



**HAL**  
open science

## Matematica e musica

Moreno Andreatta

► **To cite this version:**

Moreno Andreatta. Matematica e musica. Corriere della Sera / Gazzetta dello Sport. , 2024, Collana Matematica, (Curatore Maurizio Codogno). hal-04725789

**HAL Id: hal-04725789**

**<https://hal.science/hal-04725789v1>**

Submitted on 8 Oct 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# MATEMATICA E MUSICA

Lezione 13 della collana “Matematica” (curatore Maurizio Codogno)

La Gazzetta della Sport / Corriere della Sera, aprile 2024

## DRAFT VERSION



Che legame c'è fra la matematica e la musica? La riflessione sui rapporti fra queste due discipline, che possiamo affermare cominciano con Pitagora (almeno per quanto riguarda la storia del pensiero filosofico in Occidente), ha di fatto attraversato i secoli per giungere sino a noi incorporando, di volta in volta, dei campi della matematica dove il legame ha potuto trovare un fondamento teorico e nuove possibilità di applicazioni in ambito non solo musicale ma nella matematica stessa. La musica ha in effetti contribuito attraverso le riflessioni di teorici della musica, analisti e compositori ad aprire nuovi orizzonti di ricerca all'interno della matematica, come storicamente è avvenuto per il calcolo combinatorio e la teoria dei grafi rispettivamente nel XVII e XVIII secolo e come continua a fare oggi nei laboratori di ricerca matematica di tutto il mondo.

*Nato a Schaffhausen (Svizzera) nel 1971, Moreno Andreatta è laureato in matematica all'università di Pavia, diplomato in pianoforte al conservatorio di Novara e titolare di un dottorato in musicologia all'EHESS di Parigi. Membro fondatore della Society for Mathematics and Computation in Music, è direttore di ricerca CNRS all'IRMA di Strasburgo e ricercatore associato all'IRCAM. Insegna i modelli matematici nella canzone nel corso di laurea sulla popular music dell'università di Strasburgo e musicologia computazionale nel Master ATIAM della Sorbona.*

Pagina web: [www.morenoandreatta.com](http://www.morenoandreatta.com).

## Sommario

- Introduzione
- MATEMATICA E MUSICA
  - Qualche parola per cominciare
  - Quando la musica precede la matematica...
  - Formalizzazione algebrica delle strutture musicali
  - Il Tonnetz e le sue generalizzazioni
  - Da Minkowski a Fuglede: canoni ritmici a mosaico e congetture aperte
- I MAESTRI DELLA STORIA DELLA MATEMATICA
  - Babbage e Lovelace
- GIOCHI MATEMATICI
  - Matematica
  - Soluzioni
- ESERCIZI
  - Soluzioni

# Introduzione

Che rapporto c'è fra la matematica e la musica? La riflessione sui rapporti fra queste due discipline, che possiamo affermare cominci con Pitagora (almeno per quanto riguarda la storia del pensiero filosofico in Occidente), ha di fatto attraversato i secoli per giungere sino a noi incorporando, di volta in volta, dei campi della matematica dove il legame ha potuto trovare un fondamento teorico e nuove possibilità di applicazioni in ambito non solo musicale ma nella matematica stessa. La musica ha in effetti contribuito attraverso le riflessioni di teorici della musica, analisti e compositori ad aprire nuovi orizzonti di ricerca all'interno della matematica, come storicamente è avvenuto per il calcolo combinatorio e la teoria dei grafi rispettivamente nel XVII e XVIII secolo e come continua a fare oggi nei laboratori di ricerca “matemusicale” di tutto il mondo.

In questo volume troverete non solo alcuni spunti di carattere storico ma soprattutto dei concetti teorici che spaziano in diversi campi della matematica, dall'algebra alla topologia passando per la combinatoria e la teoria dei grafi. Si tratta di idee e costruzioni a volte estremamente intuitive che spero possano convincere il lettore che non solamente la matematica si applica in modo naturale alla musica ma che la musica può applicarsi, a sua volta, alla matematica permettendole di toccare quelle corde della sensibilità senza le quali la matematica stessa resterebbe un puro gioco di simboli astratti retti da assiomi che possono essere modificati ad libitum, producendo un'infinità non numerabile di risultati tecnici la maggior parte dei quali finirebbe per non avere alcun interesse, innanzitutto per i matematici stessi. La musica permette, in altre parole, di rendere concreti i concetti matematici senza svuotarli del loro contenuto simbolico ma esaltandone la capacità di descrivere, in modo diverso, il mondo in cui viviamo. Per dirla col matematico James Joseph Sylvester, “la musica è la matematica dei sensi; la matematica è la musica della ragione”.

Riassumere la complessità e la ricchezza dei rapporti fra musica e matematica in un breve saggio è senza dubbio un'operazione ad alto rischio. Inevitabilmente, nella scelta degli argomenti, mi sono lasciato influenzare dalla mia propria esperienza nel campo della ricerca “matemusicale” contemporanea. Nel primo quarto di questo ventunesimo secolo, il campo dei rapporti fra matematica e musica si è progressivamente istituzionalizzato, grazie alla creazione, nel 2007, di un *network* internazionale, la *Society for Mathematics and Computation in Music* (SMCM), a cui fa capo la prima rivista di matematica applicata alla musica (il *Journal of Mathematics and Music*). Al lettore che volesse avere una visione più ampia sulle diverse direzioni di ricerca nella materia consiglio semplicemente di sfogliare i vari *Proceedings* della conferenza internazionale biennale *Mathematics and Computation in Music* (MCM) e potrà così rendersi conto del carattere estremamente limitato del presente lavoro. Interi campi di ricerca “matemusicale” sono infatti assenti, quali – per esempio – la *Word Theory* (che riguarda lo studio algebrico e combinatorio delle strutture ‘deboli’, come per esempio i semigrupp), la *Formal Concept Analysis* o la *Mathematical Morphology* (nelle quali la formalizzazione algebrica si applica alle strutture d'ordine come i lattici) o, per citare l'esempio senza dubbio più emblematico del processo d'astrazione incessante nella formalizzazione delle strutture e processi musicali, la teoria delle categorie. La formalizzazione matematica della teoria trasformazionale di David Lewin e la generalizzazione di costruzioni quali i “Klumpenhower Networks” grazie alla teoria delle categorie costituiscono in effetti degli assi di ricerca estremamente promettenti, in particolare per chi ambisca a stabilire dei nessi fra la

modellizzazione di strutture e processi compositivi e la cognizione e percezione musicali. Il lettore interessato ad approfondire questi ultimi argomenti troverà ampia documentazione sulla pagina web del progetto SMIR (*Structural Music Information Research*, consultabile a <http://repmus.ircam.fr/moreno/smir>), la cui ambizione è per l'appunto quella di costituire una piattaforma di ricerca e di riflessione per l'utilizzazione di strumenti matematici avanzati nel campo della musicologia computazionale.

## 1 Quando la musica precede la matematica...

### Pitagora e il monocordo

Non sappiamo se Pitagora sia realmente esistito, né se lo strumento musicale che tradizionalmente gli si associa, sorta di chitarra con una sola corda, sia veramente attribuibile al filosofo greco. Ma se cerchiamo di capire a che momento della storia del pensiero filosofico occidentale possiamo far risalire i primi tentativi di spiegare la musica attraverso l'uso dei numeri, la figura di Pitagora si impone in maniera naturale e con essa l'importanza del monocordo in quanto strumento nello stesso tempo musicale e concettuale. Attraverso il monocordo, la scuola pitagorica ha potuto infatti mettere in evidenza le relazioni fra la lunghezza di una corda e la nota percepita quando questa è pizzicata e sviluppare così la teoria dei numeri razionali  $\mathbb{Q}$  partendo dagli intervalli musicali.



Fig. 1 – Pitagora e il monocordo (© Math'n Pop)

Supponiamo infatti che una corda pizzicata produca una nota di una certa altezza, per esempio la nota *do* corrispondente ad una frequenza di circa 262 Hz, ovvero 262 vibrazioni al secondo. Dividendo la corda a metà e pizzicandola di nuovo si ottiene un suono la cui frequenza è pari al doppio di quella iniziale. L'intervallo che separa le due note, quella iniziale e quella ottenuta dividendo la corda a metà, è detto intervallo di *ottava* e si tratta dell'intervallo più consonante, dopo l'unisono (ovvero un suono sovrapposto a se stesso). Dividendo la corda in tre parti e prendendo due terzi della lunghezza della corda si ottiene un intervallo avente un rapporto di frequenza uguale a  $3/2$ . Si tratta di un altro intervallo estremamente consonante che prende il nome di intervallo di *quinta* (che chiameremo “pura”, per distinguerla dall'intervallo di quinta “temperata” che introdurremo più in là). A partire da quest'intervallo generatore e attraverso delle semplici moltiplicazioni di frazioni, è possibile ritrovare tutti i numeri razionali associati alle note della scala diatonica pitagorica, ovvero la scala musicale costituita dalle note *do, re, mi, fa, sol, la, si, do* e costruita partendo dall'intervallo di quinta giusta.

Per trovare la nota *re*, per esempio, basta moltiplicare  $3/2$  per se stesso e si ottiene in questo modo la nota che dista una quinta dal *sol*, ovvero il *re* dell'ottava superiore, che sarà quindi in rapporto di  $3/2 \times 3/2 = 9/4$  rispetto alla nota di partenza. Basterà dividere il tutto per due e scendere quindi di un'ottava per ritrovare la nota *re* che è immediatamente successiva a quella da cui eravamo partiti. L'intervallo corrispondente sarà quindi pari alla metà di  $9/4$ , ovvero  $9/8$  (Fig. 2).

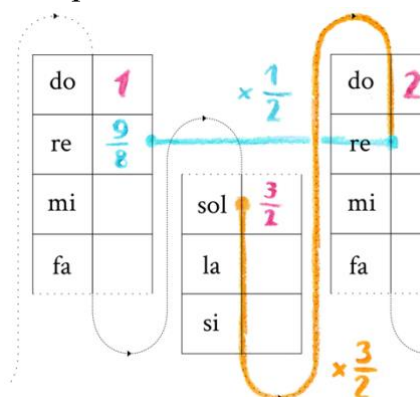


Fig. 2 – La costruzione della gamma diatonica pitagorica a partire dall'intervallo di quinta (pura)

Nella sezione consacrata agli esercizi il lettore potrà completare il procedimento appena visto e ritrovare in questo modo i numeri razionali associati a tutte le note mancanti della scala diatonica. Potrà inoltre scoprire che, partendo da una nota presa come origine della scala pitagorica e procedendo di quinta in quinta, ovvero attraverso moltiplicazioni di  $3/2$ , non si arriverà mai ad una nota che dista esattamente un numero intero di ottave dalla nota di partenza. In altre parole, la spirale delle quinte, nel sistema pitagorico, è infinita e non si chiude mai in una struttura ciclica, come avviene per il circolo delle quinte in un sistema temperato equabile quale quello alla base dell'accordatura del pianoforte. Per provare questa asserzione si utilizza la stessa tecnica dimostrativa che permette di affermare che  $\sqrt{2}$  è un numero irrazionale. È quindi un gioco da ragazzi, o quasi, che invitiamo il lettore a fare senza sbirciare nella sezione contenente le soluzioni agli esercizi...

## Marin Mersenne e il calcolo combinatorio

Dato un insieme di note musicali, quante melodie possiamo comporre? Tutto dipende, ovviamente, da cosa si intende per melodia e quando possiamo considerare che due melodie sono fra loro equivalenti. Senza addentrarci, per il momento, in una presentazione rigorosa del problema, che sarà ampiamente trattato nel capitolo consacrato alla formalizzazione algebrica, possiamo affermare che questa domanda è all'origine di un intero campo della matematica, noto come calcolo combinatorio. La domanda se l'è posta il teorico della musica e matematico Marin Mersenne che nel XVII secolo enumera le melodie possibili di cardinalità  $n$ , ovvero formate da  $n$  note che non si ripetono, ove per definizione una melodia è semplicemente una delle possibili disposizioni temporali delle  $n$  note, senza alcuna precisione sulle loro durate. Formalizzare la melodia in questi termini, come lo propone Mersenne, fa sicuramente storcere il naso a più di un musicista, ma la trattazione del teorico e matematico francese ha l'enorme vantaggio di ridurre un problema musicale ad un'enumerazione di oggetti matematici ben precisi, ovvero le  $n!$  permutazioni degli  $n$  oggetti in questione. Con quattro note, per esempio, si ottengono  $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  melodie possibili (ove  $n!$  si

legge “ $n$  fattoriale” e corrisponde al prodotto di  $n$  per tutti i numeri interi ad esso inferiori). Se il numero delle note della melodia è pari a 12, come nel caso delle serie dodecafoniche, si ottengono potenzialmente  $12!=479.001.600$  “melodie” possibili (in realtà molte di meno a causa delle proprietà di simmetria e quindi delle relazioni di equivalenza che è possibile definire fra le varie soluzioni). Mersenne anticipa, in questo modo, dei risultati che saranno sistematizzati quasi un secolo più tardi nel trattato *Ars Conjectandi* di Jacques Bernoulli, lavoro che è considerato come la prima *summa* del calcolo combinatorio e probabilistico.

Il problema della classificazione di oggetti musicali (melodie, accordi, serie dodecafoniche, pattern ritmici, ...) è centrale nella teoria musicale. Da Mersenne in poi assistiamo ad una vera e propria ricerca sistematica dei vari cataloghi musicali, ricerca che si appoggia – a partire dalla seconda metà del XX secolo – sugli strumenti teorici che permetteranno di precisare cosa si intende per “equivalenza” e come si calcolano le “classi di equivalenza” dato un *insieme* di oggetti musicali e un *gruppo* di trasformazioni che operano sul dato insieme. La classificazione algebrica delle strutture musicali sfrutta una rappresentazione geometrica della musica introdotta dallo stesso Mersenne come alternativa al monocordo pitagorico: la rappresentazione circolare (Fig. 3).

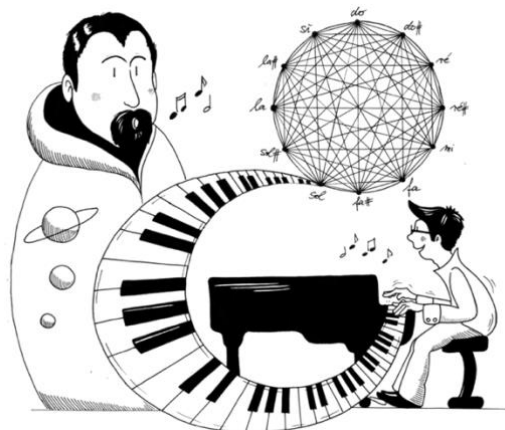


Fig. 3 – Marin Mersenne e la rappresentazione circolare (© Math'n Pop)

A differenza del monocordo pitagorico, l’“orologio musicale” di Mersenne permette di rappresentare nello stesso tempo le note musicali (in quanto punti nel cerchio), gli intervalli (in quanto segmenti che connettono due punti nel cerchio) ma anche strutture più complesse come le melodie (che diventano grafi orientati) o gli accordi (poligoni iscritti nel cerchio). La rappresentazione utilizza di fatto la teoria delle congruenze modulo 12 (e, più in generale, modulo  $n$  se il cerchio è diviso in  $n$  parti uguali) e la struttura di gruppo ciclico alla base del temperamento equabile, ovvero della divisione dell’ottava in 12 parti uguali. Il gruppo è generato da particolari intervalli, uno dei quali corrisponde all’intervallo di quinta che abbiamo già visto precedentemente (Fig. 4).

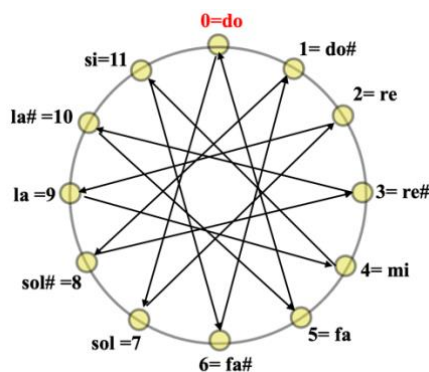


Fig. 4 – La quinta (temperata) come intervallo generatore dell’orologio musicale

## Leonardo Eulero e la rappresentazione planare dell’armonia

Dopo aver avuto una prima intuizione dell’utilità della rappresentazione circolare attraverso la quale è possibile formalizzare gli accordi musicali come poligoni iscritti nel cerchio, e sulla quale torneremo ampiamente nel prossimo capitolo, è lecito chiedersi se esista una rappresentazione geometrica che permette di rappresentare non solo gli accordi ma anche le progressioni armoniche, ovvero una famiglia o collezione di accordi che si susseguono nel tempo. Una tale rappresentazione è stata introdotta dal matematico e teorico della musica Leonardo Eulero nella seconda metà del XVIII secolo. Affascinato dalla musica ma nello stesso tempo da problemi riguardanti la possibilità di realizzare percorsi e passeggiate a piedi in città come a cavallo nel gioco degli scacchi, Eulero propone di abbandonare la rappresentazione circolare di Mersenne per disporre le note musicali in uno spazio geometrico bidimensionale che chiama lo *Speculum Musicum*, ovvero lo “specchio musicale” (Fig. 5)



Fig. 5 – Leonardo Eulero e lo *Speculum Musicum* (© Math’n Pop)

Il termine “specchio” è particolarmente suggestivo in quanto le relazioni fra gli accordi maggiori e quelli minori diventano in questa nuova rappresentazione delle simmetrie speculari. Per rendere evidenti queste simmetrie assiali è stato necessario elaborare una versione più geometrica dello *Speculum Musicum*, il cosiddetto “Tonnetz”, nella quale accordi consonanti sono gli elementi-base della triangolazione del piano e le trasformazioni maggiore/minore, in particolare quelle parsimoniose (che preservano ogni volta due note dell’accordo e modificano la nota restante di un intervallo minimale di tono o semitono) corrispondono alle simmetrie planari che preservano uno

dei tre lati di un dato triangolo. Analizzeremo in dettaglio le principali proprietà algebriche e topologiche del Tonnetz e delle sue varianti nel terzo capitolo consacrato alle teorie trasformazionali di cui questa rappresentazione musicale costituisce un esempio fra i più celebri.

## Di tassellazione in tassellazione: Messiaen e i canoni ritmici a mosaico

Concludiamo questo breve panorama storico sui rapporti fra matematica e musica e in particolare sull'influenza della musica nello sviluppo della matematica menzionando un problema musicale che ha anch'esso permesso di allargare le frontiere della ricerca matematica. Benché non sia all'origine di nuovi sottocampi della matematica, come è avvenuto storicamente per il calcolo combinatorio o la teoria dei grafi, esso ha mostrato una volta di più il legame profondo fra processi compositivi e problemi aperti in matematica. Si tratta della costruzione di canoni ritmici a mosaico, una tecnica compositiva che potrebbe addirittura costituire la chiave, come accenneremo nel seguito, per la soluzione di celebri problemi aperti in matematica (come la congettura di Fuglede o congettura spettrale). Ma procediamo passo a passo. Un *canone musicale* è la ripetizione, ad intervalli di tempo opportunamente fissati, di uno stesso pattern melodico-ritmico. L'esempio che tutti hanno in testa, o piuttosto nell'orecchio, è *Fra Martino* (o l'equivalente francese *Frère Jacques* o ancora *Bruder Jacob* o *Brother John* se cantiamo la melodia rispettivamente nella lingua di Goethe o di Shakespeare). In tutti i casi una melodia di base viene cantata (o suonata) a più voci e ogni voce entra ad intervalli di tempo regolari in modo tale che il rapporto "verticale" fra le varie voci corrisponda all'armonizzazione voluta. Possiamo far risalire al compositore e teorico della musica Olivier Messiaen l'idea di costruire dei canoni musicali facendo astrazione degli aspetti armonici ma focalizzandosi esclusivamente sul ritmo. Brani quali *Visions de l'Amen* (1943) per due pianoforti o *Harawi* (1945) per soprano e pianoforte testimoniano del desiderio del compositore di creare composizioni nelle quali, come egli stesso afferma, "le diverse sonorità si mescolano o si oppongono in maniera estremamente diversificata, mai allo stesso tempo né nello stesso momento. È un disordine organizzato". Un estratto di *Harawi* è rappresentato in Fig. 6 in notazione tradizionale accompagnata dalla riduzione ritmica (griglia e pattern ritmico generatore del canone) nella quale si può notare la presenza, sempre più marcata, di eventi sonori che si sovrappongono, in contraddizione con quanto affermato dal compositore francese.

Fig. 6 – Un estratto del brano *Harawi* d'Olivier Messiaen in notazione tradizionale e nella sua riduzione ritmica e decomposizione del ritmo alla base del canone in tre pattern ritmici palindromi.



Nonostante il fatto che manchi in Messiaen una formalizzazione rigorosa del processo compositivo in grado di ottenere il risultato richiesto, vi è indubbiamente l'intuizione, da parte del compositore, di una proprietà globale che corrisponde a quello che i matematici sono soliti indicare come un *tiling*, ovvero una tassellazione dell'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali attraverso traslazioni temporali di un suo sottoinsieme finito. Vedremo nel seguito come descrivere in maniera rigorosa la costruzione dei canoni ritmici a mosaico attraverso il concetto di *fattorizzazione* di un gruppo o di un polinomio ad esso associato.

## 2 Formalizzazione algebrica delle strutture musicali

### Frazioni continue e temperamenti musicali

Prima di addentrarci nella formalizzazione algebrica di scale e accordi musicali all'interno della divisione dell'ottava in dodici parti uguali, accenniamo ad un problema che ha percorso la storia dei rapporti fra musica e matematica, ovvero il problema del temperamento musicale. Concentriamoci sul caso del temperamento equabile, ovvero della divisione dell'ottava in  $n$  parti uguali. Perché scegliere di dividere l'ottava in 12 parti anziché, per esempio, in 19? A questa domanda possiamo rispondere in vari modi, privilegiando di volta in volta considerazioni matematiche astratte o di tipo fisico-acustico, oppure cercando di trovare un buon compromesso fra queste due prospettive ugualmente pertinenti nella formalizzazione delle strutture musicali. Fra i vari approcci allo studio del temperamento equabile, quello basato sulle frazioni continue merita sicuramente un'attenzione particolare per l'eleganza delle costruzioni e la portata dei risultati ottenuti. Ricordiamo che un qualsiasi numero reale  $\alpha \in \mathbb{R}$  può essere rappresentato come una frazione continua, ovvero un'espressione del tipo:

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

Per evidenti ragioni tipografiche, useremo la notazione compatta  $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$  al posto della notazione *in extenso* precedente. Ricordiamo che se  $\alpha \in \mathbb{Q}$  la frazione continua che lo rappresenta è finita, mentre così non è per un numero irrazionale (e, a fortiori, per un numero trascendente come già aveva mostrato Eulero nel caso di  $\pi$ ). Data una frazione continua il convergente (di ordine  $n$ ) è il numero razionale  $c_n$  ottenuto troncando la frazione continua al livello di  $a_n$  ovvero  $c_n = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Partendo dall'intervallo di quinta giusta, pari a  $3/2$ , il problema della divisione dell'ottava in un certo numero di parti uguali è equivalente a trovare due numeri interi non nulli  $p$  e  $q$ , tali che ripetendo  $q$  volte l'intervallo di quinta giusta si arriva ad approssimare al meglio  $p$  ottave. Si tratta quindi di trovare i valori di  $p$  e di  $q$  che permettono di approssimare al meglio i valori  $2^p$  e  $(3/2)^q$ , ovvero – passando ai logaritmi – di minimizzare la quantità  $|p/q - \log_2(3/2)|$ . Il problema si riduce quindi a trovare i convergenti della frazione continua associata al numero irrazionale  $\alpha = \log_2(3/2) = [1; 1, 2, 2, 3, 1, \dots]$ .

