



**HAL**  
open science

# Démonstration de l'équation de transfert radiatif avec indice de réfraction variable

Yaniss Nyffenegger-Péré

► **To cite this version:**

Yaniss Nyffenegger-Péré. Démonstration de l'équation de transfert radiatif avec indice de réfraction variable. 2024. hal-04728212

**HAL Id: hal-04728212**

**<https://hal.science/hal-04728212v1>**

Preprint submitted on 9 Oct 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

# Démonstration de l'équation de transfert radiatif avec indice de réfraction variable

Yaniss Nyffenegger-Péré

9 octobre 2024

## 1 Contexte

Le texte qui suit est un document de travail engagé pendant la thèse de Yaniss Nyffenegger-Péré<sup>1</sup>. Il s'agit d'un texte non définitif dont les éléments sujet à discussion sont marqués en rouge dans le texte. L'objectif est de démontrer la formulation différentielle de l'Équation de Transfert Radiatif avec indice de Réfraction variable (ou plus simplement ETRR), formulation qui reste encore peu travaillée dans la littérature du transfert radiatif. La traduction en termes de fonction de distribution de la courbure des rayons est en effet très difficile, au point que la communauté n'a pas encore établi un consensus total quant à l'ETRR elle-même : même si une forme de convergence commence à apparaître, plusieurs ETRR différentes existent encore qui ne sont pas compatibles.

Pourtant la démonstration de l'ETRR repose sur des éléments similaires à la démonstration de l'équation de Boltzmann en transport pur. La démarche est d'étudier la conservation du nombre de particules dans une portion de l'espace des phases, à la différence qu'ici, les particules sont des photons. Ceux-ci se déplacent avec une vitesse  $\mathbf{v} = c/n_\nu(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}$  dans la direction  $\mathbf{u}$  et où  $n_\nu(\mathbf{x}, t)$  est l'indice de réfraction du milieu dépendant de la position et du temps. La dimension des vitesses peut donc être réduite à celle des directions. Ainsi, l'espace des phases des photons  $\mathcal{D}$  est décrit par l'espace des positions  $\mathcal{D}_x$ , l'espace des directions  $\mathcal{D}_u$  et l'espace des fréquences  $\mathcal{D}_\nu$ . Dans le cas où l'indice de réfraction est constant, les photons se propagent en ligne droite et, pendant un temps infinitésimal, ceux-ci ne changent pas de direction mais de position. Dans ce cas restreint, seule la conservation dans l'espace des positions est pertinente et il est possible de retrouver l'ETR. Avec l'indice de réfraction variable, les photons suivent des lignes courbes et pendant un temps infinitésimal non seulement ceux-ci changent de position mais aussi de direction. La conservation du nombre de photons pour une fréquence est effectuée dans un sous-espace de l'espace des phases  $\Omega \in \mathcal{D}$ , constitué d'une partie de l'espace des positions  $\Omega_X \in \mathcal{D}_x$  et d'une partie de l'espace des directions  $\Omega_U \in \mathcal{D}_u$ . Le fait de passer de l'espace des vitesses à l'espace des directions est le lieu de toute la difficulté. Pour mieux saisir celle-ci introduisons notre formalisme de départ.

Soit  $N_{\Omega_X \times \Omega_U}(t)$  le nombre de particules dans  $\Omega_X$  à l'instant  $t$  à la fréquence  $\nu$  et avec un vecteur direction dans  $\Omega_U$ . Nous pouvons relier le nombre de particules à la fonction de distribution par :

$$N_{\Omega_X \times \Omega_U}(t) = \int_{\Omega_X} d\mathbf{x} \int_{\Omega_U} d\mathbf{u} f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (1)$$

Pour établir l'ETRR en régime de transport pur, nous considérons l'évolution du nombre de photons dans l'espace des phases du domaine  $\Omega = \Omega_X \times \Omega_U$  :

$$\frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_U}(t)}{dt} = \int_{\Omega_X} d\mathbf{x} \int_{\Omega_U} d\mathbf{u} \frac{\partial f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial t}. \quad (2)$$

---

1. [https://nastar.laplace.enseeiht.fr/git/nyffenegger/these\\_yaniss.pdf](https://nastar.laplace.enseeiht.fr/git/nyffenegger/these_yaniss.pdf)

En laissant de côté tous les phénomènes de collisions et les sources locales par émission, les phénomènes qui pilotent l'évolution du nombre de photons sont :

1. les photons qui entrent ou sortent de  $\Omega_X \times \Omega_U$  en traversant la frontière  $\partial\Omega_X$  du domaine  $\Omega_X$  dans l'espace des positions,
2. les photons qui entrent ou sortent de  $\Omega_X \times \Omega_U$  en traversant la frontière  $\partial\Omega_U$  du domaine  $\Omega_U$  dans l'espace des directions.

Nous écrivons la conservation du nombre de particules en exprimant les flux à ces frontières dans l'espace des positions et dans l'espace des directions. La conservation dans l'espace des positions n'introduit pas de concepts nouveaux mais celle dans l'espace des directions est le lieu de deux difficultés.

L'espace des directions est défini sur la sphère unité. Dans notre domaine sur la sphère unité  $\Omega_U$ , il va falloir définir des flux à la frontière pour établir le nombre de photons qui, à une position, changent de direction pendant un temps  $dt$ . Seulement, définir des vecteurs densité de flux est impossible sur la sphère unité car aucune base vectorielle n'y est définie. Il va falloir passer de la sphère unité à un autre espace où nous pouvons définir un espace vectoriel. Cet espace s'appelle une carte. Une fois les flux définis sur la carte, une équivalence nous permet de revenir sur la sphère unité. Le besoin de cette double transformation est le lieu d'une première difficulté.

Il y a ensuite une autre subtilité. En effet, pour savoir dans quelle mesure les photons traversent la frontière du domaine  $\Omega_U$  pendant  $dt$ , il faut définir une variation temporelle du vecteur direction. Dans le cas des molécules dans l'espace des vitesses, la variation temporelle de la vitesse  $\mathbf{v}$  est donnée par l'accélération. Pour les photons dans l'espace des directions, il faut exprimer les variations de la direction dans le temps en lien avec la courbure des rayons ce qui oblige à passer dans une vision héritée de l'optique géométrique et la retraduire dans une description en densité en accord avec la pensée de Boltzmann.

