



HAL
open science

La théorie mathématique de la viabilité au service de la gestion durable

Isabelle Alvarez

► **To cite this version:**

Isabelle Alvarez. La théorie mathématique de la viabilité au service de la gestion durable. 2024.
hal-04715262

HAL Id: hal-04715262

<https://hal.science/hal-04715262v1>

Preprint submitted on 30 Sep 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La théorie mathématique de la viabilité au service de la gestion durable

Isabelle Alvarez

Mathématique et Informatique Appliquées - Paris Saclay, INRAE
Institut des Systèmes Complexes Paris-Ile de France

Résumé

La théorie mathématique de la viabilité (Aubin, 1991) étudie la compatibilité entre un système dynamique et un ensemble de contraintes. Ce formalisme permet de proposer des définitions pour les concepts liés à la durabilité et d'étudier les liens entre ces concepts, comme la robustesse et la résilience. Dans ce cadre, il est possible d'éviter les arbitrages entre les préoccupations de court terme ou de long terme. Il permet aussi de prendre en compte simultanément plusieurs aspects de la durabilité. L'intérêt suscité par la théorie de la viabilité a entraîné des travaux en informatique pour rendre opérationnels les outils d'analyse proposés. C'est à l'heure actuelle, avec le changement de pratique qu'elle suggère, la principale limite à sa mise en œuvre. En effet, même si elle est rattachée au contrôle optimal, la théorie de la viabilité propose un changement de perspective par rapport à l'optimisation. Avant de se poser des questions en termes d'objectif à optimiser, on s'intéresse à la définition des états souhaitables et des moyens admissibles pour y maintenir le système étudié, ainsi qu'aux conséquences pour les évolutions possibles du système. Plusieurs exemples sont proposés pour expliquer l'intérêt de la démarche au-delà de la théorie mathématique.

1 Viabilité et durabilité en quelques mots

1.1 Qu'est ce que la « durabilité » ?

L'expression « développement durable » du rapport Brundtland [[1]] était nouvelle : « le développement durable est un développement qui répond aux besoins du présent sans compromettre la capacité des générations futures de répondre aux leurs. » Mais la préoccupation ne l'était pas vraiment. Le club de Rome avait déjà produit en 1972 un rapport sur les limites à la croissance (Rapport Meadows [2]), qui pointait le problème d'une croissance économique qui croît encore plus rapidement que la croissance démographique et exponentiellement dans un monde fini. Mais le souci de la « durabilité » n'est pas l'apanage de notre époque. Dans son *Histoire Naturelle*, Pline l'ancien s'interroge sur l'épuisement de la terre en ressources métalliques¹ et sur les ravages que l'avidité inflige à la terre. Il ne s'agit pas d'une critique de l'enrichissement en soi, mais de l'appât du gain, de la démesure et de ses conséquences. En France, on peut citer l'ordonnance de Brunoy de 1346, promulguée par Philippe VI de Valois, roi de France : « Les maîtres des eaux et

1. « Nous suivons toutes les veines de la terre, et, vivant sur les excavations que nous avons faites, nous nous étonnons que parfois elle s'entrouvre ou qu'elle tremble! (...) En se laissant aller à l'imagination, que l'on calcule combien il faudra de siècles pour mettre fin à ces travaux qui l'épuisent, et jusqu'où pénétrera notre cupidité! » [[3]]

forêts enquerront et visiteront toutes les forez et bois et feront les ventes qui y sont, en regard de ce que lesdites forez se puissent perpétuellement soustenir en bon estat. » [[4]] Il apparaît aussi que la préoccupation de l’environnement et de sa restauration est possible même en période de crise et quand le dommage est inévitable. La défense de Paris pendant la guerre de 14-18 en donne une illustration. La réalisation de tranchées nécessitait des coupes dans la forêt de Sénart. Le général commandant le Grand Paris a demandé aux agents des Eaux et Forêts de venir identifier les arbres à préserver de manière à ce que la forêt puisse se reconstituer après la guerre. [[5]] Cette démarche a été couronnée de succès puisqu’il a fallu un travail d’archéologie pour identifier les talus traversant certaines zones de la forêt comme étant les vestiges des tranchées de 1915. [[6]]

Ces exemples nous montrent que la préoccupation de « durabilité » n’est pas récente et n’est pas liée à un état d’abondance, mais plutôt à l’analyse et à la volonté des acteurs. Toutefois, depuis 1987, la notion est très présente. Le développement « durable » comprend des contraintes de long terme pour l’économie, l’environnement et la société.

1.2 Qu’est ce que la théorie mathématique de la viabilité ?

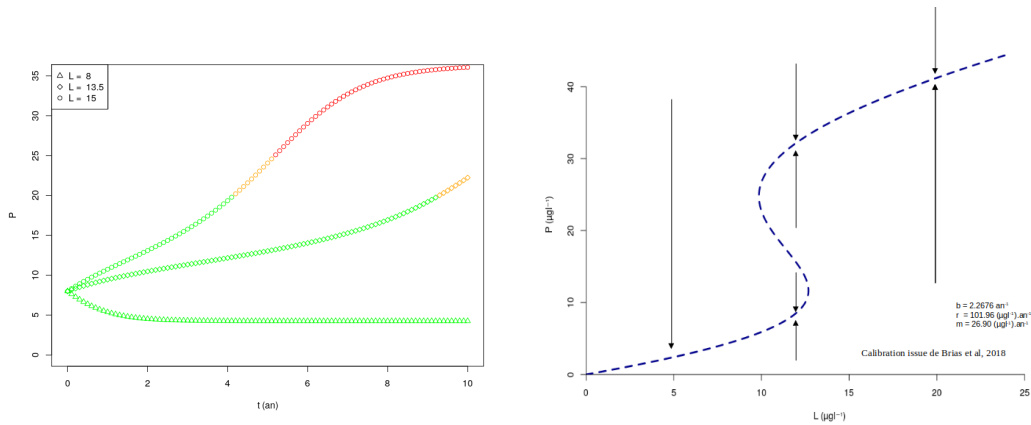
La théorie mathématique de la viabilité a été proposée par J-P Aubin [[7]] dans les années 1990, pour rendre compte de la compatibilité intrinsèque entre un système dynamique et un ensemble de contraintes dans l’espace d’état. Cette approche se veut en rupture avec l’optimisation intertemporelle. Dans l’épigraphe de son livre, Aubin souligne que le choix des critères de l’optimisation intertemporelle doit nous amener à nous interroger (les critères étant nécessairement subjectifs). Partant du constat que pour un système dynamique, toutes les évolutions ne sont pas possibles ou souhaitables, Aubin considère que l’état du système doit obéir à des contraintes : les contraintes de viabilité. L’objectif de la théorie de la viabilité est de permettre la sélection d’évolutions viables, qui vérifient ces contraintes à chaque instant.

En tant que théorie mathématique, la viabilité fait suite à des travaux réalisés dans les années 1990 en contrôle optimal, théorie des correspondances et systèmes non linéaires. L’originalité repose sur la définition de contraintes de viabilité, la vérification des contraintes en temps infini et sur des stratégies viables générales. De plus, l’accent est mis sur des hypothèses de travail les plus faibles possibles : les ensembles de contraintes sont fermés. Ils n’ont pas besoin, en général, d’être convexes, ou compacts. Pour les dynamiques en temps continu, cela a permis à la théorie de la viabilité de proposer des solutions dans des conditions où le contrôle optimal ne le pouvait pas. De plus, un algorithme d’approximation des noyaux de viabilité avec preuve de convergence est disponible [8]. Même s’il souffre de la malédiction de la dimension (complexité exponentielle avec la dimension), il offre la possibilité de calculer des approximations de noyaux de viabilité dans le cas général, ce qui est un avantage indéniable pour cette méthode.

2 La théorie de la viabilité à partir d’un exemple

La théorie de la viabilité propose une manière différente de réfléchir à la gestion des systèmes dynamiques, c’est pourquoi nous illustrons la démarche à partir d’un exemple simple : le problème de l’eutrophisation des lacs.

Un étude de viabilité suppose de disposer d’un modèle dynamique du problème, et de pouvoir définir l’ensemble des états souhaitables dans lequel on souhaite que l’état du système demeure (c’est l’ensemble de contraintes de viabilité). Il s’agit donc entre autres de pouvoir définir les variables qui décrivent le problème, de décrire l’évolution de ces variables (la dynamique du système), d’identifier les moyens d’action (les contrôles) et de connaître leur effet sur la dynamique. Le phénomène d’eutrophisation est décrit dans la suite, ainsi que la formulation du problème de viabilité.



(a) 3 trajectoires issues de la même concentration initiale ($P = 8 \mu\text{g l}^{-1}$). En rouge des états eutrophes.

(b) Équilibres de la dynamique du lac en fonction des apports L . Les flèches indiquent l'évolution de P à L constant.

FIGURE 1 – Évolution de l'état du lac en fonction des apports annuels de phosphore. Paramètres de la dynamique : $b = 2,2676 \text{ an}^{-1}$, $r = 101,96$ et $m = 26,9$ en $\mu\text{g l}^{-1} \text{ an}^{-1}$, $q = 2,222$.