A parte i primissimi valori dei convergenti, che non danno delle buone approssimazioni, si ottengono in questo modo dei sistemi nei quali  $q$  quinte corrispondono all'incirca a  $p$  ottave. I valori più interessanti dei convergenti sono i seguenti:

- $[1;1,2,2]=7/12$  che corrisponde ad un sistema nel quale 7 ottave approssimano 12 quinte
- $[1;1,2,2,3]=24/41$  che corrisponde all'approssimazione di 24 ottave attraverso 41 quinte
- $[1;1,2,2,3,1]=31/53$  che corrisponde all'approssimazione di 31 ottave attraverso 53 quinte.

Il valore del denominatore dei convergenti precedenti corrisponde rispettivamente alle divisioni dell'ottava in 12, 41 o 53 parti, dei sistemi che ritroviamo storicamente nei lavori che hanno occupato i teorici del temperamento fra i quali ricordiamo Pál Janko (per la divisione in 41 parti proposta nella seconda metà del XIX secolo) e William Holder e Nicolaus Mercator (per la divisione dell'ottava in 53 parti, proposta che risale al XVII secolo). La costruzione basata sulle frazioni continue ha il grande vantaggio di essere indipendente dall'intervallo generatore che può non essere quello di quinta giusta. Dato un intervallo espresso da un numero razionale  $a/b$ , il problema precedente si generalizza a trovare due numeri interi non nulli  $p$  e  $q$ , tali che ripetendo  $q$  volte l'intervallo corrispondente al rapporto  $a/b$  si arriva ad approssimare al meglio  $p$  ottave. Oltre all'intervallo di quinta giusta, due intervalli sono stati considerati come generatori del sistema di divisione dell'ottava, ovvero l'intervallo di terza maggiore (pari al rapporto  $5/4$ ) e l'intervallo di terza minore (pari al rapporto  $6/5$ ). Nel secondo caso si ritrova il sistema enneadecafonico, ovvero divisione dell'ottava in 19 parti, teorizzato indipendentemente da Gioseffo Zarlino e Francisco de Salinas nel XVI secolo e riproposto, in maniera rigorosa, dal matematico pavese Emilio Gagliardo nei suoi lavori sulla generalizzazione del concetto di tonalità risalenti agli anni Ottanta del secolo scorso.

Come abbiamo accennato, nella teoria del temperamento si tratta di trovare un compromesso fra le proprietà acustiche e quelle matematiche del sistema. In effetti, per quanto alcune soluzioni possano essere soddisfacenti da un punto di vista fisico-acustico, la scelta di dividere l'ottava in 19, 41 o 53 parti uguali riduce, di fatto, le qualità combinatorie – e quindi compositive – del temperamento risultante, come la sezione seguente cercherà di illustrare.

## **Elementi di analisi insiemistica di scale e accordi nel temperamento equabile**

È giunto il momento di entrare nei dettagli della formalizzazione algebrica delle strutture musicali (scale, modi, accordi, ...) introducendo dei concetti che potranno poi essere applicati ad altri parametri musicali, in particolare a quelli ove la periodicità gioca un ruolo centrale, quali il ritmo. Cominciamo con l'adattare alla musica alcune definizioni insiemistiche introdotte, in modo indipendente, da teorici della musica e compositori negli Stati Uniti (Milton Babbitt, Allen Forte, John Rahn, Robert Morris, ...) e in Europa (Iannis Xenakis, Pierre Barbaud, Anatol Vieru, André Riotte, Marcel Mesnage, Guerino Mazzola, ...). Per una trattazione critica degli approcci insiemistici in musica in una prospettiva inglobante la tradizione americana e europea, si veda il volume collettivo intitolato *Around Set Theory. A French-American Musicological Meeting*, che abbiamo curato in occasione di un convegno internazionale svoltosi nel 2003 all'IRCAM (Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique) di Parigi.

**Definizione 2.1:** Un *insieme di classi di altezze* (o “pitch-class set”) è una collezione non ordinata di note musicali modulo l’ottava ovvero un insieme di elementi del gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_{12}$  di ordine 12.

Notiamo che per definire l’insieme di classi di altezza abbiamo definito una relazione di *congruenza modulare* sull’insieme  $\mathbb{Z}$  dei numeri interi. Più esattamente si tratta della relazione “ $\sim$ ” di congruenza modulo 12 che permette di definire per ogni intero  $a$  l’insieme  $\{b \mid a \sim b \text{ modulo } 12\}$  ovvero l’insieme  $\{b \mid b - a = k \cdot 12\}$ . Come nella definizione generale di una classe di equivalenza, la *classe di equivalenza* per una altezza o nota musicale generica  $a$  sarà indicata con  $[a]$ - oppure con  $[a]$  o, più semplicemente, con  $a$  quando non vi sia alcuna ambiguità. Tradizionalmente si associa alla nota *do* l’intero 0. In tal modo la classe di equivalenza dell’altezza *do* rispetto alla relazione di congruenza modulo 12 è data dall’insieme  $[0] = \{\dots, -24, -12, 0, 12, 24, \dots\}$ . Analogamente, la nota *do#* sarà associata alla classe di altezza  $[1] = \{\dots, -25, -13, 1, 13, 25, \dots\}$ . L’operazione d’equivalenza modulo 12 corrisponde quindi alla riduzione *modulo l’ottava* ovvero all’interpretazione di una nota musicale indipendentemente dalla sua posizione reale rispetto alle varie ottave musicali. Come nel caso generale della congruenza  $\sim$  modulo  $n$ , la relazione di congruenza modulo 12 definisce una partizione dell’insieme nell’insieme  $\mathbb{Z}$  degli interi e la collezione delle classi di equivalenza si indica con  $\mathbb{Z} / \sim$  o più frequentemente con  $\mathbb{Z} / 12 \mathbb{Z}$  o ancora con  $\mathbb{Z}_{12}$ . Notiamo inoltre sin da subito che nella formalizzazione algebrica tradizionale si suppone un’equivalenza “enarmonica” fra, per esempio, il *do#* e il *reb*, le cui classi di altezze saranno entrambe rappresentate dallo stesso insieme precedente (Fig. 7).

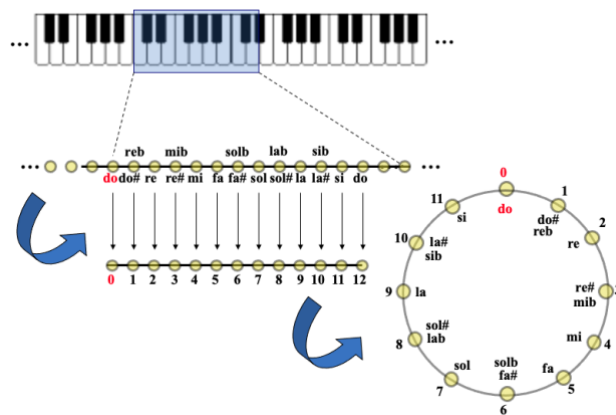


Fig. 7 – Costruzione dell’orologio musicale partendo dal temperamento equabile rappresentato dal pianoforte via la riduzione modulo l’ottava e la proprietà di enarmonia

Secondo la tradizione insiemistica in teoria della musica, un sottoinsieme  $A \subseteq \mathbb{Z}_{12}$  di classi di altezze definisce nello stesso tempo un accordo o una scala musicale e noi adotteremo questa convenzione per semplificare la presentazione benché nella definizione di scala (come in quella di “modo” o di “melodia”) vi sia implicitamente una proprietà di ordine (totale) sui suoi elementi. La formalizzazione algebrica in termini di collezioni non ordinate di elementi permette, ciononostante, di presentare in modo elegante le principali proprietà legate al concetto di simmetria rispetto alle due operazioni di base della musica: la *trasposizione* e l’*inversione*. Cominciamo a definire la trasposizione e alcune proprietà ad essa legate.

**Definizione 2.2:** Dato un intero  $k \in \mathbb{Z}_{12}$ , la *trasposizione* di  $k$  semitoni è un'applicazione  $T_k$  da  $\mathbb{Z}_{12}$  in se stesso che trasforma una classe di altezza  $x \in \mathbb{Z}_{12}$  nella classe  $x+k$ .

Notiamo che l'addizione precedente va fatta modulo 12 e che la definizione si estende naturalmente all'insieme potenza  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$  ovvero ai sottoinsiemi  $A \subseteq \mathbb{Z}_{12}$ . La trasposizione  $T_k$  di  $k$  semitoni dell'insieme  $A$  è l'insieme  $B$  i cui elementi sono ottenuti trasponendo tutti e soli gli elementi di  $A$ . Scriveremo formalmente  $T_k(A)=B$  per indicare il risultato dell'operazione di trasposizione di  $k$  semitoni applicata all'insieme  $A$ . Per esempio, adottando la convenzione secondo la quale la classe di altezza *do* è rappresentata dall'intero 0, l'accordo di *do* maggiore è dato dall'insieme  $C=\{0, 4, 7\}$ . Le dodici *trasposizioni*  $T_k(C)$  dell'accordo di *do* maggiore sono ottenute facendo variare l'indice di trasposizione  $k$  su tutti i valori di  $\mathbb{Z}_{12}$ . Per ottenere l'accordo  $G$  di *sol* maggiore, per esempio, basta scegliere  $k=7$  dato che  $T_7(\{0, 4, 7\})=\{0+7, 4+7, 7+7\}=\{7, 11, 2\}$ , il tutto modulo 12. Si ottiene quindi l'espressione  $G=T_7(C)$  che indica che l'accordo di *sol* maggiore è ottenuto trasponendo l'accordo di *do* maggiore di un intervallo pari alla quinta (ovvero 7 semitoni). La figura seguente mostra l'interpretazione geometrica dell'operazione di trasposizione  $T_7$  in quanto rotazione di un poligono iscritto nel cerchio di un angolo pari a  $7\pi/6$  radianti attorno al centro (Fig. 8).

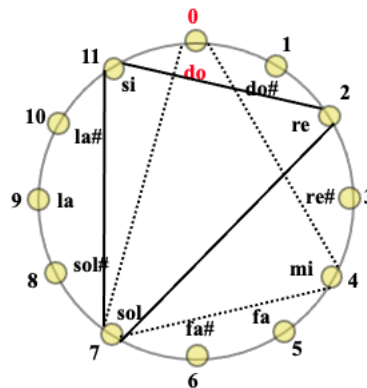


Fig. 8 – La trasposizione alla quinta dell'accordo di *do* maggiore in quanto rotazione del triangolo associato di un angolo di  $7\pi/6$  (ovvero  $210^\circ$ ) attorno al centro.

**Proprietà:** La relazione di *trasposizione* fra accordi definisce quindi una relazione di *equivalenza* sull'insieme potenza  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$  in quanto essa è riflessiva, simmetrica e transitiva. Si può quindi affermare che l'accordo  $C$  di *do* maggiore è equivalente all'accordo  $G$  di *sol* maggiore e scrivere formalmente che  $C \sim G$ .

In generale, una trasposizione  $T_k$  di un accordo generico è equivalente da un punto di vista geometrico ad una rotazione di un angolo di  $k\pi/6$  attorno al centro del poligono corrispondente iscritto nel cerchio. In quanto rotazione, la trasposizione preserva gli intervalli successivi dell'accordo e quindi la sua natura. In altre parole, nella teoria musicale il *tipo* di accordo (maggiore, minore, aumentato, diminuito, ...) è implicitamente definito modulo la trasposizione. Definire un accordo modulo la trasposizione significa utilizzare la struttura intervallare come *invariante* algebrico.

**Definizione 2.3:** Dato un sottoinsieme  $A \subseteq \mathbb{Z}_{12}$  la sua *struttura intervallare* (*interval structure*) è data dall'insieme ordinato delle differenze degli intervalli fra le note successive di  $A$ . Formalmente, se  $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , la sua struttura intervallare  $IS_A$  è data dall'insieme ordinato  $IS_A = (a_1 - a_0, a_2 - a_1, \dots, a_m - a_{m-1})$

Ad esempio, le strutture intervallari della scala diatonica  $\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$  e pentatonica  $\{0, 2, 4, 7, 9\}$  sono date rispettivamente dagli insiemi  $(2, 2, 1, 2, 2, 2, 1)$  e  $(2, 2, 3, 2, 3)$ . Come abbiamo osservato precedentemente, la struttura intervallare, in quanto enumerazione degli intervalli successivi fra le note di un accordo, descrive un sottoinsieme di  $\mathbb{Z}_{12}$  assieme a tutte le sue trasposizioni musicali (o rotazioni). Nonostante la semplicità apparente di questa prima operazione musicale, vi sono dei problemi estremamente interessanti, dal punto di vista teorico, che derivano direttamente dalla definizione algebrica della trasposizione. Due fra i più celebri problemi sono probabilmente quelli legati alla classificazione di scale musicali o modi che possono essere ricondotti al concetto di *simmetria trasposizionale*, eventualmente attraverso il passaggio al complementare. Si tratta delle nozioni di “modo a trasposizione limitata” e di “esacordo omnicombinatorio”. Questi problemi sono stati introdotti da due teorici della musica e compositori del secolo scorso, Olivier Messiaen e Milton Babbitt, e hanno permesso di chiarificare il ruolo del concetto di *gruppo* nella combinatoria musicale, contribuendo a far crescere l'interesse della comunità matematica per la classificazione algebrica delle strutture musicali.

**Definizione 2.4:** Un modo di Messiaen a trasposizione limitata è un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{Z}_{12}$  che è invariante rispetto ad un'operazione di trasposizione  $T_k$  con  $k \neq 0$  (modulo 12). In altre parole,  $\exists k \in \mathbb{Z}_{12}$ , con  $k \neq 0$  tale che  $T_k(A) = A$ .

Esempi elementari di modi a trasposizione limitata sono le scale musicali associate a poligoni regolari, quali la scala cromatica e la scala per toni interi (o scala esatonale: do, re, mi, fa♯, sol♯, la♯). Il problema del calcolo esplicito di tutti i modi di Messiaen a trasposizione limitata e delle loro estensioni microtonali ad un sistema temperato equabile  $\mathbb{Z}_n$ , che lasciamo per il momento aperto, è estremamente interessante da un punto di vista dell'algebra combinatoria in quanto esso fa intervenire direttamente il concetto di *azione* di un gruppo su un insieme attraverso un risultato generale, il Lemma di Burnside, che permette di calcolare il numero delle classi d'equivalenza indotte da tale azione. Il problema può comunque essere risolto con strumenti elementari, attraverso l'uso della struttura intervallare.

I modi (scale, accordi) a trasposizione limitata di Messiaen sono in effetti tutti e soli i sottoinsiemi  $A$  di  $\mathbb{Z}_{12}$  le cui strutture intervallari sono “ridondanti” ovvero della forma  $(x_1, x_2, \dots, x_m, x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_1, x_2, \dots, x_m)$ . La struttura intervallare, attraverso la periodicità dei suoi elementi, cattura quindi integralmente l'idea della simmetria trasposizionale. Inoltre, il lettore potrà verificare che il fattore di trasposizione  $k$  che soddisfa l'equazione  $T_k(A) = A$  è data dalla somma degli elementi che costituiscono la componente “non ridondante” della struttura intervallare, ovvero  $k = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ . Otteniamo in questo modo il catalogo completo dei quindici sottoinsiemi di  $\mathbb{Z}_{12}$  a trasposizione limitata descritti in termini delle seguenti strutture intervallari alle quali associamo una descrizione musicale, riprendendo – dove possibile – il catalogo originario dei modi di Messiaen che il compositore francese aveva stilato, seppur in maniera incompleta:

- (6, 6) bicordo corrispondente all'intervallo di tritono (o "diabolus in musica")
- (4, 4, 4) triade aumentata
- (3, 3, 3, 3) accordo di settima diminuita
- (2, 4, 2, 4)
- (1, 5, 1, 5)
- (2, 2, 2, 2, 2, 2) primo modo di Messiaen (scala per toni interi o scala esatonale)
- (1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2) secondo modo di Messiaen (scala ottatonica)
- (1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2) terzo modo di Messiaen
- (1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 3) quarto modo di Messiaen
- (1, 1, 4, 1, 1, 4) quinto modo di Messiaen
- (1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2) sesto modo di Messiaen
- (1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2) settimo modo di Messiaen
- (1, 2, 3, 1, 2, 3)
- (1, 3, 2, 1, 3, 2)
- (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) scala cromatica

Se Olivier Messiaen, nella sua pratica compositiva di tipo modale, era interessato a scale musicali e modi aventi cardinalità variabile, il teorico e compositore dodecafonico Milton Babbitt si è concentrato sugli esacordi, ovvero le strutture armoniche contenenti sei elementi. Esse possono essere considerate come i mattoncini di base nella costruzione e formalizzazione delle serie dodecafoniche attraverso il concetto di "omni-combinatorialità esacordale" (*Hexachordal All-Combinatoriality*) d'ordine variabile.

**Definizione 2.5:** Un esacordo  $H$  è omni-combinatorio di ordine 1 se esiste *un solo* valore di trasposizione  $T_k$  per il quale  $T_k(H)=H'$  ove  $H' = \mathbb{Z}_{12} \setminus H$  è il complementare di  $H$  rispetto allo spazio totale  $\mathbb{Z}_{12}$ .

Allo stesso modo, per ogni divisore  $h$  di 12, Milton Babbitt definisce il concetto di omni-combinatorialità esacordale di ordine  $h$  che caratterizza tutti e soli gli esacordi per i quali esistono  $h$  fattori di trasposizione  $T_k$  in grado di trasformare l'esacordo di partenza nel suo complementare. Come nel caso dei modi di Messiaen a trasposizione limitata, è possibile esprimere il catalogo dei sei esacordi omni-combinatorii di Milton Babbitt in maniera compatta attraverso le rispettive strutture intervallari. Esso contiene tre esacordi  $H_1, H_2$  e  $H_3$  del primo ordine (ove l'unico fattore di trasposizione è  $T_6$ ), un esacordo  $H_4$  del secondo ordine (con fattori di trasposizione  $T_3$  e  $T_9$ ), un esacordo  $H_5$  del terzo ordine (con fattori di trasposizione pari a  $T_2, T_6$  e  $T_{10}$ ) e un esacordo  $H_6$  del sesto ordine (con fattori di trasposizione pari a  $T_1, T_3, T_5, T_7, T_9, T_{11}$ ). Ciascun esacordo  $H_i$  è quindi tale che  $\mathbb{Z}_{12}=H_i \cup T_k(H_i)$  dove i  $T_k$  sono i rispettivi fattori di trasposizione. Riassumendo, si ottiene il seguente catalogo nel quale abbiamo sostituito i sottoinsiemi  $H_i$  con le rispettive strutture intervallari  $H_i$ :

- $H_1 = (1,1,1,1,1,7)$

- $H_2 = (2,1,1,1,2,5)$
- $H_3 = (2,2,1,2,2,3)$
- $H_4 = (1,1,4,1,1,4)$
- $H_5 = (1,3,1,3,1,3)$
- $H_6 = (2,2,2,2,2,2)$

Notiamo che le proprietà combinatorie dell'esacordo vanno ben al di là dell'utilizzazione della trasposizione musicale ma esse riguardano, più in generale, il concetto d'*invarianza intervallare* rispetto all'operazione di passaggio al complementare. Questa proprietà generale utilizza il concetto di "contenuto intervallare" per il quale è utile introdurre una seconda trasformazione algebrico-musicale sul sistema temperato equabile  $\mathbb{Z}_{12}$ : l'inversione intervallare (o semplicemente inversione).

**Definizione 2.6:** Dato un intero  $k \in \mathbb{Z}_{12}$ , l'*inversione* di indice  $k$  è l'applicazione  $I_k$  da  $\mathbb{Z}_{12}$  in se stesso che trasforma una classe di altezza  $x \in \mathbb{Z}_{12}$  nella classe  $x - k$ .

Come nel caso della trasposizione, la definizione d'inversione modulo 12 sulle classi di altezze si estende naturalmente all'insieme delle parti di  $\mathbb{Z}_{12}$  ovvero ad un sottoinsieme  $A \subseteq \mathbb{Z}_{12}$ . L'inversione  $I_k$  dell'insieme  $A$  è l'insieme  $B$  i cui elementi sono ottenuti invertendo tutti e soli gli elementi di  $A$  rispetto all'indice  $k$ . Scriveremo formalmente  $I_k(A)=B$  per indicare il risultato dell'operazione d'inversione di indice  $k$  applicata all'insieme  $A$ .

Vediamo un esempio d'inversione, partendo sempre dalla convenzione secondo la quale la classe di altezza *do* è rappresentata dall'intero 0. Come nel caso delle trasposizioni, esistono dodici *inversioni*  $I_k(C)$  dell'accordo di *do* maggiore e queste sono ottenute facendo variare l'indice di trasposizione  $k$  su tutti i valori di  $\mathbb{Z}_{12}$ . Per ottenere l'accordo  $A_m$  di *la* minore basta scegliere  $k=4$  dato che  $I_4(\{0, 4, 7\})=\{4-0, 4-4, 4-7\}=\{4, 0, 9\}$ , il tutto modulo 12. Si ottiene quindi l'espressione  $A_m=I_4(C)$  o equivalentemente  $C=I_4(A_m)$ , due modi equivalenti per affermare che fra l'accordo di *do* maggiore e quello di *la* minore vi è una relazione d'inversione espressa attraverso la trasformazione  $I_4$  (Fig. 9).

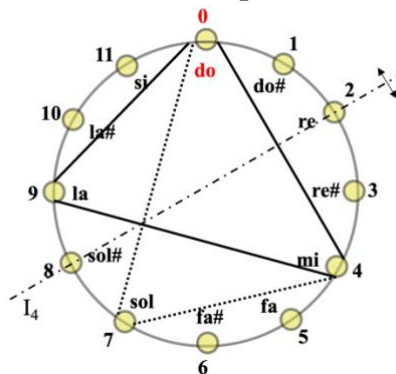


Fig. 9 – L'inversione  $I_4$  che trasforma l'accordo di *do* maggiore nel suo relativo minore in quanto simmetria assiale.

La proprietà d'*invarianza* trasposizionale di una scala musicale o di un modo, che abbiamo introdotto precedentemente, può essere facilmente generalizzata al caso delle inversioni.

**Definizione 2.7:** Un insieme  $A$  di  $\mathbb{Z}_{12}$  è “auto-inverso” (o invariante rispetto all’inversione) se esiste un valore  $k \in \mathbb{Z}_{12}$  per il quale  $I_k(A)=A$ .

Il lettore avrà notato che a differenza dell’invarianza trasposizionale, nel caso di un insieme auto-inverso è possibile che l’indice  $k$  d’inversione sia nullo. Per esempio l’accordo di *do* diminuito, che nella teoria musicale si è soliti indicare con la notazione  $C^\circ$ , è invariante rispetto a diversi valori di  $k$ , compreso il valore  $k=0$ . In effetti:  $I_0(C^\circ) = I_0\{0, 3, 6, 9\} = \{0-0, 0-3, 0-6, 0-9\} = \{0, 9, 6, 3\} = C^\circ$ .