Certains auteurs, comme [Pomraning, 1968, Tualle and Tinet, 2003, Khan and Jiang, 2003, Shendeleva, 2004], trouvent une ETRR en stationnaire de la forme suivante :

$$\mathbf{u} \cdot \vec{\text{grad}}_X \tilde{L}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\zeta}(n_\nu(\mathbf{x})) \cdot \vec{\text{grad}}_U \tilde{L}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = -k_{e,\nu}(\mathbf{x}, t) \left[ \tilde{L}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \tilde{L}_\nu^*(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right], \quad (3)$$

avec

$$\boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{n_\nu(\mathbf{x})} \left( \vec{\text{grad}}_X (n_\nu(\mathbf{x})) - \left[ \vec{\text{grad}}_X (n_\nu(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{u} \right] \mathbf{u} \right), \quad (4)$$

et

$$\tilde{L}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) / n_\nu(\mathbf{x}, t)^2. \quad (5)$$

L'équation porte sur le rapport de la luminance sur le carré de l'indice. Nous y retrouvons la dérivée angulaire de la luminance, celle décrite par le terme  $\vec{\text{grad}}_U (L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t))$ , comme traduction de la courbure des rayons. Certains auteurs contestent cette expression [Ferwerda, 1999, Premaratne et al., 2005, Wang et al., 2014]. Les articles de [Wang et al., 2014, Galaktionov, 2018] font une mise au point des propositions existantes en laissant entendre que des recherches supplémentaires doivent être entreprises. C'est dans cet esprit que se positionne cet article : fournir une formulation différentielle de l'ETRR en partant du principe de la conservation du nombre de photons dans l'espace des phases.

## 2 Dans l'espace des positions

Le flux est la quantité qui décrit, à la frontière, le passage de photons entrants ou sortants. Le nombre de photons traversant la frontière  $\partial\Omega_X$  pendant  $dt$  est égal à la somme pour toutes les directions  $\mathbf{u}$  du flux  $\phi_X(\mathbf{u}, t)$  à travers  $\partial\Omega_X$  multiplié par  $dt$ .

$$\left( \frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_U}(t)}{dt} \right)_1 = \int_{\Omega_U} d\mathbf{u} \phi_X(\mathbf{u}, t), \quad (6)$$

avec  $\phi_X(\mathbf{u}, t)$  le flux traversant  $\partial\Omega_X$  dans la direction  $\mathbf{u}$  et à l'instant  $t$ . Par définition, le flux est égal à la somme de la densité surfacique de flux en chaque point  $\mathbf{y}$  de la frontière :

$$\phi_X(\mathbf{u}, t) = - \int_{\delta\Omega_X} \{ \mathbf{j}_X(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) \cdot \mathbf{n}_X(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \}, \quad (7)$$

avec  $\mathbf{n}_X$  la normale à l'élément infinitésimal de surface  $d\mathbf{y}$  et  $\mathbf{j}_X(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  le vecteur densité surfacique de flux en  $\mathbf{y}$  pour une direction  $\mathbf{u}$  et à l'instant  $t$ . La relation entre la densité surfacique de flux et la fonction de distribution :  $\mathbf{j}_X(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) = f_\nu(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t)\mathbf{v}$  et ici avec  $\mathbf{v} = c/(n_\nu(\mathbf{x}, t))\mathbf{u}$ . Le flux peut s'écrire comme :

$$\phi_X(\mathbf{u}, t) = - \int_{\partial\Omega_X} d\mathbf{y} \left\{ f_\nu(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) \frac{c}{n_\nu(\mathbf{x}, t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_X(\mathbf{y}) \right\}. \quad (8)$$

En utilisant le théorème de Green-Gauss-Ostrogradsky, nous passons de l'intégrale sur la surface du domaine  $\Omega_X$  à une intégrale volumique :

$$\phi_X(\mathbf{u}, t) = - \int_{\Omega_X} d\mathbf{x} \operatorname{div}_X \left[ f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \frac{c}{n_\nu(\mathbf{x}, t)} \mathbf{u} \right]. \quad (9)$$

Le flux est maintenant dépendant de la divergence de la fonction de distribution des photons dans la direction  $\mathbf{u}$  multipliée par leurs vitesses. La divergence d'un produit peut être décomposée et nous avons :

$$\phi_X(\mathbf{u}, t) = - \int_{\Omega_X} d\mathbf{x} \left[ f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \operatorname{div}_X \left( \frac{c}{n_\nu(\mathbf{x}, t)} \cdot \mathbf{u} \right) + \frac{c}{n_{\nu,t}(\mathbf{x})} \mathbf{u} \operatorname{grad}_X f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right]. \quad (10)$$

De nouveau, un produit de la divergence apparaît et nous pouvons réitérer l'étape précédente :

$$\phi_X(\mathbf{u}, t) = - \int_{\Omega_X} d\mathbf{x} \left[ f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \frac{c}{n_\nu(\mathbf{x}, t)} \underbrace{\operatorname{div}_X(\mathbf{u})}_{=0} + \mathbf{u} \operatorname{grad}_X \left( \frac{c}{n_\nu(\mathbf{x}, t)} \right) f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{c}{n_\nu(\mathbf{x}, t)} \mathbf{u} \operatorname{grad}_X f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right] \quad (11)$$

Les variables position  $\mathbf{x}$  et direction  $\mathbf{u}$  sont indépendantes et par conséquent la divergence spatiale du vecteur direction est nulle. En notant que :  $\operatorname{grad}_X (c/n_\nu(\mathbf{x}, t)) = -(c/n_\nu^2(\mathbf{x}, t)) \operatorname{grad}_X (n_\nu(\mathbf{x}, t))$ , nous obtenons l'expression de la densité surfacique de flux sur l'espace des positions :

$$\phi_X(\mathbf{u}, t) = \int_{\Omega_X} d\mathbf{x} \left[ \frac{c}{n_\nu^2(\mathbf{x}, t)} \mathbf{u} \operatorname{grad}_X (n_\nu(\mathbf{x}, t)) f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \frac{c}{n_\nu(\mathbf{x}, t)} \mathbf{u} \operatorname{grad}_X f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right]. \quad (12)$$