2.1 L'eutrophisation des lacs

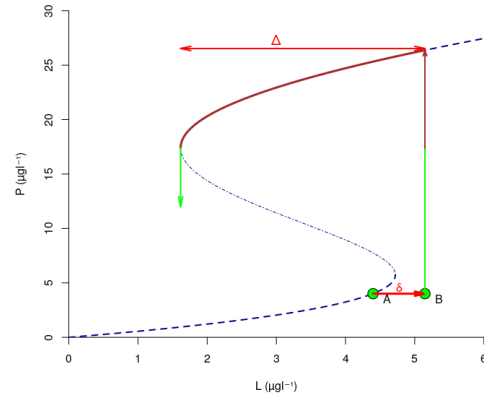
Le mécanisme de l'eutrophisation des lacs est bien connu. Il est causé par l'accumulation des nutriments (essentiellement le phosphore et l'azote). Cela entraîne le développement rapide de plantes et d'algues qui appauvrissent le milieu en oxygène dissout, provoquant une perte de biodiversité, la mort de nombreuses espèces, et le développement de bactéries qui peuvent rendre l'eau toxique. L'eau devient turbide, potentiellement malodorante et toxique. L'eutrophisation a des effets négatifs sur la qualité de l'eau qui impactent les écosystèmes, la biodiversité, l'utilisation de la ressource, le tourisme, etc. Tous les étés, des mairies sont obligées de prendre des arrêtés d'interdiction de baignade dans les étangs eutrophes du fait de la présence de cyanobactéries. Ce phénomène est très répandu sous toutes les latitudes, raison pour laquelle il est étudié depuis longtemps. Il est maintenant très bien décrit. On dispose de nombreuses données, analyses et indicateurs fiables [9]. Ces études ont donné lieu à des travaux de modélisation qui permettent de bien comprendre le phénomène [10]. En particulier, on sait que, pour chaque lac, il y a une concentration de phosphore total à ne pas dépasser. En revanche la mesure de la concentration P en phosphore total du lac ne suffit pas à expliquer le comportement du lac comme le montre la figure 1. L'évolution du lac à une concentration de P donnée dépend aussi du niveau des apports de phosphore dans le lac, noté L . Ces apports de phosphore proviennent en général des engrais agricoles et des eaux usées. La dynamique suit une loi de type pseudo-sygmöïde, où b , m et q sont des paramètres qui dépendent de la configuration du lac et qui sont obtenus par calibration à partir de mesures :

$$\frac{dP}{dt} = -bP(t) + L(t) + r \frac{P(t)^q}{m^q + P(t)^q} \quad (1)$$

Il s'agit d'un modèle qui simplifie le fonctionnement du système réel, mais qui permet de simuler le comportement du lac, et de prédire son évolution. Ce modèle peut servir de base de travail à l'étude de viabilité. Schématiquement, il décrit que l'évolution de la teneur en phosphore total diminue avec les pertes (avec un paramètre b), par exemple par les infiltrations ou les émissaires du lac. Elle est augmentée des apports et par le relargage des sédiments (avec un maximum r ,



(a) Lac Dianchi en 2007. Le lac est eutrophe et fait l'objet de politiques suivies de lutte contre l'eutrophisation.
Crédit Photo : I. Emitchan, CC BY 2.5.

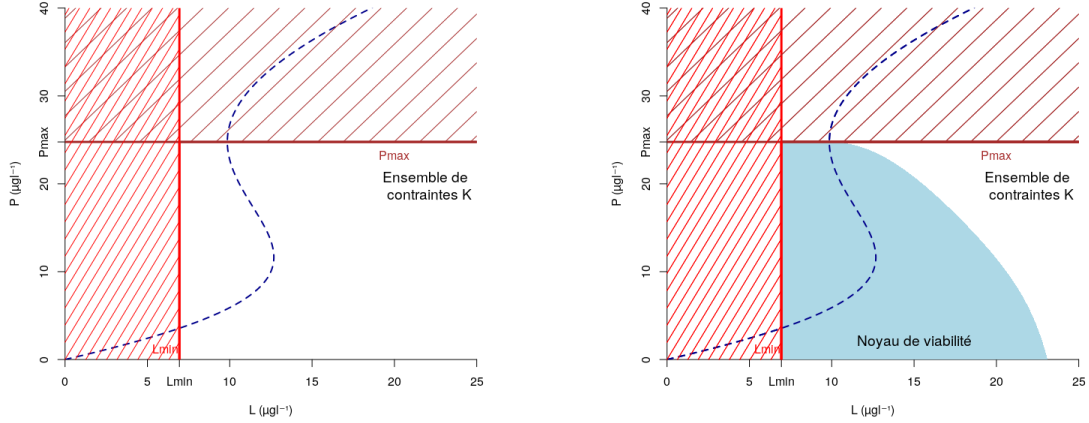


(b) Hystérésis : une faible augmentation des apports δ amène le lac de l'état d'équilibre A oligotrophe à l'état B. Le lac n'est plus à l'équilibre et évolue vers la branche supérieure des équilibres (eutrophes). Le lac ne peut revenir à un état oligotrophe que par une diminution des apports de Δ , beaucoup plus importante que δ .

FIGURE 2 – Eutrophisation des lacs et hystérésis.

et des caractéristiques de non-linéarité q et m).

Suivant les lacs, la dynamique peut présenter un comportement d'hystérésis : un petit apport supplémentaire de phosphore peut faire passer rapidement le lac d'un état oligotrophe à un état eutrophe. Le retour à un état oligotrophe demandera des efforts de réduction des apports beaucoup plus importants que la cause initiale ayant entraîné l'eutrophisation. C'est le cas quand la courbe des équilibres présente deux branches d'équilibres stables, comme sur la figure 2b. C'est la raison pour laquelle la lutte contre l'eutrophisation des lacs est difficile, comme l'illustre le cas du lac Dianchi (figure 2a). Un très grand nombre de moyens ont été mis en œuvre pour lutter contre l'eutrophisation depuis 1986 [11]. D'une part, la majeure partie des sources de pollution ponctuelles a été réduite : épuration des eaux usées de la ville de Kunming, obligation de traitement des déchets des mines de potasse (qui auparavant étaient déversés dans les affluents du lac), restrictions des activités industrielles les plus polluantes, relocalisation des industries agro-alimentaires (interdiction de l'aquaculture, déplacement de plus de 5 millions de volailles). Les sources diffuses ont été réduites : restriction d'utilisation des engrais, interdiction des cultures florales et maraîchères sur un large périmètre et en ville. D'autres actions ont été entreprises : des rivières ont été détournées pour contribuer à la baisse de la concentration en phosphore par un apport d'eau saine, et surtout, plus de 10 millions de m^3 de sédiments ont été dragués. Grâce à l'ensemble de ces actions, la concentration totale de phosphore dans le lac a enfin commencé à baisser.



(a) Ensemble de contraintes de viabilité (en blanc). La zone hachurée en rouge ne respecte pas la contrainte minimale sur les apports. La zone hachurée en marron ne respecte pas la contrainte maximale de concentration en phosphore total. Valeurs des seuils : $L_{\text{min}} = 6,9\mu\text{g l}^{-1}$ (soit 25t), $P_{\text{max}} = 24,8\mu\text{g l}^{-1}$.

(b) Noyau de viabilité (en bleu). Dans le noyau de viabilité il est toujours possible de maintenir le lac dans l'ensemble de contraintes. En dehors du noyau ce n'est pas possible, soit le lac deviendra oligotrophe, soit les exploitations ne pourront plus exercer leur activité.

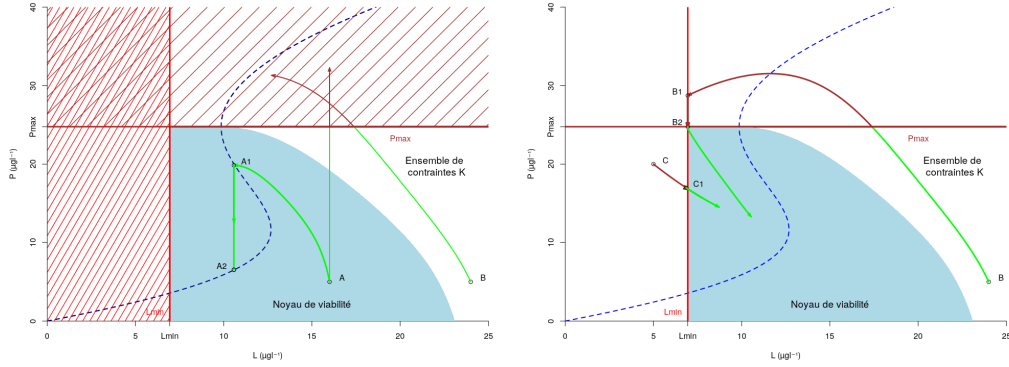
FIGURE 3 – Ensemble de contraintes et noyau de viabilité pour le problème du lac et des exploitations rivérales modélisé par le système (3) avec les paramètres de la figure 1.

2.2 Poser un problème d'eutrophisation en termes de viabilité

2.2.1 Définir l'ensemble de contraintes, les moyens d'action et le modèle

Le problème d'eutrophisation développé ici est inspiré de [12]. On considère ensemble un lac et les exploitations rivérales du lac et de son affluent. Les pratiques agricoles et d'autres activités peuvent entraîner une pollution par les phosphates, ce qui expose le lac à des problèmes d'eutrophisation. On considère qu'un comité rassemblant les parties prenantes étudie le problème. Pour modéliser la situation, on retient de la section précédente que les variables qui permettent de décrire le comportement du lac, du point de vue de l'eutrophisation, sont la concentration P de phosphore total et les apports en phosphore L . On considère que la surveillance du lac permet de modéliser la dynamique du lac suivant l'équation 1 (en calibrant les paramètres) et de fixer la limite P_{max} de concentration du phosphore total à ne pas dépasser. Pour permettre la poursuite ou le développement des activités agricoles ou autres, il est nécessaire d'accepter un niveau minimal L_{min} d'apport de phosphore dans le lac. Ces deux seuils définissent l'ensemble de contraintes de viabilité du lac et des exploitations rivérales, que l'on peut voir sur la figure 3a. L'ensemble de contraintes représente l'ensemble des états souhaitables dans lequel on souhaite conserver le lac. On considère ici que les moyens d'actions disponibles (par exemple la dépollution des affluents, la mise en place de zones humides et de bassins de rétention, les changements de pratiques agricoles, etc.) peuvent se ramener à contrôler la variation des apports :

$$\frac{dL}{dt} = u \in U = [u_{\text{min}}, u_{\text{max}}] \quad (2)$$



(a) A est dans le noyau, on peut trouver au moins une évolution qui y reste indéfiniment : jusqu'en A1 avec un contrôle $u = -0,6$ (faible réduction des apports), puis avec $u = 0$ (apports constants) jusqu'en A2 (équilibre oligotrophe). B n'est pas dans le noyau : la trajectoire représentée est la plus efficace (réduction maximum des apports avec $u = u_{min}$), elle quitte l'ensemble de contraintes.

