



**HAL**  
open science

# Calcul probabiliste de la portance des fondations superficielles par l'utilisation du chaos polynomial creux et de l'analyse de sensibilité globale

Tamara Al-Bittar, Abdul-Hamid Soubra

## ► To cite this version:

Tamara Al-Bittar, Abdul-Hamid Soubra. Calcul probabiliste de la portance des fondations superficielles par l'utilisation du chaos polynomial creux et de l'analyse de sensibilité globale. JFMS'12, Jun 2012, Chambéry, France. hal-04724344

**HAL Id: hal-04724344**

**<https://hal.science/hal-04724344v1>**

Submitted on 7 Oct 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

---

# Calcul probabiliste de la portance des fondations superficielles par l'utilisation du chaos polynomial creux et de l'analyse de sensibilité globale

Tamara Al-Bittar\* et Abdul-Hamid Soubra\*\*

\* Doctorante, Université de Nantes, Bd. de l'Université, BP 152, 44603 Saint-Nazaire cedex, France; E-mail: Tamara.Al-Bittar @ univ-nantes.fr

\*\* Professeur, Université de Nantes, Bd. de l'Université, BP 152, 44603 Saint-Nazaire cedex, France; E-mail: Abed.Soubra @ univ-nantes.fr

---

*RÉSUMÉ.* La méthodologie de développement par chaos polynomial creux (Sparse Polynomial Chaos Expansion SPCE) est une approche efficace permettant la propagation des incertitudes dans le cas des problèmes à grandes dimensions (i.e. pour les problèmes où un grand nombre de variables aléatoires est considéré). Cette méthodologie permet de réduire de manière significative le temps de calcul par rapport à la méthodologie de développement par chaos polynomial classique (Polynomial Chaos Expansion PCE). Notons cependant que lorsqu'il s'agit de modèles déterministes lourds, le temps de calcul reste important, même avec l'utilisation du chaos polynomial creux. Dans ce papier, une utilisation combinée du chaos polynomial creux et de l'analyse de sensibilité globale (dénommée par la suite SPCE/GSA) est proposée pour résoudre ce problème. La validation de la méthodologie SPCE/GSA a été effectuée par confrontation des résultats obtenus par cette méthode avec ceux donnés par la méthode du SPCE classique.

*ABSTRACT.* The sparse polynomial chaos expansion (SPCE) methodology is an efficient approach that deals with uncertainty propagation in case of high-dimensional problems (i.e. when a large number of random variables is involved). This methodology significantly reduces the computational cost with respect to the classical full polynomial chaos expansion (PCE) methodology. Notice however that when dealing with computationally-expensive deterministic models, the time cost remains important even with the use of the SPCE. In this paper, an efficient combined use of the SPCE methodology and the global sensitivity analysis (GSA) is proposed to solve such a problem. The proposed methodology is validated by comparison of its results with those given by the classical SPCE method.

*Mots-clés:* variabilité spatiale, chaos polynomial creux, analyse de sensibilité globale, indices de Sobol.

*Keywords:* spatial variability, sparse polynomial chaos expansion, global sensitivity analysis, Sobol indices.

---

## 1. Introduction

Une approche efficace permettant la propagation des incertitudes dans le cas des problèmes à grandes dimensions (i.e. pour les problèmes où un grand nombre de variables aléatoires est considéré) a été présentée récemment par Blatman et Sudret (2010). Cette approche permet de construire une approximation de la réponse du système par chaos polynomial creux (dénommé SPCE comme Sparse Polynomial Chaos Expansion) avec un coût de calcul réduit par rapport à l'approximation par chaos polynomial classique (dénommé PCE comme Polynomial Chaos Expansion). Il est à noter que les deux méthodologies (i.e. PCE et SPCE) consistent à remplacer le modèle déterministe d'origine, qui peut être un modèle analytique ou un modèle d'éléments finis/différences finies par un méta-modèle. Ceci permettra de calculer la réponse du système en utilisant une équation analytique simple (e.g. Berveiller et al., 2006; Sudret et al., 2006; Sudret, 2008; Blatman et Sudret, 2010). Notons cependant que lorsqu'il s'agit de modèles déterministes lourds, le temps de calcul reste important même avec l'utilisation du SPCE. Par conséquent, une procédure de calcul qui permet de réduire encore une fois le coût de l'analyse probabiliste est nécessaire. Dans ce papier, une utilisation combinée du SPCE et de l'analyse de sensibilité globale (GSA) (dénommée par la suite SPCE/GSA) est proposée pour résoudre ce problème. Dans cette méthode, un ordre faible du SPCE est d'abord choisi pour approximer la réponse du système par un méta-modèle. Une analyse de sensibilité globale utilisant les indices de Sobol est ensuite effectuée sur ce SPCE d'ordre faible pour déterminer le poids de chaque variable aléatoire dans la variabilité de la réponse du système. En conséquence, les variables ayant un très faible indice de Sobol (c'est à dire celles qui ont un poids faible dans la variabilité de la réponse du système) peuvent être négligées. Ainsi, on obtient une réponse qui ne dépend que d'un faible nombre de variables aléatoires. En d'autres termes, on obtient une réponse avec une "dimension effective" plus petite que la dimension initiale. Notons que l'utilisation d'un SPCE d'ordre faible pour effectuer la GSA est acceptable puisque les ordres plus élevés conduisent aux mêmes variables aléatoires influentes. Une fois que la "dimension effective" est déterminée, un ordre plus élevé du SPCE utilisant seulement les variables les plus influentes peut être utilisé. Cela réduit considérablement le temps de calcul. L'utilisation d'un ordre élevé pour le SPCE est nécessaire afin d'aboutir à une meilleure approximation de la réponse.

La validation de la méthodologie SPCE/GSA a été effectuée en considérant un modèle mécanique ayant un temps de calcul raisonnable. Ce modèle a été largement étudié d'un point de vue probabiliste par Al-Bittar et Soubra (2011, 2012) en utilisant la méthodologie du SPCE. Il consiste à déterminer la capacité portante ultime d'une fondation superficielle filante reposant sur un sol ( $c$ ,  $\phi$ ) variable spatialement. Puisque la capacité portante du sol n'est influencée que par les paramètres de cisaillement  $c$  et  $\phi$ , ces paramètres sont considérés comme deux champs aléatoires anisotropes non-gaussiens et cross-corrélés. Ils sont discrétisés en un nombre fini de variables aléatoires en utilisant la méthode EOLE (Expansion Optimal Linear Estimation) et son extension par Vořechovsky (2008) pour le cas des

champs non-gaussiens et cross-corrélés. Le nombre de variables aléatoires obtenu est relativement faible pour des grandes distances d'autocorrélation et augmente de manière significative pour les petites valeurs des distances d'autocorrélation.

Ce papier est organisé comme suit: les deux sections qui suivent visent à présenter brièvement la méthode de développement par chaos polynomial creux et l'analyse de sensibilité globale. Puis, la combinaison proposée (i.e. SPCE/GSA), est présentée. Finalement, les résultats numériques probabilistes sont présentés et analysés.

## 2. Développement par chaos polynomial creux (SPCE)

Dans cette section, on présente d'abord la méthode de développement par chaos polynomial classique (PCE) puis son extension, la méthode de développement par chaos polynomial creux (SPCE). La méthodologie du PCE consiste à remplacer un modèle mécanique lourd en temps de calcul (e.g. modèle numérique aux éléments finis/différences finies) dont les paramètres d'entrée sont modélisés par des variables aléatoires, par un méta-modèle. Ceci permet de calculer la réponse du système en utilisant une simple formule analytique (Sudret et al., 2006; Blatman et Sudret, 2010). Les coefficients inconnus du PCE sont calculés ici en utilisant une approche de régression. La méthodologie du PCE peut être brièvement décrite comme suit.