Donc, la variation au cours du temps du nombre de photons liée à la traversée de la frontière dans l'espace des positions est :

$$\left( \frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_U}(t)}{dt} \right)_1 = \int_{\Omega_U} d\mathbf{u} \int_{\Omega_X} d\mathbf{x} \left[ \frac{c}{n_\nu^2(\mathbf{x}, t)} \mathbf{u} \operatorname{grad}_X (n_\nu(\mathbf{x}, t)) f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \frac{c}{n_\nu(\mathbf{x}, t)} \mathbf{u} \operatorname{grad}_X f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right]. \quad (13)$$

### 3 Dans l'espace des directions

Le nombre de photons traversant la frontière  $\partial\Omega_U$  pendant  $dt$  est égal à la somme pour toutes les positions  $\mathbf{x}$  du **flux angulaire**  $\phi_U(\mathbf{x}, t)$  à travers  $\partial\Omega_U$  multiplié par  $dt$  :

$$\left( \frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_U}(t)}{dt} \right)_2 = \int_{\Omega_X} d\mathbf{x} \phi_U(\mathbf{x}, t), \quad (14)$$

avec  $\phi_U(\mathbf{x}, t)$  le flux traversant  $\partial\Omega_U$  pour une position  $\mathbf{x}$  et à l'instant  $t$ . Comme cité en introduction de cet article, la construction de cette contribution angulaire suit le même raisonnement que précédemment mais ouvre deux nouveaux questionnements :

- Dans la section précédente, la vitesse dans l'espace des positions était  $\mathbf{v} = c/n_\nu(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}$ ; cette grandeur rend compte de la vitesse à laquelle les photons traversent la frontière  $\partial\Omega_X$  pendant  $dt$ . Dans l'espace des directions, une grandeur similaire est nécessaire et il faut définir une **vitesse angulaire** à laquelle les photons traversent la frontière  $\partial\Omega_U$  pendant  $dt$ . Plus précisément, il s'agit de savoir à quelle "vitesse" les photons changent de direction. Naïvement, nous pourrions penser qu'il s'agit de la dérivée temporelle de  $\mathbf{u}$  mais par définition celle-ci ne dépend pas de  $t$ . Une solution est de définir cette vitesse angulaire en passant dans un autre corpus, celui de l'optique géométrique.
- Le domaine considéré  $\Omega_U$  est défini sur la sphère unité. Pour traiter la conservation dans cet espace, le flux à la frontière doit être défini. Ensuite, le passage de la frontière  $\partial\Omega_U$  au milieu  $\Omega_U$  est effectué par Green-Gauss-Ostrogradsky. Cependant, la divergence ne prend son sens que lorsqu'une base vectorielle est définie ce qui n'est pas le cas sur la sphère unité. Il faudra alors changer de représentation.

Avant d'attaquer la formulation sur la conservation, ces deux points seront élucidés.

### 3.1 L'optique géométrique pour la vitesse angulaire et sa divergence

Comme annoncé dans le début de cette section, il n'est pas possible de formaliser la vitesse angulaire comme la dérivée du vecteur  $\mathbf{u}$  pendant  $dt$  : l'approche mésoscopique implique une indépendance des variables  $\{\mathbf{x}, \mathbf{u}, t\}$ . Pour contourner cette difficulté, nous invoquons le corpus de l'optique géométrique. Dans celui-ci, la trajectoire des photons est définie le long d'une abscisse curviligne. La seule connaissance d'une position initiale  $s = 0$  à l'instant  $t = 0$  dans une direction donnée, permet de définir la totalité de la trajectoire (voir Fig. 1). Plaçons l'origine  $s = 0$  de telle

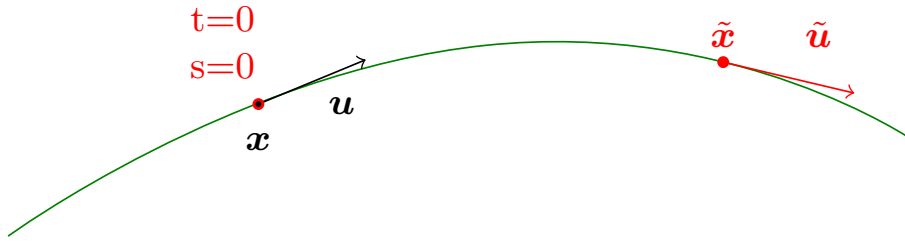


FIGURE 1 – Représentation d'un chemin emprunté par un photon avec un indice de réfraction variable. Les grandeurs en rouge proviennent de l'optique géométrique (position initiale, temps initial, position et direction paramétrées le long de l'abscisse curviligne). Les grandeurs en noir symbolisent la position et direction mésoscopiques d'intérêt.

sorte qu'elle coïncide avec  $\mathbf{x}$ , la position issue de la physique mésoscopique. En optique géométrique chaque position le long de l'abscisse curviligne  $\tilde{\mathbf{x}}$  est alors paramétrée connaissant la condition initiale (la position et la direction issues de la physique mésoscopique),  $\tilde{\mathbf{x}}_S \equiv \tilde{\mathbf{x}}_S(s; \mathbf{x}, \mathbf{u})$  et de même pour la direction  $\tilde{\mathbf{u}}_S \equiv \tilde{\mathbf{u}}_S(s; \mathbf{x}, \mathbf{u})$ . Par ailleurs, il est aussi possible de raisonner avec la variable indépendante temps :  $\tilde{\mathbf{x}}_\tau \equiv \tilde{\mathbf{x}}_\tau(t; \mathbf{x}, \mathbf{u})$  et  $\tilde{\mathbf{u}}_\tau \equiv \tilde{\mathbf{u}}_\tau(t; \mathbf{x}, \mathbf{u})$  car se déplacer le long de la trajectoire spatialement ou temporellement est équivalent. En résumé, pour une position et une direction données issues de la physique mésoscopique, la trajectoire des photons est connue en passant dans le corpus de l'optique géométrique, trajectoire qui est alors paramétrisée par une position et direction issues de ce corpus et différentes de la description mésoscopique.