(b) Les états B et C sont dans le bassin de capture (en blanc) du noyau de viabilité. Au départ de B, avec l'effort maximal de réduction des apports jusqu'en B2, puis avec un effort nul, l'évolution du lac rejoint le noyau de viabilité en B2, il est ensuite possible d'augmenter les apports en réduisant P. Au départ de C, l'effort d'augmentation maximal des apports permet de rejoindre la frontière du noyau de viabilité en C1, et de poursuivre dans le noyau.

FIGURE 4 – Évolutions dans le noyau de viabilité et son bassin de capture pour le problème du lac et des exploitations riveraines (système 3 avec les paramètres de la figure 1 et contraintes de la figure 3a).

Un modèle simplifié du lac et des exploitations riveraines peut être formulé en considérant que les équations 1 et 2 gouvernent l'évolution des états du lac. Le problème de viabilité est alors résumé par le système 3 :

$$(S) \begin{cases} \frac{dL}{dt} = u \in U = [u_{min}, u_{max}] \\ \frac{dP}{dt} = -bP(t) + L(t) + r \frac{P(t)^q}{m^q + P(t)^q} \\ (L(t), P(t)) \in K = [Lmin, +\infty[\times]0, Pmax] \end{cases} \quad (3)$$

2.2.2 Noyaux de viabilité et bassin de capture

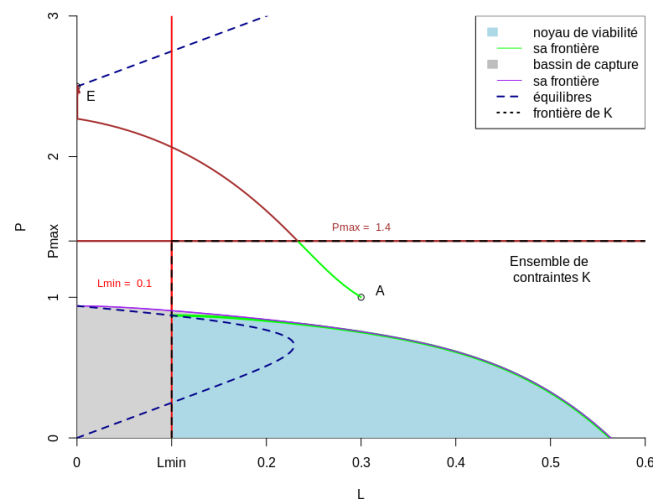
Résoudre le problème de viabilité du lac et des exploitations riveraines consiste à rechercher les états à partir desquels les évolutions gouvernées par le système 3 restent indéfiniment dans l'ensemble des états souhaitables. L'ensemble de tous ces états *viables* est le *noyau de viabilité*. La figure 3b montre le noyau de viabilité pour le problème (3), en considérant comme paramètres de contrôle $u_{max} = -u_{min} = 3,15$ (soit 50% des écarts moyens des apports entre deux années consécutives, voir [13]).

Le noyau de viabilité regroupe les états à partir desquels il est possible d'évoluer indéfiniment dans l'ensemble de contraintes. La figure 4a montre le noyau de viabilité du problème du lac pour le système (3) et les paramètres de la figure 1. A partir d'un état du noyau de viabilité, même si toutes les évolutions ne sont pas viables, il en existe au moins une qui reste indéfiniment dans l'espace de contraintes (donc dans le noyau de viabilité). En revanche, à partir d'un état qui n'est pas dans le noyau de viabilité, toutes les évolutions sont condamnées à quitter l'ensemble

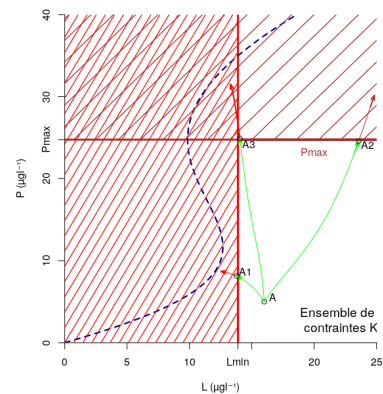
de contraintes en temps fini. Dans ce cas, le *bassin de capture du noyau de viabilité* donne des informations utiles : il regroupe les états à partir desquels il est possible de rejoindre le noyau de viabilité en temps fini. La figure 4b montre le bassin de capture du noyau de viabilité (qui est dans cet exemple l'espace tout entier).

Si l'état du lac n'est pas dans le noyau de viabilité correspondant aux moyens $U = [u_{min}, u_{max}]$ que l'on s'est donné, mais qu'il est dans le bassin de capture, il existe au moins une évolution permettant de rejoindre le noyau de viabilité en temps fini, donc de rester dans l'ensemble de contraintes indéfiniment par la suite. Cependant le temps de crise (pendant lequel le système n'est pas dans l'ensemble de contraintes) peut être jugé trop long, ce qui implique de se donner des moyens d'action supplémentaires. Par exemple, dans le cas du lac Dianchi, plusieurs moyens de réduire les apports ont été expérimentés avec une montée en puissance (traitement de volume d'eaux usées auparavant déversées dans le lac de plus en plus important, assainissement des affluents, etc.)

Le modèle 3 montre un comportement de lac irréversible pour certains paramètres, ce qui correspond à des observations réelles (voir les exemples cités dans [10]). Cela signifie qu'il peut exister des lacs devenus eutrophes pour lesquels même une durée indéterminée avec des apports nuls ne fait pas chuter la concentration en phosphore suffisamment pour ramener le lac à un état oligotrophe. La figure 5a montre le comportement du lac à partir d'un état qui n'est ni dans le noyau de viabilité ni dans son bassin de capture. Même quand les apports de phosphore



(a) Modèle d'un lac irréversible (système 3 avec pour paramètres $b = 0,4 \text{ an}^{-1}$, $r = 1$ et $m = 1$ en $\mu\text{gl}^{-1}\text{an}^{-1}$, $q = 8$, $u_{min} = -0,09$). Le bassin de capture du noyau est en gris, il est par endroit très proche du noyau. Il n'est pas possible de rejoindre le noyau de viabilité à partir des états de la zone blanche. La trajectoire issue de A correspond à l'effort de réduction maximum des apports jusqu'aux apports nuls. Elle quitte l'ensemble de contraintes et rejoint l'équilibre eutrophe E



(b) A partir du point A, viable avec les contraintes de la figure 4a, toutes les évolutions sortent de l'ensemble de contrainte. Le noyau de viabilité est vide : les contraintes, la dynamique et les moyens d'action sont incompatibles.

FIGURE 5 – Faible compatibilité ou incompatibilité entre la dynamique, les moyens d'actions et les états souhaitables.

deviennent nuls, la concentration en phosphore total dans le lac continue d'augmenter jusqu'à rejoindre un équilibre eutrophe. Il n'est pas possible dans cette configuration de ramener le lac dans un état oligotrophe : les moyens d'actions qui agissent sur les apports sont inopérants. Il est nécessaire de recourir à des contrôles qui agissent directement sur la concentration de phosphore dans le lac. Dans le cas du lac Dianchi, des rivières d'eau saine ont été détournées pour diminuer directement cette concentration (ce qui peut être modélisé par une augmentation du paramètre b). Plus efficacement, les sédiments ont été dragués en grande quantité. Du point de vue du modèle, cela revient à modifier les paramètres de la pseudo-sigmoïde (r, q et m), ce qui modifie la dynamique et la courbe des équilibres. Il est ainsi possible, en modifiant les caractéristiques du lac, de transformer un lac « irréversible » en un lac « réversible » qui pourra retrouver un état oligotrophe.

3 Viabilité, robustesse et résilience

3.1 Contrôler un système pour qu'il reste viable ou pour qu'il le devienne

Un des résultats les plus puissants de la théorie de la viabilité est la fermeture du noyau de viabilité. On considère un système dynamique défini sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , et un ensemble de contraintes $K \subset \Omega$. On s'intéresse ici aux systèmes contrôlés : le système dynamique $S_{(f,U)}$ est défini par une fonction de plusieurs variables $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^n$ et la carte des contrôles admissibles $U : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^p$. A partir d'un état x et d'un contrôle $u \in U(x)$, la fonction f associe à x l'état $f(x, u)$. Les systèmes non-autonomes sont modélisés par l'ajout d'une variable de dérivée temporelle égale à 1.