Pour un problème mécanique à  $M$  paramètres d'entrée incertains, ces paramètres doivent d'abord être représentés par des variables aléatoires standards centrées réduites rassemblées dans un vecteur aléatoire  $\xi$ . La réponse aléatoire  $\Gamma$  de notre problème mécanique peut alors être exprimée par un PCE comme suit:

$$\Gamma_{PCE}(\xi) = \sum_{\beta=0}^{\infty} a_{\beta} \Psi_{\beta}(\xi) \cong \sum_{\beta=0}^{P-1} a_{\beta} \Psi_{\beta}(\xi) \quad [1]$$

où  $P$  est le nombre des termes retenus dans le schéma de troncature,  $a_{\beta}$  sont des coefficients inconnus (à déterminer) du PCE, et  $\Psi_{\beta}$  sont des polynômes d'Hermite multidimensionnels. Ces polynômes sont orthogonaux par rapport à la fonction densité de probabilité conjointe de la loi normale standard centrée réduite. Ils peuvent être obtenus à partir du produit des polynômes d'Hermite unidimensionnels (Berveiller et al., 2008) comme suit:

$$\Psi_{\beta} = \prod_{i=1}^M H_{\alpha_i}(\xi_i) \quad [2]$$

où  $\alpha_i$  est une suite de  $M$  entiers non-négatif  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$  et  $H_{\alpha_i}(\cdot)$  est le  $\alpha_i$ -ème polynôme d'Hermite unidimensionnel. Pour un PCE d'ordre  $p$ , le second terme de l'équation [1] doit être tronqué en ne retenant que les polynômes multidimensionnels de degré inférieur ou égal à  $p$ . Pour cette raison, un schéma de troncature classique basé sur la détermination de la norme d'ordre 1 est généralement adopté dans la

littérature. Cette norme d'ordre 1 est définie comme suit:  $\|\alpha\|_1 = \sum_{i=1}^M \alpha_i$ . Le schéma

de troncature classique suggère que la norme d'ordre 1 doit être inférieure ou égale à l'ordre  $p$  du PCE. En utilisant cette méthode de troncature, le nombre  $P$  des coefficients inconnus du PCE augmente considérablement avec le nombre  $M$  des variables aléatoires et l'ordre  $p$  du PCE. Ce nombre est significatif dans le cas présent des champs aléatoires (surtout lorsqu'on considère des petites valeurs des distances d'autocorrélation). Ceci conduit à un grand nombre d'appels du modèle déterministe (voir Al-Bittar et Soubra 2011, 2012). La méthode de développement par chaos polynomial creux (SPCE) présentée par Blatman et Sudret (2010) est une alternative efficace qui peut réduire considérablement le nombre d'appels du modèle déterministe. Dans cette méthodologie, Blatman et Sudret (2010) ont montré que le nombre de termes ayant un poids important dans un PCE est relativement faible, car les polynômes multidimensionnels correspondant à des ordres élevés (i.e. ceux résultant de la multiplication des  $H_{\alpha_i}$  pour des  $\alpha_i$  élevés) sont associés à des valeurs très faibles des coefficients inconnus  $a_\beta$ . En se basant sur ces observations, une stratégie de troncature a été développée par Blatman et Sudret (2010) dans laquelle les polynômes multidimensionnels correspondants à des ordres élevés ont été pénalisés. Ceci a été réalisé en adoptant un schéma de troncature hyperbolique qui considère la norme d'ordre  $q$  (ou  $q$ -norme) plutôt que la norme d'ordre 1. La  $q$ -norme

est donnée par  $\|\alpha\|_q = \left( \sum_{i=1}^M \alpha_i^q \right)^{1/q}$  où  $q$  est un coefficient ( $0 < q < 1$ ). Le schéma de

troncature hyperbolique suggère que la  $q$ -norme soit inférieure ou égale à l'ordre  $p$  du PCE. Dans cette formule,  $q$  peut être choisi arbitrairement. Blatman et Sudret (2010) ont montré qu'une précision suffisante est obtenue pour  $q \geq 0.5$ . En dessous de cette valeur, nous risquons de rejeter certains termes importants.

La méthodologie proposée conduit à un chaos polynomial creux qui contient un nombre faible de coefficients inconnus. Ces coefficients peuvent être calculés à partir d'un nombre réduit d'appels au modèle déterministe. Cette stratégie est particulièrement intéressante dans le cas présent des champs aléatoires qui impliquent un nombre important de variables aléatoires. Elle sera utilisée dans ce travail pour construire un SPCE de la réponse du système (i.e. la capacité portante ultime). Une procédure itérative a été utilisée pour construire le SPCE. Cette procédure a été présentée en détail dans Blatman et Sudret (2010) et elle a été reprise par la suite par Al-Bittar et Soubra (2011, 2012). Lorsque les coefficients inconnus du SPCE sont déterminés, le PDF (Probability Density Function) de la capacité portante ultime peut être déterminé facilement en utilisant la technique de simulation de Monte-Carlo sur le méta-modèle. Le paragraphe suivant est consacré à la présentation de la méthode utilisée pour calculer les coefficients inconnus  $a_\beta$ .

### 2.1. Calcul des coefficients inconnus $a_\beta$ du SPCE par la méthode de régression

Considérons un ensemble de  $K$  réalisations  $\{\xi^{(1)} = (\xi_1, \dots, \xi_M), \dots, \xi^{(K)} = (\xi_1, \dots, \xi_M)\}$  du vecteur des variables aléatoires standards centrées réduites non corrélées  $\xi$ . Ces réalisations sont appelées plan d'expérience (PE) et sont obtenues à partir des simulations de Monte Carlo (MC) ou à partir d'autres méthodes d'échantillonnage (par exemple l'hypercube latin (LH) ou échantillonnage de Sobol). Notons  $\Gamma = \{\Gamma(\xi^{(1)}), \dots, \Gamma(\xi^{(K)})\}$  les valeurs correspondantes de la réponse déterminées à partir des calculs déterministes.

Le calcul des coefficients du SPCE en utilisant la méthode de régression est effectué en utilisant l'équation suivante:

$$\hat{a} = (\eta^T \eta)^{-1} \eta^T \Gamma \quad [3]$$

où la matrice  $\eta$  est définie par:

$$\eta_{i\beta} = \Psi_\beta(\xi^{(i)}), \quad i = 1, \dots, K, \quad \beta = 0, \dots, P-1 \quad [4]$$

Afin d'assurer la stabilité numérique du problème considéré dans l'équation [3], la taille  $K$  du plan d'expérience doit être choisie de telle manière que la matrice  $(\eta^T \eta)^{-1}$  soit bien conditionnée (i.e. le rang de cette matrice doit être plus grand ou égal au nombre des coefficients inconnus  $a_\beta$ ). Ce test a été réalisé systématiquement à chaque résolution du système d'équations linéaires par la méthode de régression. D'autre part, la qualité de l'approximation *via* un SPCE dépend de l'ordre  $p$  de ce SPCE. Pour assurer une bonne concordance entre le méta-modèle et le modèle réel (i.e. pour obtenir l'ordre optimal du SPCE), l'estimateur d'erreur doit être évalué. L'estimateur d'erreur le plus simple est le coefficient détermination  $R^2$  donné par:

$$R^2 = 1 - \frac{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[ \Gamma(\xi^{(i)}) - \Gamma_{SPCE}(\xi^{(i)}) \right]^2}{\frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^K \left[ \Gamma(\xi^{(i)}) - \bar{\Gamma} \right]^2} \quad [5]$$

où

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \Gamma(\xi^{(i)}) \quad [6]$$