L'optique géométrique donne un cadre formel qui lie les variations spatiales de  $\tilde{\mathbf{u}}_S$  à l'indice de réfraction  $n_\nu(\tilde{\mathbf{x}}_S)$ . En partant du principe de Fermat sur les chemins empruntés par des rayons lumineux, nous pouvons établir l'équation eikonale [Born and Wolf, 2013] :

$$\frac{d}{ds} \left( n_\nu(\tilde{\mathbf{x}}_S) \frac{d\tilde{\mathbf{x}}_S}{ds} \right) = \vec{\text{grad}}_X (n_\nu) |_{(\tilde{\mathbf{x}}_S)}. \quad (15)$$

Cette équation relie les variations de l'indice de réfraction dans la direction  $\tilde{\mathbf{u}}_S(s; \mathbf{x}, \mathbf{u}) = d\tilde{\mathbf{x}}_S(s; \mathbf{x}, \mathbf{u})/ds$ .

À partir de cette équation, [Pomraning, 2005] a démontré que la variation angulaire le long de l'abscisse curviligne est donnée par :

$$\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_S}{ds} = \frac{1}{n_\nu(\tilde{\mathbf{x}}_S)} \left( \text{grad}_X(n_\nu)|_{(\tilde{\mathbf{x}}_S)} - \left[ \text{grad}_X(n_\nu)|_{(\tilde{\mathbf{x}}_S)} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_S \right] \tilde{\mathbf{u}}_S \right). \quad (16)$$

Il est donc maintenant possible de définir la vitesse angulaire  $\mathbf{v}_U$  pour une position  $\mathbf{x}$  et une direction  $\mathbf{u}$  comme la variation temporelle de la direction issue de l'optique géométrique prise à l'instant initial :

$$\mathbf{v}_U(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_\tau(0; \mathbf{x}, \mathbf{u})}{dt}. \quad (17)$$

En considérant que le photon se propage à la vitesse  $ds/dt = c/n_\nu$  :

$$\mathbf{v}_U(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_\tau(0; \mathbf{x}, \mathbf{u})}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_S(0; \mathbf{x}, \mathbf{u})}{ds} = \frac{c}{n_\nu(\tilde{\mathbf{x}}(t))} \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_S(0; \mathbf{x}, \mathbf{u})}{ds}. \quad (18)$$

Finalement, en injectant l'Eq. 16 dans l'expression précédente :

$$\mathbf{v}_U(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{c}{n_\nu^2(\tilde{\mathbf{x}})} \left( \text{grad}_X(n_\nu)|_{(\tilde{\mathbf{x}}_S)} - \left[ \text{grad}_X(n_\nu)|_{(\tilde{\mathbf{x}}_S)} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_S \right] \tilde{\mathbf{u}}_S \right). \quad (19)$$

Par ailleurs, il nous faudra avoir la connaissance de la divergence de cette vitesse angulaire tout comme dans le domaine spatial la divergence de la vitesse était nécessaire Eq. 10. Le vecteur  $\tilde{\mathbf{u}}_S$  est représenté sur la sphère unité. Pour définir la divergence de ce vecteur, nous introduisons une base sphérique  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$  avec  $\tilde{\mathbf{u}}_S = \vec{e}_r$  (voir Fig. 2). La divergence du vecteur vitesse sur la sphère unité

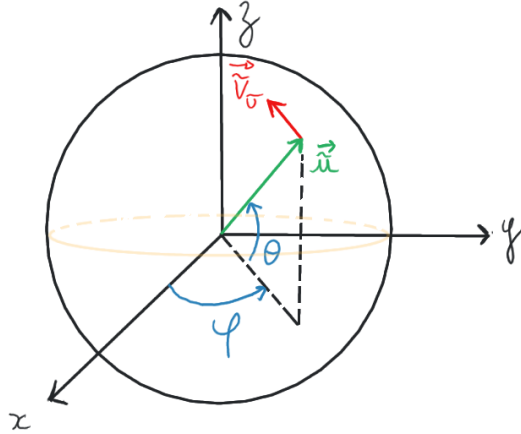


FIGURE 2 – Vecteur direction  $\tilde{\mathbf{u}}$  et sa dérivée temporelle  $\mathbf{v}_U$  représentés sur la sphère unité.

est égale à sa divergence exprimée dans la base sphérique :  $\text{div}_U(\mathbf{v}_U) = \text{div}_{[r,\theta,\phi]}(\mathbf{v}_U)|_{r=1}$ . **Le sens de la divergence dans l'espace des directions doit être clarifié.**

$$\text{div}_U(\mathbf{v}_U(\mathbf{x}, \mathbf{u})) = \text{div}_U \left( \frac{c}{n_\nu^2(\tilde{\mathbf{x}})} \left( \text{grad}_X(n_\nu)|_{(\tilde{\mathbf{x}}_S)} - \left[ \text{grad}_X(n_\nu)|_{(\tilde{\mathbf{x}}_S)} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_S \right] \tilde{\mathbf{u}}_S \right) \right). \quad (20)$$

En décomposant, nous trouvons l'expression suivante :

$$\text{div}_U(\mathbf{v}_U(\mathbf{x}, \mathbf{u})) = \frac{c}{n_\nu^2(\tilde{\mathbf{x}})} \underbrace{\text{div}_U \left( \text{grad}_X(n_\nu)|_{(\tilde{\mathbf{x}}_S)} \right)}_{=0} - \frac{c}{n_\nu^2(\tilde{\mathbf{x}})} \underbrace{\text{div}_U \left( \left( \text{grad}_X(n_\nu)|_{(\tilde{\mathbf{x}}_S)} \tilde{\mathbf{u}}_S \right) \tilde{\mathbf{u}}_S \right)}_A. \quad (21)$$