Définition 1 *Le noyau de viabilité $\text{Viab}_{S_{(f,U)}}(K)$ de l'ensemble de contraintes K pour le système contrôlé $S_{(f,U)}$ est l'ensemble (éventuellement vide) des états de K à partir desquels il est possible de trouver une fonction de contrôle $u(\cdot)$ telle qu'une évolution $x(\cdot)$ gouvernée par $S_{(f,U)}$ reste dans K indéfiniment :*

$$x \in \text{viab}_{S_{(f,U)}}(K) \Leftrightarrow \exists u(\cdot) \quad \forall t \geq 0 \begin{cases} x'(t) &= f(x(t), u(t)) \\ u(t) &\in U(x(t)) \\ x(t) &\in K \end{cases} \quad (4)$$

Le théorème de la fermeture du noyau a plusieurs variantes [7]. Dans le cas des systèmes contrôlés, les hypothèses suffisantes qu'on considère ici sont les suivantes : l'ensemble de contraintes doit être fermé et le système dynamique en temps continu $S_{(f,U)}$ doit être Marchaud : f est continue, le graphe de U est fermé, pour tout état x , l'ensemble des images de x par f quand on fait varier le contrôle $\{f(x, u), u \in U(x)\}$ est convexe, et f et U sont à croissance linéaire²

Théorème 1 *Si K est fermé $\text{Viab}_{S_{(f,U)}}(K)$ est fermé si on a les conditions suivantes : en temps continu si $S_{(f,U)}$ est Marchaud en temps discret si $S_{(f,U)}$ vérifie : f est continue, le graphe de U est fermé, U est à croissance linéaire, alors $\text{Viab}_{S_{(f,U)}}(K)$ est fermé.*

Concrètement, cela signifie que les évolutions ne doivent pas être plus rapides que des exponentielles. Dans ce cas, les conditions sont facilement réunies et le noyau de viabilité est fermé. En

2. La correspondance F est à croissance linéaire s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout x dans le domaine de F , $\sup_{y \in F(x)} \|y\| \leq c(\|x\| + 1)$

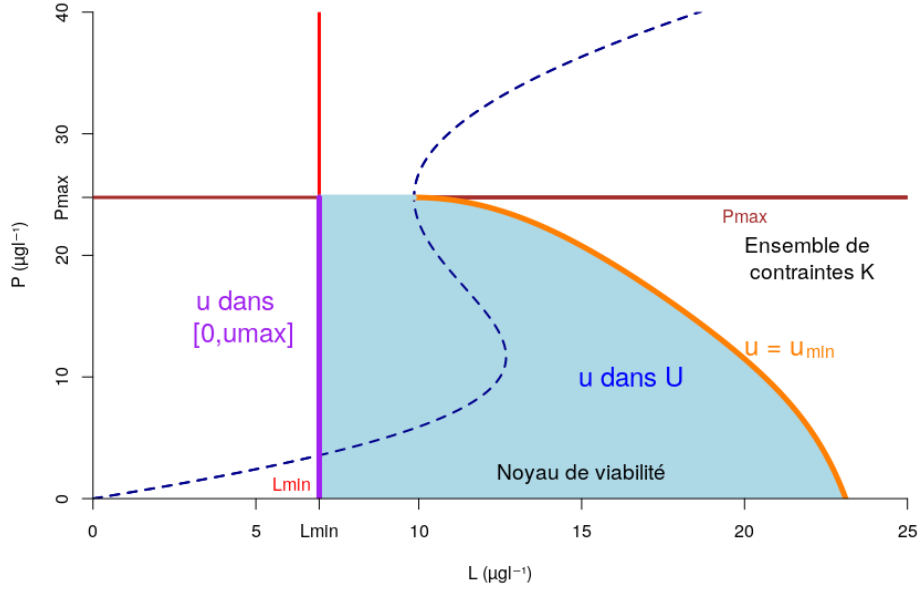


FIGURE 6 – Carte de contrôle viable pour le problème du lac et des exploitations riveraines (système 3 avec les paramètres de la figure 1 et contraintes de la figure 3a). La portion de frontière du noyau en orange comporte un seul contrôle viable, aucune marge de manœuvre n’est possible : une seule évolution permet de rester viable. Par comparaison, la frontière sur $L = L_{min}$ (en violet) admet la moitié des contrôles admissibles comme contrôles viables, et sur la frontière suivant $P = P_{max}$ comme dans l’intérieur du noyau, tous les contrôles sont viables.

temps continu, à l’intérieur du noyau, tous les contrôles admissibles sont viables, alors qu’en général ils sont réduits sur la frontière. Comme le noyau de viabilité est un fermé, il est possible de calculer les contrôles viables sur la frontière, comme le montre la figure 6, et ainsi de comprendre comment les contrôles permettent au système de rester viable.

La manière dont les contrôles viables sont réduits par rapport aux contrôles admissibles peut être vue comme un indicateur de la difficulté à contrôler le système : c’est la *flexibilité* [14], [15], qui permet de quantifier les options qui s’offrent pour évoluer de manière viable depuis un état donné. En temps discret, cet indicateur apporte davantage d’informations car la proportion de contrôles viables parmi les contrôles admissibles peut être déjà réduite à distance de la frontière du noyau de viabilité.

La théorie propose aussi le concept de bassin de capture d’une cible [16] tout en respectant des contraintes ensemblistes.

Définition 2 Le bassin de capture $\text{Capt}_{S_{(f,U)}}(K,C)$ de la cible $C \subset K$, viable dans K pour le système contrôlé $S_{(f,U)}$, est l’ensemble (éventuellement vide) des états de K à partir desquels il est possible de trouver au moins une fonction de contrôle $u(\cdot)$ telle l’évolution $x(\cdot)$ gouvernée par

$S_{(f,u)}$ atteint C en temps fini et reste dans K au moins jusqu'à cette date.

$$x \in \text{Capt}_{S_{(f,U)}}(K, C) \Leftrightarrow \exists u(\cdot), \exists T \geq 0, x(T) \in C \text{ et } \forall t \in [0; T] \begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ u(t) \in U(x(t)) \\ x(t) \in K \end{cases} \quad (5)$$

Avec les mêmes hypothèses que pour le noyau de viabilité, le bassin de capture existe et est un ensemble fermé si C et K sont fermés.

Dans les problèmes de transition, la cible peut désigner l'ensemble dans lequel on souhaite que le système évolue dans le futur. Par exemple, si on souhaite que le système évolue dans un ensemble de contraintes K dans le futur, on peut calculer le noyau de viabilité C de K pour la dynamique $S_{(f,U)}$. On peut se donner les contraintes K' , avec $C \subset K \subset K'$ que l'on souhaite vérifier pendant la transition. Le bassin de capture de C dans K' regroupe alors les états qui atteindront C en temps fini tout en vérifiant les contraintes K' le long de leur trajectoire jusqu'à la cible C , et qui pourront par la suite vérifier en tout temps les contraintes K (puisque C est le noyau de viabilité de K). La figure 4b montre la trajectoire à partir de l'état B qui permet de rejoindre le bassin de capture du noyau de viabilité du problème du lac, en vérifiant la contrainte $L \geq L_{min}$ tout au long de la trajectoire.

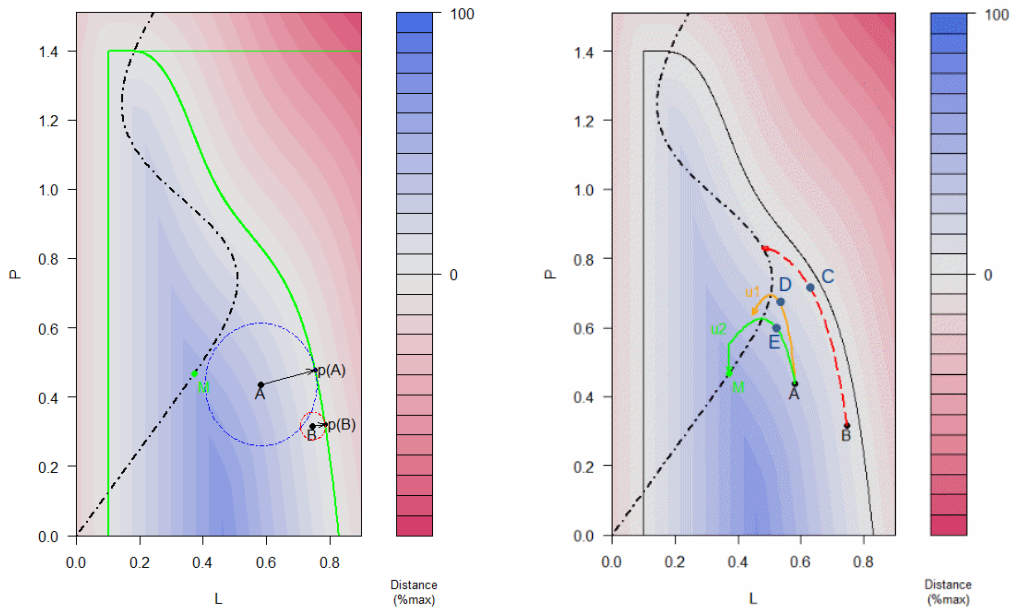
3.2 Robustesse et résilience face à des perturbations

Les incertitudes ou perturbations peuvent être prises en compte dans la dynamique et dans le calcul du noyau de viabilité (cf. section 3.3), mais tous les états du noyau ne sont pas équivalents en cas de perturbation non prise en compte dans le modèle, comme le montre la figure 7 : être proche de la frontière peut amener l'état du système hors du noyau, voire hors du bassin de capture quand les frontières des deux ensembles sont très proches, comme dans le cas du lac irréversible de la figure 5a. Dans un tel cas, on a vu qu'il faut revoir complètement la définition du problème, d'où l'intérêt de disposer d'indicateurs de robustesse et de résilience pour en tenir compte dans la sélection de contrôles viables. En effet, les stratégies de contrôles viables utilisées habituellement (de par leur facilité de mise en œuvre) conduisent souvent le système sur la frontière du noyau de viabilité [17]. Il s'agit des stratégies « lourde » et « lente ». Elles sont disponibles dans des conditions très générales, sans optimisation intertemporelle (c'est à dire sans choix de critères supplémentaires, en appliquant une règle locale en fonction de l'état). La stratégie lourde [7] consiste à ne changer de valeur du contrôle qu'en cas de nécessité, par la sélection du contrôle qui minimise la norme de la variation du contrôle $\|\frac{du}{dt}\|$: tant qu'une valeur de contrôle est viable, elle sera sélectionnée (c'est le « *business as usual* »). La stratégie lente [18] sélectionne le contrôle de norme minimale. Dans le cas où la dynamique de contrôle nul correspond à l'évolution naturelle (sans intervention), cela revient à n'exercer un contrôle qu'en cas de nécessité.