La valeur  $R^2 = 1$  indique une bonne approximation du modèle réel  $\Gamma$  par le méta-modèle  $\Gamma_{SPCE}$ , alors que  $R^2 = 0$  indique une relation non linéaire entre le modèle réel  $\Gamma$  et le méta-modèle  $\Gamma_{SPCE}$ . Le coefficient  $R^2$  peut être un estimateur biaisé car il ne tient pas compte de la robustesse du méta-modèle (i.e. sa capacité de prédire correctement la réponse du modèle à n'importe quel point qui n'appartient pas au plan d'expérience). En conséquence, l'utilisation d'un estimateur d'erreur plus rigoureux de type *leave-one-out* dénommé  $Q^2$  semble indispensable. Cet estimateur

d'erreur consiste à enlever successivement un point du plan d'expérience composé de  $K$  points. Soit  $\Gamma_{\xi_i}$  le méta-modèle construit à partir du plan d'expérience après avoir enlevé la  $i^{\text{ème}}$  observation et soit  $\Delta^i = \Gamma(\xi^{(i)}) - \Gamma_{\xi_i}(\xi^{(i)})$  la valeur du résidu entre la valeur du modèle réel au point  $\xi^{(i)}$  et sa valeur obtenue à partir du méta-modèle  $\Gamma_{\xi_i}$ . Le coefficient de détermination correspondant est souvent désigné par  $Q^2$ :

$$Q^2 = 1 - \frac{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (\Delta^i)^2}{\frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^K [\Gamma(\xi^{(i)}) - \bar{\Gamma}]^2} \quad [7]$$

Ce coefficient sera utilisé dans le présent travail pour vérifier la bonne approximation de la réponse.

### 3. Analyse de sensibilité globale (GSA)

Lorsque les coefficients du SPCE sont déterminés, une analyse de sensibilité globale (GSA) basée sur les indices de Sobol peut être facilement effectuée. Notons que l'indice de Sobol du premier ordre d'une variable aléatoire donnée  $\xi_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) donne la contribution de cette variable dans la variabilité de la réponse du système. L'indice de Sobol du premier ordre est donné par Saltelli (2000) et Sobol (2001) comme suit:

$$S(\xi_i) = \frac{\text{Var}[E(Y | \xi_i)]}{\text{Var}(Y)} \quad [8]$$

où  $Y$  est la réponse du système,  $E(Y | \xi_i)$  est l'espérance conditionnelle de  $Y$  à une valeur fixe de  $\xi_i$ , et  $\text{Var}$  désigne la variance.

Dans le présent travail, la réponse  $Y$  du système est représentée par un SPCE. Ainsi, en remplaçant  $Y$  dans l'équation [8] avec l'expression du SPCE, on obtient la formule de l'indice de Sobol en fonction des différents termes du SPCE (Sudret, 2008). Cette formule est donnée par:

$$S(\xi_i) = \frac{\sum_{\beta \in I_i} (a_\beta)^2 E[(\Psi_\beta)^2]}{D_{PC}} \quad [9]$$

où  $a_\beta$  sont les coefficients du SPCE,  $\Psi_\beta$  sont les polynômes d'Hermite multidimensionnels,  $E[.]$  est l'opérateur de l'espérance, et  $D_{PC}$  est la variance de la

réponse déterminée à partir du SPCE. La variance de la réponse  $D_{PC}$  est donnée par Sudret (2008) comme suit:

$$D_{PC} = \sum_{\beta \in [I_1, I_2, \dots, I_M]} (a_\beta)^2 E \left[ (\Psi_\beta)^2 \right] \quad [10]$$

Notons que le terme  $E \left[ (\Psi_\beta)^2 \right]$  qui apparaît à la fois dans les équations [9] et [10] est donné par Sudret (2008) comme suit:

$$E \left( \Psi_\beta^2 \right) = \prod_{i=1}^M \alpha_i ! \quad [11]$$

où  $\alpha_i$  est la même suite de M entiers non-négatif  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$  utilisée dans l'équation [2]. Notons finalement que le symbole  $I_i$  qui apparaît dans l'équation [9] désigne l'ensemble des indices  $\beta$  pour lesquels le terme  $\Psi_\beta$  correspondant n'est fonction que de la variable aléatoire  $\xi_i$  (c'est à dire qu'il ne contient que la variable  $\xi_i$ ), et  $I_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) regroupe tous les indices  $\beta$  pour lesquels le terme  $\Psi_\beta$  correspondant est seulement fonction de la variable aléatoire  $\xi_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ).

#### 4. Combinaison efficace entre la méthodologie du SPCE et l'analyse de sensibilité globale (GSA)

Comme il a été mentionné précédemment, le temps de calcul de l'analyse probabiliste reste important même avec l'utilisation du SPCE lorsqu'il s'agit de modèles déterministes lourds. Par conséquent, une procédure qui permet de réduire encore une fois ce temps de calcul est nécessaire. Une combinaison efficace entre la méthodologie du SPCE et l'analyse de sensibilité globale (GSA) est proposée dans cette section. L'idée de base de cette combinaison est que, pour un champ aléatoire discrétisé en un nombre fini de variables aléatoires, les différentes variables aléatoires n'ont pas toutes le même poids dans la variabilité de la réponse du système. Les variables avec une très faible contribution dans la variabilité de la réponse du système peuvent être rejetées, ce qui réduit considérablement la dimensionnalité du problème traité. Cela permet d'effectuer une analyse probabiliste en utilisant un plan d'expérience (PE) réduit et donc un nombre d'appels au code déterministe plus faible. Le principal défi reste dans la détection des variables aléatoires les plus influentes afin de réduire la dimensionnalité du problème. Pour cela, une procédure qui fait appel à la fois au SPCE et l'analyse de sensibilité globale (notée par la suite SPCE/GSA) est proposée ici. La procédure SPCE/GSA peut être résumée par les étapes suivantes:

a) Discrétiser le/les champ(s) aléatoire(s): Cette étape a été réalisée dans le présent travail en utilisant la méthode EOLE et son extension par Vořechovsky (2008). Considérons  $N_{RF}$  champs aléatoires anisotropes non-gaussiens et cross-

corrélés  $Z_i^{NG}(x, y) (i = 1, \dots, N_{RF})$  décrits par: (i) des moyennes et écarts types constants  $(\mu_i, \sigma_i)$ , (ii) des fonctions de répartition  $G_i (i = 1, \dots, N_{RF})$ , (iii) une matrice de cross-corrélation cible  $C^{NG}$  et (iv) une fonction d'autocorrélation commune de type exponentielle carrée  $\rho_Z^{NG} [(x, y), (x', y')]$ . Cette dernière fournit les valeurs de la corrélation entre deux points arbitraires  $(x, y)$  et  $(x', y')$ . Cette fonction d'autocorrélation est donnée comme suit:

$$\rho_Z^{NG} [(x, y), (x', y')] = \exp \left( - \left( \frac{x - x'}{a_x} \right)^2 - \left( \frac{y - y'}{a_y} \right)^2 \right) \quad [12]$$