La divergence angulaire du gradient de l'indice de réfraction est nulle : il n'y a aucune dépendance à la direction. Le second terme  $A$  reste à expliciter :

$$A = \underbrace{\tilde{\mathbf{u}}_S \text{ grad}_U \left( \text{grad}_X(n_\nu)|_{(\tilde{\mathbf{x}}_S)} \tilde{\mathbf{u}}_S \right)}_{=0} + \underbrace{\text{grad}_X(n_\nu)|_{(\tilde{\mathbf{x}}_S)} \tilde{\mathbf{u}}_S \text{ div}_U(\tilde{\mathbf{u}}_S)}_{=2}. \quad (22)$$

Le premier terme de l'expression est nul. En effet, le vecteur unitaire direction  $\tilde{\mathbf{u}}_S$ , exprimé dans la base sphérique est égal à  $\vec{e}_r$ . La multiplication par le gradient spatial de l'indice de réfraction laisse inchangé le fait qu'il n'y ait aucune composante selon  $\theta$  et  $\phi$  et par conséquent la divergence angulaire est nulle. Dans le second terme, la divergence angulaire du vecteur unitaire  $\tilde{\mathbf{u}}_S$  est exprimée dans la base sphérique :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_U(\tilde{\mathbf{u}}_S) &= \operatorname{div}_{[r,\theta,\phi]}(\tilde{\mathbf{u}}_S) \Big|_{r=1} \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \tilde{\mathbf{u}}_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \tilde{\mathbf{u}}_r)}{\partial r} \Big|_{r=1} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \tilde{\mathbf{u}}_r)}{\partial r} \Big|_{r=1} = \frac{2}{r} \Big|_{r=1} = 2. \end{aligned} \quad (23)$$

Ainsi la divergence du vecteur vitesse angulaire est :

$$\operatorname{div}_U(\mathbf{v}_U) = -\frac{2c}{n_\nu^2(\tilde{\mathbf{x}})} \tilde{\mathbf{u}}_S \vec{\operatorname{grad}}_X(n_\nu) \Big|_{(\tilde{\mathbf{x}}_S)}. \quad (24)$$

Nous avons pu exprimer la vitesse angulaire ainsi que sa divergence en fonction de grandeurs données par l'optique géométrique : la position  $\tilde{\mathbf{x}}$ , la direction  $\tilde{\mathbf{u}}$  et l'indice de réfraction  $n_\nu$ . Nous constatons que pour un temps et une position donnés de la physique mésoscopique :  $\tilde{\mathbf{u}}_S(0; \mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv \mathbf{u}$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_S(0; \mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv \mathbf{x}$ . Ainsi :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_U(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \frac{c}{n_\nu^2(\mathbf{x})} \left( \vec{\operatorname{grad}}_X(n_\nu) \Big|_{\mathbf{x}} - \left[ \vec{\operatorname{grad}}_X(n_\nu) \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} \right] \mathbf{u} \right), \\ \operatorname{div}_U(\mathbf{v}_U) = -\frac{2c}{n_\nu^2(\mathbf{x})} \mathbf{u} \vec{\operatorname{grad}}_X(n_\nu) \Big|_{\mathbf{x}}. \end{cases} \quad (25)$$

### 3.2 Conservation dans l'espace des directions

Par la suite, nous n'aurons plus besoin de faire appel à d'autres corpus et nous resterons dans le cadre du corpus de la physique du transport, c'est-à-dire dans une description mésoscopique. Le domaine d'intérêt  $\Omega_U$  est représenté sur la sphère unité (voir Fig. 3). La variation du nombre de

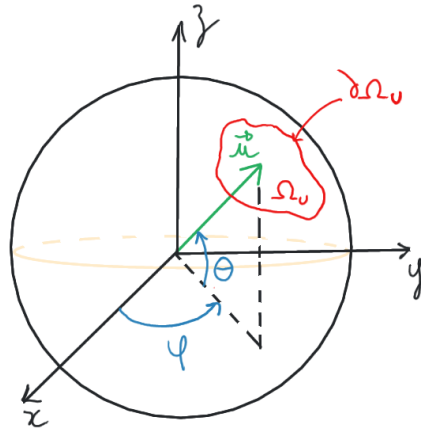


FIGURE 3 – Représentation du domaine  $\Omega_U$  et de sa frontière  $\partial\Omega_U$ .

photons dans cette espace est liée aux nombres de photons qui traversent la frontière  $\partial\Omega_U$ . Le nombre de photons traversant la frontière  $\partial\Omega_U$  pendant  $dt$  est égal à la somme pour toutes les positions  $\mathbf{x}$  du **flux angulaire**  $\phi_U(\mathbf{x}, t)$  à travers  $\partial\Omega_U$  multiplié par  $dt$  :

$$\left( \frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_U}(t)}{dt} \right)_2 = \int_{\Omega_X} d\mathbf{x} \phi_U(\mathbf{x}, t), \quad (26)$$

avec  $\phi_U(\mathbf{x}, t)$  le flux traversant  $\partial\Omega_U$  pour une position  $\mathbf{x}$  et à l'instant  $t$ .