Les définitions mathématiques de la résilience [19] (par contraste avec les différentes visions et définitions qualitatives de la résilience, qui incluent les possibilités de réorganisation) ont longtemps été fondées sur les propriétés asymptotiques des systèmes dynamiques représentant le système étudié : caractéristiques des attracteurs et de leurs bassins de capture, y compris les vitesses de convergence. Les définitions qualitatives de la résilience font davantage référence aux termes de persistance, stabilité, conservation, très liés à la notion de robustesse [20].

La théorie de la viabilité permet de formaliser ces concepts quand la propriété à conserver peut être définie par un ensemble de contraintes dans l'espace d'état, pour des perturbations correspondant à des sauts dans l'espace d'état.

La robustesse aux perturbations peut être définie comme la capacité du système à conserver la propriété d'intérêt malgré une perturbation. En termes de viabilité, c'est la capacité à demeurer



(a) Distance à la frontière (en vert) du noyau de viabilité (en pourcentage du maximum à l'intérieur du noyau). Cette carte mesure la robustesse statique des états à une perturbation immédiate. Comparé à l'état A, B sort beaucoup plus facilement du noyau de viabilité en cas de perturbation de ce type.

(b) Évolutions à robustesse croissante. À partir de B la robustesse dynamique le long de l'évolution orange est constante jusqu'en C, puis augmente jusqu'à l'équilibre. La robustesse de l'évolution u1 est celle de l'état D. Le long de l'évolution u2, la robustesse dynamique des états reste constante jusqu'en E, puis augmente jusqu'au maximum possible (équilibre M).

FIGURE 7 – Robustesse aux perturbations dans le noyau de viabilité. Une perturbation est un saut unique dans l'espace d'état dans une direction quelconque à une date quelconque (combinaison d'erreur de mesure de la concentration et d'apport inattendu ou d'erreur de mesure de l'apport de phosphore dans le lac).

dans l'ensemble de contrainte K indéfiniment malgré la perturbation (c'est à dire demeurer dans le noyau de viabilité) [17]. La *robustesse dynamique* d'un état peut être définie comme la taille de la perturbation maximale (dans un ensemble admissible de perturbations) malgré laquelle le système peut respecter indéfiniment les contraintes, maintenant ou dans le futur [21]. La figure 7 montre la carte de la distance à la frontière du noyau de viabilité pour le problème du lac et des exploitations riveraines. Si les perturbations sont homogènes sur tout l'espace, la distance à la frontière donne la taille maximale d'un saut dans l'espace d'état qui laisse le système dans le noyau : c'est la robustesse *statique* des états. La robustesse d'une évolution est définie comme le minimum de la robustesse statique des états au cours du temps. La *robustesse dynamique* d'un état est le maximum de la robustesse sur toutes les évolutions possibles. A partir de cet indicateur, il est possible, dans certaines conditions, de construire des évolutions « prudentes » dont la robustesse dynamique des états augmente au cours du temps, comme le montre la figure 7b.

La résilience aux perturbations peut être définie comme la capacité du système à recouvrir la propriété d'intérêt après une perturbation qui la lui aura fait perdre temporairement. En termes de viabilité, c'est la capacité à rejoindre l'ensemble de contrainte K et à y demeurer indéfiniment (donc à rejoindre le noyau de viabilité) après avoir subi une perturbation qui lui aura fait quitter le noyau de viabilité (et donc l'ensemble de contraintes) [12]. Il ne s'agit pas de retrouver le même état qu'avant la perturbation, mais bien de retourner dans le noyau de viabilité, ce qui peut entraîner des modifications de fonctionnement (par exemple, être dans le bassin d'attraction d'un cycle et non plus d'un attracteur ponctuel). Un état est résilient à une perturbation si l'ensemble de ses images par la perturbation est dans le noyau de viabilité ou dans son bassin de capture. La figure 4 nous montre que l'état A est résilient à une perturbation qui l'emmène en B. L'inverse du temps de crise, qui est la durée passée hors de l'ensemble de contraintes, peut servir à définir des indicateurs de résilience (plus d'information dans [12], accessible en ligne).

3.3 Gestion des incertitudes : la viabilité garantie

La théorie de la viabilité propose une méthode originale pour la gestion des incertitudes qui permet une robustesse aux incertitudes sur les paramètres aussi bien que sur les modèles eux-mêmes : c'est la viabilité garantie [7], fondée sur les inclusions différentielles. Les incertitudes (appelées *tyches*) sont modélisées dans la dynamique comme des vecteurs appartenant à des ensembles. Quand la dynamique comprend des tyches, les évolutions doivent être viables pour toutes les valeurs possibles des tyches. Un système contrôlé tychastique $S_{(f,U,V)}$ est défini par une fonction de plusieurs variables $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^n$, la carte des contrôles admissibles et la carte des tyches admissibles $V : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^q$. A partir d'un état x , d'un contrôle $u \in U(x)$, et d'un tyche $v \in V(x)$, la fonction f associe à x l'état $f(x, u, v)$.

Un ensemble L a la propriété de viabilité garantie s'il existe une carte de régulation $\tilde{U} : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^p$ définie sur L telle que $\forall x \in L, \tilde{U}(x) \neq \emptyset$ et $\tilde{U}(x) \subset U(x)$, et telle que pour tous les états x_0 dans L , toutes les évolutions à partir de x_0 et gouvernée par $S_{(f,\tilde{U},V)}$ sont viables dans L : L est invariant par la dynamique $S_{(f,\tilde{U},V)}$. Un tel ensemble est appelé domaine de viabilité.

Pour les systèmes en temps continu, le plus grand des domaines de viabilité inclus dans un ensemble de contraintes fermé K n'a pas nécessairement la propriété de viabilité garantie, des conditions supplémentaires sont nécessaires [23]. Quand la carte de contrôle est lipschitzienne³ de constante $\lambda > 0$, le noyau de viabilité garantie de K associé à λ existe et est le plus grand des domaines de viabilité inclus dans K . Un théorème de fermeture du noyau de viabilité garantie existe avec des conditions plus restrictives [23] : si K est fermé, le noyau de viabilité de K associé à $\lambda > 0$ pour le système dynamique en temps continu $S_{(f,U_\lambda,V)}$ est fermé si f est lipschitzienne de constante λ et U et V sont à images compactes et lipschitziennes de constante λ . En temps discret le noyau de viabilité garantie de l'ensemble de contraintes K fermé est fermé dès lors que f et V sont continues, le graphe de U est fermé, U est à croissance linéaire. (Voir [24] pour davantage de détail).

La figure 8 montre le noyau garanti dans le problème du lac quand les paramètres prennent leur valeur dans un intervalle et un modèle alternatif au modèle 1 est considéré simultanément.

L'intérêt de la gestion ensembliste des incertitudes est d'une part de s'abstraire du cadre probabiliste pour la gestion du risque (on se protège contre le pire des cas même s'il n'est pas connu, pour un ensemble de perturbations admissibles) ; d'autre part, cela permet de modéliser des problèmes de viabilité individuelle et collective mettant en jeu un grand nombre d'acteurs, les actions des autres étant pour chacun perçues comme des perturbations [25].

3. Une correspondance $G : A \rightsquigarrow B$ (A et B espaces vectoriels de dimension finie) est lipschitzienne de constante $\lambda > 0$ si pour tout x_1, x_2 dans A , $G(x_1) \subset G(x_2) + \lambda \|x_1 - x_2\| B$ (où B est la boule unité)

