



HAL
open science

La loi normale : la reine de l'aléatoire

Patrick J C Tardivel

► **To cite this version:**

Patrick J C Tardivel. La loi normale : la reine de l'aléatoire. Rallyes des collèges et lycées de Bourgogne, Jun 2024, Dijon, France. hal-04722799

HAL Id: hal-04722799

<https://hal.science/hal-04722799v1>

Submitted on 6 Oct 2024

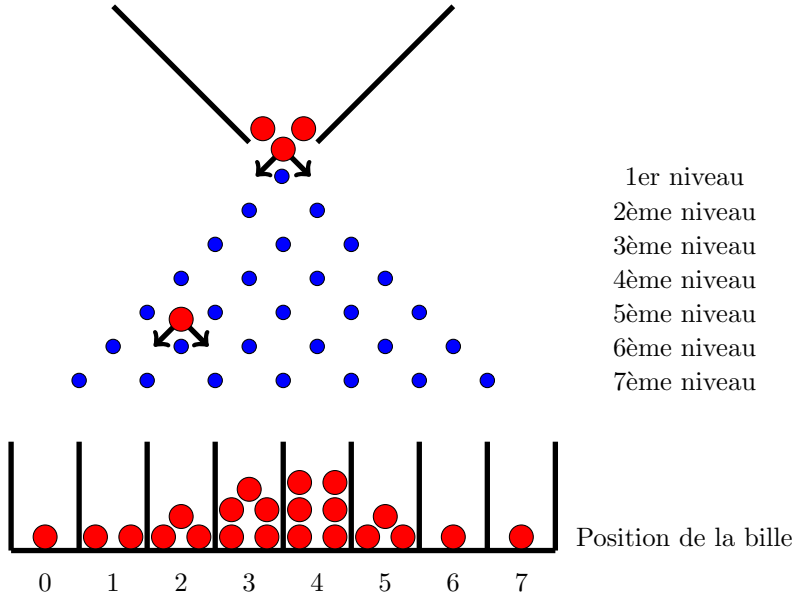
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

On lâche une bille sur une planche de Galton. A chaque niveau la bille tombe à gauche ou à droite avec la même probabilité. La position aléatoire de la bille, en bas de la planche, correspond au nombre de niveaux pour lesquels la bille est tombée à droite.

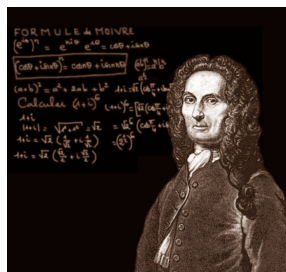


La probabilité que la bille tombe en position k vaut

$$\frac{1}{2^{\text{nombre de niveaux}}} \times \frac{\text{nombre de niveaux!}}{k! \times (\text{nombre de niveaux} - k)!},$$

où $n!$ représente le produit des entiers de 1 à n . Pour une planche avec beaucoup de niveaux on peut approcher la probabilité associée à chaque position à l'aide de la loi normale

$$\mathcal{N}\left(\frac{1}{2} \text{ nombre de niveaux}, \sqrt{\frac{1}{4} \text{ nombre de niveaux}}\right).$$



Cette approximation apparaît dans l'ouvrage publié en 1738 « The Doctrine of Chances » par Abraham de Moivre. Historiquement de Moivre cherchait à savoir si, à la naissance, la probabilité d'avoir une fille était égale à la probabilité d'avoir un garçon.

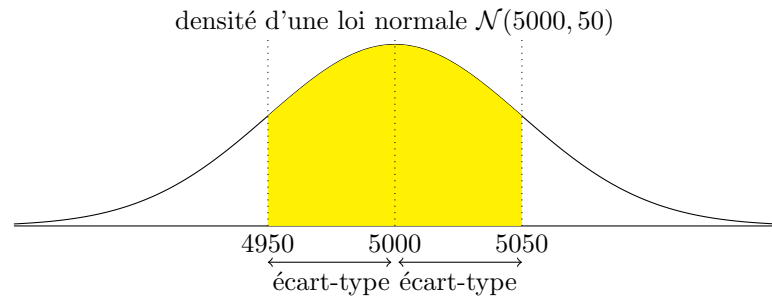
La loi normale

Dans les pas d'Abraham de Moivre

La loi normale, notée $\mathcal{N}(\text{moyenne}, \text{écart-type})$, dépend de deux paramètres : la moyenne qui donne la valeur centrale de cette loi et l'écart-type qui mesure la dispersion autour de la moyenne. La densité de cette loi a pour expression

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \text{écart-type}} \times \exp\left(-\frac{(x - \text{moyenne})^2}{2 \times \text{écart-type}^2}\right).$$

Supposons que la probabilité d'avoir une fille soit égale à la probabilité d'avoir un garçon alors, sur 10000 naissances, le nombre aléatoire de filles suit approximativement une loi normale $\mathcal{N}(5000, 50)$. La densité de cette loi est illustrée ci-dessous :



L'aire jaune vaut 0,6827 donc, d'après cette modélisation, la probabilité d'avoir entre 4950 et 5050 filles vaut approximativement 68,27%.

La loi normale centrée réduite : Pour les calculs on se ramène à une loi normale centrée (de moyenne nulle) et réduite (d'écart-type 1) notée $\mathcal{N}(0,1)$. Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\text{moyenne}, \text{écart-type})$. La probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre valeur₁ et valeur₂, notée $\mathbb{P}(\text{valeur}_1 \leq X \leq \text{valeur}_2)$, est égale à :

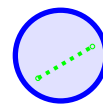
$$\mathbb{P}\left(\frac{\text{valeur}_1 - \text{moyenne}}{\text{écart-type}} \leq \underbrace{\frac{X - \text{moyenne}}{\text{écart-type}}}_{\text{suit une loi } \mathcal{N}(0,1)} \leq \frac{\text{valeur}_2 - \text{moyenne}}{\text{écart-type}}\right).$$

Challenge : Sur 1600 naissances, peux-tu donner une approximation de la probabilité d'avoir entre 790 et 810 filles ?

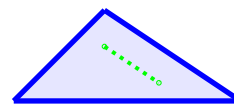
L'inégalité de corrélation gaussienne

En l'honneur de Thomas Royen

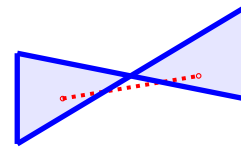
Un ensemble C est un convexe du plan si tout segment dont les extrémités sont des points de C est inclus dans C .



Convexe



Convexe



Pas convexe

Soient (X, Y) un point aléatoire où l'abscisse X suit une loi $\mathcal{N}(0, \text{écart-type}_1)$, l'ordonnée Y suit une loi $\mathcal{N}(0, \text{écart-type}_2)$ et C, D deux ensembles convexes du plan pour lesquels l'origine est un centre de symétrie alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((X, Y) \text{ appartient à l'intersection } C \cap D) \\ & \geq \mathbb{P}((X, Y) \text{ appartient à } C) \times \mathbb{P}((X, Y) \text{ appartient à } D). \end{aligned}$$



L'inégalité de corrélation gaussienne a été conjecturée en 1955. Soixante ans après la conjecture, une preuve de cette inégalité a été donnée par Thomas Royen un statisticien allemand. Cette inégalité est très utile en biostatistique.