**Definizione 2.8:** Dato un sottoinsieme  $A \subseteq \mathbb{Z}_{12}$  il suo *contenuto intervallare* (*interval content*) è dato dall’insieme delle molteplicità d’occorrenze dei vari intervalli contenuti nell’insieme  $A$ . Formalmente, se  $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_m\}$  e  $k \in \mathbb{Z}_{12}$  è un intervallo, il contenuto intervallare  $IC_A(k)$  in corrispondenza dell’intervallo  $k$  è definito nel seguente modo:

$$IC_A(k) = \#\{(a_i, a_j) \in A \times A \mid a_j - a_i = k\}.$$

Il contenuto intervallare  $IC_A$  è solitamente indicato dall’insieme di 12 valori  $[IC_A(0), IC_A(1), \dots, IC_A(11)]$  in parentesi quadra. Il lettore potrà verificare che i contenuti intervallari della scala diatonica  $\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$  e pentatonica  $\{1, 3, 6, 8, 10\}$  sono dati dagli insiemi  $[7, 2, 5, 4, 3, 6, 2, 6, 3, 4, 5, 2]$  e  $[5, 0, 3, 2, 1, 4, 0, 4, 1, 2, 3, 0]$ . Come potrà notare, vi è un rapporto evidente fra il contenuto intervallare della scala diatonica e quello della scala pentatonica, visto che i rispettivi valori differiscono per una costante. Questa proprietà è valida ugualmente per una qualsiasi coppia di sottoinsiemi complementari di  $\mathbb{Z}_{12}$ , ovvero insiemi la cui intersezione è vuota e la cui unione è pari all’intero spazio cromatico  $\mathbb{Z}_{12}$ . Essa costituisce una generalizzazione di un teorema profondo in teoria musicale: il teorema di Milton Babbitt. Questo teorema, noto anche come “Teorema dell’esacordo”, stabilisce che le molteplicità di occorrenze di ogni intervallo di un esacordo  $H$  e del suo complementare  $H^C$  sono le stesse. In altre parole, un esacordo e il suo complementare hanno lo stesso contenuto intervallare.

Il teorema dell’esacordo si generalizza inoltre al caso di due insiemi di classi di altezze  $A$  e  $B$  attraverso il concetto di “funzione intervallare” (*interval function*). Benché essa sia tradizionalmente indicata da David Lewin con l’espressione IFUNC, noi preferiamo adottare una notazione semplificata in accordo con la nozione di struttura intervallare (IS) e contenuto intervallare (IC) appena introdotti. La indicheremo quindi con  $IF_{A,B}$ .

**Definizione 2.9:** Dati due sottoinsiemi  $A, B \subseteq \mathbb{Z}_{12}$  e dato un intervallo  $k \in \mathbb{Z}_{12}$  la *funzione intervallare*  $IF_{A,B}(k)$  in corrispondenza dell’intervallo  $k$  è definita nel seguente modo:

$$IF_{A,B}(k) = \#\{(a,b) \in A \times B \mid b - a = k\}$$

Gli approcci insiemistici in teoria musicale, soprattutto in seno alla tradizione americana di Allen Forte (i cui concetti sono confluiti nel celebre trattato *The Structure of Atonal Music*), hanno privilegiato un’espressione compatta del contenuto intervallare che prende il nome di “vettore intervallare”. Esso sfrutta le proprietà simmetriche del contenuto intervallare nel quale  $IC_A(k) =$



$IC_A(12 - k)$  e la ridondanza della prima entrata dell'insieme, ovvero  $IC_A(0)$ , che corrisponde alla cardinalità dell'insieme  $A$ .

**Definizione 2.10:** Dato un sottoinsieme  $A \subseteq \mathbb{Z}_{12}$  il suo *vettore intervallare* (*interval vector*)  $IV_A$  è dato dalle sei entrate  $[IC_A(1), \dots, IC_A(6)]$  del rispettivo contenuto intervallare.

Notiamo che a differenza della trasposizione, l'inversione non permette di definire una relazione di equivalenza sull'insieme potenza  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$ . Quest'impossibilità ci spinge a considerare un gruppo più largo che possa includere nello stesso tempo le 12 trasposizioni e le 12 inversioni. Un tale gruppo esiste e corrisponde al gruppo diedrale  $\mathbf{D}_{12}$  di ordine 24.

**Definizione 2.11:** Il gruppo diedrale  $\mathbf{D}_{12}$  è l'insieme seguente  $\mathbf{D}_{12} = \{T_0, T_1, \dots, T_{11}, I_0, I_1, \dots, I_{11}\}$  nel quale la legge di composizione interna, indicata con il simbolo "°", è data dalle composizioni delle trasposizioni e inversioni.

**Definizione 2.12:** Il gruppo diedrale  $\mathbf{D}_{12}$  è generato dalle due operazioni di trasposizione  $T_k$  e inversione  $I_0=I$  con le relazioni:  $(T_k)^{12}=T_0$  e  $T_k \circ I = I \circ T_{-k}$   
 Formalmente:  $\mathbf{D}_{12} = \langle T_k, I \mid (T_k)^{12}=T_0 \text{ e } T_k \circ I = I \circ T_{-k} \rangle$

Accenniamo, per il lettore curioso o che possiede qualche rudimento di algebra, che il gruppo diedrale  $\mathbf{D}_{12}$  può essere espresso, in modo equivalente, come un prodotto semidiretto  $\mathbb{Z}_{12} \rtimes \mathbb{Z}_2$  del gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_{12}$  di ordine 12 e del gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_2$  di ordine 2, una proprietà che si generalizza facilmente al caso del gruppo diedrale  $\mathbf{D}_n$  di ordine  $2n$ .

A queste due operazioni musicali si può aggiungere una terza operazione, anch'essa pertinente da un punto di vista musicale, che è stata introdotta storicamente per ridurre ancor più il numero delle classi di equivalenza nei cataloghi musicali. Si tratta dell'operazione di "aumentazione" che può essere espressa matematicamente attraverso il concetto di applicazione affine.

**Definizione 2.13:** Un'aumentazione è un'applicazione affine  $f_{a,b} : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$  tale che  $f_{a,b}(x) = ax + b$  ove il fattore moltiplicativo appartiene al gruppo  $(\mathbb{Z}_{12})^*$  degli elementi invertibili di  $\mathbb{Z}_{12}$ , ovvero  $a \in \{1, 5, 7, 11\}$  e  $b \in \mathbb{Z}_{12}$ .

Il gruppo delle applicazioni affini  $f_{a,b} : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$  sarà indicato con  $Aff_{12}$  e come nel caso delle trasposizioni e delle inversioni, la definizione si generalizza facilmente al caso del gruppo  $Aff_n$  delle applicazioni affini da  $\mathbb{Z}_n$  in se stesso. Notiamo inoltre, per il lettore che volesse approfondire questa struttura algebrica, che è possibile esprimere il gruppo affine in termini di prodotto semidiretto, come l'abbiamo suggerito precedentemente nel caso del gruppo diedrale. In effetti, se si indica con  $M$  il sottogruppo  $Aff_n$  dato dalle applicazioni  $M_a$  del tipo  $M_a(x) = a \cdot x$  ove  $a$  è un elemento invertibile di  $\mathbb{Z}_n$  e  $\mathbb{Z}_n$  è gruppo delle trasposizioni visto come sottogruppo di  $Aff_n$  si ottiene che  $Aff_n$  è isomorfo al prodotto semidiretto  $M \rtimes \mathbb{Z}_n$ .

Osserviamo che nel caso in cui  $n=12$ , è possibile ritrovare le operazioni di trasposizione e inversione come casi particolari delle applicazioni affini. In effetti,  $T_0=M_1$  e  $I_0=M_{11}$ . Inoltre le due moltiplicazioni restanti, ovvero  $M_5$  e  $M_7$  sono legate dalla relazione:  $M_7=I_0 \circ M_5$ .

Come abbiamo anticipato più volte, lo scopo principale dell'introduzione di strumenti algebrici in musica è quello di ridurre la combinatoria musicale attraverso una classificazione delle strutture musicali basata su una relazione di equivalenza pertinente dal punto di vista musicale e indotta da un'azione di un gruppo di trasformazioni musicali sull'insieme potenza  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$ . Ma prima di enunciare i risultati generali della classificazione algebrica introduciamo le definizioni di base dell'azione di un gruppo  $G$  su un insieme  $X$ . Indichiamo con  $e$  l'elemento neutro del gruppo  $G$ .

**Definizione 2.14:** Un gruppo  $G$  agisce su un insieme  $X$  se esiste un'applicazione  $G \times X \rightarrow X$  che rispetti le due proprietà seguenti:

- (i) Esistenza dell'identità:  $(e, x) \rightarrow e(x) = x$
- (ii) Compatibilità rispetto alla struttura di gruppo:  $\forall g, h \in G, \forall x \in X (gh)(x) = g(h(x))$

Una definizione equivalente dell'azione di un gruppo  $G$  su un insieme  $X$  consiste nel considerare il gruppo  $\mathcal{S}_X$  delle permutazioni di  $X$  ovvero delle applicazioni bigettive di  $X$  in se stesso.

**Definizione 2.15:** Un gruppo  $G$  agisce su un insieme  $X$  se esiste un omomorfismo di gruppi  $\theta: G \rightarrow \mathcal{S}_X$ , ovvero un'applicazione fra i due gruppi che preserva le rispettive leggi di composizione interne.

**Definizione 2.16:** Un'azione di  $G$  su  $X$  è:

- (iii) *fedele* se  $\forall g \in G, g \neq e, \exists x \in X$  tale che  $g(x) \neq x$
- (iv) *transitiva* se  $\forall x, y \in X, \exists g \in G$  tale che  $y = g(x)$
- (v) *semplicemente transitiva* se  $\forall x, y \in X, \exists! g \in G$  tale che  $y = g(x)$

Nelle applicazioni musicali che seguono ogni azione di gruppo è supposta fedele ed è quindi possibile identificare il gruppo  $G$  con la sua immagine  $\theta(G)$  ed utilizzare l'espressione  $gx$  per indicare l'immagine  $g(x)$  dell'elemento  $x$  ottenuta partendo dalla trasformazione di gruppo  $g$ .

**Definizione 2.17:** Data un'azione di  $G$  su  $X$  definiamo:

- (i) *orbita* dell'elemento  $x \in X$  l'immagine  $Gx = \{gx / g \in G\}$  dell'elemento  $x$  attraverso ogni elemento del gruppo  $G$
- (ii) *stabilizzatore* dell'elemento  $x \in X$  l'insieme  $G_x = \{g \in G / gx = x\}$  degli elementi del gruppo  $G$  che lasciano inalterato  $x$
- (iii) insieme dei *punti fissi* di un elemento  $g$  del gruppo  $G$  l'insieme  $X_g = \{x \in X / gx = x\}$  degli elementi dell'insieme che restano invariati attraverso l'elemento  $g$

Queste diverse nozioni insiemistiche e algebriche hanno trovato negli anni Ottanta del secolo scorso un'applicazione musicale estremamente elegante grazie all'introduzione, da parte del teorico della musica David Lewin, del concetto di *Generalized Interval System* (GIS). Vediamo come si definisce

formalmente un “sistema d’intervalli generalizzati” e quali proprietà matematico/musicali è possibile ottenere a partire dall’estensione della nozione di distanza.

**Definizione 2.18:** Un sistema di intervalli generalizzati GIS è una tripletta  $(G, S, f)$  ove  $(G, *)$  è un gruppo (rispetto all’operazione  $*$ ),  $S$  un insieme e  $f$  una funzione detta “intervallare” definita dal prodotto cartesiano  $S \times S$  a valori nel gruppo  $G$  e tale che i due seguenti assiomi siano verificati:

- (i) *Proprietà di composizione:*  $\forall a, b, c \in S, f(a,b)*f(b,c)=f(a,c)$
- (ii) *Proprietà di chiusura:*  $\forall a \in S \forall g \in G \exists! b \in S$  tale che  $f(a,b)=g$

Dalla pubblicazione del volume *Generalized Musical Intervals and Transformations* (1987) e sino ad oggi è parso evidente quanto questa costruzione teorica permetta di comprendere la natura algebrica del concetto di “intervallo” che diventa, nel GIS di David Lewin, un elemento di un gruppo. Ecco alcuni semplici esempi di GIS:

- $\text{GIS}_1=(\mathbb{Z}, G, f)$  ove  $G$  è il gruppo  $\mathbb{Z}$  degli interi positivi e negativi munito dell’operazione di addizione e la funzione intervallare  $f$  è così definita:  $f(x,y)=y-x$ . Essa conta quanti intervalli ascendenti o discendenti di semi-tono separano due note espresse come punti dell’asse degli interi.
- $\text{GIS}_2=(\mathbb{Z}_n, G, f)$  ove  $G$  è il gruppo  $\mathbb{Z}_n$  degli interi modulo  $n$  con l’operazione di addizione modulo  $n$  e la funzione intervallare  $f$  è così definita:  $f(x,y)=y-x \bmod n$ . Essa conta quanti intervalli separano due note all’interno di un sistema temperato equabile di ordine  $n$  (i.e. con l’ottava musicale divisa in  $n$  parti uguali).
- $\text{GIS}_3=(\mathbb{F}, G, f)$  ove  $\mathbb{F}$  è l’insieme delle frequenze (espresse in Hertz),  $G$  è il gruppo  $\mathbb{Q}$  dei razionali con l’operazione interna di moltiplicazione e la funzione intervallare  $f$  è così definita:  $f(x,y)=y/x$ . Essa associa a due frequenze il loro rapporto e il sistema d’intervalli generalizzato corrisponde ai sistemi temperati basati sugli intervalli puri (*just intonation*).
- $\text{GIS}_4=(S, G, f)$  ove  $S$  è l’insieme delle triadi consonanti (maggiori e minori),  $G$  è il gruppo diedrale  $\mathbf{D}_{12}$  di ordine 24 e  $f$  è la funzione intervallare che associa ad ogni coppia di triadi consonanti  $(a,b)$  l’unico e solo elemento  $T_k \circ I \in \mathbf{D}_{12}$  tale che  $b= T_k \circ I(a)$ .

La struttura di “sistema d’intervalli generalizzati” è quindi estremamente generale e permette di caratterizzare le operazioni di trasposizione e inversione in maniera indipendente dalla struttura di gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_n$  (e quindi dal problema del temperamento). Questa generalizzazione è descritta dalle due definizioni seguenti:

**Definizione 2.19:** Dato un GIS, espresso attraverso una tripletta  $(S, G, f)$ , e dato un elemento  $k \in G$ , la *trasposizione* di un intervallo pari a  $k$  è la funzione  $T_k: S \rightarrow S$  tale che l’equazione  $f(s, T_k(s))=k$  sia soddisfatta  $\forall s \in S$ .

Notiamo che nel caso del  $\text{GIS}_2=(\mathbb{Z}_n, G, f)$  nel quale il gruppo  $\mathbb{Z}_n$  agisce su se stesso in quanto sistema temperato equabile, la nuova definizione di trasposizione coincide con la definizione usuale. In effetti, l’immagine dell’elemento  $s$  attraverso la trasposizione  $T_k$  è l’elemento  $t$  (ben definito e

unico grazie agli assiomi alla base della funzione intervallare in un GIS) tale che l'intervallo fra  $s$  e  $t$  è proprio pari a  $k$ . In altre parole:  $T_k(s)=t \Leftrightarrow f(s,t)=k \Leftrightarrow t-s=k \Leftrightarrow t=k+s$ .

Allo stesso modo è possibile dare una definizione “implicita” dell'operazione di inversione:

**Definizione 2.20:** dato un GIS, espresso attraverso una tripletta  $(S, G, f)$ , e dati due elementi  $a, b \in S$ , l'inversione rispetto ai punti  $a$  e  $b$  è la funzione  $I_{a,b}:S \rightarrow S$  tale che l'equazione  $f(s, I_{a,b}(s))=f(s,a)$  sia soddisfatta  $\forall s \in S$ .

Notiamo in particolare che  $I_{a,b}$  trasforma  $b$  in  $a$  e  $a$  in  $b$  ed è possibile quindi ritrovare l'inversione principale  $I(s)=-s$  nel temperamento equabile  $\mathbb{Z}_{12}$  semplicemente ponendo  $a=b=0$ . In altre parole, nel caso del  $\text{GIS}_2=(\mathbb{Z}_n, G, f)$  ricordato precedentemente, si ottiene  $I_{a,b}(x)=(a+b)-x$ . L'inversione generalizzata  $I_{a,b}$  corrisponde quindi all'elemento  $I_{a+b}$  del gruppo diedrale  $\mathbf{D}_{12}$ .

Il lettore si sarà sicuramente chiesto che rapporto esiste fra la struttura di GIS, definita da David Lewin, e il concetto di azione di un gruppo su un insieme, che abbiamo ricordato precedentemente. Si tratta, in realtà, dello stesso fenomeno, come mostra il teorema seguente:

**Teorema:** Definire una struttura di GIS è equivalente a definire un'azione semplicemente transitiva.

*Dimostrazione*

Dato un sistema d'intervalli generalizzato  $(S, G, f)$ , ove “\*” è l'operazione interna al gruppo  $G$ , si consideri il gruppo  $\tau=\{T_g \mid g \in G\}$  delle trasposizioni definite precedentemente. Esso agisce su  $S$  in maniera semplicemente transitiva attraverso l'applicazione  $\tau \times S \rightarrow S$  così definita:  $(T_g, s) \rightarrow T_g(s)$ . È immediato verificare che i due assiomi che definiscono l'azione di un gruppo sono rispettati.

Lasciamo al lettore di mostrare che se  $e$  è l'elemento neutro del gruppo, l'assioma che riguarda l'esistenza dell'applicazione identica è rispettato (basta infatti considerare la trasposizione  $(T_e, s) \rightarrow T_e(s)=s$ ). Verifichiamo invece il secondo assioma riguardante la relazione di compatibilità rispetto all'operazione interna del gruppo  $G$ . Dati infatti due elementi  $g, h \in G$  e un elemento  $s \in S$ :

$$(g \cdot (h \cdot s)) = T_g(T_h(s)) = (T_g \circ T_h)(s) = (T_g * T_h)(s) = (T_g * T_h) \cdot s.$$

Per dimostrare che l'azione è semplicemente transitiva si sfrutta il fatto che dati due elementi  $s$  e  $t$  di  $S$  esiste un unico elemento  $g \in G$  tale che  $f(s,t)=g$ . Per come abbiamo definito  $\tau$ ,  $g \cdot s = T_g(s)=t$ .

L'unicità dell'elemento  $g \in G$  determina il fatto che l'azione è semplicemente transitiva. In effetti, se esistono due elementi  $g, h \in G$  tali che  $g \cdot s = h \cdot s$  in corrispondenza di  $s \in S$ , allora  $T_g(s)=T_h(s)$ . Questo significa che  $f(s, T_g(s))=f(s, T_h(s))$ . Ma per l'assioma di unicità alla base della definizione della struttura di GIS questo implica che  $g=h$ .

□

È giunto il momento di accennare alle strategie algebriche alla base dei diversi cataloghi di accordi (modulo una relazione di equivalenza indotta dall'azione di un gruppo  $G$  sulla famiglia  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_n)$  dei sottoinsiemi di  $\mathbb{Z}_n$ , ovvero l'insieme potenza di  $\mathbb{Z}_n$ ). Il numero delle classi di equivalenza si ottiene applicando il risultato generale seguente (noto come Lemma di Burnside) al caso particolare di un

gruppo  $G$  la cui azione sui sottoinsiemi di  $\mathbb{Z}_{12}$  è pertinente dal punto di vista musicale. Come ricordato precedentemente, esistono almeno tre gruppi alla base della classificazione degli accordi musicali: il gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_{12}$  (alla base del catalogo delle classi di trasposizione degli accordi), il gruppo diedrale  $\mathbf{D}_{12}$  (che generalizza il catalogo della *Set Theory* d'Allen Forte) e il gruppo affine  $\mathbf{Aff}_{12}$  (che ritroviamo nei cataloghi di Robert Morris o di Guerino Mazzola). A questi tre gruppi possiamo aggiungere il gruppo simmetrico  $\mathcal{S}_n$  che agisce sulle strutture intervallari dei sottoinsiemi di  $\mathbb{Z}_{12}$  riducendo il catalogo delle orbite alle 77 classi di equivalenza, come proposto dal teorico e compositore messicano Julio Estrada. L'approccio si generalizza facilmente al caso dell'azione dei gruppi sull'insieme potenza  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_n)$  nel caso quindi più generale di insiemi di classi di altezze in una divisione dell'ottava in  $n$  parti uguali o di ritmi periodici la cui periodicità è pari ad  $n$ .

### Lemma (di Burnside)

Sia  $G$  un gruppo moltiplicativo finito che agisce su un insieme  $X$ . Indichiamo con  $|G \backslash X|$  il numero delle orbite degli elementi di  $X$  attraverso il gruppo  $G$ , ovvero la cardinalità dell'insieme  $\{G(x) | x \in X\}$ . Esso è pari alla media del numero dei punti fissi di ogni elemento del gruppo. In formula:

$$|G \backslash X| = \frac{\sum_{g \in G} |X_g|}{|G|}$$

ove  $X_g = \{x \in X | gx = x\}$  e la somma è fatta, come indicato, su tutti gli elementi dell'insieme  $G$ .

Si tratta di un risultato noto in algebra combinatoria del quale non daremo quindi la dimostrazione ma che costituisce uno degli strumenti fra i più eleganti per affrontare il problema della classificazione delle strutture musicali, siano esse scale, accordi, ritmi, serie dodecafoniche o canoni ritmici a mosaico. Combinando il Lemma di Burnside con la teoria dell'enumerazione di Polya è possibile ottenere delle espressioni polinomiali che generalizzano il calcolo del numero di accordi all'interno del temperamento equabile intesi come elementi dell'insieme potenza  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_n)$  di una data cardinalità (e senza introduzione di ulteriori relazioni di equivalenza fra i sottoinsiemi). Nel caso dei tre gruppi principali  $\mathbb{Z}_{12}$ ,  $\mathbf{D}_{12}$  e  $\mathbf{Aff}_{12}$ , si ottengono i tre polinomi  $P_1(z)$ ,  $P_2(z)$  e  $P_3(z)$  i cui coefficienti corrispondono al numero delle orbite degli elementi dell'insieme potenza  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$  al variare della cardinalità (modulo l'azione rispettivamente del gruppo ciclico, diedrale e affine).

- $P_1(z) = 1 + z + 6z^2 + 19z^3 + 43z^4 + 66z^5 + 80z^6 + 66z^7 + 43z^8 + 19z^9 + 6z^{10} + z^{11} + z^{12}$
- $P_2(z) = 1 + z + 6z^2 + 12z^3 + 29z^4 + 38z^5 + 50z^6 + 38z^7 + 29z^8 + 12z^9 + 6z^{10} + z^{11} + z^{12}$
- $P_3(z) = 1 + z + 5z^2 + 9z^3 + 21z^4 + 25z^5 + 34z^6 + 25z^7 + 21z^8 + 9z^9 + 5z^{10} + z^{11} + z^{12}$

Sommando i coefficienti di ciascun polinomio si ottiene così il numero totale di classi di equivalenza dei diversi cataloghi musicali. Aumentando la cardinalità del gruppo che agisce sull'insieme potenza  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$  si riduce quindi progressivamente la taglia del catalogo delle orbite che conta 351 classi di equivalenza modulo le trasposizioni (di cui possiamo vedere dall'espressione di  $P_1(z)$  che vi sono 80 esacordi), 223 classi di equivalenza modulo le trasposizioni e inversioni (con una riduzione del numero di esacordi a 50) e infine 157 classi di equivalenza modulo le applicazioni affini (con una riduzione ulteriore del numero di esacordi a 34).