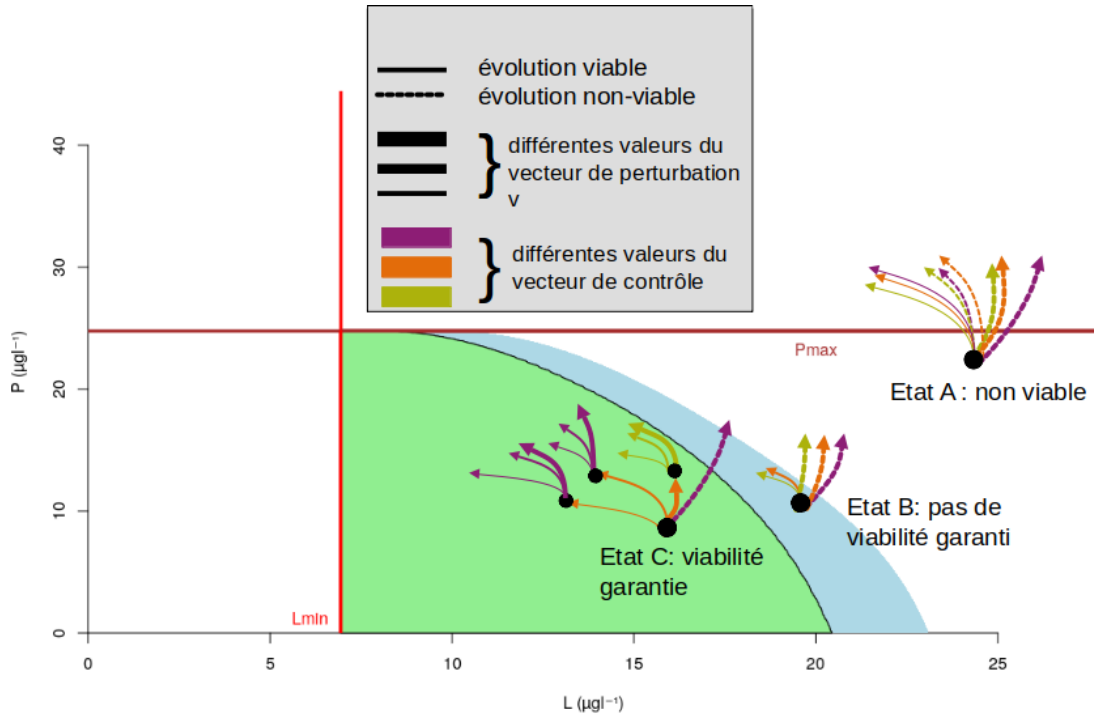


FIGURE 8 – Noyau de viabilité garantie pour le problème du lac, avec un modèle alternatif pour la pseudo-sigmoïde dans l'équation 1 : $r \frac{P(t)}{P(t) + m e^{(-\lambda(P(t) - m))}}$. Les paramètres sont des *tyches* à valeur dans des intervalles. Un *tyche* à valeur dans $[0; 1]$ représente l'incertitude sur la formule de la pseudo-sigmoïde (voir [22] pour plus de détails). En vert le noyau garanti, en bleu le noyau de la figure 6. L'état C est dans le noyau garanti : il existe des contrôles qui maintiennent une évolution issue de C dans cet ensemble pour toutes les perturbations admissibles. Le noyau de viabilité en bleu n'a pas cette propriété : aucune valeur de contrôle en B ne maintient l'évolution dans l'ensemble pour la perturbation « moyenne ». L'état A n'est pas dans le noyau de viabilité, il n'y a pas de contrôles qui puisse maintenir une évolution issue de A dans l'ensemble de contraintes

Il est aussi possible de définir des noyaux de viabilité stochastique, en particulier pour les systèmes à temps discret, par exemple en fonction de la proportion de réalisations qui restent dans l'ensemble de contraintes, ou pour des niveaux de confiance donnés [26], [27].

Par ailleurs, il faut noter que les méthodes récentes d'analyse de sensibilité [28] qui s'intéressent aux ensembles-résultats s'appliquent aux noyaux de viabilité.

4 Ce que nous apporte la théorie de la viabilité

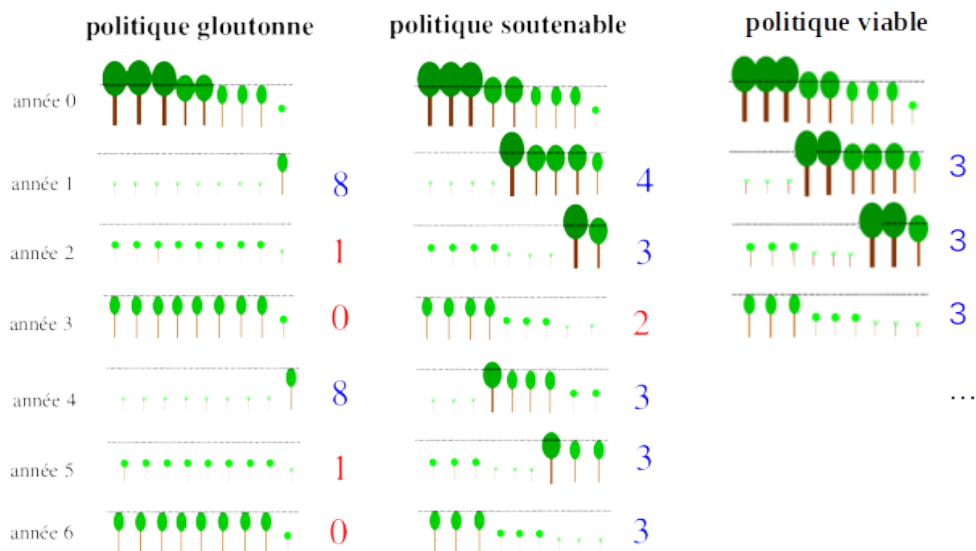
Outre les apports mathématiques pour le contrôle optimal en temps continu, et dans le cas des inclusions différentielles, la théorie mathématique de la viabilité apporte un cadre formel pour étudier la compatibilité entre un système dynamique et des contraintes dans l'espace d'état, avant de se poser des questions d'optimisation dans le choix d'une trajectoire. L'optimisation dans le noyau de viabilité assure le respect absolu des contraintes. En cas d'échec (noyau vide), une redéfinition explicite du problème est nécessaire. C'est la raison pour laquelle cette théorie

est largement utilisée pour la modélisation dans le domaine de l'environnement, en particulier dans les problèmes de gestion de ressources renouvelables [29].

4.1 Le respect des contraintes avant l'optimisation

La recherche de trajectoires optimales au regard d'un objectif, dans le noyau de viabilité, garantit que les contraintes seront respectées en tout temps, quels que soient les critères pris en compte pour l'optimisation, puisque la sélection des contrôles se fera parmi les contrôles viables. Cela implique que la trajectoire retenue peut être moins performante que la trajectoire optimale qui aurait été obtenue en l'absence de contraintes, puisque l'ensemble des états qui peuvent être atteints est plus petit. Mais cette approche comporte la garantie que les contraintes seront respectées en tout temps.

L'exemple suivant, tiré de [30] illustre la différence entre l'approche économique classique par optimisation et l'approche proposée par la théorie de la viabilité. La figure 9 montre des évolutions à partir d'un même état initial, suivant des stratégies différentes. On considère un modèle à temps discret d'exploitation forestière, très stylisée : la forêt a une surface S (de parcelles homogènes), les coupes et les plantations se font par parcelles entières, la croissance est homogène par parcelle,



(a) Stratégies particulières pour le problème de gestion forestière défini par l'équation 6. La stratégie gloutonne consiste à couper à chaque pas de temps tout ce qui peut l'être. La stratégie « soutenable » consiste à tendre vers l'état stationnaire correspondant à une répartition des surfaces équilibrée en âge, ici $(0, 3, 3, 3)$. Les deux trajectoires sont optimales. En rouge les valeurs qui ne respectent pas la contrainte de gain minimal.

(b) Stratégie de contrôle viable pour la carte de contrôle admissible $U(x) = [\underline{u} = 3; (Ax)_1]$. x_0 est sur la frontière du noyau de viabilité, on ne peut pas avoir $u(t) > \underline{u}$.

FIGURE 9 – Stratégies de contrôle pour le problème de gestion forestière défini par l'équation 6, pour $n = 4$ et $S = 9$, pour le même état initial $x_0 = (5, 3, 1, 0)$. Dans le cas particulier présenté, la stratégie viable est elle aussi optimale.

la régénération se fait en n pas de temps, on ne coupe que les arbres d'âge plus grand ou égal à n , la plantation est instantanée et on ne considère pas de mortalité naturelle ni d'aléas. Dans ce modèle très simplifié, l'état de la forêt est décrit par le vecteur d'âge $x = (x_i)_{i \in [1, n]}$, où x_1 est la surface d'âge supérieur à n , x_2 la surface d'âge compris entre $n - 1$ et n et plus généralement x_i la surface (ou le nombre de parcelles) d'âge compris dans $[n - i + 1, n - i + 2]$. La coupe est décrite par le vecteur $u(t) \in [0, S]$, surface (ou nombre de parcelles) coupée au temps t . L'évolution de l'état de la forêt est modélisée par une fonction f qui associe l'état x et le contrôle u au temps t pour donner l'état au temps $t + 1$: $x(t + 1) = f(x(t), u(t))$ par l'équation 6 :

$$x(t + 1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u(t) \quad (6)$$

avec $u(t) \in [0, (Ax)_1]$ (car on ne coupe que les arbres d'âge supérieur ou égal à n). Les états admissibles sont les vecteurs de \mathbb{R}^n dont la somme est égale à S . On note $M(S, n)$ cet ensemble.

Le critère économique dans cet exemple est fondé sur la surface coupée u à chaque pas de temps. L'approche d'optimisation directe consiste à rechercher les stratégies de contrôle $u(\cdot)$ qui maximisent un critère intertemporel pour la situation initiale x_0 : par exemple, pour ce problème en temps infini, $J(x_0, u(\cdot)) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_0^T \delta^t U(u(t))$ où U est une fonction d'utilité et $\delta \in]0, 1[$ un facteur d'actualisation (qui traduit le degré de préférence pour le présent). La résolution passe classiquement par la définition de la fonction valeur pour tous les vecteurs x de $M(S, n)$: $V(x) = \max_{u(\cdot)} J(x, u(\cdot))$. C'est un problème de programmation dynamique, la fonction valeur est solution de l'équation de Bellman : $V(x) = \max_{u \in [0, (Ax)_1]} U(u) + \delta V(Ax + Bu)$.

Dans l'exemple de l'exploitation forestière, il existe plusieurs types de stratégies particulières considérées habituellement, illustrées par la figure 9a. La politique gloutonne consiste à couper à chaque pas de temps tout ce qui peut l'être : $u^g(t) = (Ax(t))_1$. Elle amène généralement le système vers un cycle. Cette politique est optimale pour de nombreuses classes de fonction d'utilité sur de grandes plages de valeurs du facteur d'actualisation. La politique dite « soutenable » consiste à identifier l'état stationnaire équilibré en âge le plus proche de la situation initiale et à tendre vers cet état. Dans l'exemple de la figure 9a, on montre une politique « soutenable » qui est elle aussi optimale.