où  $a_x$  et  $a_y$  sont les distances d'autocorrélation suivant  $x$  et  $y$  respectivement. La méthode EOLE (Expansion Optimal Linear Estimation) et son extension au cas des champs non-gaussiens et cross-corrélés est utilisée ici pour la discrétisation des  $N_{RF}$  champs aléatoires. Il est à noter ici que EOLE a été d'abord proposée par Li et Der Kiureghian (1993) pour le cas des champs gaussiens non-corrélés, puis étendue par Vořechovsky (2008) pour considérer le cas des champs non-gaussiens et cross-corrélés. Dans cette méthode, il faut d'abord définir un maillage stochastique composé de  $q$  points (ou nœuds) obtenus par les différentes combinaisons de  $H$  points suivant  $x$  (horizontal), et  $V$  points suivant  $y$  (vertical). Ces  $q$  points sont ensuite assemblés dans un vecteur  $Q = \{ Q_n = (x_h, y_v) \}$ , où  $h = 1, \dots, H$ ,  $v = 1, \dots, V$  et  $n = 1, \dots, q$ . Pour ce vecteur  $Q$  composé de  $q$  éléments, les valeurs du champ sont assemblés dans un vecteur  $\mathcal{X} = \{ \mathcal{X}_n = Z(x_h, y_v) \}$ , où  $h = 1, \dots, H$ ,  $v = 1, \dots, V$  et  $n = 1, \dots, q$ . Ensuite, il convient de déterminer la matrice d'autocorrélation pour laquelle chaque élément  $(\Sigma_{\mathcal{X}:\mathcal{X}})_{i,j}^{NG}$  est calculé selon l'équation [12] comme suit:

$$\left( \Sigma_{\mathcal{X}:\mathcal{X}} \right)_{i,j}^{NG} = \rho_Z^{NG} [ Q_i, Q_j ] \quad [13]$$

où  $i = 1, \dots, q$  et  $j = 1, \dots, q$ . La matrice d'autocorrélation  $\Sigma_{\mathcal{X}:\mathcal{X}}^{NG}$  et la matrice de cross-corrélation  $C^{NG}$  doivent ensuite être transformées vers l'espace gaussien en utilisant les fonctions de correction de Nataf (Nataf, 1962) puisque la discrétisation des champs aléatoires par EOLE s'effectue dans l'espace gaussien. En conséquence, on obtient  $N_{RF}$  matrices d'autocorrélation gaussiennes  $\Sigma_{\mathcal{X}:\mathcal{X}}^i (i = 1, \dots, N_{RF})$  qui sont différentes de la matrice d'autocorrélation cible non-gaussienne  $\Sigma_{\mathcal{X}:\mathcal{X}}^{NG}$ , et une matrice de cross-corrélation gaussienne  $C$  qui est aussi différente de la matrice de cross-corrélation cible non-gaussienne  $C^{NG}$ . Ces matrices (i.e.  $\Sigma_{\mathcal{X}:\mathcal{X}}^i (i = 1, \dots, N_{RF})$  et  $C$ ) peuvent être utilisées pour discrétiser les  $N_{RF}$  champs aléatoires comme suit:

$$\tilde{Z}_i(x, y) \cong \mu_i + \sigma_i \sum_{j=1}^N \frac{\kappa_{i,j}^D}{\sqrt{\lambda_j^i}} \cdot (\phi_j^i)^T \cdot \Sigma_{Z(x,y);\mathcal{X}}^i \quad i = 1, \dots, N_{RF} \quad [14]$$

où  $N_{RF}$  est le nombre des champs aléatoires,  $\lambda_j^i, \phi_j^i$  ( $i = 1, \dots, N_{RF}$ ) sont les valeurs et vecteurs propres des  $N_{RF}$  matrices d'autocorrélation gaussiennes  $\Sigma_{\mathcal{X};\mathcal{X}}^i$ ,  $\Sigma_{Z(x,y);\mathcal{X}}$  est un vecteur de corrélation entre les différentes valeurs du champ aux différents points du maillage (i.e. les éléments du vecteur  $\mathcal{X}$ ) et la valeur du champ en un point arbitraire  $(x, y)$ , et  $N$  est le nombre des termes retenus dans l'expansion. Enfin,  $\kappa^D = (\kappa_{1,j}^D, \dots, \kappa_{N_{RF},j}^D)$  est un vecteur composé de  $N_{RF}$  blocs de variables aléatoires standards centrées réduites. Ces  $N_{RF}$  blocs sont cross-corrélés entre eux et ils sont obtenus à partir de la matrice de cross-corrélation gaussienne  $C$  comme suit: on détermine d'abord le vecteur des valeurs propres  $\Lambda^C$  et la matrice des vecteurs propres correspondants  $\Phi^C$ , puis on calcule le vecteur  $\kappa^D$  qui contient les  $N_{RF}$  blocs cross-corrélés  $(\kappa_{1,j}^D, \dots, \kappa_{N_{RF},j}^D)$  selon la formule suivante:

$$\kappa^D = \Phi^D (\Lambda^D)^{1/2} \xi^T \quad [15]$$

où  $\Phi^D$  est une matrice de dimensions  $(N_{RF}N \times N_{RF}N)$  résultant de la multiplication de chaque élément de la matrice  $\Phi^C$  de dimensions  $(N_{RF} \times N_{RF})$  par la matrice unité d'ordre  $N$  (l'ordre de l'expansion),  $\Lambda^D$  est une matrice de dimensions  $(N_{RF}N \times N_{RF}N)$  résultant de la multiplication de chaque élément du vecteur  $\Lambda^C$  de dimensions  $(N_{RF} \times 1)$  par la matrice unité d'ordre  $N$ , et  $\xi$  est un vecteur qui contient  $N_{RF}$  blocs de  $N$  variables aléatoires normales standards centrées réduites pour chacun d'eux.

Une fois les  $N_{RF}$  champs aléatoires gaussiens cross-corrélés sont obtenus, ils doivent être transformés vers l'espace non-gaussien en appliquant la formule suivante:

$$\tilde{Z}_i^{NG}(x, y) = G_i^{-1} \left\{ \Phi \left[ \tilde{Z}_i(x, y) \right] \right\} \quad i = 1, \dots, N_{RF} \quad [16]$$

où  $\Phi(\cdot)$  est la fonction de répartition de la loi normale. Pour plus de détails sur la méthode EOLE et son extension au cas général des champs aléatoires non-gaussiens et cross-corrélés, le lecteur peut se référer à Vořechovsky (2008) et Al-Bittar et Soubra (2011, 2012).