A conclusione di questo capitolo consacrato alla formalizzazione algebrica delle strutture musicali accenniamo brevemente all'omometria, una teoria emersa storicamente nello studio delle strutture cristallografiche nelle quali sono apparsi fenomeni molto simili a quelli descritti precedentemente dal teorema dell'esacordo. Esistono in effetti dei cristalli la cui analisi spettrografica non permette di distinguerli, per quanto si tratti di strutture per le quali non esiste un gruppo di isometrie che trasformi un cristallo nell'altro. Questa scoperta segna la nascita dell'*omometria*, una teoria che trae quindi le sue origini dalla cristallografia, ma che diventa successivamente un campo ben definito all'interno della combinatoria. Le strutture omometriche in musica sono precisamente le strutture musicali (accordi, ritmi, ...) che sono indistinguibili rispetto al loro contenuto intervallare, come due esacordi qualsiasi in relazione di complementarità (via il teorema di Babbitt) o altre strutture musicali che i compositori hanno utilizzato a causa della particolarità del loro contenuto intervallare. È il caso, per esempio, dei tetracordi "omni-intervallari" che ritroviamo nella musica di Anton Webern o dell'esacordo "omni-triadico" caro a Elliott Carter. Nel primo caso i tetracordi contengono tutti gli intervalli mentre nel secondo caso l'esacordo contiene come sottoinsiemi propri tutti gli accordi di tre note. Dato un sottoinsieme  $A \subset \mathbb{Z}_{12}$  consideriamo il polinomio  $A(x)$  associato ad  $A$  (che abbiamo introdotto nel capitolo consacrato ai canoni ritmici a mosaico e alle loro diverse rappresentazioni, fra le quali appunto quella polinomiale). La funzione di Patterson è il polinomio  $P_A(x)$  definito nel seguente modo:  $P_A(x) = A(x)A(x^{-1}) \pmod{(x^n - 1)}$ . Storicamente, le prime definizioni dell'omometria si sono avvalse di questo polinomio. Per definizione, due sottoinsiemi  $A, B \subset \mathbb{Z}_n$  sono omometrici se hanno la stessa funzione di Patterson. È in questo modo che Patterson ha messo in luce negli anni quaranta del secolo scorso l'esistenza di insiemi omometrici in  $\mathbb{Z}_8$ . Più precisamente, Patterson ha mostrato che i due sottoinsiemi seguenti  $A = \{0, 3, 4, 5\}$  e  $B = \{0, 4, 5, 7\}$  sono omometrici ovvero  $P_A(x) = P_B(x)$ . Analizzando attentamente il modo in cui è definita la funzione di Patterson, dovrebbe risultare abbastanza chiaro al lettore che i suoi coefficienti non sono nient'altro che le entrate del contenuto intervallare dell'insieme  $A$  di partenza. Ricordiamo infatti che il contenuto intervallare è un prodotto di convoluzione di funzioni caratteristiche, ovvero per ogni valore  $k \in \mathbb{Z}_{12}$ ,  $IC_A = 1_A * 1_{-A}(k)$ . Ma la funzione di Patterson è anch'essa un prodotto di convoluzione (o di autocorrelazione) che si esprime come un prodotto polinomiale di  $A(x)$  e  $A'(x)$  ove  $A'(x)$  è pari alla somma dei  $x^\alpha$  al variare di  $\alpha \in I(A)$  ove  $I$  è l'inversione  $x \rightarrow -x \pmod n$ . Svolgendo esplicitamente i calcoli a partire dal sottoinsieme  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\} \subset \mathbb{Z}_{12}$  si ottiene che  $A(x)A(x^{-1})$  è il polinomio pari alla somma dei  $x^\alpha$  ove  $\alpha = a_i - a_j$  per  $i, j = 1, \dots, k-1$ . I coefficienti del polinomio associato alla funzione di Patterson sono quindi le entrate del contenuto intervallare. Come applicazione consideriamo i due sottoinsiemi di Patterson  $A = \{0, 3, 4, 7\}$  e  $B = \{0, 4, 5, 7\}$ . Le rispettive funzioni di Patterson  $P_A(x)$  e  $P_B(x)$  sono le seguenti:

$$P_A(x) = (1+x^3+x^4+x^7)(1+x^{-3}+x^{-4}+x^{-7}) = (1+x^3+x^4+x^7)(1+x^5+x^4+x^3) = 4+2x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+x^6+2x^7$$

$$P_B(x) = (1+x^4+x^5+x^7)(1+x^{-4}+x^{-5}+x^{-7}) = (1+x^4+x^5+x^7)(1+x^4+x^3+x) = 4+2x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+x^6+2x^7$$

Dall'equivalenza fra le funzioni di Patterson si deduce la relazione di omometria fra gli insiemi  $A$  e  $B$ . Per avere un esempio analogo nella musica è sufficiente prendere il caso dei due seguenti tetracordi:  $A = \{0, 1, 4, 6\}$  e  $B = \{0, 1, 3, 7\}$ . Calcolando le rispettive funzioni di Patterson si ottiene il seguente risultato:

$$P_A(x) = (1+x+x^4+x^6)(1+x^{-1}+x^{-4}+x^{-6}) =$$

$$(1+x+x^4+x^6)(1+x^{11}+x^8+x^6) = 4+x+x^2+x^3+x^4+x^5+2x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}$$

$$P_B(x)=(1+x+x^3+x^7)(1+x^{-1}+x^{-3}+x^{-7})=$$

$$(1+x+x^4+x^6)(1+x^{11}+x^9+x^5)=4+x+x^2+x^3+x^4+x^5+2x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}$$

In termini del contenuto intervallare si ha quindi che:

$$IC_A(k)=[4,1,1,1,1,1,2,1,1,1,1]=IC_B(k)$$

I due accordi sono quindi omometrici e in più possiedono la proprietà singolare di contenere tutti gli intervalli (una ed una sola volta a parte ovviamente il tritono che è inverso di se stesso ed è quindi presente due volte).

### 3 Il Tonnetz e le sue generalizzazioni

Il Tonnetz è indubbiamente una delle rappresentazioni musicali fra più utilizzate nell'analisi di tipo trasformazionale. Vi sono almeno cinque formalizzazioni possibili del Tonnetz ed esse mostrano chiaramente l'utilità di costruire delle passerelle fra le diverse discipline matematiche (geometria, teoria dei grafi, algebra, topologia, combinatoria) nella ricerca "matemusicale" contemporanea.

#### Rappresentazione geometrica del Tonnetz e dualità

La rappresentazione geometrica del Tonnetz è stata introdotta a partire dagli anni novanta del secolo scorso principalmente dai musicologi appartenenti alla tradizione neo-riemanniana, così chiamata in riferimento al teorico della musica Hugo Riemann. Il Tonnetz è identificato ad una triangolazione del piano cartesiano bidimensionale ottenuta scegliendo due assi generatori. Nello spazio geometrico degli accordi maggiori e minori questi assi corrispondono agli intervalli rispettivamente di terza minore e terza maggiore, due dei tre intervalli che costituiscono il contenuto intervallare dell'accordo maggiore (o, equivalentemente, dell'accordo minore). Prendiamo come esempio l'accordo di *do* maggiore corrispondente al triangolo formato dalle tre note *do, mi, sol* (o *C, E, G* nella terminologia anglosassone, come in Fig. 10). Notiamo che tutti gli accordi maggiori, ottenuti musicalmente attraverso le trasposizioni dell'accordo di *do* maggiore, corrispondono geometricamente a delle traslazioni del triangolo di partenza. Vi sono tre modi di trasformare l'accordo di *do* maggiore in un accordo minore preservando due delle tre note che lo costituiscono. I tre accordi minori corrispondono ai tre triangoli che condividono uno dei tre lati del triangolo di partenza. Essi sono in rapporto di simmetria speculare rispetto a quest'ultimo attraverso tre simmetrie indicate con le lettere R (come trasformazione relativa), P (come trasformazione parallela) e L (come *Leitonwechsel* o *Leading-Tone Exchange*). Notiamo da subito che la tassellazione triangolare può essere affiancata alla rappresentazione "duale" ottenuta connettendo tutti i baricentri dei vari triangoli del piano. Si ottiene in questo modo la tassellazione corrispondente al reticolo esagonale del piano (o tassellazione alveolare) in Fig. 10 (a destra).

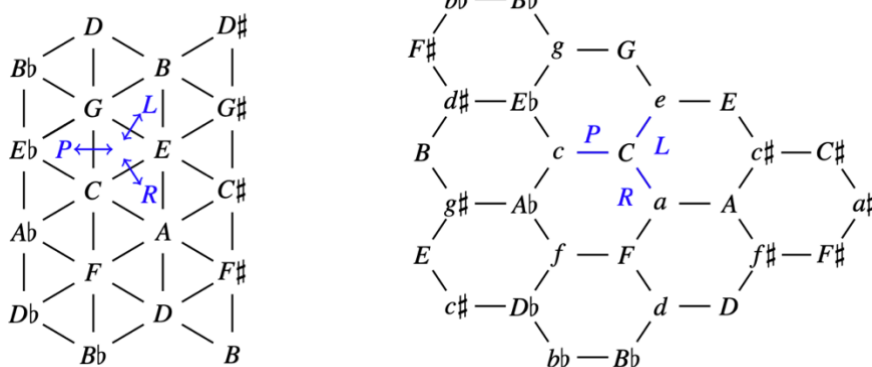


Fig. 10 – La triangolazione del piano e le tre simmetrie di base del Tonnetz (R, P e L) a partire dall'accordo di *do* maggiore (a sinistra). Reticolo esagonale del piano (o tassellazione alveolare), rappresentazione duale della triangolazione del piano (a destra). Nella tassellazione alveolare, i nodi del reticolo corrispondono ad accordi maggiori (lettere maiuscole) e ad accordi minori (lettere minuscole).

Il Tonnetz e la sua geometria intrinseca diventa in questo modo un supporto privilegiato per analizzare delle sequenze di accordi consonanti maggiori o minori. Una progressione armonica diventa semplicemente una traiettoria spaziale, ovvero un cammino all'interno della triangolazione del piano (oppure, in modo equivalente, un percorso che unisce i vertici della tassellazione esagonale). La ricerca delle traiettorie spaziali nel Tonnetz può così rappresentare il punto di partenza per esplorare le proprietà algebrico-geometriche dello spazio degli accordi e, nello stesso tempo, costituisce un'attività musicale (analitica e compositiva) dal momento in cui queste stesse traiettorie possono essere associate, in modo naturale, a delle progressioni armoniche, ovvero sequenze di accordi che rispettano determinate proprietà.

Una delle proprietà che è stata maggiormente studiata da matematici e teorici della musica è l'hamiltonicità dei cicli (o *loops*) all'interno del Tonnetz. Il problema consiste nel cercare di caratterizzare le traiettorie chiuse che permettono di passare una e una sola volta attraverso tutti i punti del reticolo esagonale, ovvero – musicalmente parlando – trovare le progressioni armoniche che partendo da un determinato accordo (maggiore o minore) passano attraverso tutti i rimanenti 23 accordi (maggiori e minori) ritornando al punto di partenza senza incontrare due volte lo stesso accordo. Le progressioni sono tali che due accordi successivi sono in relazione di simmetria elementare nel Tonnetz, ovvero corrispondono ad una delle tre simmetrie (R, P e L) che preservano due delle tre note di ogni accordo. Il problema è stato trattato in modo esaustivo da Giovanni Albini e Samuele Antonini che hanno enumerato e classificato, a meno di isomorfismo, i 124 cicli hamiltoniani sul Tonnetz. Quanto visto sino ad ora si applica non solamente al caso della triangolazione del piano corrispondente agli accordi maggiori e minori ma ad ogni altra scelta degli assi generatori che permettono di associare ogni triangolo del piano ad una delle 12 classi di equivalenza degli accordi di tre note (modulo l'azione del gruppo diedrale). Questa versione generalizzata del Tonnetz sarà introdotta nella sezione consacrata alla natura topologica dei vari spazi associati alle diverse triangolazioni del piano. Useremo il termine "Tonnetze" in quanto plurale del "Tonnetz" per indicare queste diverse generalizzazioni.



## Il Tonnetz in quanto grafo

Abbiamo già incontrato un esempio di grafo grazie a Mersenne e alla rappresentazione circolare che corrisponde, di fatto, al grafo completo degli intervalli di un sistema temperato (equabile, se adattiamo l'orologio musicale al caso della divisione dell'ottava in 12 parti uguali). Per definizione, un grafo (non orientato) è una coppia  $(V, A)$  dove  $V$  è un insieme finito di elementi detti “vertici” (o nodi) e  $A$  è l'insieme delle coppie non ordinate  $\{v, w\}$  di elementi distinti di  $V$  detti “archi”. A questa prima definizione di grafo *astratto* aggiungiamo ora la definizione della sua realizzazione nello spazio euclideo  $n$ -dimensionale  $\mathbb{R}^n$ . Una *realizzazione* di  $(V, A)$  è una famiglia di punti di  $\mathbb{R}^n$  corrispondenti ai *vertici* del grafo e di segmenti corrispondenti agli *archi* e tali che le due condizioni seguenti siano soddisfatte:

- (i) *Condizione d'intersezione per gli archi*: due archi che si incontrano lo fanno in un solo punto finale
- (ii) *Condizione di giacenza dei vertici*: nessun vertice giace in un arco ad eccezione di un suo punto iniziale o terminale

Il Tonnetz può essere visto come un grafo etichettato (*labeled graph*), ovvero come un insieme  $V$  non vuoto di vertici e un sottoinsieme non vuoto  $A \subseteq V \times V$  di archi associati all'insieme dei vertici  $V$  e per i quali esistono delle mappe che associano un'etichetta a ciascun vertice e a ciascun arco. Nel Tonnetz tradizionale, l'insieme dei vertici è rappresentato da  $\mathbb{Z}_{12}$  mentre un arco che unisce due vertici, ovvero due punti di  $\mathbb{Z}_{12}$  è etichettato con una delle possibili composizioni delle simmetrie elementari R, P e L. L'approccio basato sulla teoria dei grafi è stato generalizzato da Sonia Cannas nella sua tesi di dottorato consacrata allo studio dei “Tonnetze” generati da alcuni accordi di settima, contenenti quindi quattro note (*Geometric representation and algebraic formalization of musical structures*, Università di Pavia e Université de Strasbourg, 2018. Disponibile online all'indirizzo: [http://repmus.ircam.fr/\\_media/moreno/phd\\_sonia\\_cannas\\_2018\\_ed269.pdf](http://repmus.ircam.fr/_media/moreno/phd_sonia_cannas_2018_ed269.pdf)). L'approccio si basa sulle relazioni  $P_{m,n}$  che accomunano due triadi per le quali  $m$  elementi differiscono di 1 semitono e  $n$  elementi di 1 tono (mentre tutte le altre classi di altezza restano identiche). Queste relazioni sono state introdotte da Jack Douthett et Peter Steinbach attraverso un modello di Tonnetz generalizzato descritto da un grafo i cui vertici rappresentano accordi maggiori, minori e aumentati e i cui archi corrispondono alla relazione  $P_{1,0}$ . Un tale grafo è noto nella letteratura neo-riemanniana come “Cube Dance”, a causa del fatto che la rappresentazione sembra disegnare quattro cubi organizzati spazialmente in una sorta di danza reciproca. La figura sottostante (Fig. 11) mostra il “Cube Dance” completo nel quale oltre alla relazione  $P_{1,0}$  è stata aggiunta la relazione  $P_{0,1}$  che nel caso degli accordi maggiori e minori coincide con la trasformazione R (passaggio alla relativa).

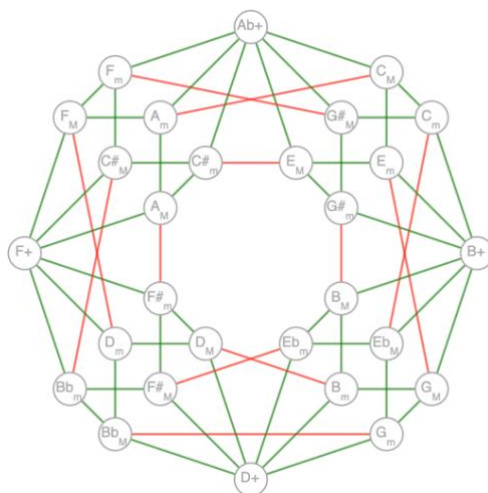


Fig. 11 – Il “Cube Dance” completo in quanto grafo i cui vertici rappresentano accordi maggiori, minori e aumentati (indicati rispettivamente con le lettere “M”, “m” e il simbolo “+”) e i cui archi corrispondono alle relazioni  $P_{1,0}$  e  $P_{0,1}$ .

## Il Tonnetz in quanto sistema generalizzato d’intervalli

Il concetto di GIS introdotto da David Lewin permette di offrire una caratterizzazione algebrica estremamente elegante del Tonnetz che può essere visto come una tripletta  $(S, G, f)$  ove  $S$  è l’insieme delle triadi consonanti (maggiori e minori),  $G$  è il gruppo diedrale generato dalle trasformazioni neo-riemanniane  $P$ ,  $R$  e  $L$  e  $f$  è la funzione intervallare che associa ad ogni coppia di triadi consonanti  $(a, b)$  l’unico e solo elemento  $(RL)^k L$  del gruppo neo-riemanniano tale che  $b = (RL)^k L(a)$ . Come mostrato da Alissa S. Crans, Thomas M. Fiore e Ramon Satyendra nel loro articolo intitolato “Musical actions of dihedral groups” (*American Mathematical Monthly*, 116(6), 479-495, 2009), è possibile mettere in evidenza una proprietà di dualità delle azioni dei due gruppi diedrali  $\mathbf{D}_{12}$  di ordine 24 associati rispettivamente alle trasposizioni/inversioni e alle simmetrie neo-riemanniane  $R$ ,  $P$  e  $L$ . Seguendo una terminologia che si è imposta nella tradizione analitica neo-riemanniana, chiameremo questa seconda struttura algebrica “gruppo PLR”. Entrambi i gruppi agiscono in maniera semplicemente transitiva sull’insieme  $S$  delle 24 triadi maggiori e minori. Le loro azioni sono “duali” nel senso che ogni elemento del gruppo generato dalle trasposizioni e inversioni *commuta* con ogni elemento del gruppo PLR. Questo significa che per ogni triade  $X$  maggiore o minore, avremo sempre l’uguaglianza  $fg(X) = gf(X) \forall f \in \mathbf{D}_{12}$  e  $\forall g \in \text{PLR}$  e questo nonostante il fatto che i due gruppi,  $\mathbf{D}_{12}$  e PLR siano non commutativi!

Ricordiamo che dato un gruppo  $G$  e un suo sottogruppo  $H < G$ , il *centralizzatore*  $C_G(H)$  di  $H$  in  $G$  è il sottogruppo di  $G$  formato da tutti e soli gli elementi che commutano con tutti gli elementi di  $H$ . Formalmente abbiamo la definizione seguente:  $C_G(H) = \{g \in G \mid gh = hg \forall h \in H\}$ . La proprietà di “dualità” nelle azioni dei due gruppi diedrali sulle triadi maggiori e minori si esprime formalmente dicendo che i due gruppi diedrali  $\mathbf{D}_{12}$  e PLR sono uno il centralizzatore dell’altro rispetto al gruppo simmetrico  $\text{Sym}(S)$ , ovvero il gruppo delle applicazioni bigettive di  $S$  in  $S$ . Rinviamo all’articolo di Crans, Fiore e Satyendra per la dimostrazione di questo risultato che costituisce essenzialmente un’applicazione del teorema di stabilizzatore delle orbite (*orbit-stabilizer theorem*). Come

sottolineato dagli autori in conclusione del loro studio, il risultato ottenuto nel caso del gruppo diedrale  $D_{12}$  e del gruppo neo-riemanniano PLR è un caso particolare di un risultato più generale che riguarda le azioni a destra e a sinistra di un gruppo  $G$  su se stesso in quanto sottogruppo del gruppo simmetrico  $Sym(G)$ . Questo risultato, dovuto a Caley, assicura che le azioni duali sono tutte e sole le azioni ottenute partendo da un gruppo  $G$  e considerando le azioni a destra e a sinistra di  $G$  su se stesso.

## Il Tonnetz come complesso simpliciale

Vi è un'ulteriore rappresentazione del Tonnetz che permette di descrivere non soltanto le sue proprietà geometriche, algebriche e inerenti alla teoria dei grafi, come abbiamo visto nelle sezioni precedenti, ma anche le proprietà topologiche. Per comprendere appieno il ruolo della topologia riprendiamo il caso particolare degli accordi maggiori e minori e ricordiamoci che stiamo lavorando sull'ipotesi di una riduzione all'ottava. La triangolazione del piano è quindi periodica nel senso che una regione del Tonnetz si riproduce in maniera identica un'infinità di volte nel piano bidimensionale. A causa dell'equivalenza modulo l'ottava questa regione è tale che i lati opposti che la costituiscono sono di fatto identificabili a due a due. Essi corrispondono, in effetti, ai segmenti del piano contenenti rispettivamente le note dell'accordo aumentato (generato dall'intervallo di terza maggiore) e dell'accordo diminuito (generato dall'intervallo di terza minore). Otteniamo in questo modo il cosiddetto *Terztorus* o toro delle terze, così battezzato dal teorico matematico della musica Guerino Mazzola per sottolineare il ruolo delle terze (maggiori e minori) nella struttura toroidale risultante. Il doppio processo di identificazione che porta alla struttura topologica toroidale è illustrato in Fig. 12.

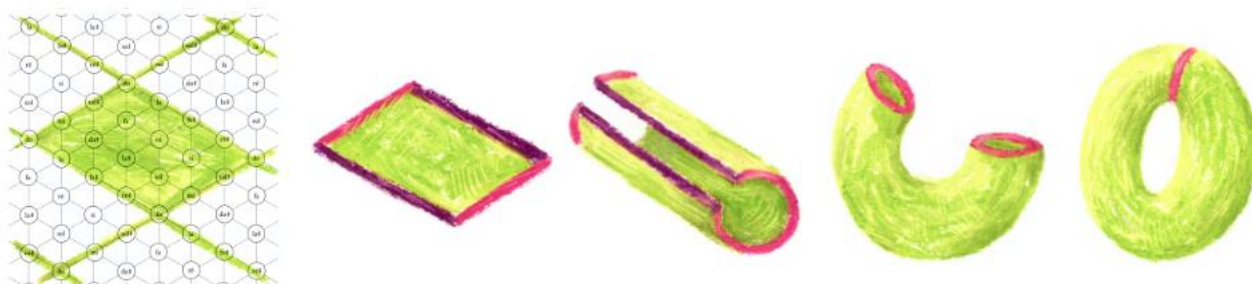


Fig. 12 – Costruzione del toro partendo da una doppia identificazione della regione fondamentale del Tonnetz nel piano.