L'approche de la viabilité est différente. Elle considère le même ensemble d'états admissibles $M(S, n)$ et la même dynamique définie par l'équation 6. En revanche on considère un gain minimal \underline{u} que l'on souhaite assurer à chaque unité de temps. Étant donné le modèle, cela se traduit par une limitation des contrôles admissibles qui doivent se trouver dans $[\underline{u}, (Ax)_1]$. À partir d'une situation initiale x_0 , il sera possible d'assurer au moins le gain minimal \underline{u} à chaque pas de temps si et seulement si x_0 est dans le noyau de viabilité de $M(S, n)$ pour la dynamique d'équation 6 et les contrôles dans $[\underline{u}, (Ax)_1]$. Si x_0 est dans le noyau de viabilité, il est alors possible de rechercher dans le noyau une évolution qui maximisera le gain intertemporel : une telle trajectoire sera assurée de respecter la contrainte de gain minimal à chaque pas de temps. La figure 9b montre la trajectoire viable associée au même état initial que pour la politique gloutonne. Si x_0 n'est pas dans le noyau de viabilité correspondant à \underline{u} , il n'y a aucun moyen d'assurer ce gain minimal en tout temps.

Les évolutions dans le noyau de viabilité permettent de garantir la contrainte de gain minimal

à chaque pas de temps. L'utilisation de la stratégie gloutonne (sélectionner le contrôle maximal viable) ou « soutenable », dans le noyau de viabilité, garantit le respect des contraintes. De ce point de vue, ces stratégies correspondent à la définition du rapport Bruntland, car elles assurent le respect de la contrainte maintenant et dans le futur. Cela signifie aussi qu'elles peuvent être sous-optimales par rapport aux stratégies utilisées directement. Mais ces dernières ne garantissent pas de gain minimal comme on le voit sur la figure 9a. Le cycle glouton n'est pas dans le noyau de viabilité, et pendant la phase transitoire, les trajectoires « soutenables » peuvent ne pas être dans le noyau.

4.2 Viabilité individuelle et collective : incertitude et engagement

Dans l'exemple du lac et des exploitations riveraines développé section 2.2, on peut remarquer que les efforts sur les apports (équation 2) sont agrégés : tous les moyens d'actions possibles ont été condensés dans une seule variable de contrôle qui prend sa valeur entre deux bornes. Cela suppose que les mécanismes des différentes actions sont connus, ce qui a permis leur agrégation pour simplifier le modèle, et qu'à partir d'une valeur de contrôle donnée u , on sait reconstituer une ou plusieurs combinaisons d'actions dont la mise en œuvre simultanée donnera l'effet combiné de u . Ce raccourci pour la modélisation peut avoir des effets pervers. Par exemple, si l'utilisation d'une unité de dépollution, opérée par la collectivité locale, est systématiquement préférée (parce que plus simple à mettre en œuvre), cela peut amener les exploitations agricoles à augmenter leurs apports, ce qui n'est pas l'effet recherché. Même en l'absence d'effet pervers de ce type (par exemple, en cas de décideur unique), la résolution du problème de viabilité à un niveau global, quand de nombreux acteurs sont concernés, pose la question du partage de l'effort. Si plusieurs exploitations sont concernées par la mise en œuvre d'un contrôle viable u , par exemple en modifiant leurs intrants, ou en opérant des zones humides tampon (ce qui demande de la planification, des interventions), comment u est-il partagé entre les différents acteurs ?

Quand le nombre d'acteurs est faible, ce problème peut se traiter en considérant le problème de viabilité de toutes les parties en présence, comme dans [31] pour assurer la viabilité conjointe de deux pêcheries qui prélèvent le même stock : le noyau de viabilité conjoint fournit le contrôle (la variation de l'effort de pêche) que chaque acteur doit exercer en fonction de l'état de la ressource, ce qui permet à la ressource et à chaque pêcherie de rester viable. Généraliser ce type d'approche au problème du lac et des exploitations riveraines demanderait un modèle pour chaque acteur contribuant aux apports de phosphore dans le lac, comme dans la figure 10.

On peut considérer un modèle simplifié de l'exploitation de chaque acteur $i \in \mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$, qui est décrite par une variable d'état x_i dans \mathbb{R}^{n_i} , la carte de contrôle $U_i : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^{p_i}$, et dont l'évolution est gouvernée par la dynamique :

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = f_i((L(t), P(t)), x_i(t), u_i(t)) \\ u_i(t) \in U_i(x(t)) \end{cases} \quad (7)$$

Chaque acteur définit son ensemble de contraintes de viabilité K_i , et le problème de viabilité globale du lac et des exploitations riveraines rassemble le système 3 et les dynamiques et contraintes des acteurs :

$$(S_G) \begin{cases} \frac{dL}{dt} = \sum_{i \in \mathcal{N}} u_i \\ \frac{dP}{dt} = -bP(t) + L(t) + r \frac{P(t)^q}{m^q + P(t)^q} \\ \frac{dx_i}{dt} = f_i((L(t), P(t)), x_i(t), u_i(t)) \text{ pour tout } i \in \mathcal{N} \\ (L(t), P(t)) \in K = [Lmin, +\infty[\times]0, Pmax] \\ \forall i \in \mathcal{N}, x_i \in K_i \\ \forall i \in \mathcal{N}, u_i \in U_i \end{cases} \quad (8)$$

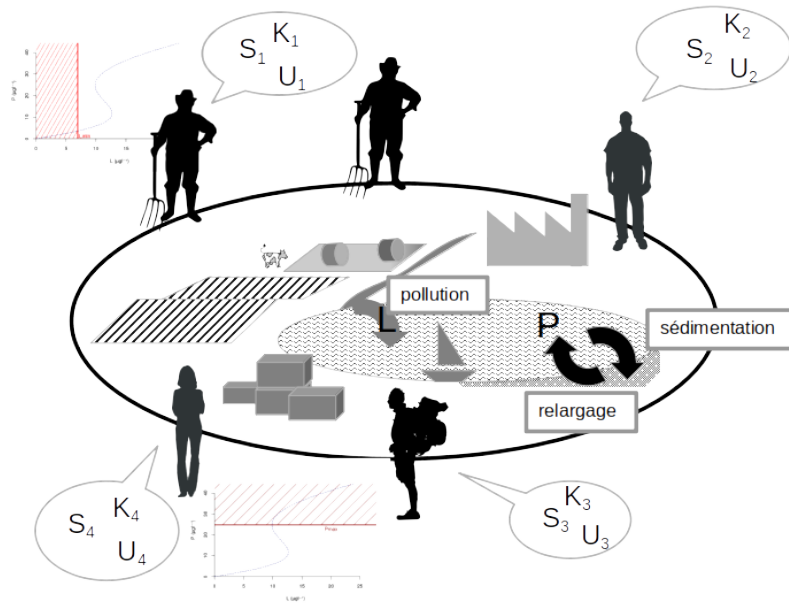


FIGURE 10 – Viabilité individuelle et collective : l’activité de plusieurs acteurs a un impact sur leur environnement commun. Assurer la viabilité de chacun et de l’environnement commun ne peut pas se faire en considérant uniquement le problème de viabilité au niveau global.

Le noyau de viabilité de $K \times \prod_{i \in \mathcal{N}} K_i$ pour le système (S_G) , s’il est non vide, permet en théorie au lac de rester oligotrophe et à chaque exploitant d’être viable. À chaque état $((L, P), x_1, \dots, x_N)$ du noyau, un contrôle viable (u_1, \dots, u_N) doit être sélectionné. Il faut bien noter que les exploitants doivent impérativement se coordonner pour que chacun applique le contrôle u_i qui lui est attribué.

Ce type de fonctionnement n’est pas impossible à réaliser dans le monde réel ; Elinor Ostrom en donne des exemples dans son ouvrage sur la gouvernance des biens communs [32] : moyennant un ensemble de règles et de moyens de surveillance, on observe des cas où un collectif s’organise avec succès pour exploiter une même ressource.

En revanche, en tant que problème de viabilité, la dimension de l’espace d’état du problème est $2 + \sum_1^N n_i$, ce qui dépasse rapidement les capacités de calcul pour l’algorithme d’approximation qui est soumis à la malédiction de la dimension, sauf pour certains types de problèmes. C’est la raison pour laquelle la viabilité est souvent utilisée à un niveau agrégé. Dans ce cas, le contrôle est déterminé au niveau global et un mécanisme doit être proposé pour assurer le partage (par exemple un mécanisme de marché, comme dans [33]), avec les problèmes de justice et d’équité qui se posent dans ce cas. On rencontre le même type de difficulté en cas de noyau vide pour explorer l’espace de problèmes.