Comme aucune base vectorielle ne peut être définie sur la sphère unité dans  $\mathcal{S}^2$ , il faut représenter  $\Omega_U$  dans un autre espace où cette fois nous pourrions définir une base. Cela nous donnera la possibilité de travailler avec des vecteurs. Il est possible de simplement utiliser une base sphérique dans laquelle les composantes de chaque vecteur suivant  $\{\vec{e}_r\}$  sont unitaires. Tout vecteur défini sur le domaine  $\Omega_U$  peut alors être décrit par les composantes  $\{\vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ . En géométrie différentielle, le domaine  $\Omega_{[\theta, \phi]}$  défini sur  $\mathbb{R}^2$ , représenté par  $\Omega_U$  sur la sphère unité dans  $\mathcal{S}^2$ , est nommé carte (voir Fig. 4). Autrement dit, le domaine  $\Omega_U$  dans  $\mathcal{S}^2$  est l'équivalent du domaine  $\Omega_{[\theta, \phi]}$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

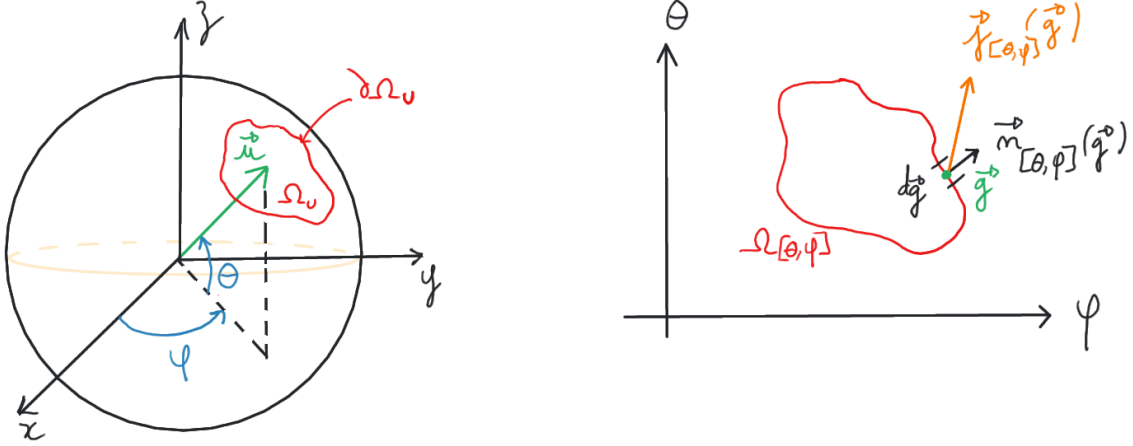


FIGURE 4 – Passage de la sphère unité sur  $\mathcal{S}^2$  (figure de gauche) à une carte dans  $\mathbb{R}^2$  (figure de droite) où un espace vectoriel est définissable.

Sur  $\Omega_{[\theta, \phi]}$ , une base vectorielle peut être définie par les vecteurs unitaires  $\{\vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ . On peut maintenant définir en un point  $\vec{g}$  de la frontière  $\partial\Omega_{[\theta, \phi]}$ , la norme  $\mathbf{n}_{[\theta, \phi]}(\mathbf{g})$  et le vecteur densité angulaire de flux  $\mathbf{j}_{[\theta, \phi]}(\mathbf{g})$ , impossible à faire sur la sphère unité. Chaque vecteur sur la carte est défini dans la base sphérique avec une composante nulle suivant  $\{\vec{e}_r\}$ . Nous pouvons reprendre notre démonstration en notant que les vecteurs, les opérateurs divergence et les gradients seront écrits pour la sphère unité, grandeurs qui trouvent leur sens quand elles seront retranscrites dans la base sphérique :  $U \equiv [R, \Theta, \Phi]$ . Par exemple, le vecteur densité angulaire de flux  $\mathbf{j}_U = \mathbf{j}_{[r, \theta, \phi]}$  avec une composante nulle suivant  $\{\vec{e}_r\}$  ou encore le vecteur unitaire direction s'exprime comme  $\mathbf{u} = \vec{e}_r$ .

De manière analogue à l'espace des positions Eq. 7, le flux angulaire est égal à la somme de la densité angulaire de flux en chaque point  $\mathbf{g}$  de la frontière :

$$\phi_U(\mathbf{x}, t) = - \int_{\partial\Omega_U} \{ \mathbf{j}_U(\mathbf{x}, \mathbf{g}, t) \cdot \mathbf{n}_U(\mathbf{g}) d\mathbf{g} \}, \quad (27)$$

avec  $\mathbf{n}_U$  la normale à l'élément infinitésimal de surface  $d\mathbf{g}$  et  $\mathbf{j}_U(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  le vecteur densité directionnel de flux en  $\mathbf{g}$  pour une position  $\mathbf{x}$  et à l'instant  $t$ . Nous pouvons, par analogie avec l'Eq. 8, décomposer la densité de flux directionnel en fonction de la vitesse angulaire et de la fonction de distribution :

$$\phi_U(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial\Omega_U} -f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{g}, t) \mathbf{v}_U(\mathbf{x}, \mathbf{g}, t) \cdot \mathbf{n}_U(\mathbf{g}) d\mathbf{g}. \quad (28)$$

En utilisant le théorème de Green-Gauss-Ostrogradsky sur Eq. 28, nous passons de l'intégrale sur la surface du domaine  $\Omega_U$  à une intégrale volumique :

$$\phi_U(\mathbf{x}, t) = - \int_{\Omega_U} d\mathbf{u} \{ \text{div}_U [f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \mathbf{v}_U(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)] \}. \quad (29)$$

**De nouveau le sens de la divergence angulaire doit être approfondi.** En décomposant la divergence :

$$\phi_U(\mathbf{x}, t) = \int_{\Omega_U} \left[ -f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \text{div}_U (\mathbf{v}_U(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)) - \mathbf{v}_U(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \vec{\text{grad}}_U (f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)) \right] d\mathbf{u}. \quad (30)$$



Grâce au travail effectué à la Sec. 3.1, l'expression de la vitesse angulaire et de sa divergence ont été définies. La densité angulaire de flux sur l'espace des directions en fonction de l'indice de réfraction et de la fonction de distribution est :

$$\begin{aligned} \phi_U(\mathbf{x}, t) &= \int_{\Omega_U} d\mathbf{u} \frac{2c}{n_\nu^2(\mathbf{x})} \mathbf{u} \text{grad}_X(n_\nu) f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ &\quad - \frac{c}{n_\nu^2(\mathbf{x}, t)} \left( \text{grad}_X(n_\nu) - \left[ \text{grad}_X(n_\nu) \cdot \mathbf{u} \right] \mathbf{u} \right) \text{grad}_U(f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)). \end{aligned} \quad (31)$$