Après la procédure de discrétisation, un champ aléatoire est représenté par  $N$  variables aléatoires normales. Pour les  $N_{RF}$  champs aléatoires qui ont la même fonction d'autocorrélation, le nombre total des variables aléatoires est  $N_T = N_{RF} \times N$ . Ce nombre peut être relativement grand en particulier pour les faibles valeurs des distances d'autocorrélation.

b) Utiliser un ordre préliminaire faible du développement par chaos polynomial creux (par exemple  $p=2$ ) pour approximer la réponse du système par un méta-

modèle. La raison principale du choix d'un ordre faible est l'exploration des variables aléatoires les plus influentes (c'est à dire celles qui ont un poids significatif dans la variabilité de la réponse du système) en utilisant un petit plan d'expérience (PE). Il convient de souligner ici que le nombre réduit des coefficients inconnus du SPCE lié à la faible valeur de l'ordre du SPCE conduit à une diminution significative dans la taille du plan d'expérience, c'est à dire dans le nombre d'appels au code déterministe.

c) Effectuer une analyse de sensibilité globale (GSA) basée sur les indices de Sobol (en utilisant le SPCE obtenu d'ordre 2) pour déterminer le poids de chaque variable aléatoire dans la variabilité de la réponse du système. Les variables dont les valeurs des indices de Sobol sont très faibles n'ont pas d'impact significatif dans la variabilité de la réponse du système et peuvent donc être rejetées. Par conséquent, une réponse qui ne dépend que d'un faible nombre de variables aléatoires est obtenue. En d'autres termes, on obtient une réponse avec une "dimension effective"  $N_e$  plus faible que la dimension initiale  $N_T$  où le nombre total des variables aléatoires est considéré. Il convient de mentionner ici que l'ordre faible du SPCE (i.e.  $p=2$ ) utilisé pour effectuer l'analyse GSA est suffisant pour obtenir le poids de chaque variable aléatoire dans la variabilité de la réponse du système. Ceci est dû au fait que les ordres supérieurs du SPCE conduisent aux mêmes variables aléatoires influentes comme le montrent les résultats numériques présentés dans le paragraphe suivant.

d) Utiliser le même plan d'expérience (PE) qui a été employé dans l'étape (b), mais cette fois en ne retenant que les variables aléatoires les plus influentes. En réduisant le nombre des variables aléatoires de  $N_T$  à  $N_e$  ( $N_e < N_T$ ), on aura la possibilité d'utiliser un ordre plus élevé du SPCE (i.e.  $p > 2$ ). L'utilisation d'un ordre supérieur du SPCE est nécessaire pour obtenir une meilleure approximation puisque l'estimateur d'erreur de type *leave-one-out*  $Q^2$  donné dans l'équation [7] augmente avec l'augmentation de l'ordre du SPCE comme on le verra dans le paragraphe suivant.

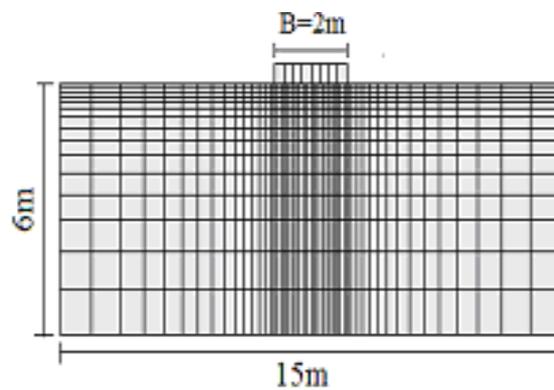
En conclusion, l'utilisation de la procédure SPCE/GSA a l'avantage de bien approximer la réponse du système par un méta-modèle en utilisant un nombre réduit d'appels au code déterministe par rapport à l'approche classique (i.e. le SPCE seul).

## 5. Résultats numériques

Afin de valider la procédure SPCE/GSA, une comparaison entre les résultats obtenus en utilisant le SPCE seul et ceux obtenus avec la procédure SPCE/GSA est présentée. Un modèle déterministe raisonnable en temps de calcul est utilisé pour la validation. Ce modèle est présenté dans Al-Bittar et Soubra (2011, 2012) et permet de calculer la capacité portante ultime d'une fondation superficielle filante reposant sur un sol non pesant présentant une variabilité spatiale en ce qui concerne la cohésion  $c$  et l'angle de frottement interne du sol  $\phi$  (paramètres régissant la capacité portante du sol). Les paramètres d'entrée de ce modèle sont détaillés dans Al-Bittar et Soubra (2011, 2012), et ils sont brièvement présentés dans le Tableau 1. Le

modèle déterministe est basé sur des simulations numériques utilisant le logiciel FLAC<sup>3D</sup>. Il convient de mentionner ici que, lorsque le poids du sol  $\gamma$  est négligé, le temps de calcul diminue de 10 à 5 min par simulation. Cela réduit considérablement le temps de calcul nécessaire pour valider la procédure SPCE/GSA.

Comme le montre la Figure 1, le domaine du sol adopté dans l'analyse est de 15 m de large par 6 mètres de profondeur. La fondation superficielle filante de 2m de largeur et de 0.5m de hauteur est supposée non pesante et élastique.



**Figure 1.** *Domaine du sol adopté et maillage*

La validation de la procédure SPCE/GSA est effectuée en considérant le cas [ $a_x = 10\text{m}$ ,  $a_y = 1\text{m}$ ,  $r(c, \phi) = -0,5$ ] dénommé par la suite le cas de référence. Pour cette configuration, la discrétisation des deux champs aléatoires  $c$  et  $\phi$  a abouti à un nombre total des variables aléatoires  $N_T$  égal à 24 (12 variables aléatoires pour chaque champ comme déjà indiqué dans Al-Bittar et Soubra (2011, 2012)).

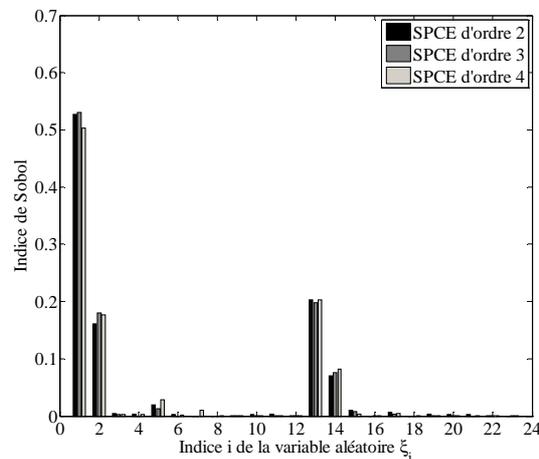
En utilisant le nombre total des variables aléatoires  $N_T$ , Al-Bittar et Soubra (2011, 2012) ont montré qu'un SPCE d'ordre 4 est suffisant pour atteindre une précision cible de 0,999. Un plan d'expérience de 800 points était nécessaire pour pouvoir résoudre le problème de régression donné par l'équation [3] (i.e. pour aboutir à un problème de régression bien conditionné pour lequel le rang de la matrice  $(\eta^T \eta)^{-1}$  est plus grand ou égal au nombre de coefficients inconnus).

