omega x - \cos p \omega (1-|x|)}{(p \pi)^2} \quad (p=1, 2, \dots). \end{cases}$$

Le produit  $p^2 a_p(x)$  ( $p \neq 0$ ) étant borné, la série (9) est absolument et uniformément convergente. On peut donc modifier l'ordre des termes et exprimer ainsi la fonction  $\tilde{v}(x, t)$  à l'aide d'une fonction unique  $K(y)$  d'une seule variable :

$$(12) \quad \begin{cases} K(y) = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 & \text{pour } 0 \leq y \leq 1, \\ K(1+y) = K(y). \end{cases}$$

Lorsque la corde est initialement au repos dans une position  $u(x, 0)$  unimodale, c'est-à-dire telle que :

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) \geq 0 & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq x \leq a, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) \leq 0 & \text{pour } a \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ u(a, 0) = 1. \end{cases}$$

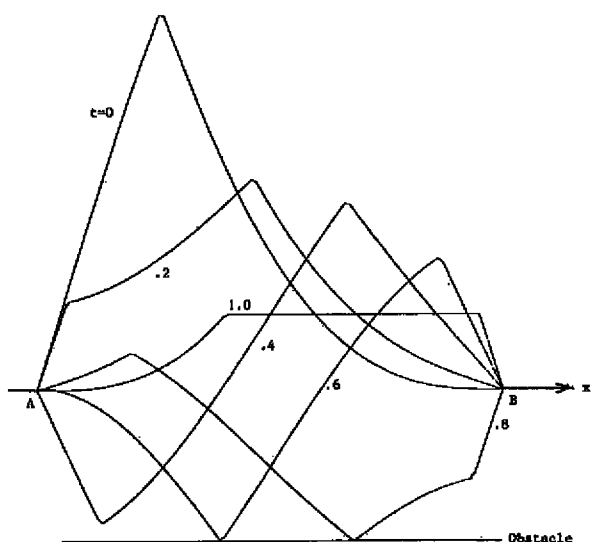


Fig. 1. —  $h=2/5$ .

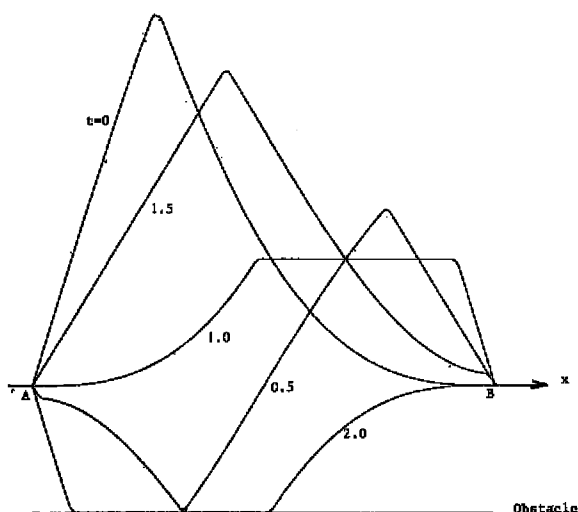


Fig. 2. —  $h=1/3$ .

le mouvement est déterminé par les formules (5) et (6) dans lesquelles  $v$  est remplacé par  $\bar{v}$ , tandis que  $F(y)$  est défini, sur l'intervalle  $2|y| \leq 1$  par les relations :

$$(14) \quad 2F(y) = \{1 - u(y, 0)\} \text{ signe.}(y-a).$$

On peut ainsi à l'aide de la fonction  $K(y)$  écrire des formules explicites qui représentent le mouvement de la corde. Pour les points de la corde qui rencontrent l'obstacle, c'est-à-dire pour  $|F(x+t) + F(x-t)| \leq 1-h$ , on a :

$$(15) \quad u(x, t) = \frac{1-h}{2} - \frac{\{F(x+t) + F(x-t)\}^2}{2(1+h)} + (1+h) \left\{ K\left(\frac{F(x+t)}{1+h}\right) + K\left(\frac{F(x-t)}{1+h}\right) - 2K\left(\frac{F(x+t) - F(x-t)}{2(1+h)} + \frac{1}{2}\right) \right\}$$