Donc, la variation au cours du temps du nombre de photons liée à la traversée de la frontière dans l'espace des directions est :

$$\begin{aligned} \left( \frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_U}(t)}{dt} \right)_2 &= \int_{\Omega_X} d\mathbf{x} \int_{\Omega_U} d\mathbf{u} \left\{ \frac{2c}{n_\nu^2(\mathbf{x})} \mathbf{u} \text{grad}_X(n_\nu) f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{c}{n_\nu^2(\mathbf{x})} \left( \text{grad}_X(n_\nu) - \left[ \text{grad}_X(n_\nu) \cdot \mathbf{u} \right] \mathbf{u} \right) \text{grad}_U(f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)) \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

## 4 L'ETRR

### 4.1 Agrégation des termes spatial et angulaire

La variation du nombre de photons traversant le domaine  $\Omega$  pendant  $dt$  est donc la somme des photons traversant  $\Omega_X$  et  $\Omega_U$ , soit :

$$\frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_U}(t)}{dt} = \left( \frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_U}(t)}{dt} \right)_1 + \left( \frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_U}(t)}{dt} \right)_2. \quad (33)$$

En introduisant les valeurs définies aux sections précédentes pour chaque domaine :

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\Omega_X \times \Omega_U}(t)}{dt} &= \int_{\Omega_U} d\mathbf{u} \int_{\Omega_X} d\mathbf{x} \left\{ \left[ \frac{c}{n_\nu^2(\mathbf{x})} \mathbf{u} \text{grad}_X(n_\nu) f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \frac{c}{n_\nu(\mathbf{x})} \mathbf{u} \text{grad}_X f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right] \right. \\ &\quad + \frac{2c}{n_\nu^2(\mathbf{x})} \mathbf{u} \text{grad}_X(n_\nu) f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ &\quad \left. - \frac{c}{n_\nu^2(\mathbf{x})} \left( \text{grad}_X(n_\nu) - \left[ \text{grad}_X(n_\nu) \cdot \mathbf{u} \right] \mathbf{u} \right) \text{grad}_U(f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)) \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

En utilisant le lien entre nombre de photons et fonction de distribution Eq. 2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial t} &= \frac{c}{n_\nu^2(\mathbf{x})} \mathbf{u} \text{grad}_X(n_\nu) f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \frac{c}{n_\nu(\mathbf{x})} \mathbf{u} \text{grad}_X f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ &\quad + \frac{2c}{n_\nu^2(\mathbf{x})} \mathbf{u} \text{grad}_X(n_\nu) f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ &\quad - \frac{c}{n_\nu^2(\mathbf{x})} \left( \text{grad}_X(n_\nu) - \left[ \text{grad}_X(n_\nu) \cdot \mathbf{u} \right] \mathbf{u} \right) \text{grad}_U(f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)). \end{aligned} \quad (35)$$

Sachant que la luminance est liée à la fonction de distribution par l'expression  $L_\nu = h\nu(c/n_\nu)f_\nu$  :

$$\begin{aligned} \frac{n_\nu(\mathbf{x})}{c} \frac{\partial L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{n_\nu(\mathbf{x})} \mathbf{u} \text{grad}_X(n_\nu) L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \frac{1}{n_\nu(\mathbf{x})} \mathbf{u} \text{grad}_X L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ &\quad + \frac{2}{n_\nu(\mathbf{x})} \mathbf{u} \text{grad}_X(n_\nu) L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ &\quad - \frac{1}{n_\nu(\mathbf{x})} \left( \text{grad}_X(n_\nu) - \left[ \text{grad}_X(n_\nu) \cdot \mathbf{u} \right] \mathbf{u} \right) \text{grad}_U(L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)). \end{aligned} \quad (36)$$

En décomposant le gradient spatial de l'indice de réfraction multiplié par la luminance, les termes suivants se simplifient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n_\nu(\mathbf{x})} \mathbf{u} \vec{\text{grad}}_X (n_\nu) L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \frac{1}{n_\nu(\mathbf{x})} \mathbf{u} \vec{\text{grad}}_X (n_\nu(\mathbf{x}) L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)) \\ & = -\mathbf{u} \vec{\text{grad}}_X (L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)). \end{aligned} \quad (37)$$

Finalement, nous obtenons l'Équation de Transfert Radiatif avec indice de Réfraction variable (ETRR) en transport pur :

$$\begin{aligned} & \frac{n_\nu(\mathbf{x})}{c} \frac{\partial L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial t} + \mathbf{u} \vec{\text{grad}}_X (L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)) - \frac{2}{n_\nu(\mathbf{x})} \mathbf{u} \vec{\text{grad}}_X (n_\nu) L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ & + \frac{1}{n_\nu(\mathbf{x})} \left( \vec{\text{grad}}_X (n_\nu) - \left[ \vec{\text{grad}}_X (n_\nu) \cdot \mathbf{u} \right] \mathbf{u} \right) \vec{\text{grad}}_U (L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Si l'indice de réfraction est constant dans le milieu, alors nous retrouvons l'ETR en transport pur.

**Sur la divergence spatiale de la direction** L'expression que nous trouvons, Eq. 38, est aussi démontrée par [Pomraning, 1968, Tualle and Tinetti, 2003, Khan and Jiang, 2003, Shendeleva, 2004]. Cependant, des recherches plus récentes [Premaratne et al., 2005, Wang et al., 2014] imposent l'ajout d'un terme dans cette expression pour respecter les propriétés de l'optique géométrique. Il s'agirait de prendre en compte la divergence spatiale du vecteur direction venant de l'optique géométrique. **La suite de ce paragraphe nécessite un approfondissement.** Dans notre démonstration cela se traduit en assimilant  $\text{div}_X(\mathbf{u})$  à  $\text{div}_X(\tilde{\mathbf{u}})$  dans l'Eq. 11, terme qui n'est plus nul. L'ETRR est alors différente :

$$\begin{aligned} & \frac{n_\nu(\mathbf{x})}{c} \frac{\partial L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial t} + \mathbf{u} \vec{\text{grad}}_X (L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)) - \frac{2}{n_\nu(\mathbf{x})} \mathbf{u} \vec{\text{grad}}_X (n_\nu) L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ & + \text{div}_X(\tilde{\mathbf{u}}) L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ & + \frac{1}{n_\nu(\mathbf{x})} \left( \vec{\text{grad}}_X (n_\nu) - \left[ \vec{\text{grad}}_X (n_\nu) \cdot \mathbf{u} \right] \mathbf{u} \right) \vec{\text{grad}}_U (L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)) = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

avec la divergence spatiale de  $\tilde{\mathbf{u}}$  dépendant des variations de l'indice de réfraction [Premaratne et al., 2005, Wang et al., 2014]. Cependant, dans un article de conférence [Galaktionov, 2018], suggère d'entreprendre des recherches plus poussées entre optique géométrique et transfert radiatif pour se prononcer définitivement. Dans la suite l'Eq. 38 sera utilisée.