Modèle	Paramètres	Type des Paramètres	Valeurs des paramètres déterministes	Paramètres stochastiques				
				Caractéristiques statistiques	Coefficient de corrélation r	Fonction d'autocorrélation $\rho_z^{NG} [(x, y), (x', y')]$		
Sol	Elastique parfaitement plastique (Mohr-Coulomb)	Module d' Young E	déterministe	$E = 60MPa$	-	-	-	
		Coefficient de Poisson $\nu$	déterministe	$\nu = 0.3$	-	-	-	
		Cohésion c	Champ aléatoire	-	Log-normale $\mu_c = 20kPa$ $Cov_c = 25\%$	Cas de référence: $C^{NG} = \begin{bmatrix} r(c, c) = 0 & r(c, \varphi) = -0.5 \\ r(\varphi, c) = -0.5 & r(\varphi, \varphi) = 0 \end{bmatrix}$	Exponentielle carrée $\rho_z^{NG} = \exp \left( - \left( \frac{x - x'}{a_x} \right)^2 - \left( \frac{y - y'}{a_y} \right)^2 \right)$	
		Angle de frottement $\varphi$	Champ aléatoire	-	Bêta $\mu_\varphi = 30^0$ $Cov_\varphi = 10\%$			$a_x$ et $a_y$ sont les distances d'autocorrélation suivent x et y respectivement
		Dilatance $\psi$	Champ aléatoire	-	Bêta $\mu_\psi = 20^0$ $Cov_\psi = 10\%$			Cas de référence: $a_x = 10m$ and $a_y = 1m$
				Etude paramétrique: $-0.5 \leq r(c, \varphi) \leq 0$	Etude paramétrique: $2m \leq a_x \leq 50m$ ; $0.5m \leq a_y \leq 8m$			
Fondation	Elastique	Module d' Young E	déterministe	$E = 25GPa$	-			-
		Coefficient de Poisson $\nu$	déterministe	$\nu = 0.4$	-	-	-	
Interface	Elastique parfaitement plastique (Mohr-Coulomb)	Rigidité de cisaillement $K_s$	déterministe	$K_s = 1GPa$	-	-	-	
		Rigidité normale $K_n$	déterministe	$K_n = 1GPa$	-	-	-	
		Cohésion $c_{int}$	déterministe	$c_{int} = 20kPa$	-	-	-	
		Angle de frottement $\varphi_{int}$	déterministe	$\varphi_{int} = 30^0$	-	-	-	

Dilatance $\psi_{\text{int}}$	déterministe	$\psi_{\text{int}} = 20^0$	-	-	-
-------------------------------	--------------	----------------------------	---	---	---

**Tableau 1.** Paramètres d'entrée déterministes et probabilistes

En utilisant la procédure SPCE/GSA, une analyse GSA est d'abord effectuée pour détecter les variables aléatoires les plus influentes. Différents ordres du SPCE (ordres 2, 3 et 4) sont considérés afin d'examiner l'impact de l'ordre du SPCE sur l'analyse GSA. La Figure 2 illustre les valeurs des indices de Sobol pour les 24 variables aléatoires, telles que données par les SPCE d'ordres 2, 3 et 4 respectivement. Les 12 premières variables aléatoires [ $\xi_i$  pour  $i = 1, \dots, 12$ ] correspondent au champ aléatoire de la cohésion et les 12 dernières variables aléatoires [ $\xi_i$  pour  $i = 13, \dots, 24$ ] sont celles correspondant au champ aléatoire de l'angle de frottement. La Figure 2 montre que quel que soit l'ordre du SPCE, les deux premières variables aléatoires des deux champs, (i.e.  $\xi_1, \xi_2, \xi_{13}, \xi_{14}$ ) sont les plus influentes. Pour les deux champs aléatoires, une décroissance très rapide dans le poids des variables aléatoires est remarquée avec des valeurs quasi-négligeables au delà des deux premières variables aléatoires. En fait, les deux premières variables aléatoires des deux champs (i.e. celles qui correspondent aux deux premiers modes propres de ces deux champs) impliquent 95% de la variabilité de la réponse (voir Tableau 2). Ceci est logique puisque la réponse du système (i.e. la capacité portante ultime est insensible aux petites fluctuations des paramètres de cisaillement  $c$  et  $\varphi$  dans le massif de sol. En effet, la capacité portante est une quantité dépendante de la distribution moyenne des paramètres de cisaillement au sein du massif du sol (qui est fonction des premiers modes seulement) et elle est peu sensible à leurs petites fluctuations autour de cette distribution moyenne (qui sont eux fonction des modes supérieurs).



**Figure 2.** Indices de Sobol pour les SPCE d'ordres 2, 3, et 4 en utilisant le nombre total des variables aléatoires

$\xi_i$ (i=1, ..., 12) pour le champ aléatoire de la cohésion												
	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	$\xi_5$	$\xi_6$	$\xi_7$	$\xi_8$	$\xi_9$	$\xi_{10}$	$\xi_{11}$	$\xi_{12}$
Indice de Sobol	0.50	0.17	0.002	0.002	0.03	0.002	0.009	$2 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-4}$	$9 \times 10^{-5}$	0.0002	$7 \times 10^{-5}$
$\xi_i$ (i=13, ..., 24) pour le champ aléatoire de l'angle de frottement												
	$\xi_{13}$	$\xi_{14}$	$\xi_{15}$	$\xi_{16}$	$\xi_{17}$	$\xi_{18}$	$\xi_{19}$	$\xi_{20}$	$\xi_{21}$	$\xi_{22}$	$\xi_{23}$	$\xi_{24}$
Indice de Sobol	0.20	0.08	0.001	$8 \times 10^{-4}$	0.002	$5 \times 10^{-4}$	$6 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-5}$	$4 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$

**Tableau 2.** Indices de Sobol du cas de référence où  $a_x=10m$ ,  $a_y=1m$ , and  $r(c,\varphi)=0.5$

La Figure 2 montre que les indices de Sobol des différentes variables aléatoires sont assez peu sensibles à l'ordre du SPCE. Ainsi, un SPCE du second ordre est suffisant pour identifier les variables aléatoires les plus influentes (i.e. celles qui ont un poids significatif dans la variabilité de la capacité portante ultime). L'augmentation de l'ordre du SPCE a conduit aux mêmes variables aléatoires influentes ce qui justifie le choix d'un ordre faible du SPCE pour effectuer les investigations préliminaires. Le principal avantage d'un ordre faible est qu'un plan d'expérience avec un faible nombre de points est suffisant pour résoudre le problème de régression. Comme le montre le Tableau 3, 150 appels au code déterministe sont nécessaires pour résoudre le problème de régression pour un SPCE du second ordre. Ce nombre atteint 800 pour un SPCE du quatrième ordre. Cette augmentation significative est due à l'augmentation du nombre des coefficients inconnus (de 29 à 144) quand on choisit un SPCE d'ordre 4 au lieu d'un SPCE du second ordre.

Ordre du SPCE	2	3	4
Nombre des coefficients inconnus P	29	35	144
Nombre d'appels au code déterministe	150	350	800

**Tableau 3.** Nombre des coefficients inconnus et nombre d'appels au code déterministe pour différents ordres du SPCE

Pour choisir le nombre de variables aléatoires qui seront retenues ci-après, les différentes variables aléatoires  $\xi_i$  des deux champs aléatoires sont d'abord classées par ordre décroissant selon les valeurs de leurs indices de Sobol  $S_i$  (cf. les trois premières colonnes du Tableau 4). Un seuil d'acceptation  $t_a$  est ensuite prescrit. Il correspond à un pourcentage donné de l'indice de Sobol  $S_1$  de la variable aléatoire la

plus influente. Dans le présent travail, la variable aléatoire la plus influente est  $\xi_1$  et elle a un indice de Sobol  $S_1=0,5$ . Différentes valeurs du seuil d'acceptation  $t_a$  sont testées (cf. première ligne du Tableau 4). Les variables aléatoires ayant un indice de Sobol plus petit que le seuil d'acceptation  $t_a$  sont rejetées (i.e. indiqués par un tiret dans le tableau). Dans cet article, un seuil de 2% de l'indice de Sobol de la variable la plus influente est considéré comme suffisant; les variables aléatoires retenues pour ce seuil impliquent 98% de la variance totale de la réponse du système comme on le voit dans la dernière ligne de la colonne 7 du Tableau 4. Pour ce seuil, une "dimension effective"  $N_e = 5$  est obtenue (i.e. 5 variables aléatoires sont considérées comme les plus influentes). Les 5 variables aléatoires retenues ( $\xi_1, \xi_{13}, \xi_2, \xi_{14}, \xi_5$ ) seront utilisées par la suite avec les 150 calculs déterministes effectués auparavant pour approximer le SPCE du second ordre avec le nombre total des variables aléatoires  $N_T = 24$ .