Pour les points de la corde qui ne rencontrent pas l'obstacle, c'est-à-dire pour  $1-h \leq |F(x+t) + F(x-t)| \leq 1$ , on a :

$$(16) \quad u(x, t) = \frac{1-h}{1+h} \{1 - |F(x+t) + F(x-t)|\} + (1+h) \left\{ K\left(\frac{F(x+t)}{1+h}\right) + K\left(\frac{F(x-t)}{1+h}\right) - K\left(\frac{1-\varepsilon F(x+t)}{1+h}\right) - K\left(\frac{1-\varepsilon F(x-t)}{1+h}\right) \right\}$$

$\varepsilon = \pm 1$ , possède le signe de  $F(x+t) + F(x-t)$ . Les formules (15) et (16) généralisent la formule classique :

$$(17) \quad u(x, t) = \frac{u(x+t, 0) + u(x-t, 0)}{2},$$

qui détermine le mouvement de la corde en l'absence d'obstacle. Elles permettent en outre d'écrire un programme calculant le mouvement de la corde; deux exemples, correspondant aux mêmes conditions initiales :

$$(18) \quad u(x, 0) = 1 - 2 \left| x + \frac{\cos \pi x}{\pi} \right|, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

et à des positions différentes de l'obstacle, sont représentés sur les figures 1 et 2.

3. PROPRIÉTÉS DU MOUVEMENT. — Dans le cas où la corde initialement au repos est dans une position quelconque, il n'existe pas de formules analogues aux formules (15) et (16). A l'aide des formules (5) et (6), dans lesquelles la fonction  $F$  est non décroissante et satisfait les relations (7), il est toujours possible de se ramener au cas  $\tilde{v}(X, T)$  qui correspond à une position initiale pour laquelle on a  $|d\alpha/dX| = \text{constante}$ . On a alors pendant tout le mouvement :

$$(19) \quad \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial T} \right)^2 = \text{constante} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial X} \cdot \frac{\partial \tilde{v}}{\partial T} = 0.$$

Si on remarque que, d'après les formules (6), on a pour  $n$  entier :

$$(20) \quad T(x, n) = n, \quad X(x, n) = (-)^n F\{(-)^n x\},$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} T\left(x, n + \frac{1}{2}\right) = n + \frac{1}{2} \quad \text{si } F(y) - y \text{ est impaire,} \\ X\left(x, n + \frac{1}{2}\right) = x \quad \text{si } F(y) - y \text{ est paire,} \end{array} \right.$$

on obtient les résultats suivants.

THÉORÈME 1. — *La corde étant initialement au repos dans une position quelconque, pour les valeurs du temps  $t = n$  ( $n$  entier) elle se trouve dans une position qui comporte uniquement des arcs sur lesquels la vitesse est nulle et des arcs rectilignes parallèles à l'obstacle.*

THÉORÈME 2. — *La corde étant initialement au repos dans une position quelconque, pour les valeurs du temps  $t = n + (1/2)$  ( $n$  entier) elle se trouve dans une position qui comporte :*

(a) *uniquement des arcs sur lesquels la vitesse est nulle et des arcs rectilignes parallèles à l'obstacle, lorsque la fonction  $F(y) - y$  est impaire;*

(b) *des arcs rectilignes ayant même pente en valeur absolue, lorsque la fonction  $F(y) - y$  est paire. En particulier les arcs qui aboutissent aux extrémités fixes sont rectilignes.*

THÉORÈME 3. — *La corde étant initialement au repos dans une position unimodale de maximum  $M$  et l'obstacle étant situé sur la droite  $u = -H$ , si le rapport  $h = H/M$  est inférieur à 1 et rationnel ( $h = p/q$ ,  $p$  et  $q$  entiers premiers entre eux) et si  $p + q$  est pair, la corde heurte l'obstacle aux instants  $t = (2k + 1)(p + q)/2$  (demi-périodes) sur tout un segment. Dans tous les autres cas, le contact a lieu en un seul point qui varie au cours du temps.*

Ces diverses propriétés du mouvement sont mises en évidence sur les figures 1 et 2.

(\*) Remise le 27 septembre 1982.

[1] H. CABANNES et A. HARAUX, *Comptes rendus*, 291, série A, 1980, p. 563.

[2] H. CABANNES et A. HARAUX, *Int. J. Non-linear Mechanics*, 16, 1981, p. 449-458.