Ma quali sono le decomposizioni del piano che permettono di associare al Tonnetz una topologia toroidale? Uno studio esaustivo di questi spazi topologici è stato condotto inizialmente da Louis Bigo nella sua tesi di dottorato intitolata *Représentation symboliques musicales et calcul spatial* (université Paris Est Créteil / Ircam, 2013. Accessibile online all'indirizzo: <https://theses.hal.science/tel-01326827>). La tesi costituisce il primo esempio di riformulazione delle teorie neo-riemanniane con strumenti topologici derivanti dal calcolo spaziale (*spatial computing*). Il punto di partenza dell'approccio topologico consiste nel considerare le strutture musicali come dei

$k$ -simplessi che si aggregano formando dei complessi simpliciali. Un  $k$ -simpleso o simpleso di dimensione  $k$  è l'involuppo convesso di  $k+1$  punti  $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$  dello spazio euclideo  $n$ -dimensionale in posizione cosiddetta "generale" ovvero tale che i vettori delle differenze  $x_2-x_1, x_3-x_1, \dots, x_{k+1}-x_1$  sono tutti linearmente indipendenti. È intuitivo associare ad un  $k$ -simpleso un oggetto musicale, in particolare nel campo dell'armonia. Uno 0-simpleso è un punto e come tale può rappresentare un elemento di  $\mathbb{Z}_{12}$  ovvero una nota. Analogamente un 1-simpleso, ovvero un segmento, può rappresentare una distanza fra due elementi di  $\mathbb{Z}_{12}$  o, in altre parole, un intervallo. Un accordo di tre note sarà rappresentato da un triangolo (ovvero un 2-simpleso), un accordo di quattro note da un tetraedro (ovvero un 3-simpleso) e così via. Partendo da una collezione di 2-simplessi, rappresentati per esempio da accordi maggiori e minori, è immediato ottenere il Tonnetz attraverso un processo di "auto-assemblaggio" (*self-assembly*) che consiste nell'incollare due 2-simplessi che condividono lo stesso 1-simpleso (ovvero due triangoli che hanno un lato in comune). Si ottiene in questo modo la classica tassellazione triangolare dello spazio armonico nella quale i triangoli rappresentano accordi maggiori e minori in relazione di simmetria P, L e R l'uno rispetto all'altro se e soltanto se questi sono fra loro adiacenti, ovvero hanno un intervallo in comune. Il processo di "auto-assemblaggio" conduce alla formazione di un oggetto complesso a partire da simplessi  $k$ -dimensionali, di dimensione a priori variabile. Esso corrisponde al cosiddetto "complesso simpliciale"  $K$  costituito dalla collezione finita di simplessi tali le due proprietà seguenti sono soddisfatte:

- (i) Se un simpleso  $\sigma \in K$ , allora ogni faccia di  $\sigma$  appartiene a  $K$
- (ii) Dati due simplessi  $\sigma_1, \sigma_2 \in K$  la loro intersezione  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  è vuota oppure se  $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$  allora essa è una faccia che è in comune ad entrambi  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$

Ogni Tonnetz può essere indicato con la struttura intervallare dell'accordo generico (modulo l'azione del gruppo diedrale) associato alla triangolazione del piano. Gli invarianti algebrici offrono inoltre una caratterizzazione degli spazi topologici associati ai vari Tonnetze in termini di componenti connesse e buchi al crescere della dimensione. Questi invarianti algebrici sono i cosiddetti numeri di Betti  $\beta_k$  associati ai vari complessi simpliciali. Nel caso dei "Tonnetze" che ci interessano, visto che sono costituiti da un auto-assemblaggio di triadi (accordi di tre note o 2-simplessi), possiamo limitarci ai tre primi valori ovvero  $\beta_0$  (numero di componenti connesse del Tonnetz),  $\beta_1$  (numero di buchi) e  $\beta_2$  (numero di cavità). La tavola seguente riassume le proprietà topologiche dei vari Tonnetze  $T(a,b,c)$  ove  $(a,b,c)$  rappresenta, come abbiamo accennato, la struttura intervallare dell'accordo generico associato al 2-simpleso che genera il complesso simpliciale. I valori  $a$  e  $b$  corrispondono inoltre agli assi generatori della triangolazione del piano e il lettore può facilmente verificare che il valore  $c$  è ottenuto sottraendo alla cardinalità del sistema temperato equabile (pari a 12 nel caso della divisione usuale dell'ottava) la somma degli intervalli generatori. In altre parole:  $c=12-(a+b)$ . Nel caso del Tonnetz  $T(3,4,5)$  formato dagli accordi maggiori e minori, la forma risultante è, come abbiamo visto, quella corrispondente al toro.

Tonnetz	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	Forma risultante
$T(1,2,9)$	1	2	1	Toro
$T(1,3,8)$	1	2	1	Toro
$T(1,4,7)$	1	2	1	Toro
$T(2,3,7)$	1	2	1	Toro
$T(3,4,5)$	1	2	1	Toro
$T(1,1,10)$	1	1	0	Cilindro
$T(2,5,5)$	1	1	0	Cilindro
$T(2,2,8)$	2	2	0	Coppia di cilindri
$T(1,5,6)$	1	1	6	Collana di sei tetraedri
$T(2,4,6)$	2	2	6	Coppia di collane di tre tetraedri
$T(3,3,6)$	3	0	3	Tre tetraedri disgiunti
$T(4,4,4)$	4	0	0	Quattro triangoli disgiunti

Tabella 1 – Classificazione dei dodici “Tonnetze”  $T(a,b,c)$  in funzione dei rispettivi numeri di Betti  $\beta_0, \beta_1$  e  $\beta_2$  e con indicazione della struttura topologica risultante.

Un’analisi più fine è stata condotta da Paul Lascabettes nella sua tesi di master (*Homologie persistente appliquée à la reconnaissance de genres musicaux*, ENS/Université de Strasbourg. Disponibile online sulla pagina del progetto SMIR: <http://repmus.ircam.fr/moreno/smir>). Essa mostra che, nonostante i “Tonnetze” abbiano a volte la stessa struttura topologica, questi possono essere non isomorfi. Rinviamo il lettore alla sezione finale consacrata agli esercizi per approfondire quest’aspetto della classificazione algebrica dei complessi simpliciali associati alle diverse decomposizioni del piano. È inoltre possibile esplorare i diversi “Tonnetze” attraverso l’applicazione web TONNETZ realizzata nell’ambito del progetto SMIR all’Università di Strasburgo e disponibile all’indirizzo: [www.morenoandreatta.com/software](http://www.morenoandreatta.com/software).

## Il Tonnetz come permutoedro

La struttura di permutoedro è una struttura combinatoria alla base del catalogo del teorico e compositore messicano Julio Estrada. Si tratta, come abbiamo già ricordato, di un catalogo estremamente ridotto e che contiene unicamente 77 accordi (o “identità”, nel gergo del compositore). La relazione di equivalenza fra due sottoinsiemi  $A$  e  $B$  di  $\mathbb{Z}_{12}$  è definita in questo caso direttamente sulle strutture intervallari associate. Per definizione  $A \sim B$  se esiste una permutazione  $\sigma \in \mathcal{S}$  degli elementi della struttura intervallare di  $A$  tale che  $\sigma(\text{IS}_A) = \text{IS}_B$ . Le 77 classi di equivalenze così ottenute costituiscono una struttura combinatoria detta “permutoedro” nella quale è possibile definire una relazione di ordine parziale fra le diverse classi di equivalenza. Per ritrovare il Tonnetz è sufficiente prendere nel catalogo delle 77 identità di Estrada quella corrispondente all’accordo minore, ovvero la struttura intervallare (3,4,5). Poiché essa contiene 3 elementi distinti, la struttura intervallare (3,4,5) è equivalente alle  $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$  strutture intervallari associate alle 6 forme possibili di un accordo maggiore o minore (posizione fondamentale, primo rivolto e secondo rivolto). Partendo da una nota fissata, per esempio il *do*, si ottengono quindi i sei accordi che costituiscono la cellula generatrice del Tonnetz. Il processo è descritto nella seguente figura.

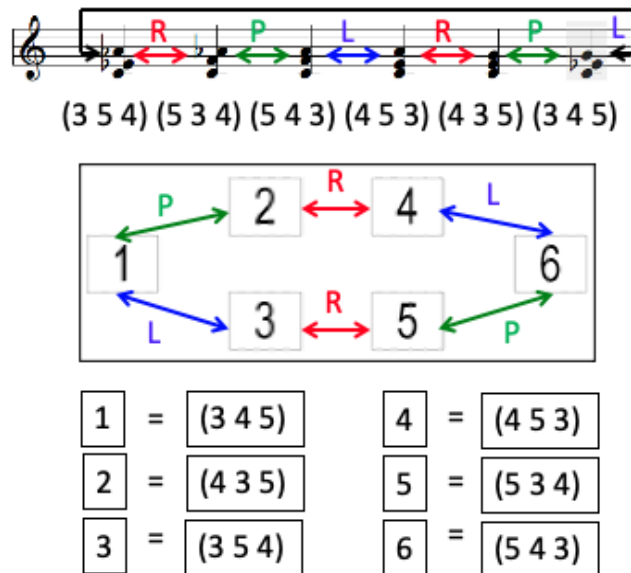


Fig. 13 – La cellula generatrice del Tonnetz ottenuta attraverso le permutazioni dei valori associati alla struttura intervallare (3 4 5) dell'accordo minore.

Ne consegue quindi che il Tonnetz è incluso in maniera strutturale nel permutaedro di Estrada. Il lettore potrà ripetere l'esercizio per gli undici Tonnetze associati ai restanti undici accordi di tre note del catalogo di Estrada.

## 4 Da Minkowski a Fuglede: canoni ritmici a mosaico e congetture “matemusicali”

### Dalla congettura di Minkowski ai gruppi di Hajós

Dalla pubblicazione nella rivista *Perspectives of New Music*, agli inizi degli anni Novanta del secolo scorso, di una serie di articoli da parte del matematico rumeno Dan Tudor Vuza consacrati alla costruzione di canoni ritmici a mosaico, vi è stato un susseguirsi di lavori universitari e articoli accademici che hanno mostrato le radici profonde di questo problema teorico nella storia della matematica e i legami inizialmente insospettiti con celebri congetture alcune delle quali sono tutt'ora aperte. La famiglia dei canoni a mosaico che Vuza ha caratterizzato come “regolari complementari di categoria massimale” (*regular complementary canons of maximal category*) rappresentano in effetti l'applicazione musicale di costruzioni matematiche legate ad una congettura che risale alla fine del XIX secolo. Si tratta di un problema che il matematico Hermann Minkowski aveva formulato inizialmente in termini di teoria dei numeri nei volumi *Geometrie der Zahlen* (1896) e *Diophantische Approximationen* (1907), mostrando nello stesso tempo i legami con la geometria attraverso una sua riformulazione in termini di tassellazioni dello spazio euclideo  $n$ -dimensionale  $\mathbb{R}^n$  con cubi unitari. La congettura geometrica, che riproponiamo qui sotto, sarà il punto di partenza per una formalizzazione algebrica che permetterà al matematico ungherese György Hajós di risolverla attraverso la teoria delle fattorizzazioni di gruppi.

**Congettura (Minkowski):** In una tassellazione dello spazio euclideo  $n$ -dimensionale  $\mathbb{R}^n$  con cubi unitari, è sempre possibile trovare una coppia di cubi che hanno in comune una faccia di dimensione pari a  $n - 1$ .

L'analisi dettagliata della congettura di Minkowski e della soluzione algebrica di Hajós ha fatto l'oggetto della tesi di laurea di Giulia Fidanza intitolata *Canoni ritmici a mosaico* (università di Pisa, 2008. Disponibile online all'indirizzo:

[http://repmus.ircam.fr/\\_media/moreno/TesiFidanzaFinalVersion.pdf](http://repmus.ircam.fr/_media/moreno/TesiFidanzaFinalVersion.pdf)). Il lavoro accademico costituisce, a presente, una delle migliori introduzioni pedagogiche alla storia dei legami fra le costruzioni proposte da Vuza e la congettura di Minkowski. Recentemente, Greta Lanzarotto ha ripreso le diverse strategie per fattorizzare un gruppo ciclico nella somma diretta di due sottoinsiemi non periodici – in particolare l'algoritmo originale di Vuza e le varianti proposte successivamente da Emmanuel Amiot, Franck Jedrzejewski, Mihalis Kolountzakis e Mate Matolcsi – per proporre un approccio generalizzato che estende di fatto il catalogo dei possibili canoni di Vuza. La sua tesi di dottorato, intitolata *Extended Vuza Canons* (Università di Milano Bicocca / Université de Strasbourg), è disponibile online sulla pagina web del progetto SMIR (<http://repmus.ircam.fr/moreno/smir>).

Ma cominciamo con il definire formalmente un canone ritmico a mosaico attraverso la nozione di *fattorizzazione*. Questa nozione è alla base delle due rappresentazioni principali di un canone

ritmico a mosaico: la rappresentazione *insiemistica* (in termini di somma diretta di sottoinsiemi di un gruppo ciclico) e la rappresentazione *polinomiale* (in termini di prodotti di polinomi).

**Definizione 4.1:** due sottoinsiemi  $A$  e  $B$  di  $\mathbb{Z}_n$  sono in *somma diretta* se l'immagine dell'applicazione "somma"  $\mu: A \times B \rightarrow \mathbb{Z}_n$  tale che  $\mu(a,b)=a+b$  è iniettiva. L'immagine  $A \oplus B$  di  $\mu$  è detta somma diretta dei sottoinsiemi  $A$  e  $B$ .

**Definizione 4.2:** il gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_n$  ordine  $n$  si *fattorizza* nei due sottoinsiemi  $A$  e  $B$  se  $\mathbb{Z}_n=A \oplus B$ .

Notiamo che questa nozione generalizza il caso della decomposizione di un gruppo ciclico nella somma diretta dei suoi sottogruppi massimali. Nel caso generale, i fattori non devono infatti necessariamente avere una struttura di gruppo. Questa generalizzazione è alla base della seguente definizione di canone ritmico a mosaico.

**Definizione 4.3:** Un canone ritmico a mosaico di periodicità uguale a  $n$  è una fattorizzazione di  $\mathbb{Z}_n$  nella somma diretta  $A \oplus B$  dei suoi due sottoinsiemi  $A$  e  $B$ . Il sottoinsieme  $A$  corrisponde al "ritmo di base" (o *inner rhythm*) e il sottoinsieme  $B$  è detto "ritmo esterno" (*outer rhythm*) e indica i momenti in cui le varie voci del canone entrano.

**Definizione 4.4** (dualità): dato un canone a mosaico  $A \oplus B$  di periodo  $n$  e avente  $|B|$  voci, il suo *duale* è il canone a mosaico  $B \oplus A$  di periodo anch'esso uguale a  $n$  e avente  $|A|$  voci.

**Definizione 4.5** (periodicità): un sottoinsieme  $A \subseteq \mathbb{Z}_n$  è *periodico* se  $\exists m \in \mathbb{Z}_n$  con  $m < n$  tale che  $m+A=A$ . Il *periodo* del sottoinsieme  $A$  è la classe di equivalenza, modulo  $n$ , del minimo intero positivo  $m$  tale che  $m+A=A$ .

Dalla definizione di canone ritmico a mosaico come fattorizzazione di un gruppo ciclico è possibile dedurre una prima classificazione di queste strutture musicali che tiene conto delle proprietà di simmetria dei fattori  $A$  e  $B$  alla base della somma diretta. Esistono quattro tipi di canoni a mosaico che descriviamo nella proposizione seguente.

### **Proposizione:**

Dato un canone a mosaico  $\mathbb{Z}_n = A \oplus B$ , distinguiamo quattro casi:

- (i)  $A$  e  $B$  sono due sottogruppi di  $\mathbb{Z}_n$ .
- (ii)  $A \subseteq \mathbb{Z}_n$  e  $B$  è un sottogruppo di  $\mathbb{Z}_n$ .
- (iii)  $A, B \subseteq \mathbb{Z}_n$  e  $B$  è un sottoinsieme periodico di periodicità  $m < n$
- (iv)  $A, B \subseteq \mathbb{Z}_n$  e i due sottoinsiemi  $A$  e  $B$  sono entrambi non periodici.

Vediamo alcuni esempi di ciascuna delle quattro classi precedenti.

**Canone del primo tipo.** È il caso più semplice nel quale il ritmo di base e le entrate delle voci hanno la massima regolarità. Nel caso di  $\mathbb{Z}_n$  con  $n=12$ , un esempio è offerto dalla decomposizione



di Sylow seguente:  $A=\{0,3,6,9\}$  e  $B=\{0,4,8\}$ . I due sottoinsiemi  $A$  e  $B$  sono isomorfi rispettivamente al gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_4$  di ordine 4 e al gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_3$  di ordine 3.

**Canone del secondo tipo.** In questo secondo caso, le voci del canone ritmico a mosaico entrano ad intervalli regolari secondo l'informazione contenuta nel secondo fattore della decomposizione che corrisponde ad un sottogruppo  $B$  di un gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_n$ . Nel caso di  $\mathbb{Z}_{12}$ , un esempio è offerto dalla decomposizione seguente:  $A=\{0,5,6,7\}$  e  $B=\{0,4,8\}$ .

**Canone del terzo tipo.** È il caso di un canone ritmico a mosaico nel quale le voci entrano secondo l'informazione contenuta nel secondo fattore della decomposizione che corrisponde ad un sottoinsieme periodico  $B$  di un gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_n$ . Nel caso di  $\mathbb{Z}_{12}$ , un esempio è offerto dalla decomposizione seguente:  $A=\{0,2,5\}$  e  $B=\{0,1,6,7\}$ . Notiamo che il sottoinsieme  $B$  è periodico di periodicità uguale a 6. Il canone a 4 voci è in realtà riducibile ad un canone a due voci di periodo uguale a 6 nel quale i due fattori sono dati dai sottoinsiemi  $C=\{0,2,4\}$  e  $D=\{0,1\}$ . Il lettore avrà notato che il primo sottoinsieme è in realtà un sottogruppo di  $\mathbb{Z}_6$  e ci siamo quindi ricondotti al caso di un canone di secondo tipo.

**Canone del quarto tipo.** È indubbiamente il caso più complesso e difficile, visto che né il ritmo di base  $A$  né le entrate delle voci  $B$  hanno una periodicità inferiore a quella del gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_n = A \oplus B$ . Un tale tipo di canone è chiamato "canone di Vuza" e il minimo periodo necessario per avere una struttura musicale di questo tipo è 72, per ragioni che saranno chiare nel seguito. Notiamo che un esempio di una tale fattorizzazione è proposto da Laszlo Fuchs nel suo trattato *Abelian Groups* (1960) e ripreso da François Le Lionnais, scrittore e membro fondatore dell'OuLiPo (*Ouvroir de Littérature Potentielle*), nella sua enciclopedia dei numeri straordinari (*Les Nombres Remarquables*, 1983). I due sottoinsiemi di Fuchs sono riportati qui sotto e rappresentati musicalmente attraverso il canone a mosaico risultante nella figura seguente.

$$A=\{0,1,5,6,12,25,29,36,42,48,49,53\}$$

$$B=\{0,8,16,18,26,34\}$$

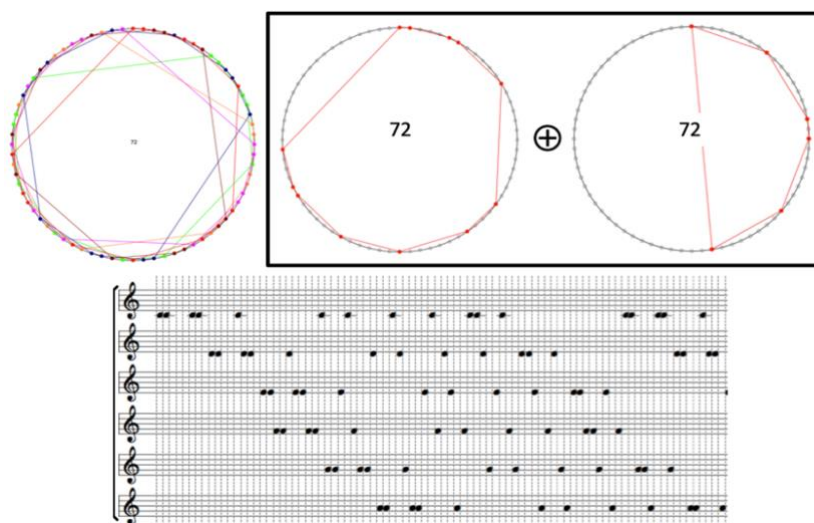


Fig. 14 – Un canone di Vuza a 6 voci corrispondente alla fattorizzazione  $\{0,1,5,6,12,25,29,36,42,48,49,53\} \oplus \{0,8,16,18,26,34\} = \mathbb{Z}_{72}$ .

Perché 72 è un valore possibile per la periodicità di canoni del quarto tipo? La risposta viene dalla teoria dei gruppi di Hajós, così chiamati dal nome del matematico ungherese che nel 1941 risolse la congettura di Minkowski dopo averla reinterpretata *more algebrico* come una fattorizzazione di gruppi abeliani in somma diretta di sottoinsiemi. Fra l’inizio degli anni Quaranta e la fine degli anni Cinquanta vari matematici fra i quali György Hajós, Nicolaas Goovert de Bruijn, Laszlo Redei, A. D. Sands si occuparono di questa questione giungendo ad una classificazione esaustiva di tutti i gruppi ciclici  $\mathbb{Z}_n$  per i quali una qualsiasi loro fattorizzazione  $\mathbb{Z}_n = A \oplus B$  implica la periodicità di almeno uno dei due fattori. Questi sono tutti e soli i gruppi ciclici di ordine  $n$  ove  $n \in \{p^\alpha, p^\alpha q, p^2 q^2, pqr, p^2 qr, pqrs \mid p, q, r, s \text{ primi distinti e } \alpha \in \mathbb{N}\}$ . Tali gruppi sono detti *gruppi di Hajós* (o “good groups”). Se ne deduce che per poter ottenere un canone ritmico a mosaico del quarto tipo è necessario fattorizzare gruppi ciclici che sono “bad” ovvero non possiedono la proprietà di Hajós. Vuza dimostra che questi sono tutti e soli i gruppi ciclici di ordine  $n$  ove  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ , ove  $p_1$  e  $p_2$  sono primi distinti,  $p_1 \cdot n_1$  e  $p_2 \cdot n_2$  sono coprimi e  $n_3 > 1$ .

Il più piccolo intero  $n$  che può essere decomposto in questo modo è 72 visto che esso è uguale a  $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3^2$ , un valore che quindi non rientra fra gli ordini di un gruppo di Hajós. Per questo motivo è possibile trovare (almeno) un canone di Vuza di ordine 72. Come abbiamo potuto mostrare attraverso una collaborazione con l’informatico Carlos Agon dell’IRCAM, esistono in realtà 18 fattorizzazioni di  $\mathbb{Z}_{72}$  in una somma diretta  $A \oplus B$  di sottoinsiemi non periodici  $A$  e  $B$  di cardinalità rispettivamente uguale a 12 e 6. Più precisamente, esistono 6 *inner rhythms* e 3 *outer rhythms* alla base dei 18 canoni di Vuza di periodicità 72. Il catalogo delle soluzioni è espresso nella tabella sottostante in termini delle rispettive strutture intervallari.

<i>Inner rhythms</i>	<i>Outer rhythms</i>
(1, 3, 3, 6, 11, 4, 9, 6, 5, 1, 3, 20)	(8, 8, 2, 8, 8, 38)
(20, 3, 1, 5, 6, 9, 4, 11, 6, 3, 3, 1)	(16, 2, 14, 2, 16, 22)
(1, 4, 1, 19, 4, 1, 6, 6, 7, 4, 13, 6)	(14, 8, 10, 8, 14, 18)
(6, 13, 4, 7, 6, 6, 1, 4, 19, 1, 4, 1)	
(1, 5, 15, 4, 5, 6, 6, 3, 4, 17, 3, 3)	
(3, 3, 17, 4, 3, 6, 6, 5, 4, 15, 5, 1)	

Tabella 2 – Catalogo dei 18 (=6×3) canoni di Vuza di periodo 72 espressi attraverso le strutture intervallari  $IS(A)$  e  $IS(B)$  associate ai ritmi interni  $A$  ed esterni  $B$  della fattorizzazione  $A \oplus B = \mathbb{Z}_{72}$ .

Le operazioni alla base dell’approccio insiemistico in musica (ovvero le trasposizioni, inversioni e aumentazioni), sono compatibili con la struttura di canone ritmico a mosaico. Nello stesso modo in cui si può ridurre in maniera “paradigmatica” il catalogo degli accordi – modulo quindi l’azione di un gruppo sull’insieme potenza  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$  – è possibile ridurre il catalogo dei canoni di Vuza facendo agire uno dei tre gruppi precedenti sulla famiglia dei sottoinsiemi di  $\mathbb{Z}_{72}$ . Applicando le trasformazioni affini si arriva ad un risultato sorprendente: esistono due soli tipi di canoni di Vuza di ordine 72, associati rispettivamente ai ritmi di base (1, 3, 3, 6, 11, 4, 9, 6, 5, 1, 3, 20) e (1, 4, 1, 19,

4, 1, 6, 6, 7, 4, 13, 6), entrambi aventi come insieme delle entrate delle voci l' *outer rhythm* corrispondente alla struttura intervallare (8, 8, 2, 8, 8, 38).