La réduction du nombre des variables aléatoires de  $N_T = 24$  à  $N_e = 5$  permet d'utiliser des ordres plus élevés du SPCE (i.e.  $p > 2$ ) avec le même plan d'expérience (les 150 calculs déterministes). L'utilisation d'un ordre supérieur du SPCE est nécessaire pour mieux approximer la réponse du système à l'aide du SPCE puisque l'estimateur d'erreur du type *leave-one-out*  $Q^2$  donné dans l'équation [7] augmente lorsque l'ordre du SPCE augmente comme le montre le Tableau 5. Il est à noter ici qu'en utilisant la procédure SPCE/GSA, un SPCE d'ordre élevé allant jusqu'à l'ordre  $p = 8$  a pu être atteint en utilisant seulement les 150 calculs déterministes existants. Cet ordre est à comparer à l'ordre 4 atteint avec la méthodologie SPCE. D'après le Tableau 5, on remarque qu'avec l'utilisation de la procédure SPCE/GSA, le  $Q^2$  augmente avec l'augmentation de l'ordre du SPCE et se stabilise au-delà de l'ordre 5. Cela signifie qu'aucune amélioration dans l'approximation n'est obtenue au-delà de cet ordre. D'autre part, on peut remarquer que la valeur de  $Q^2$  donnée par cette procédure (i.e. 0.963) est inférieure à celle obtenue en utilisant un SPCE classique d'ordre 4 (i.e. 0.994). Ceci est dû au fait que 19 variables aléatoires ont été rejetées, ce qui affecte légèrement la qualité de l'approximation.

La Figure 3 présente le PDF de la capacité portante ultime obtenu en utilisant le SPCE classique (avec le nombre total des variables aléatoires  $N_T = 24$ ) et celui obtenu avec l'utilisation de la procédure SPCE/GSA (avec seulement cinq variables aléatoires). Le Tableau 6 présente les moments statistiques correspondants et les estimateurs d'erreur  $R^2$  et  $Q^2$ . Il est à noter que les résultats obtenus par la procédure SPCE/GSA sont présentés dans le Tableau 6 pour différentes valeurs du nombre d'appels au code déterministe (de 150 à 800). Ce tableau montre que les estimateurs d'erreur  $R^2$  et  $Q^2$  sont quasi constants avec l'augmentation du nombre d'appels au code déterministe. Cela signifie que 150 calculs déterministes sont suffisants et il n'est pas nécessaire d'effectuer plus de calculs pour améliorer la précision de l'approximation. D'autre part, on peut observer (voir Figure 3 et Tableau 6) que les deux premiers moments statistiques sont bien estimés par l'utilisation de la procédure SPCE/GSA avec seulement les 150 calculs déterministes. Toutefois, les moments statistiques d'ordre 3 et 4 ont besoin d'un nombre plus élevé de calculs déterministes

(800 calculs) afin de converger vers leurs valeurs de référence données par le SPCE seul (cf. Tableau 6). Ceci montre l'efficacité de la procédure SPCE/GSA pour calculer les deux premiers moments statistiques avec un nombre très faible de calculs déterministes.

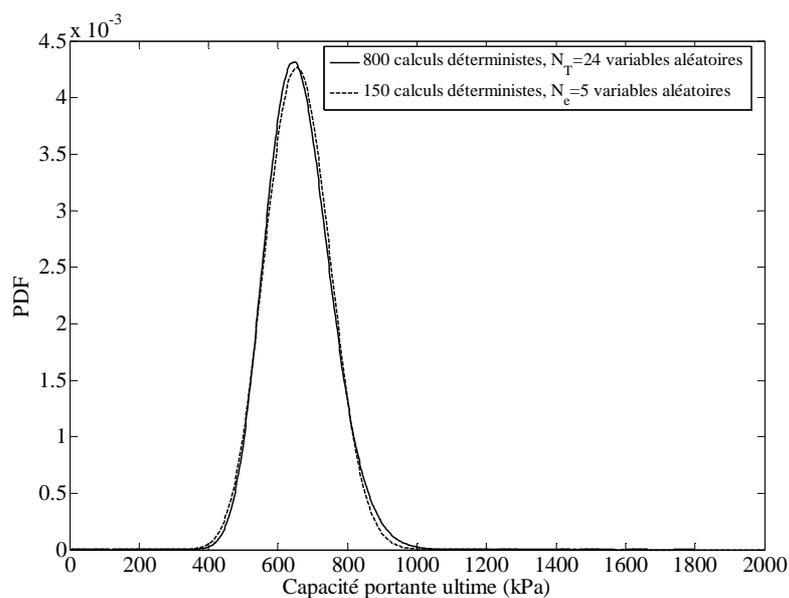
En ce qui concerne les indices de Sobol des deux champs aléatoires  $c$  et  $\varphi$ , le Tableau 7 montre que la procédure SPCE/GSA avec seulement 150 calculs déterministes donne les mêmes résultats obtenus par le SPCE classique où 800 calculs déterministes ont été nécessaires, ce qui montre encore une fois l'efficacité de la procédure SPCE/GSA.

Indice $i$ de la variable aléatoire $\xi_i$	Variable aléatoire $\xi_i$ ( $i=1, \dots, 24$ )	$S_i$ ( $i=1, \dots, 24$ )	$t_a=0.5\% \times S_1$ =0.0025	$t_a=1\% \times S_1$ =0.005	$t_a=1.5\% \times S_1$ =0.0075	$t_a=2\% \times S_1$ =0.01	$t_a=2.5\% \times S_1$ =0.0125
1	$\xi_1$	$S_1=0.500$	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
13	$\xi_{13}$	$S_{13}=0.200$	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
2	$\xi_2$	$S_2=0.170$	0.170	0.170	0.170	0.170	0.170
14	$\xi_{14}$	$S_{14}=0.080$	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080
5	$\xi_5$	$S_5=0.030$	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030
7	$\xi_7$	$S_7=0.009$	0.009	0.009	0.009	-	-
6	$\xi_6$	$S_6=0.002$	0.002	-	-	-	-
17	$\xi_{17}$	$S_{17}=0.002$	0.002	-	-	-	-
3	$\xi_3$	$S_3=0.002$	0.002	-	-	-	-
4	$\xi_4$	$S_4=0.002$	0.002	-	-	-	-
15	$\xi_{15}$	$S_{15}=0.001$	-	-	-	-	-
16	$\xi_{16}$	$S_{16}=8.0 \times 10^{-4}$	-	-	-	-	-
19	$\xi_{19}$	$S_{19}=6.0 \times 10^{-4}$	-	-	-	-	-
18	$\xi_{18}$	$S_{18}=5.0 \times 10^{-4}$	-	-	-	-	-
20	$\xi_{20}$	$S_{20}=3.0 \times 10^{-4}$	-	-	-	-	-
8	$\xi_8$	$S_8=2.0 \times 10^{-4}$	-	-	-	-	-
9	$\xi_9$	$S_9=2.0 \times 10^{-4}$	-	-	-	-	-
11	$\xi_{11}$	$S_{11}=2.0 \times 10^{-4}$	-	-	-	-	-
21	$\xi_{21}$	$S_{21}=1.0 \times 10^{-4}$	-	-	-	-	-
10	$\xi_{10}$	$S_{10}=9.0 \times 10^{-5}$	-	-	-	-	-
12	$\xi_{12}$	$S_{12}=7.0 \times 10^{-5}$	-	-	-	-	-
24	$\xi_{24}$	$S_{24}=5.0 \times 10^{-5}$	-	-	-	-	-
22	$\xi_{22}$	$S_{22}=4.0 \times 10^{-5}$	-	-	-	-	-
23	$\xi_{23}$	$S_{23}=4.0 \times 10^{-5}$	-	-	-	-	-
	Somme des indices de Sobol	1.001	0.997	0.989	0.989	0.98	0.98

**Tableau 4.** Indices de Sobol des différentes variables aléatoires et détermination des variables aléatoires retenues pour différentes valeurs du seuil d'acceptation.