## 4.2 Termes sources, termes puits et réversibilité

La démarche d'ajouter les termes sources et puits dans l'ETRR est similaire à celle pour l'ETR. Nous admettons que les apparitions et disparitions de photons dans le milieu supposé à l'équilibre thermodynamique local (ETL), ne dépendent pas des trajectoires courbes dues à l'indice de réfraction qu'empruntent les photons. Ainsi l'ETRR dans le milieu est :

$$\begin{aligned} & \frac{n_\nu(\mathbf{x})}{c} \frac{\partial L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial t} + \mathbf{u} \vec{\text{grad}}_X (L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)) - \frac{2}{n_\nu(\mathbf{x})} \mathbf{u} \vec{\text{grad}}_X (n_\nu) L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ & + \frac{1}{n_\nu(\mathbf{x})} \left( \vec{\text{grad}}_X (n_\nu) - \left[ \vec{\text{grad}}_X (n_\nu) \cdot \mathbf{u} \right] \mathbf{u} \right) \vec{\text{grad}}_U (L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)) \\ & = - (k_{a,\nu}(\mathbf{x}, t) + k_{s,\nu}(\mathbf{x}, t)) L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ & + k_{s,\nu}(\mathbf{x}, t) \int_{4\pi} \phi(\mathbf{u}, \mathbf{u}') L_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) d\mathbf{u}' \\ & + S_\nu^e(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (40)$$

Dans une optique d'appliquer une approche par Monte Carlo reverse (c'est-à-dire en partant du point sonde) sur l'ETRR, nous suivons non pas la luminance mais la quantité  $\tilde{L}_\nu = L_\nu/n_\nu^2$ . En effet,

[Aronson, 1997] a montré que dans un milieu avec indice de réfraction variable la réversibilité ne s'applique pas sur la luminance mais sur  $\tilde{L}_\nu$ . Donc l'ETRR est reformulée comme :

$$\begin{aligned}
& \frac{n_\nu(\mathbf{x})}{c} \frac{\partial \tilde{L}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial t} + \mathbf{u} \vec{\text{grad}}_X \left( \tilde{L}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right) \\
& \quad + \frac{1}{n_\nu(\mathbf{x})} \left( \vec{\text{grad}}_X (n_\nu) - \left[ \vec{\text{grad}}_X (n_\nu) \cdot \mathbf{u} \right] \mathbf{u} \right) \vec{\text{grad}}_U \left( \tilde{L}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right) \\
& = - (k_{a,\nu}(\mathbf{x}, t) + k_{s,\nu}(\mathbf{x}, t)) \tilde{L}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\
& \quad + k_{s,\nu}(\mathbf{x}, t) \int_{4\pi} \phi(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \tilde{L}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}', t) d\mathbf{u}' \\
& \quad + S_\nu^e(\mathbf{x}, t).
\end{aligned} \tag{41}$$

La condition d'équilibre  $\tilde{L}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = L_\nu^{eq}/n_\nu^2$ , permet d'écrire le terme source à l'ETL :

$$S_\nu^e(\mathbf{x}, t) = k_{a,\nu}(\mathbf{x}, t) \frac{L_\nu^{eq}(T(\mathbf{x}, t))}{n_\nu(\mathbf{x})^2}. \tag{42}$$

## Références

- [Aronson, 1997] Aronson, R. (1997). Radiative transfer implies a modified reciprocity relation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 14(2) :486–490.
- [Born and Wolf, 2013] Born, M. and Wolf, E. (2013). *Principles of optics : electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Elsevier.
- [Ferwerda, 1999] Ferwerda, H. A. (1999). The radiative transfer equation for scattering media with a spatially varying refractive index. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 1(3) :L1–L2.
- [Galaktionov, 2018] Galaktionov, A. V. (2018). Features of radiation heat transfer in a medium with variable refractive index. *Journal of Physics : Conference Series*, 1112 :012018.
- [Khan and Jiang, 2003] Khan, T. and Jiang, H. (2003). A new diffusion approximation to the radiative transfer equation for scattering media with spatially varying refractive indices. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 5(2) :137–141.
- [Pomraning, 1968] Pomraning, G. (1968). Radiative transfer in dispersive media. *The Astrophysical Journal*, 153 :321.
- [Pomraning, 2005] Pomraning, G. C. (2005). *The equations of radiation hydrodynamics*. Courier Corporation.
- [Premaratne et al., 2005] Premaratne, M., Premaratne, E., and Lowery, A. J. (2005). The photon transport equation for turbid biological media with spatially varying isotropic refractive index. *Optics Express*, 13(2) :389.
- [Shendeleva, 2004] Shendeleva, M. L. (2004). Radiative transfer in a turbid medium with a varying refractive index : comment. *Journal of the Optical Society of America A*, 21(12) :2464.
- [Tualle and Tinet, 2003] Tualle, J.-M. and Tinet, E. (2003). Derivation of the radiative transfer equation for scattering media with a spatially varying refractive index. *Optics Communications*, 228(1-3) :33–38.
- [Wang et al., 2014] Wang, P., Arridge, S. R., and Jiang, M. (2014). Radiative transfer equation for media with spatially varying refractive index. *Physical Review A*, 90(2) :023803.