Ma la fattorizzazione di gruppi non è il solo modo di rappresentare canoni ritmici a mosaico. Abbandoniamo, per un breve momento, la teoria affascinante dei canoni di Vuza per introdurre un'ulteriore formalizzazione dei canoni ritmici a mosaico basata, questa volta, su un approccio di tipo polinomiale.

## Rappresentazione polinomiale e condizioni di Coven-Meyerowitz

Dato un sottoinsieme  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  di  $\mathbb{Z}_n$ , la sua rappresentazione polinomiale si ottiene prendendo come esponenti i valori del sottoinsieme  $A$ . Il *polinomio associato* ad  $A$  sarà quindi il polinomio  $A(x)$  a coefficienti 0 e 1 definito come la sommatoria di tutti gli  $x^a$  al variare degli elementi  $a \in A$ .

Osserviamo che la somma diretta di due sottoinsiemi  $A$  e  $B$  corrisponde al prodotto dei loro polinomi associati  $A(x)$  e  $B(x)$  in quanto  $(A \oplus B)(x) = A(x) \times B(x)$ . Questa proprietà deriva dal Lemma seguente.

**Lemma:** Se  $\Delta_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$  è il polinomio associato a  $\mathbb{Z}_n$ , allora le due condizioni seguenti sono equivalenti.

- (i)  $\mathbb{Z}_n = A \oplus B$
- (ii)  $A(x) \times B(x) \alpha \Delta_n(x) \pmod{x^n - 1}$

Vista l'analogia con il metronomo, strumento che scandisce il tempo in maniera regolare, il polinomio  $\Delta_n(x)$  sarà spesso indicato col termine di "polinomio metronomico". Il lemma precedente permette non solamente di interpretare in modo polinomiale la classificazione dei canoni ritmici a mosaico della sezione precedente ma, più in generale, offre nuove strategie di fattorizzazione, come hanno mostrato Ethan Coven e Aaron Meyerowitz attraverso delle condizioni basate sulla teoria dei polinomi ciclotomici di cui diamo alcune definizioni preliminari.

**Definizione 4.6:** Una *radice ennesima dell'unità* è una radice complessa  $\zeta = e^{i\theta}$  del polinomio  $x^n - 1$  ove  $\theta$  è un multiplo intero di  $2\pi/n$ , i.e.  $\theta = 2\pi k/n$  ove  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

**Definizione 4.7:** Una *radice primitiva ennesima dell'unità* è una radice ennesima dell'unità nella quale il fattore moltiplicativo  $k$  è coprimo con  $n$ .

**Definizione 4.8:** Il *polinomio ciclotomico di ordine  $n$*  è il polinomio  $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$  irriducibile in  $\mathbb{Q}[x]$  le cui radici sono le radici primitive ennesime dell'unità. Il suo grado è pari a  $\varphi(n)$  ove  $\varphi$  è la funzione di Eulero che associa ad un intero  $n$  il numero degli interi inferiori a  $n$  e coprimi con  $n$ .

Diamo qualche esempio di polinomio ciclotomico  $\Phi_n(x)$  per  $1 \leq n \leq 12$ , visto che saranno utili nel seguito (e negli esercizi finali, ai quali rinviamo il lettore per familiarizzarsi con il calcolo polinomiale):

- $\Phi_1(x) = x - 1$

- $\Phi_2(x)=x+1$
- $\Phi_3(x)=x^2+x+1$
- $\Phi_4(x)=x^2+1$
- $\Phi_5(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$
- $\Phi_6(x)=x^2-x+1$
- $\Phi_7(x)=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$
- $\Phi_8(x)=x^4+1$
- $\Phi_9(x)=x^6+x^3+1$
- $\Phi_{10}(x)=x^4-x^3+x^2-x+1$
- $\Phi_{11}(x)=x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$
- $\Phi_{12}(x)=x^4-x^2+1$

L'interesse di utilizzare la teoria dei polinomi ciclotomici nello studio delle fattorizzazioni alla base dei canoni ritmici a mosaico è evidente dalla seguente proprietà di decomposizione del polinomio metronomico come prodotto di polinomi ciclotomici  $\Phi_d$  il cui indice  $d$  è un divisore di  $n$  diverso da 1. Formalmente:  $\Delta_n(x)=\prod \Phi_d(x)$  ove  $d|n$  e  $d\neq 1$ . Abbiamo oramai introdotto tutti gli elementi necessari per presentare le due principali condizioni di Coven e Meyerowitz applicate al caso di un gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_n$  di ordine  $n$ . Dato un sottoinsieme  $A\subseteq\mathbb{Z}_n$  e indicato con  $\Phi_d$  il  $d$ -esimo polinomio ciclotomico, definiamo i due sottoinsiemi  $R_A$  e  $S_A$  seguenti:

- $R_A = \{d>0 \text{ tali che } \Phi_d(x)|A(x)\}$ .
- $S_A = \{d\in R_A \text{ tali che } d=p^\alpha \text{ ove } p \text{ è un numero primo e } \alpha>0\}$

In altre parole, l'insieme  $R_A$  rappresenta la collezione di indici dei polinomi ciclotomici che dividono il polinomio associato al sottoinsieme  $A\subseteq\mathbb{Z}_n$ . Di questi indici, quelli che sono pari ad una potenza di un numero primo costituiscono l'insieme  $S_A$ .

Le condizioni T1 e T2 di Coven-Meyerowitz sono le due proprietà seguenti:

**Condizione T1:**  $A(1)=\prod p$  ove i primi  $p$  sono tali che  $p^\alpha \in S_A$ .

**Condizione T2:** se  $d_1, d_2, \dots, d_k \in S_A$  sono potenze di primi distinti, allora il loro prodotto  $d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_k \in S_A$  e quindi divide il polinomio  $A(x)$ .

La caratterizzazione completa di queste due condizioni rispetto al problema della costruzione dei canoni ritmici a mosaico è data dal seguente teorema.

**Teorema:** Sia  $A\subseteq\mathbb{Z}_n$  e sia  $A(x)$  il polinomio associato.

- Se  $A$  soddisfa le condizioni T1 e T2 allora esiste un insieme  $B$  tale che  $\mathbb{Z}_n = A \oplus B$ , ovvero  $A$  tassella per traslazione
- Se  $A$  tassella per traslazione allora  $A$  soddisfa la condizione T1

Il teorema precedente afferma che le condizioni T1 e T2 sono sufficienti per assicurare l'esistenza di un canone ritmico a mosaico ma non sono in generale necessarie. In altre parole, possono esistere

canoni ritmici a mosaico che non rispettano la proprietà T2. A differenza della condizione T1 che è sempre necessaria, il carattere necessario della condizione T2 costituisce un problema aperto che è spesso indicato con l'espressione "congettura T2". Sorprendentemente la condizione T2 è legata ad un'altra congettura tutt'ora aperta: la congettura di Fuglede o congettura spettrale.

## Un breve cenno sull'approccio spettrale e la congettura di Fuglede

Descrivere in dettaglio l'approccio spettrale ci porterebbe troppo lontani dall'obiettivo principale di questo saggio che è quello di introdurre il lettore curioso ma non necessariamente armato di bagagli matematici ad alcuni aspetti teorici della ricerca "matemusicale". È però possibile, crediamo, dare un'idea della ricchezza di questo terzo tipo di approccio rispetto ad una congettura avanzata dal matematico Bent Fuglede alla fine degli anni Cinquanta del secolo scorso secondo la quale vi è equivalenza fra spettralità di un sottoinsieme dello spazio euclideo  $n$ -dimensionale e la sua capacità di tassellare  $\mathbb{R}^n$  attraverso delle traslazioni. Intuitivamente, un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  è *spettrale* se esso ammette una base ortonormale di esponenziali complessi ovvero una decomposizione di Fourier.

Questo è ciò che accade nella decomposizione tradizionale di una funzione  $f$  definita sull'intervallo  $[0, 1)$  e a valori in  $\mathbb{C}$ . Tali funzioni sono restrizioni di funzioni di periodicità uguale a 1 e a valori in  $\mathbb{R}$  e possono essere espresse come una somma di note "pure", ovvero funzioni del tipo  $e^{2\pi i n x}$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ . I lavori di vari matematici, fra i quali la medaglia Fields Terence Tao, oltre a Mate Matolcsi e Mihalis Kolountzakis, hanno permesso di confutare la congettura nei casi in cui la dimensione  $n > 2$ . A differenza dei domini convessi, per i quali la congettura è verificata in qualsiasi dimensione, è quindi possibile trovare dei sottoinsiemi che tassellano  $\mathbb{R}^n$  con  $n > 2$  ma che non ammettono uno spettro. Sorprendentemente, la congettura è tutt'ora aperta in dimensione  $n=1$  e  $n=2$ . In dimensione  $n=1$ , ci si può ridurre al caso degli interi  $\mathbb{Z}$  e dei suoi sottoinsiemi che tassellano per traslazione.

Questo permette di stabilire un legame diretto fra la congettura spettrale e la costruzione di canoni ritmici a mosaico che abbiamo visto precedentemente ed in particolare i canoni di Vuza. Dove cercare in effetti possibili ritmi di base  $A \subseteq \mathbb{Z}_n$  che non ammettano uno spettro o che non verifichino T2? In virtù del risultato sui gruppi di Hajós, i soli possibili controesempi alla congettura spettrale e alla necessità della condizione T2 possono venire dai canoni di Vuza, ovvero dalle decomposizioni di un gruppo non Hajós  $\mathbb{Z}_n$  in sottoinsiemi non periodici. Purtroppo i cataloghi dei vari canoni di Vuza ottenuti sino ad ora mostrano che tutti i ritmi di base dei rispettivi canoni ritmici sono spettrali e non vi è certezza che possano esistere algoritmi ancora più generali per ottenere nuove fattorizzazioni di gruppi non-Hajós quando il periodo è estremamente elevato. Fra questi canoni di Vuza dal periodo che probabilmente oltrepassa ogni possibile e ragionevole applicazione musicale si nasconde forse un possibile controesempio alle due congetture tutt'ora aperte in questo campo di predilezione per le ricerche teoriche fra le più avanzate, quello appunto delle tassellazioni "matemusicali"!

## Giochi ‘matemusicali’

Imparare la matematica suonando, cantando o semplicemente battendo le mani può sembrare un’eresia. Eppure la musica è piena di costruzioni che permettono di introdurre concetti tutt’altro che elementari in vari rami della matematica. Lo scopo di questa sezione è di offrire qualche elemento di riflessione al lettore per invogliarlo ad aprire, di volta in volta, nuove porte che lo condurranno nei territori della matematica partendo dalla musica!

**Problema 1:** Congettura di Steinhaus o problema dei tre intervalli.

Si tratta di una congettura apparentemente lontana dalla musica ma che ha delle implicazioni dirette in ogni teoria del temperamento basata sull’equivalenza modulo l’ottava. La congettura è stata avanzata dal matematico Hugo Steinhaus negli anni Cinquanta ed è nota come problema dei tre intervalli. Il problema riguarda gli intervalli generati da un insieme finito di  $n$  punti disposti su un cerchio in corrispondenza a multipli interi di un dato angolo  $\alpha$ . Se l’angolo  $\alpha$  è irrazionale, i punti dividono la circonferenza in intervalli di al più tre diverse lunghezze. Come interpretare musicalmente un tale risultato?

**Problema 5.** Calcolo degli unisoni nel brano *Clapping Music* del compositore statunitense Steve Reich. La composizione si basa sul pattern ritmico associato al sottoinsieme  $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10\}$  la cui struttura intervallare è data dall’insieme  $(1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2)$ . Si tratta di un brano per due musicisti che battono con le mani inizialmente lo stesso ritmo all’unisono, ripetendolo un certo numero di volte prima di passare allo stadio successivo nel quale uno dei due batte lo stesso ritmo mentre l’altro batte il ritmo associato alla permutazione ciclica della struttura intervallare ottenuta prendendo il primo elemento e mettendolo alla fine. Si ottiene in questo modo la struttura intervallare  $(1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1)$  che corrisponde al nuovo ritmo  $\{0, 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11\}$ . E così via. Ad ogni stadio del processo l’ascoltatore percepisce un certo numero di “tempi d’attacco” che coincidono. In altre parole, in corrispondenza di questi valori, i musicisti si ritrovano a battere le mani all’unisono. Come calcolare la distribuzione degli unisoni corrispondenti alle dodici permutazioni cicliche della struttura intervallare di base? È possibile sapere immediatamente, senza bisogno di calcolare tutte le permutazioni cicliche della struttura intervallare associata, come sarà la distribuzione degli unisoni nel caso in cui si scelga, per esempio, il ritmo  $\{0, 3, 5, 8\}$ ?

**Problema 6.** Algoritmo di Euclide e insieme di punti di equidistribuzione massimale (*maximally even*) all’interno di un gruppo ciclico di periodo  $n$ . Distribuire sei punti in un cerchio diviso in 12 parti uguali e in modo tale che il poligono risultante sia regolare è un gioco da bambini. I sei punti dell’esagono regolare costituiscono senza ombra di dubbio l’insieme i cui elementi hanno una proprietà di equidistribuzione massimale all’interno del gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_{12}$  di ordine 12. Ma come calcolare un tale insieme quando esso ha, per esempio, cardinalità 7? Il problema è stato trattato indipendentemente dai teorici della tradizione insiemistica americana, interessati a caratterizzare gli insiemi di classi di altezze, e il matematico e geometra computazionale Godfried Toussaint,

interessato piuttosto a caratterizzare i pattern ritmici aventi una tale proprietà. Nel primo caso parleremo di “*maximally even sets*” (che abbrevieremo in ME-sets) mentre nel secondo caso il riferimento ad Euclide diventa esplicito, visto che i ritmi aventi tale proprietà sono detti “*Euclidian rhythms*”. Ma come applicare l’algoritmo di Euclide in musica per trovare, e suonare, la migliore approssimazione dell’ettagono regolare nel caso dei sottoinsiemi di cardinalità 7 di  $\mathbb{Z}_{12}$ ?

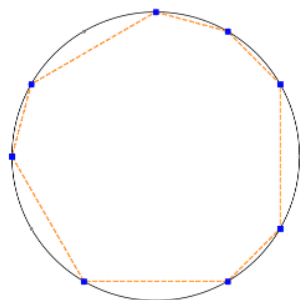
**Problema 9.** Legame fra canoni ritmici a mosaico e omometria. Supponiamo che  $A$  tasselli  $\mathbb{Z}_n$  per traslazione, ovvero che esista un sottoinsieme  $B \subseteq \mathbb{Z}_n$  tale che  $A \oplus B = \mathbb{Z}_n$ . Sappiamo che le azioni del gruppo ciclico, diedrale e affine preservano la proprietà di essere un canone ritmico a mosaico. In altre parole, se esiste un sottoinsieme  $A' \sim_G A$  dove l’equivalenza è indotta dall’azione di un gruppo  $G$  del tipo  $\mathbb{Z}_n$ ,  $\mathbf{D}_n$  o  $\text{Aff}_n$  allora necessariamente  $A' \oplus B = \mathbb{Z}_n$ . Benché l’omometria non sia indotta da nessuna azione di gruppo su  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_n)$  la relazione precedente resta valida. Se un sottoinsieme  $A'$  è omometrico all’insieme  $A$ , allora  $A'$  tassella  $\mathbb{Z}_n$  per traslazione. Come giustificare una tale apparentemente sorprendente proprietà?

## Soluzioni dei problemi

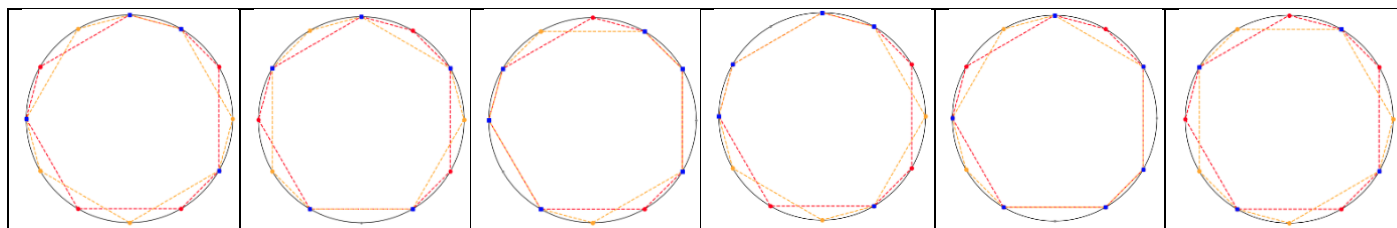
**Problema 1.** Posto inizialmente come congettura, il problema è stato risolto alla fine degli anni Cinquanta da vari matematici, fra i quali Vera T. Sós, János Surányi, Stanislaw Swierczkowski e molti altri. Possiamo quindi parlare di teorema dei tre intervalli (o “Three-gap Theorem”). Per quanto esistano tentativi di semplificare la dimostrazione di questo risultato, come quello di Frank M. Liang, preferiamo rinviare il lettore all’articolo originale (“A short proof of the 3d distance theorem”, *Discrete Mathematics*, 28(3), 325-326, 1979) e soffermarci invece sull’interpretazione musicale di un tale risultato generale. Il teorema afferma che gli  $n$  punti sulla circonferenza sono tali che le distanze successive fra punti consecutivi sono di al massimo tre tipi. Musicalmente ciò significa che in un temperamento musicale nel quale esiste un intervallo generatore, sull’ipotesi dell’equivalenza modulo l’ottava, una scala musicale ottenuta ripetendo  $n$  volte un tale intervallo ammetterà al massimo tre intervalli diversi fra le note successive della scala, e questo indipendentemente dal numero di volte nel quale il multiplo dell’intervallo generatore supererà  $2\pi$  ovvero il valore dell’angolo giro. Se applichiamo il procedimento al caso particolare del temperamento equabile e della scala diatonica generata dall’intervallo di quinta temperata pari a 7 semi-toni (ovvero ad un angolo di  $7\pi/6$ ), i 7 punti del cerchio in corrispondenza delle sette note della scala sono tali che gli intervalli successivi diversi non sono mai più di tre. In questo caso sono addirittura due, ovvero l’intervallo di seconda minore (il semitono, indicato con 1) e quello di seconda maggiore (il tono, indicato con 2), come ben mostra la struttura intervallare associata, ovvero (2, 2, 1, 2, 2, 2, 1). Il teorema si applica ad ogni porzione della scala diatonica ed in particolare alla scala pentatonica generata dalla ripetizione di 5 intervalli di quinta e la cui struttura intervallare è data da (2, 2, 3, 2, 3). L’applicazione musicale del teorema dei tre intervalli nel caso del temperamento pitagorico è stata studiata inizialmente da Norman Carey e David Clampitt e costituisce un campo di ricerca estremamente fecondo, in particolare grazie all’utilizzazione di strumenti legati alle grammatiche formali e alla *word theory*.

□

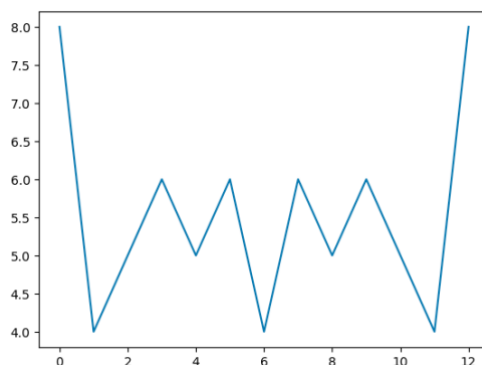
**Problema 5:** Il processo compositivo utilizzato da Steve Reich in *Clapping Music* mostra chiaramente l'interesse di utilizzare la rappresentazione circolare nel descrivere i pattern ritmici e gli strumenti insiemistici ed algebrici introdotti nel secondo capitolo per calcolare il numero di unisoni ad ogni stadio del processo. Il ritmo scelto dal compositore corrisponde al seguente ottagono iscritto nel cerchio:



Ovviamente, visto che i musicisti suonano lo stesso ritmo all'inizio del brano, il numero iniziale degli unisoni è pari alla cardinalità dell'insieme, ovvero 8. Le trasformazioni ritmiche successive corrispondono alle sei rotazioni dell'ottagono in senso antiorario di un angolo di  $k\pi/6$  con  $k=1, \dots, 6$ . Esse sono rappresentate dalle sei illustrazioni circolari seguenti nelle quali il nuovo ritmo ottenuto attraverso la permutazione circolare della struttura intervallare è sovrapposto al ritmo iniziale in modo da evidenziare il numero di unisoni.



È facile verificare che la sesta rotazione costituisce il punto di simmetria rispetto alla distribuzione degli unisoni. Ovvero alla settima rotazione si ottengono gli stessi unisoni della quinta rotazione, all'ottava lo stesso numero di unisoni della quarta rotazione e così via sino alla dodicesima rotazione che riporta il ritmo nella sua configurazione iniziale. La distribuzione degli unisoni rispetto ai vari pattern ritmici è descritto dal seguente grafico nel quale abbiamo disposto in ascissa il numero delle rotazioni e in ordinata il numero degli unisoni.





Il lettore non avrà difficoltà a riconoscere le proprietà di simmetria che caratterizzano il contenuto intervallare  $IC_A$  del sottoinsieme  $A \subseteq \mathbb{Z}_{12}$  associato al pattern ritmico utilizzato da Steve Reich. Potrà quindi identificare facilmente il numero degli unisoni associati ad un qualsiasi ritmo calcolando semplicemente il suo contenuto intervallare. (Ringrazio Louis Lalay per aver messo a disposizione le figure utilizzate nella spiegazione di questo problema sul quale gli studenti del Master ATIAM dell'IRCAM si sono cimentati nell'ambito del corso di musicologia computazionale che ho tenuto nell'anno accademico 2022-2023).

□

**Problema 6.** Una prima definizione costruttiva dei ME-sets è data dalla seguente funzione generatrice  $J$  proposta da John Clough e Jack Douthett all'inizio degli anni novanta.

$$J_{\alpha,d,n} = [\alpha + kn/d] \text{ modulo } n \text{ al variare di } k \text{ fra } 0 \text{ e } d-1,$$

ove  $[x]$  indica la funzione parte intera di  $x$  ovvero la funzione che associa ad ogni numero decimale l'intero che lo precede.

Applicando la formula al variare di  $\alpha$  si ottengono le 12 forme della scala diatonica corrispondenti alle dodici scale maggiori. Per esempio la scala di *do* maggiore è ottenuta prendendo  $\alpha=5$  e calcolando la funzione  $J_{5,7,12} = [5+12k/7]$  al variare di  $k$  fra 0 e 6.

Come sottolineato da Godfried Toussaint in numerosi articoli e come l'autore lo discute in dettaglio nel suo testo consacrato alla geometria del ritmo musicale che abbiamo citato in bibliografia, il processo che permette di equidistribuire in maniera massimale un insieme di punti attorno ad un cerchio discreto è precisamente l'algoritmo di Euclide.

Accenniamo in conclusione alla definizione senza dubbio più elegante per caratterizzare i sottoinsiemi di  $i$  cui punti sono equidistribuiti in maniera massimale attorno al cerchio, quella proposta alcuni anni fa da Emmanuel Amiot e basata sulla trasformata di Fourier discreta. Un sottoinsieme  $A \subset \mathbb{Z}_n$  di cardinalità pari a  $k$  ha la proprietà di equidistribuzione massimale (ME-set) se il modulo della trasformata di Fourier calcolata in  $k$  è massimale rispetto ai moduli delle trasformate di Fourier (calcolati in  $k$ ) di ogni altro sottoinsieme avente la stessa cardinalità. Formalmente,  $|F_A(k)| \geq |F_X(k)| \forall X \subset \mathbb{Z}_n$  con  $\#X=k$ .