Ordre du SPCE		2	3	4	5	6	7	8
Nombre total des variables aléatoires $N_T$	Coefficient de détermination $R^2$	0.998	0.999	0.999	-	-	-	-
	Estimateur d'erreur de type <i>leave-one-out</i> $Q^2$	0.824	0.932	0.994	-	-	-	-
Nombre réduit des variables aléatoires $N_e$	Coefficient de détermination $R^2$	0.961	0.963	0.968	0.970	0.972	0.972	0.972
	Estimateur d'erreur de type <i>leave-one-out</i> $Q^2$	0.791	0.883	0.957	0.961	0.963	0.963	0.963

**Tableau 5.** Estimateurs d'erreur  $R^2$  et  $Q^2$  pour les SPCE utilisant le nombre total et le nombre réduit des variables aléatoires pour différents ordres du SPCE



**Figure 3.** PDF de la capacité portante ultime pour les deux cas du SPCE avec le nombre total des variables aléatoires  $N_T = 24$  et la procédure proposée SPCE/GSA avec seulement cinq variables aléatoires  $N_e = 5$ .

	Nombre de calculs déterministes	Moyenne $\mu_{quilt}$ (kPa)	Ecart-type $\sigma_{quilt}$ (kPa)	Coefficient d'asymétrie $\delta_u$ de $q_u(-)$	Coefficient d'aplatissement $\kappa_u$ de $q_u(-)$	$R^2$	$Q^2$
Avec le nombre total des variables aléatoires $N_T=24$	800	658.2	93.57	0.287	0.163	0.999	0.995
Avec le nombre réduit des variables aléatoires $N_e=5$	150	657.84	90.80	0.105	0.013	0.972	0.957
	200	658.98	91.53	0.168	0.056	0.972	0.951
	250	659.90	92.10	0.188	0.063	0.964	0.956
	300	659.73	92.15	0.202	0.060	0.962	0.963
	400	660.05	90.95	0.291	0.050	0.969	0.960
	500	659.50	90.81	0.296	0.043	0.970	0.963
	600	659.75	90.99	0.272	0.116	0.968	0.963
	700	659.50	90.85	0.280	0.164	0.968	0.963
800	659.85	91.20	0.300	0.160	0.970	0.967	

**Tableau 6.** Estimateurs d'erreur  $R^2$  et  $Q^2$  du SPCE et moments statistiques de la capacité portante ultime tels qu'ils sont donnés par le SPCE classique et par la procédure SPCE/GSA

	Nombre de calculs déterministes	SPCE classique				$S(c) = \sum_{i=1}^{12} S_i$	$S(\varphi) = \sum_{i=13}^{24} S_i$
		i	Si (i=1, ..., 12)	i	Si (i=13, ..., 24)		
Avec $N_T=24$	800	1	0.5	13	0.2	0.715	0.285
		2	0.17	14	0.08		
		3	0.002	15	0.001		
		4	0.002	16	0.0008		
		5	0.03	17	0.002		
		6	0.002	18	0.0005		
		7	0.009	19	0.0006		
		8	0.0002	20	0.0003		
		9	0.0002	21	0.0001		
		10	$9.0 \times 10^{-5}$	22	$4.0 \times 10^{-5}$		
		11	0.0002	23	$4.0 \times 10^{-5}$		
		12	$7.0 \times 10^{-5}$	24	$5.0 \times 10^{-5}$		
	Nombre de calculs déterministes	SPCE/GSA				$S(c) = \sum_{i=1}^3 S_i$	$S(\varphi) = \sum_{i=4}^5 S_i$
		i	Si (i=1, 2, 3)	i	Si (i=4, 5)		
Avec $N_e=5$	150	1	0.510	4	0.076	0.721	0.279
		2	0.200	5	0.190		
		3	0.010				

**Tableau 7.** Indices de Sobol déterminités à partir du SPCE classique avec  $N_T=24$  et la procédure SPCE/GSA avec  $N_e=5$

## 6. Conclusions

Une utilisation combinée de la méthodologie du chaos polynomial creux (SPCE) et de l'analyse de sensibilité globale (GSA) est proposée. L'objectif est de réduire le coût de l'analyse probabiliste dans le cas de modèles déterministes lourds. Cette méthodologie est validée dans le présent article en utilisant un modèle déterministe peu consommateur en temps de calcul. La validation de la méthodologie SPCE/GSA est effectuée par confrontation des résultats obtenus par cette méthode avec ceux donnés par la méthode du SPCE classique. Des résultats satisfaisants sont obtenus en utilisant un nombre réduit de calculs déterministes avec la méthodologie proposée. Les deux premiers moments statistiques et les indices de Sobol sont bien estimés avec le nombre faible de calculs déterministes. Cependant, les moments statistiques d'ordre 3 et 4 ont besoin d'un nombre plus élevé de calculs déterministes afin de converger vers leurs valeurs de référence obtenues par le SPCE classique. La validation de la procédure SPCE/GSA sur un modèle peu consommateur en temps de calcul permet son utilisation pour des problèmes mécaniques complexes impliquant un temps de calcul important.

## 7. Bibliographie

- Al-Bittar T., and Soubra A. H., « Bearing capacity of strip footing on spatially random soils using sparse polynomial chaos expansion ». *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, accepted paper, 2012.
- Al-Bittar T., and Soubra A. H., « Bearing capacity of strip footing on spatially random soils using sparse polynomial chaos expansion ». *GeoRisk* (GSP 224), ASCE, Atlanta, USA, 26-28 June 2011.
- Berveiller M., Sudret B., and Lemaire M., « Stochastic finite element: a non intrusive approach by regression ». *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, vol. 15, 2006, p. 81-92.
- Blatman G., and Sudret B., « An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis ». *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 25, 2010, p. 183-197.
- Li C. C., Der Kiureghian A., « Optimal discretization of random fields », *J Eng Mech*, vol. 119, 1993, p. 36-54.
- Nataf A., « Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont données ». *CR Acad Sci*, vol. 225, 1962.
- Saltelli A., Chan K., and Scott E. M., *Sensitivity Analysis*. John Wiley and sons, 2000.
- Sobol I. M., « Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates ». *Mechanics and Computation in Simulation*, vol. 55, 2001, p. 271-280.
- Sudret B., « Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansion ». *Reliab. Eng. And System Safety*, vol. 93, 2008, p. 964-979.

- Sudret B., Berveiller M., and Lemaire M., « A stochastic finite element procedure for moment and reliability analysis ». *Eur. J. Comput. Mech.*, vol. 15, 2006, p. 825-866.
- Vořechovsky M., « Simulation of simply cross correlated random fields by series expansion methods », *Structural Safety*, vol. 30, 2008, p. 337-363.