La definizione che utilizza la trasformata di Fourier discreta ha il merito di rendere ovvie alcune proprietà che caratterizzano i ME-sets e in particolare il fatto che trasposizioni, inversioni, passaggi al complementare e equivalenze omometriche di ME-sets mantengono la proprietà di equidistribuzione massimale in quanto tutte queste operazioni preservano le grandezze dei coefficienti di Fourier associati.

È sorprendente constatare quanto la proprietà di equidistribuzione massimale sia presente naturalmente in numerose strutture musicali, siano esse accordi, scale o ritmi. Nel caso, in particolare dei pattern ritmici, Godfried Toussaint ha mostrato l'onnipresenza di questo tipo di proprietà strutturale nelle musiche tradizionali, da quelle afro-cubane a quelle dei pigmei Aka. Fra gli esempi più celebri citiamo il *tresillo* (i.e. il sottoinsieme  $\{0, 3, 6\} \subset \mathbb{Z}_8$ ) e il suo complementare *cinquillo* (corrispondente al sottoinsieme  $\{0, 2, 3, 5, 6\} \subset \mathbb{Z}_8$ ), la *bossa nova* (i.e. il sottoinsieme  $\{0, 3, 6, 10, 13\} \subset \mathbb{Z}_{16}$ ) o ancora il ritmo Aka corrispondente al sottoinsieme  $\{0, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 20, 22\} \subset \mathbb{Z}_{24}$ .

□

**Problema 9:** la relazione fra omometria e tassellazioni si spiega bene considerando i rapporti fra contenuto intervallare, funzioni di convoluzione e trasformata di Fourier discreta. Dalla condizione di equivalenza fra la fattorizzazione  $A \oplus B = \mathbb{Z}_n$  e il prodotto di convoluzione delle funzioni caratteristiche associate agli insiemi si ottiene che la tassellazione corrisponde alla seguente relazione:  $1_A * 1_B = 1_{\mathbb{Z}_n} = \mathbf{1}$  ove  $\mathbf{1}$  è la mappa costante su  $\mathbb{Z}_n$ . Essa resta valida se si sostituisce ad  $A$  un insieme  $A'$  tale che  $IC_A = IC_{A'}$ . Ma questa è precisamente la relazione di omometria fra  $A$  e  $A'$ . Un esempio non triviale è offerto dalla seguente fattorizzazione di  $\mathbb{Z}_{24}$  nella somma diretta dell'*inner rhythm*  $A = \{0, 1, 6, 10, 12, 13, 15, 19\}$ , e *outer rhythm*  $B = \{0, 8, 16\}$ . L'insieme omometrico  $A' = \{0, 2, 5, 6, 11, 12, 15, 17\}$  tassellerà quindi  $\mathbb{Z}_{24}$  con lo stesso *outer rhythm*  $B$ .

□

## Esercizi

### Capitolo 1

**Esercizio 1.1:** Dimostrare che nel sistema pitagorico la spirale delle quinte pure è infinita.

**Esercizio 1.2:** Partendo dall'intervallo di quinta pura corrispondete al rapporto  $3/2$ , completare la scala pitagorica trovando tutte le frazioni associate alle varie note della scala diatonica (*do, re, mi, fa sol, la, si, do*). Verificare in particolare che l'intervallo di terza maggiore nel sistema pitagorico corrisponde al rapporto  $81/64$ .

**Esercizio 1.3:** Nella teoria musicale, un *comma* è l'intervallo che si forma fra due sequenze di intervalli non temperati. Calcolare il *comma pitagorico* (ovvero la differenza fra dodici quinte giuste e sette ottave) e il *comma sintonico* (ovvero la differenza fra l'intervallo di terza maggiore nel sistema pitagorico e l'intervallo di terza giusta pari a  $5/4$ ). Verificare che la loro differenza, detta *scisma*, è estremamente piccola.

**Esercizio 1.4:** Calcolare quante melodie di 7 note si possono comporre usando le dodici note della scala cromatica e senza ripetizione di note.

**Esercizio 1.5:** Calcolare il numero di accordi di 7 note che si possono formare usando le dodici note della scala cromatica.

**Esercizio 1.6:** Mostrare il legame fra il numero di accordi nel temperamento equabile e il triangolo di Tartaglia (o di Pascal)

**Esercizio 1.7:** Partendo dallo *Speculum Musicum* di Eulero e ricordando che nella notazione tedesca la lettera H corrisponde alla nota *si* della scala musicale, trovare a quali intervalli corrispondono i due assi generatori alla base della tassellazione rettangolare del piano.

**Esercizio 1.8:** Mostrare che il pattern ritmico alla base della composizione *Harawi* d'Olivier Messiaen corrisponde ad un sottoinsieme di  $\mathbb{Z}_n$  di periodicità totale uguale a 64.

**Esercizio 1.9:** Dimostrare che il pattern ritmico dell'esercizio precedente non tassella gli interi per traslazione.

## Capitolo 2

**Esercizio 2.1:** Dimostrare che nel temperamento equabile esistono 4096 accordi (modulo l'ottava)

**Esercizio 2.2:** Mostrare che la struttura intervallare è invariante per trasposizione ma non per inversione

**Esercizio 2.3:** Dimostrare che per ogni intervallo  $k$  il contenuto intervallare  $IC_A(k)$  di un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{Z}_{12}$  soddisfa la relazione  $IC_A(k) = 1_A(k) * 1_A(-k)$ .

**Esercizio 2.4:** Il contenuto intervallare (e a fortiori il vettore intervallare) è invariante per trasposizione e inversione.

**Esercizio 2.5:** Dimostrare che il ritmo  $A \subset \mathbb{Z}_{16}$  associato alla *bossa nova* si ottiene facendo il quoziente del cluster cromatico  $\{0,1,2,3,4\}$  per la cardinalità  $|A|=5$  dell'insieme.

**Esercizio 2.6:** Calcolare il vettore intervallare del ritmo *bossa nova* dell'esercizio precedente e verificare che la somma dei valori del vettore intervallare è uguale a 10. Generalizzare questa proprietà a ogni sottoinsieme di  $\mathbb{Z}_{16}$  di cardinalità pari a 5.

**Esercizio 2.7:** Dimostrare che l'inversione  $I_k$  è involutiva, ovvero applicata due volte restituisce la trasformazione identità  $x \rightarrow x$ .

**Esercizio 2.8:** Calcolare il prodotto di due inversioni generiche  $I_k$  e  $I_h$ .

**Esercizio 2.9:** Dimostrare che la composizione di due inversioni  $I_k$  e  $I_h$  è non commutativa.

**Esercizio 2.10:** Dimostrare che l'inversione  $I_k$  non definisce una relazione di equivalenza su  $\mathbb{Z}_{12}$ .

**Esercizio 2.11:** Calcolare la composizione di due aumentazioni  $f_{a,b}$  e  $f_{c,d}$ .

## Capitolo 3

**Esercizio 3.1:** Trovare l'espressione algebrica che permette di definire in maniera "contestuale" le tre simmetrie neo-riemanniane R, P e L su un generico accordo maggiore o minore.

**Esercizio 3.2:** Mostrare che il gruppo neo-riemanniano PLR è isomorfo al gruppo diedrale di ordine 24.

**Esercizio 3.3:** Mostrare che le due trasformazioni R e P (o, equivalentemente, le due trasformazioni L e P) non permettono di generare il gruppo PLR.

**Esercizio 3.4:** Mostrare che il gruppo neo-riemanniano PLR agisce in maniera semplicemente transitiva sulla famiglia dei 24 accordi consonanti

**Esercizio 3.5:** Consideriamo il caso particolare del Tonnetz  $T(5,7)$  ovvero generato dal bicordo la cui struttura intervallare è data da  $(5,7)$ . Dimostrare che i numeri di Betti sono  $\beta_0=\beta_1=1$ .

**Esercizio 3.6:** Consideriamo un secondo caso particolare di Tonnetz, costruito questa volta sullo spazio diatonico e generato dalla triade avente  $(2,2,3)$  come struttura intervallare. A quale struttura topologica corrisponde  $T(2,2,3)$ ?

## Capitolo 4

**Esercizio 4.1:** In accordo con la notazione introdotta da Coven e Meyerowitz, e discussa nella sezione del quarto capitolo consacrata all'approccio polinomiale, indichiamo con  $S_A$  l'insieme dei fattori ciclotomici che dividono il polinomio associato  $A(x)$  e che sono pari ad una potenza di un numero primo. Si consideri il caso  $n=72$  e sia  $S_A=\{2,3,5\}$ . Dire se  $S_A$  può essere associato ad un sottoinsieme  $A \subset \mathbb{Z}_{72}$  che genera un canone di Vuza.

**Esercizio 4.2:** I canoni ritmici a mosaico del secondo tipo sono generati da pattern ritmici indicati a volte nella letteratura come " $k$ -asimmetrici". Questa nozione è stata introdotta da Rachel W. Hall e Paul Klingsberg nell'articolo "Asymmetric Rhythms, Tiling Canons, and Burnside's Lemma" (*Proceedings Bridges Conference*, 2004). Per definizione, un ritmo  $R \subset \mathbb{Z}_{kh}$  è  $k$ -asimmetrico se esiste un sottogruppo  $S < \mathbb{Z}_{kh}$  tale che  $R \oplus S = \mathbb{Z}_{kh}$ . Consideriamo il sottoinsieme  $A = \{0,1,6,7\} \subset \mathbb{Z}_{12}$  e sia  $A(x)$  il suo polinomio associato a coefficienti 0 e 1.

- i) Mostrare che  $A$  è 3-asimmetrico
- ii) Sapendo che  $A(x)$  è divisibile per i polinomi ciclotomici  $\Phi_4(x)$  e  $\Phi_{12}(x)$ , trovare il polinomio ciclotomico  $\Phi_s(x)$  tale che  $A(x) = \Phi_s(x) \times \Phi_4(x) \times \Phi_{12}(x)$ ,
- iii) Calcolare la funzione intervallare  $IF_{A,B}(k)$  per  $k=0, 1, \dots, 11$ .

# Soluzione degli esercizi

## Capitolo 1

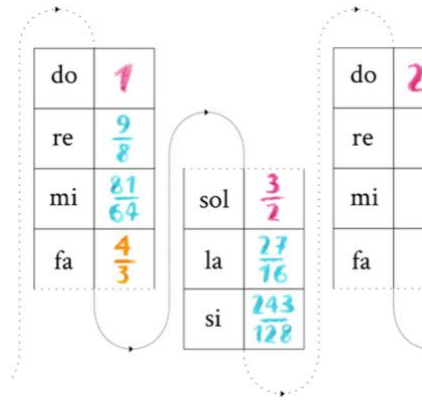
**Esercizio 1.1:** Dimostrare che nel sistema pitagorico la spirale delle quinte pure è infinita.

Come già accennato nel capitolo introduttivo, la dimostrazione utilizza la stessa tecnica che alcuni di voi hanno sicuramente già incontrato quando si trattava di dimostrare che  $\sqrt{2}$  è un numero irrazionale. Si tratta della dimostrazione *ad absurdum* nella quale si suppone che la tesi sia falsa per giungere ad una contraddizione, il che porta a concludere che la tesi doveva essere corretta! Nel caso della spirale delle quinte, supponiamo quindi per assurdo che essa sia finita, ovvero che esista un intero  $m$  tale che dopo  $m$  ripetizioni dell'intervallo di quinta si ottiene un multiplo dell'ottava. Poiché la quinta è rappresentata dal rapporto  $3/2$  e l'ottava dall'intero  $2$ , la relazione precedente corrisponde all'equazione  $(3/2)^m = 2^n$ . Applicando una proprietà elementare delle frazioni si ottiene la relazione  $3^m/2^m = 2^n$  ovvero  $3^m = 2^{n+m}$ . Negando la tesi siamo quindi giunti ad una conclusione assurda poiché una potenza di  $3$  non può mai essere uguale ad una potenza di  $2$ , visto che nel primo caso otteniamo un numero dispari e nel secondo un numero pari. Ciò ci permette di concludere che la spirale delle quinte è infinita.

□

**Esercizio 1.2:** Partendo dall'intervallo di quinta pura corrispondete al rapporto  $3/2$ , completare la scala pitagorica trovando tutte le frazioni associate alle varie note della scala diatonica (*do, re, mi, fa, sol, la, si, do*). Verificare in particolare che l'intervallo di terza maggiore nel sistema pitagorico corrisponde al rapporto  $81/64$ .

Il risultato è mostrato nella figura sottostante nella quale il lettore potrà verificare che l'intervallo di terza maggiore è effettivamente pari a  $81/64$ . Vi è quindi una discrepanza rispetto al fenomeno degli armonici secondo i quali l'intervallo di terza maggiore dovrebbe corrispondere al rapporto  $5/4$ . Si noti invece che l'intervallo di quarta giusta (*do-fa*) nella scala pitagorica corrisponde a quello ottenuto dal fenomeno degli armonici, ovvero esso è pari a  $4/3$ . Forse il lettore avrà avuto qualche difficoltà ad ottenere questo valore partendo dall'intervallo di quinta pura, ovvero dal rapporto  $3/2$ . Se così non fosse, può tralasciare la spiegazione seguente che potrà invece essere utile al lettore in difficoltà col calcolo frazionario. La soluzione è in realtà estremamente semplice visto che la nota *fa* che dista un intervallo di quarta ascendente dalla nota *do* di partenza dista nello stesso tempo un intervallo di quinta discendente dalla nota *do* dell'ottava superiore. Ma se salire di una quinta corrisponde a moltiplicare per  $3/2$  vuol dire che per scendere di una quinta sarà sufficiente moltiplicare per  $2/3$ . E visto che  $2 \times 2/3 = 4/3$  si ottiene in questo modo il risultato voluto.



□

**Esercizio 1.3:** Nella teoria musicale, un *comma* è l'intervallo che si forma fra due sequenze di intervalli non temperati. Calcolare il *comma pitagorico* (ovvero la differenza fra dodici quinte giuste e sette ottave) e il *comma sintonico* (ovvero la differenza fra l'intervallo di terza maggiore nel sistema pitagorico e l'intervallo di terza giusta pari a  $5/4$ ). Verificare che la loro differenza, detta *scisma*, è estremamente piccola.

Il comma pitagorico (CP) si ottiene facendo il quoziente fra  $(3/2)^{12}$  e  $2^7$ . Esso è pari a  $3^{12}/2^{19}=531441/524288$ . Il comma sintonico (CS) si ottiene invece dividendo  $81/64$  per  $5/4$ , il cui risultato è uguale a  $81/80$ . La differenza fra CP e CS è in effetti estremamente piccola visto che il rapporto  $CP/CS=5 \cdot 3^8/2^{15}=32805/32768$ . Siamo sotto la soglia della percezione umana che gli studi di psicoacustica hanno stabilito essere attorno ai 5 cents ovvero a cinque centesimi di semitono equabile. Nel caso dello *scisma* ci avviciniamo ai 2 cents il che costituisce un intervallo impercettibile per l'essere umano.

□

**Esercizio 1.4:** Calcolare quante melodie di 7 note si possono comporre usando le dodici note della scala cromatica e senza ripetizione di note.

Il numero di melodie corrisponde al numero  $P(12,7)$  di permutazioni di 12 oggetti 7 alla volta. In generale il numero  $P(n,k)$  di permutazioni di  $n$  oggetti  $k$  alla volta è pari a  $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = n!/(n-k)!$  formula che permette di ottenere facilmente il valore voluto ovvero  $P(12,7)=12!/5!=6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12=3.991.680$ .

**Esercizio 1.5:** Calcolare il numero di accordi di 7 note che si possono formare usando le dodici note della scala cromatica.

Il numero di accordi corrisponde al numero  $C(12,7)$  di combinazioni di 12 oggetti 7 alla volta e a differenza del numero delle melodie, una permutazione dei singoli elementi non cambia la natura dell'accordo. È quindi sufficiente dividere  $P(12,7)$  per il numero di permutazioni di 7 elementi, ovvero  $7!$ . Più in generale il numero  $C(n,k)$  di combinazioni di  $n$  oggetti  $k$  alla volta è pari a  $P(n,k)/k! = n!/k! \cdot (n-k)!$  formula che per mette di ottenere per  $n=12$  e  $k=7$  il valore  $C(12,7)=12!/7! \cdot 5!=3.991.680/5040=792$

□

**Esercizio 1.6:** Mostrare il legame fra il numero di accordi nel temperamento equabile e il triangolo di Tartaglia (o di Pascal)

Il Triangolo di Tartaglia (o di Pascal, per i nostri cugini d'oltralpe) contiene i coefficienti dello sviluppo di  $(x+y)^n$  al variare di  $n$  ovvero, musicalmente parlando, al variare del numero di divisioni all'interno dell'ottava. Per  $n=12$ , ovvero nel caso del temperamento equabile, si ottiene l'espressione:

$$(x+y)^{12} = C(12,0)x^{12} + C(12,1)x^{11}y + \dots + C(12,11)xy^{11} + C(12,12)y^{12}$$

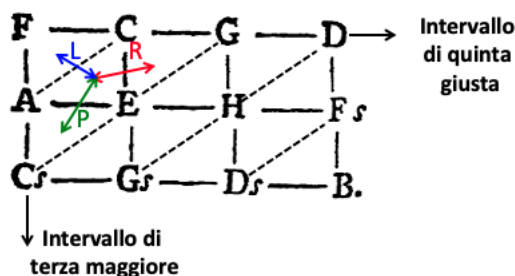
Calcolando esplicitamente i coefficienti binomiali si ottiene l'espressione finale:

$$x^{12} + 12x^{11}y + 66x^{10}y^2 + 220x^9y^3 + 495x^8y^4 + 792x^7y^5 + 924x^6y^6 + 792x^5y^7 + 495x^4y^8 + 220x^3y^9 + 66x^2y^{10} + 12xy^{11} + y^{12}$$

Abbiamo diviso l'espressione in tre parti per mostrare la simmetria nella distribuzione dei coefficienti, proprietà che può essere interpretata musicalmente dicendo che il numero di accordi contenenti  $k$  note all'interno del temperamento equabile è pari al numero di accordi che contengono  $12-k$  note. La proprietà si generalizza facilmente al caso della divisione dell'ottava in  $n$  parti uguali. □

**Esercizio 1.7:** Partendo dallo *Speculum Musicum* di Eulero e ricordando che nella notazione tedesca la lettera H corrisponde alla nota *si* della scala musicale, trovare a quali intervalli corrispondono i due assi generatori alla base della tassellazione rettangolare del piano.

Gli assi generatori alla base della tassellazione rettangolare del piano nello *Speculum Musicum* corrispondono ai due intervalli più consonanti dopo l'unisono e l'ottava, ovvero all'intervallo di quinta giusta e all'intervallo di terza maggiore. Gli assi sono indicati nella figura sottostante nella quale abbiamo anche messo in evidenza la triangolazione soggiacente dividendo ciascun rettangolo nei due triangoli che lo compongono e che corrispondono ad accordi maggiori o minori. Ritroviamo in questo modo le tre simmetrie neo-riemanniane P, L e R alla base del Tonnetz.

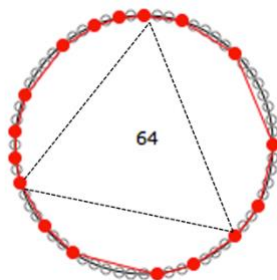


□

**Esercizio 1.8:** Mostrare che il pattern ritmico alla base della composizione *Harawi* d'Olivier Messiaen corrisponde ad un sottoinsieme di  $\mathbb{Z}_n$  di periodicità totale uguale a 64.

Il pattern ritmico si ottiene concatenando i tre ritmi non-retrogradabili (ovvero palindromi) corrispondenti alle strutture intervallari  $R_1=(3, 5, 8, 5, 3)$ ,  $R_2=(4, 3, 7, 3, 4)$  e  $R_3=(2, 2, 3, 5, 3, 2, 2)$ .

La periodicità del ritmo totale si ottiene addizionando le periodicità dei tre ritmi ed è quindi pari a  $24+21+19=64$ . Il ritmo risultante è mostrato nella figura seguente attraverso la tradizionale rappresentazione circolare che ben evidenzia la decomposizione del ritmo in tre ritmi simmetrici.



□

**Esercizio 1.9:** Dimostrare che il pattern ritmico dell'esercizio precedente non tassella gli interi per traslazione.

Il canone ritmico generato da  $R=R_1 \cup R_2 \cup R_3$  non tassella gli interi in quanto, come si può vedere chiaramente dalla figura 6, l'ultimo valore del primo ritmo non-retrogradabile  $R_1$  della terza voce coincide con il primo valore del secondo ritmo non-retrogradabile  $R_2$  della prima voce. Il lettore può verificare l'intersezione fra i punti di attacco delle due voci attraverso il calcolo esplicito dei valori degli elementi di  $\mathbb{Z}_{64}$  partendo dalle strutture intervallari in questione.

□

## Capitolo 2

**Esercizio 2.1:** Dimostrare che nel temperamento equabile esistono 4096 accordi (modulo l'ottava).

Dall'esercizio 1.6 sappiamo che il numero totale degli accordi che contengono  $k$  note distinte al variare di  $k$  distinte si ottiene facendo la somma dei binomiali  $C(12, k)$  per  $k=0, \dots, 12$ . Si ottiene in questo modo il risultato voluto che corrisponde alla cardinalità dell'insieme potenza  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$ , ovvero al numero di sottoinsiemi di  $\mathbb{Z}_{12}$ , che è pari a  $2^{12} = 4096$ .

□

**Esercizio 2.2:** Mostrare che la struttura intervallare è invariante per trasposizione ma non per inversione.

La trasposizione preserva gli intervalli successivi fra le note in quanto corrisponde ad una rotazione. Essa lascia quindi invariata la struttura intervallare. La proprietà si verifica facilmente partendo dalla definizione formale della struttura intervallare  $IS_A = (a_1 - a_0, a_2 - a_1, \dots, a_m - a_{m-1})$  di un sottoinsieme  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{Z}_{12}$ . Data una trasposizione  $T_k$  si ottiene infatti  $T_k\{a_0, a_1, \dots, a_m\} = \{a_0+k, a_1+k, \dots, a_m+k\}$  la cui struttura intervallare è pari a  $(a_1+k - (a_0+k), a_2+k - (a_1+k), \dots, a_m+k - (a_{m-1}+k)) = IS_A$ . Per quanto riguarda l'inversione, è sufficiente considerare le strutture intervallari rispettivamente



dell'accordo maggiore e dell'accordo minore, ovvero (4,3,5) e (3,4,5), per verificare che la struttura intervallare non è invariante per inversione. Il lettore può cercare di dimostrare che l'inversione determina una lettura retrograda (ovvero da destra a sinistra) dei valori della struttura intervallare di partenza (modulo una permutazione ciclica).

□

**Esercizio 2.3:** Dimostrare che per ogni intervallo  $k$  il contenuto intervallare  $IC_A(k)$  di un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{Z}_{12}$  soddisfa la relazione  $IC_A(k) = 1_A(k) * 1_A(-k)$ .

Scriviamo l'espressione del contenuto intervallare nel seguente modo:  $IC_A(k) = \#\{(x,y) \in A \times A \mid x=y+k\}$  e sviluppiamo l'espressione del prodotto di convoluzione. Si ottiene:

$$1_A(x) * 1_A(-x) = 1_A(x) * 1_{-A}(x) = \sum 1_A(x) \cdot 1_{-A}(k-x) = \sum 1_A(x) \cdot 1_A(x-k) = \sum 1$$

ove la somma è fatta su tutti gli  $x$  tali che  $x \in A$  e  $x-k \in A$  e quest'insieme corrisponde per definizione all'insieme  $IC_A$ .

□

**Esercizio 2.4:** Il contenuto intervallare (e a fortiori il vettore intervallare) è invariante per trasposizione e inversione.

Il contenuto intervallare è la molteplicità di occorrenze di ogni intervallo all'interno dell'accordo. La trasposizione e l'inversione sono delle isometrie e quindi esse preservano le lunghezze degli intervalli fra le note di un accordo. Il vettore intervallare contenente i dodici valori (dalla cardinalità dell'insieme sino all'intervallo di settima maggiore) e, a fortiori, i sei valori del vettore intervallare (corrispondenti alla molteplicità di occorrenze della seconda minore sino al tritono) sono quindi invarianti per trasposizione e inversione. La proprietà è immediata se si considera l'espressione del contenuto intervallare  $IC$  in quanto prodotto di convoluzione di funzioni caratteristiche (si veda l'esercizio precedente).

□

**Esercizio 2.5:** Dimostrare che il ritmo  $A \subset \mathbb{Z}_{16}$  associato alla *bossa nova* si ottiene facendo il quoziente del cluster cromatico  $\{0,1,2,3,4\}$  per la cardinalità  $|A|=5$  dell'insieme.

Poiché  $5^{-1} = 13 \pmod{16}$  si ottiene  $13 \cdot \{0,1,2,3,4\} = \{0,4,7,10,13\}$ . La struttura intervallare corrispondente  $SI(\{0,4,7,10,13\}) = (4,3,3,3,3)$ . Notiamo che struttura intervallare della *bossa nova*, la cui proprietà di ripartizione massimale dei punti sono state ricordate nel sesto problema della sezione dei giochi 'matemusicali', è uguale a  $(3,3,4,3,3)$ . È quindi sufficiente operare una permutazione circolare della struttura intervallare ottenuta precedentemente per ottenere esattamente il sottoinsieme  $\{0,3,6,10,13\} \subset \mathbb{Z}_{16}$  corrispondente al ritmo cercato.

□

**Esercizio 2.6:** Calcolare il vettore intervallare del ritmo *bossa nova* dell'esercizio precedente e verificare che la somma dei valori del vettore intervallare è uguale a 10. Generalizzare questa proprietà a ogni sottoinsieme di  $\mathbb{Z}_{16}$  di cardinalità pari a 5.

Il vettore intervallare  $IV_A$  del ritmo  $A=\{0,3,6,10,13\}$  è uguale a  $[0,0,4,1,0,3,2,0]$ . Sommando i suoi valori si ottiene effettivamente il valore 10. Dato un qualsiasi sottoinsieme di cardinalità pari a  $k$ , la somma dei valori del vettore intervallare è pari al numero  $C(k,2)$  di combinazioni di  $k$  oggetti 2 alla volta ovvero a  $k!/2!(k-2)!$ . In corrispondenza di  $k=5$  si ottiene il risultato  $C(5,2)=5!/2! \cdot 3!=20/2=10$ .

□

**Esercizio 2.7:** Dimostrare che l'inversione  $I_k$  è involutiva, ovvero applicata due volte restituisce la trasformazione identità  $x \rightarrow x$ .

$$I_k(x) \circ I_k(x) = I_k(I_k(x)) = I_k(k-x) = k - (k-x) = x$$

□

**Esercizio 2.8:** Calcolare il prodotto di due inversioni generiche  $I_k$  e  $I_h$ .

$$I_k(x) \circ I_h(x) = I_k(I_h(x)) = I_k(h-x) = k - (h-x) = (k-h) + x = T_{h-x}(x)$$

Il prodotto di due inversioni è quindi una trasposizione.

□

**Esercizio 2.9:** Dimostrare che la composizione di due inversioni  $I_k$  e  $I_h$  è non commutativa.

In generale  $I_k(x) \circ I_h(x) = T_{k-h}(x) \neq T_{h-k}(x) = I_h(x) \circ I_k(x)$  eccetto il caso  $k=h=6$ .

□

**Esercizio 2.10:** Dimostrare che l'inversione  $I_k$  non definisce una relazione di equivalenza su  $\mathbb{Z}_{12}$ .

Una relazione di equivalenza gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Nel caso dell'inversione viene meno la proprietà transitiva in quanto, come visto sopra, la composizione di due inversioni non è un'inversione ma bensì una trasposizione.

□

**Esercizio 2.11:** Calcolare la composizione di due aumentazioni  $f_{a,b}$  e  $f_{c,d}$ .

$$f_{a,b}(x) \circ f_{c,d}(x) = f_{a,b}(f_{c,d}(x)) = f_{a,b}(cx+d) = a(cx+d) + b = acx + ad + b = f_{ac, ad+b}(x)$$

□

## Capitolo 3

**Esercizio 3.1:** Trovare l'espressione algebrica che permette di definire in maniera "contestuale" le tre simmetrie neo-riemanniane R, P e L su un generico accordo maggiore o minore.

Ricordiamo che un accordo maggiore si costruisce partendo da una nota fondamentale (per esempio la nota *do* nel caso dell'accordo di *do* maggiore) e sovrapponendo a questa nota le due note distanti rispettivamente un intervallo di terza maggiore (pari a 4 semitoni) e un intervallo di quinta (pari a 7 semitoni). Si ottiene quindi per l'accordo maggiore l'espressione generica  $\{a_0, a_0+4, a_0+7\}$ , ove  $a_0$  è la fondamentale dell'accordo. Analogamente, un accordo minore può essere rappresentato dall'insieme  $\{a_0, a_0+3, a_0+7\}$ . Ricordiamo che la relazione R mantiene inalterate le due prime note dell'accordo e rappresenta quindi una simmetria assiale che trasforma  $a_0$  in  $a_0+4$  e  $a_0+4$  in  $a_0$  e trasforma la nota restante  $a_0+7$  in  $a_0+9$ . Si verifica facilmente che l'asse di simmetria  $I_k$  è quello corrispondente al valore  $k=2a_0+4$ . In effetti  $I_k(\{a_0, a_0+4, a_0+7\}) = \{(2a_0+4)-a_0, (2a_0+4)-(a_0+4), (2a_0+4)-(a_0+7)\} = \{a_0+4, a_0, a_0+9\}$ . Analogamente, in corrispondenza della simmetria L si ottiene l'inversione  $I_k$  con  $k=2a_0+11$ . In effetti si ottiene  $I_k(\{a_0, a_0+4, a_0+7\}) = \{(2a_0+11)-a_0, (2a_0+11)-(a_0+4), (2a_0+11)-(a_0+7)\} = \{a_0+11, a_0+7, a_0+4\}$ . Notiamo che in questo caso sono le due note  $a_0+4$  e  $a_0+7$  che restano inalterate mentre è la terza nota che si sposta di un intervallo di  $11=-1$  semitoni, Analogamente per la trasformazione P.

L'espressione può essere generalizzata nel seguente modo. Indichiamo con  $A=\{a_0, a_1, a_2\} \subset \mathbb{Z}_{12}$  un generico accordo maggiore o minore. Le tre simmetrie neo-riemanniane possono essere espresse come inversioni generalizzate nel seguente modo:

- $R(\{a_0, a_1, a_2\}) = I_k(\{a_0, a_1, a_2\})$  ove  $k = a_0+a_1$
- $P(\{a_0, a_1, a_2\}) = I_k(\{a_0, a_1, a_2\})$  ove  $k = a_0+a_2$
- $L(\{a_0, a_1, a_2\}) = I_k(\{a_0, a_1, a_2\})$  ove  $k = a_1+a_2$

Come si vede chiaramente, le simmetrie R, P e L hanno una diversa espressione in termini di simmetrie assiali  $I_k$  a seconda dell'accordo al quale si applicano. Esse sono, in altre parole, "contestuali".

□

**Esercizio 3.2:** Mostrare che il gruppo neo-riemanniano PLR è isomorfo al gruppo diedrale di ordine 24.

Per mostrare l'isomorfismo consideriamo i due generatori R e L. Il loro prodotto RL corrisponde ad un zig-zag nel Tonnetz. Partendo dall'accordo di *do* maggiore si ottiene la celebre sequenza del secondo movimento della Nona sinfonia di Beethoven, uno degli esempi fra i più citati nella letteratura neo-riemanniana. Si veda, in particolare, il canale youtube di Gilles Baroin (<https://www.youtube.com/@MatheMusic4D>) per una duplice rappresentazione di questa celebre progressione armonica (come zig-zag nel Tonnetz o come geodetica nell'ipersfera degli accordi). La sequenza comporta i 24 accordi maggiori e minore, senza ripetizione, il che mostra che la trasformazione RL ha ordine 24. Ovviamente L ha ordine 2 perché corrisponde ad una simmetria

assiale. Ponendo  $a=LR$  e  $b=L$  si ottengono le relazioni  $a^{12}=b^2=1$  e  $ab=ba^{-1}$ . In effetti  $aba=(LR)L(LR)=LRL^2R=LR^2=L$ . Resta da dimostrare che il gruppo generato da  $R$  e  $L$  ha esattamente ordine 24. Questo risultato deriva dal teorema di stabilizzatore delle orbite. Per i dettagli, rimandiamo il lettore all'articolo di Alissa S. Crans, Thomas M. Fiore e Ramon Satyendra ("Musical Actions of Dihedral Groups", *American Mathematical Monthly*, 116, 6, 2009, p. 479-495).

□

**Esercizio 3.3:** Mostrare che le due trasformazioni  $R$  e  $P$  (o, equivalentemente, le due trasformazioni  $L$  e  $P$ ) non permettono di generare il gruppo  $PLR$ .

È sufficiente osservare che la trasformazione  $RP$  ha ordine strettamente inferiore a 12 e quindi non potrà generare tutto il gruppo  $PLR$ . In effetti, si verifica facilmente che, partendo dall'accordo di *do* maggiore e applicando  $(RP)^4$  si ottiene di nuovo l'accordo di partenza. Lo stesso dicasi per la trasformazione  $LP$ , che ha ordine 3 in quanto applicando  $(LP)^3$  all'accordo di *do* maggiore si ottiene l'accordo di partenza. In altre parole,  $(RP)^4 = (LP)^3 = T_0$ , ovvero l'identità.

□

**Esercizio 3.4:** Mostrare che il gruppo neo-riemanniano  $PLR$  agisce in maniera semplicemente transitiva sulla famiglia dei 24 accordi consonanti.

Visto che la famiglia degli accordi maggiori e minori contiene 24 elementi e l'orbita dell'accordo di *do* maggiore attraverso l'applicazione  $RL$  coincide con l'intera famiglia dei 24 accordi consonanti, la proprietà deriva direttamente dal teorema di stabilizzatore delle orbite, una volta appurato che il gruppo neo-riemanniano  $PLR$  contiene 24 elementi (si veda l'esercizio 3.2).

□

**Esercizio 3.5:** Consideriamo il caso particolare del Tonnetz  $T(5,7)$  ovvero generato dal bicordo la cui struttura intervallare è data da  $(5,7)$ . Dimostrare che i numeri di Betti sono  $\beta_0=\beta_1=1$ .

Osserviamo che il bicordo associato alla struttura intervallare  $(5,7)$  è l'intervallo di quinta. Il Tonnetz  $T(5,7)$  corrisponde quindi al cerchio  $S^1$  generato dalla ripetizione dell'intervallo di quinta. Lo spazio ha una sola componente connessa e un solo buco di dimensione 1, quindi i due primi numeri di Betti sono uguali ad 1. Ringrazio Mattia Bergomi per avere ispirato questo esercizio che è stato proposto agli studenti del master ATIAM durante il suo soggiorno di ricerca all'IRCAM nell'ambito della sua tesi di dottorato (*Dynamical and topological tools for (modern) music analysis*, Università di Milano e Université Pierre et Marie Curie, 2015. Accessibile online all'indirizzo: <https://theses.hal.science/tel-01293602/document>).

□

**Esercizio 3.6:** Consideriamo un secondo caso particolare di Tonnetz, costruito questa volta sullo spazio diatonico e generato dalla triade avente  $(2,2,3)$  come struttura intervallare. A quale struttura topologica corrisponde  $T(2,2,3)$ ?

Nello spazio diatonico accordi maggiori, minori e diminuiti hanno tutti  $(2,2,3)$  come struttura intervallare. Il lettore potrà verificarlo facilmente prendendo la rappresentazione circolare e applicando la struttura intervallare  $(2,2,3)$  ad ogni grado della scala diatonica. Partendo dalla nota  $do=0$  si ottengono i sottoinsiemi  $\{0,2,4\}$  (= accordo di *do* maggiore),  $\{1,3,5\}$  (= accordo di *re* minore),  $\{2,4,6\}$  (= accordo di *mi* minore),  $\{0,3,5\}$  (= accordo di *fa* maggiore),  $\{1,4,6\}$  (= accordo di *sol* maggiore),  $\{0,2,5\}$  (= accordo di *la* minore),  $\{1,3,6\}$  (= accordo di *si* diminuito).

Rappresentando ogni accordo come un 2-simplesso, ovvero un triangolo, e connettendo i 1-simplessi (ovvero i lati) in comune si ottiene... il nastro di Möbius! Questa costruzione è stata messa inizialmente in evidenza da Guerino Mazzola nel trattato teorico *Geometrie der Töne* come modello topologico alla base della teoria della modulazione musicale.

□

## Capitolo 4

**Esercizio 4.1:** In accordo con la notazione introdotta da Coven e Meyerowitz, e discussa nella sezione del quarto capitolo consacrata all'approccio polinomiale, indichiamo con  $S_A$  l'insieme dei fattori ciclotomici che dividono il polinomio associato  $A(x)$  e che sono pari ad una potenza di un numero primo. Si consideri il caso  $n=72$  e sia  $S_A=\{2,3,5\}$ . Dire se  $S_A$  può essere associato ad un sottoinsieme  $A \subset \mathbb{Z}_{72}$  che genera un canone di Vuza.

Siccome  $72=2^3 \cdot 3^2$ , un eventuale ritmo interno  $A$  che tassella  $\mathbb{Z}_{72}$  conterrà al più i due fattori primi 2 e 3. Possiamo quindi applicare il caso particolare del teorema di Coven-Meyerowitz per il quale le condizioni T1 e T2 sono necessarie e sufficienti. Per la condizione T1 applicata all'insieme  $S_A=\{2,3,5\}$  avremo che:

$\#A=A(1)=\Phi_2(1) \cdot \Phi_3(1) \cdot \Phi_5(1)=2 \cdot 3 \cdot 5=30$ . Ma 30 non è un divisore di 72, quindi il ritmo  $A$  non può generare un canone a mosaico di periodo 72.

□

**Esercizio 4.2:** I canoni ritmici a mosaico del secondo tipo sono generati da pattern ritmici indicati a volte nella letteratura come “*k*-asimmetrici”. Questa nozione è stata introdotta da Rachel W. Hall e Paul Klingsberg nell'articolo “Asymmetric Rhythms, Tiling Canons, and Burnside's Lemma” (Proceedings Bridges Conference, 2004). Per definizione, un ritmo  $R \subset \mathbb{Z}_{kh}$  è *k*-asimmetrico se esiste un sottogruppo  $S < \mathbb{Z}_{kh}$  tale che  $R \oplus S = \mathbb{Z}_{kh}$ . Consideriamo il sottoinsieme  $A=\{0,1,6,7\} \subset \mathbb{Z}_{12}$  e sia  $A(x)$  il suo polinomio associato (a coefficienti 0 e 1).

- i) Mostrare che  $A$  è 3-asimmetrico
  - ii) Sapendo che  $A(x)$  è divisibile per i polinomi ciclotomici  $\Phi_4(x)$  e  $\Phi_{12}(x)$ , trovare il polinomio ciclotomico  $\Phi_s(x)$  tale che  $A(x) = \Phi_s(x) \times \Phi_4(x) \times \Phi_{12}(x)$ ,
  - iii) Calcolare la funzione intervallare  $IF_{A,B}(k)$  per  $k=0, 1, \dots, 11$ .
- i) Mostrare che  $A$  è 3-asimmetrico è equivalente a trovare un sottogruppo  $B$  di  $\mathbb{Z}_{12}$  di ordine 3 e tale che  $A \oplus B = \mathbb{Z}_{12}$ . L'unico sottogruppo di  $\mathbb{Z}_{12}$  di ordine 3 è l'insieme  $B=\{0,4,8\}$  e si verifica facilmente che ottiene la fattorizzazione di  $\mathbb{Z}_{12}$  come somma diretta

$\{0,1,6,7\} \oplus \{0,4,8\}$ . Lasciamo al lettore le dodici addizioni che permettono di esprimere in maniera unica ogni elemento di  $\mathbb{Z}_{12}$  come una somma di un elemento di  $\{0,1,6,7\}$  e di un elemento di  $\{0,4,8\}$ .

- ii) Facendo la divisione di  $A(x)=1+x+x^6+x^7$  per  $\Phi_4(x)\times\Phi_{12}(x)=(1+x^2)\times(1+x+x^6+x^7)=1+x+x^2+x^3+x^6+x^7+x^8+x^9$  si ottiene il polinomio  $1+x=\Phi_2(x)$ . Si ha quindi che  $A(x)=\Phi_2(x)\times\Phi_4(x)\times\Phi_{12}(x)$ .
- iii)  $\text{IF}_{A,B}(k)=1$  per  $\forall k=0, 1, \dots, 11$ . Questo risultato non avrà sorpreso il lettore, visto che  $\text{IF}_{A,B} = 1_A * 1_{-B}$  e il fatto che il prodotto di convoluzione sia uguale all'identità è una delle possibili definizioni della tassellazione (come abbiamo ricordato nel problema 9).

□

## Bibliografia

- Emmanuel Amiot, *Music through Fourier Spaces: Discrete Fourier Transform in Music Theory*, Springer, 2016. Un *textbook* di riferimento per un'introduzione erudita all'approccio spettrale basato sulla trasformata di Fourier discreta (DFT) nella formalizzazione delle strutture simboliche della musica da parte di uno dei massimi esperti nella materia.
- Moreno Andreatta, Jean-Michel Bardez, John Rahn (eds.) *Around Set Theory. A French-American Musicological Meeting*, Delatour France-Ircam, 2008. Un'analisi degli approcci insiemistici in musica da una prospettiva che ingloba tradizione americana e europea.
- Gérard Assayag, H. G. Feichtinger, J. F. Rodrigues (eds.), *Mathematics and Music. A Diderot Mathematical Forum*, Springer Verlag, 2003. Atti di un convegno organizzato sotto l'egida dell'*European Mathematical Society* in tre città in simultanea (Parigi, Vienna e Lisbona) e che ha avuto un ruolo determinante nella costituzione di una comunità internazionale consacrata ai rapporti matematica/musica.
- Dave Benson, *Music. A Mathematical Offering*, Cambridge University Press, 2007. Benché si tratti di un lavoro consacrato per la maggior parte alla fisica del suono, il nono capitolo è dedicato alla simmetria in musica e contiene una descrizione succinta di alcune fra le principali costruzioni evocate nel presente saggio.
- Franck Jedrzejewski, *Mathematical Theory of Music*, Collection "Musique/Sciences", Delatour France/Ircam, 2006. Un *textbook* che costituisce un punto di riferimento per la comprensione di molti problemi posti nella teoria matematica della musica, compresa la classificazione delle serie dodecafoniche in termini di teoria dei nodi, un approccio estremamente originale nella formalizzazione topologica delle strutture musicali.
- David Lewin, *Generalized Musical Intervals and Transformations*, New Haven, Yale University Press, 1987. L'*opus magnum* del teorico della musica statunitense che costituisce l'atto di nascita dell'approccio trasformatore in analisi musicale.
- Guerino Mazzola, *Geometrie der Töne. Elemente der Mathematischen Musiktheorie*, Birkhäuser, 1990. Testo di riferimento per tutti gli studiosi in teoria matematica della musica. I principi di base della MaMuTh ("Mathematische Musiktheorie") qui introdotti saranno successivamente ampliati dall'autore nell'opera monumentale *The Topos of Music* (riedita da Springer nel 2018 in una versione ampliata in quattro volumi).
- Mariana Montiel e Robert W. Peck (eds), *Mathematical Music Theory. Algebraic, Geometric, Combinatorial, Topological and Applied Approaches to Understanding Musical Phenomena*, World Scientific, 2019. Un testo di riferimento per quanti vogliono avere un *overview* dei diversi approcci matematici nella formalizzazione delle strutture e processi musicali, attraverso una serie di capitoli redatti da specialisti dei rapporti matematica/musica.
- Godfried T. Toussaint, *The Geometry of Musical Rhythm. What Makes a "Good" Rhythm Good?*, CRC Press, 2013. Un intero volume consacrato al ritmo musicale e alle sue proprietà combinatorie, firmato da un geometra computazionale e percussionista che ha mostrato

quanto la rappresentazione circolare possa essere utile nella visualizzazione geometrica delle strutture ritmiche.

- Dan Tudor Vuza, “Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons” (in quattro parti), *Perspectives of New Music*, 29(2), pp. 22-49, 1991; 30(1), pp. 184-207, 1992; 30(2), pp. 102-125, 1992; 31(1), pp. 270-305, 1993. Il lavoro che ha introdotto la classe più generale dei canoni ritmici a mosaico, i “regular complementary canons of maximal category”, noti come canoni di Vuza (o “Vuza Canons”).
- Iannis Xenakis, *Formalized Music. Thought and Mathematics in Music*, Pendragon Revised Edition, 1992 (edizione originale: *Musiques Formelles*, Revue Musicale n° 252-254, Paris, 1963. Riedizione Stock Musique, Paris, 1981). Testo fondatore sulle applicazioni della matematica alla teoria e composizione musicali da parte di un compositore, ingegnere, architetto e filosofo al quale si devono alcune fra le intuizioni più profonde sui rapporti matematica/musica.

### Lavori accademici inediti

- Mattia Bergomi, *Dynamical and topological tools for (modern) music analysis*, 2015. Tesi di dottorato in cotutela fra l’Università Sorbona e l’Università Statale di Milano (codirezione G. Haus)
- Sonia Cannas, *Geometric representation and algebraic formalization of musical structures*, 2018. Tesi di dottorato in cotutela fra l’Università di Strasburgo e l’Università di Pavia (codirezione L. Pernazza)
- Giulia Fidanza, *Canoni ritmici a mosaico*, 2008. Tesi di laurea in Matematica, Università di Pisa (codirezione F. Acquistapace e F. Broglia)
- Riccardo Gilblas, *Periodic Sequences and Persistent Homology applied to Music. Theoretical foundations and new results*, 2024. Tesi di dottorato in cotutela fra l’Università di Strasburgo e l’Università di Padova (codirezione L. Fiorot)
- Greta Lanzarotto, *Extended Vuza Canons*, 2022. Tesi di dottorato in cotutela fra l’Università di Strasburgo e l’Università di Pavia (codirezione L. Pernazza)
- Paul Lascabettes, *Homologie Persistante Appliquée à la Reconnaissance de Genres Musicaux*, 2018. Dissertazione di master in collaborazione fra l’Ecole normale supérieure di Parigi e l’Università di Strasburgo (codirezione C. Guichaoua)
- Giulio Masetti, *Chord Catalogs and Estrada Classes: partially ordered Set approach*, 2014. Tesi di laurea in Matematica, Università di Pisa (codirezione F. Acquistapace)
- Leone Slavich, *Strutture algebriche e topologiche nella musica del XX° secolo*, 2010. Tesi di laurea in Matematica, Università di Pisa (codirezione F. Acquistapace e F. Broglia)

**Versione draft del manoscritto pubblicato dal Corriere della Sera / Gazzetta dello Sport  
Collana disponibile all’indirizzo: <https://www.primaedicola.it/matematica-collana.html>**