La gestion ensembliste des incertitudes permet de proposer une méthode de résolution qui conserve la dualité individuelle et collective (voir [25] pour davantage de détails). Au lieu de chercher à résoudre le grand système conjoint comme S_G (système 8), on considère N problèmes de viabilité individuelle couplés par les variables du niveau collectif. Chaque individu considère les variables et les actions des autres comme des perturbations de son propre système. Chaque individu choisit ses actions en fonction de son état et des variables de l’environnement, sans se synchroniser avec les autres. Cela revient à écrire N systèmes S_i pour $i \in \mathcal{N}$, en notant $x \in \mathbb{R}^n$

la variable globale qui représente l'environnement et qui lie les différents individus ($x = (L, P)$) dans l'exemple du lac) :

$$(S_i) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t), v_i(t) = (x_j(t))_{j \in \mathcal{N}}, (u_j(t))_{j \in \mathcal{N}}) \\ \frac{dx_i}{dt} = f_i(x(t), x_i(t), u_i(t)) \\ (x, x_i) \in K \times K_i \\ u_i \in U_i(x, x_i) \\ v_i(t) = ((x_j(t))_{j \neq i}, (u_j(t))_{j \neq i}) \in V_i(x(t)), \text{ avec } x_j \in K_j \text{ et } u_j \in U_j(x, x_j) \end{cases} \quad (9)$$

Les ensembles $V_i(x)$ représentent les *tyches* auxquels est confronté l'individu i . Dans le cas du lac, seules les actions des autres interviennent dans la dynamique de (L, P) , donc $v_i = (u_j)_{j \in \mathcal{N} \setminus i}$. Les différents individus partagent avec les autres ce qu'ils peuvent faire (la carte U_i) mais pas les valeurs des contrôles qu'ils mettent en œuvre. Avec ces informations, chacun résout son problème de viabilité garantie S_i (9) dans $K \times K_i$, dont la dimension est $n + n_i$, au lieu de $n + \sum_{i \in \mathcal{N}} n_i$ pour le système global complet. Si un état (x, x_i) est dans le noyau garanti de l'individu i , noté $G_i(K \times K_i)$, cela veut dire que quels que soient les actions des autres, l'individu i (donc l'environnement) peut rester viable. Si tous les noyaux garantis individuels $G_i(K \times K_i)$ sont non vides, alors l'ensemble de tous les états $x \in K$ de l'environnement qui apparaissent dans tous les noyaux de viabilité garantis G_i pour tout $i \in \mathcal{N}$ permet de définir un domaine viable D pour le « grand » problème S_G (8) de viabilité conjointe, sans demander de synchronisation entre les acteurs :

$$D := \bigcup_{x \in K} (\{x\} \times (\prod_{i=1}^N (G_i(K \times K_i) \cap (\{x\} \times \mathbb{R}^{n_i}))|_{\mathbb{R}^{n_i}})) \quad (10)$$

Ce domaine est nécessairement inclus dans le noyau de viabilité du problème global conjoint S_G (puisqu'il ne demande pas de synchronisation entre acteurs). Comme il impose cette contrainte supplémentaire, il peut être plus facilement vide. Mais il est possible d'explorer l'espace des problèmes possibles pour rechercher un domaine non-vide en utilisant un mécanisme d'engagement. Si un individu i prend un *engagement* sur les efforts qu'il est prêt à faire dans certaines circonstances, (c'est à dire en utilisant une carte de contrôle telle que $\exists (x, x_i) \in K \times K_i, \hat{U}_i(x, x_i) \subsetneq U_i(x, x_i)$), il diminue sa flexibilité. Mais l'incertitude des autres (les *tyches* de leur $V_j, j \neq i$) sera réduite. Si tous les acteurs prennent des engagements, la flexibilité de chacun est réduite ainsi que leur incertitude (les *tyches*), ce qui ouvre davantage de possibilités pour que le domaine viable non synchronisé D (équation 10) soit non-vide.

Conclusion

La théorie de la viabilité propose un cadre pour étudier des problèmes de gestion durable, de transition, d'optimisation sous contrainte dynamique. Par sa définition, le noyau de viabilité permet la recherche de solutions durables au sens du rapport Bruntland. Le fait que la théorie de la viabilité s'intéresse à la compatibilité entre la dynamique et les contraintes en tout temps ne signifie pas que la solution d'un problème de viabilité est nécessairement figée. Un problème peut être révisé à tout moment, en cas de modification des contraintes, de la dynamique ou des moyens d'action. Si de nouveaux moyens d'action sont disponibles, le noyau de viabilité peut être plus grand et peut permettre d'atteindre des états qui jusqu'alors étaient interdits. Mais la résolution en temps infini permet d'assurer que si ces nouveaux moyens sont disponibles à un moment donné dans le futur, le système sera toujours dans le noyau de viabilité à ce moment-là, sans faire de pari sur la date de disponibilité.

La théorie de la viabilité propose une vision de l'optimisation dans laquelle les contraintes de viabilité sont respectées dynamiquement : il n'y a pas de substitution entre les différentes

contraintes de viabilité. Avec les mécanismes de gestion ensembliste des incertitudes, cela ouvre un champ de recherche pour la résolution de problèmes de gestion de ressources par de multiples acteurs auxquels notre époque est particulièrement confrontée. D'une manière plus générale, la théorie de la viabilité invite à penser différemment : s'interroger sur les contraintes à respecter, les moyens qu'on s'autorise, plutôt que de rechercher immédiatement la trajectoire qui maximise un critère ; réfléchir aux engagements qu'on peut prendre sur ses actions pour qu'une ressource commune et d'autres acteurs restent viables, sans se mettre soi-même en danger. La viabilité s'intéresse à un ensemble de « possibles » à partir duquel on peut se poser de nouvelles questions.

La limite principale à l'application de la théorie de la viabilité reste la malédiction de la dimension à laquelle sont soumis les algorithmes d'approximation du noyau. Mais les succès de l'apprentissage profond peuvent inciter à des résolutions différentes qui pourront peut-être permettre de contourner cette barrière dans un avenir proche.

Remerciements et remarques

Je remercie l'AEIS pour son invitation, qui m'a donné l'occasion de présenter la théorie de la viabilité à un public scientifique non-spécialiste.

Je remercie Guillaume Benailly, du service d'archéologie de l'ONF, pour les documents qu'il m'a fait parvenir en lien avec les tranchées de la forêt de Sénart pendant la Grande Guerre. Je remercie Alain Rapaport d'INRAE, pour sa présentation de l'exploitation forestière, ainsi qu'Olivier Dabas pour la relecture.

Beaucoup des articles cités dans ce chapitre sont librement disponibles sur les plates-formes HAL ou arxiv.

Références

- [1] G. Brundtland, Our Common Future [The Brundtland Report], Oxford University Press, Oxford, 1987.
URL https://fr.wikisource.org/wiki/fr:Notre_avenir_%C3%A0_tous_-_Rapport_Brundtland
- [2] D. H. Meadows, D. L. Meadows, J. Randers, W. Behrens, The limits to growth, Club de Rome, 1972.
URL <https://www.library.dartmouth.edu/digital/digital-collections/limits-growth>
- [3] C. Plin l'ancien, Histoire naturelle, in site de Philippe Remacle, 77.
URL <https://remacle.org/bloodwolf/erudits/plineancien/livre33.htm>
- [4] Ordonnance de brunoy sur wikipedia.
URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Ordonnance_de_Brunoy
- [5] L. Chancerel, Exploitations forestières militaires de la région de Sénart. Rapport d'inspection. (1915).
- [6] Service archéologique de l'ONF, Sénart, forêt retranchée. Guide de l'exposition à la Faisanderie de Sénart, ONF, 2008.
- [7] J.-P. Aubin, Viability Theory, Birkhäuser, Basel, 1991.
- [8] P. Saint-Pierre, Approximation of the viability kernel, Applied Mathematics and Optimization 29 (2) (1994) 187–209.

- [9] Vollenweider, coord. Eutrophisation des eaux. Méthodes de surveillance et d'évaluation de lutte, Tech. rep., OCDE (1982).
- [10] S. R. Carpenter, D. Ludwig, W. A. Brock, Management of eutrophication for lakes subject to potentially irreversible change, *Ecological Applications* 9 (1999) 751–771.
- [11] W. Liu, S. Wang, L. Zhang, Z. Ni, Water pollution characteristics of Dianchi Lake and the course of protection and pollution management, *Environmental Earth Sciences* 74 (5) (2015) 3767–3780. doi:10.1007/s12665-015-4152-x.
- [12] S. Martin, The cost of restoration as a way of defining resilience: a viability approach applied to a model of lake eutrophication, *Ecology and Society* 2 (9) (2004) 8.
URL <http://www.ecologyandsociety.org/vol9/iss2/art8>
- [13] A. Brias, J.-D. Mathias, G. Deffuant, Inter-annual rainfall variability may foster lake regime shifts : An example from Lake Bourget in France, *Ecological Modelling* 389 (2018) 11–18. doi:10.1016/j.ecolmodel.2018.10.004.
- [14] R. Sabatier, L. Oates, R. Jackson, Management flexibility of a grassland agroecosystem: A modeling approach based on viability theory, *Agricultural Systems* 139 (2015) 76–81. doi:10.1016/j.agry.2015.06.008.
URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0308521X15300032>
- [15] J.-D. Mathias, B. Bonté, T. Cordonnier, F. de Morogues, Using the Viability Theory to Assess the Flexibility of Forest Managers Under Ecological Intensification, *Environmental Management* 56 (5) (2015) 1170–1183. doi:10.1007/s00267-015-0555-4.
- [16] J. Aubin, A. Bayen, P. Saint-Pierre, *Viability Theory : New Directions*, Springer, 2011.
- [17] I. Alvarez, S. Martin, Geometric robustness of viability kernels and resilience basins, in : G. Deffuant, N. Gilbert (Eds.), *Viability and Resilience of Complex Systems, Understanding complex systems*, Springer, 2011, pp. 193–218. doi:<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-20423-4>.
- [18] M. Falcone, P. Saint-Pierre, Slow and quasi-slow solutions of differential inclusions, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications* 11 (3) (1987) 367–377. doi:[https://doi.org/10.1016/0362-546X\(87\)90052-6](https://doi.org/10.1016/0362-546X(87)90052-6).
- [19] S. Martin, G. Deffuant, J. Calabrese, Defining resilience mathematically : from attractors to viability, in : G. Deffuant, N. Gilbert (Eds.), *Viability and Resilience of Complex Systems, Understanding complex systems*, Springer, 2011, pp. 15–36.
- [20] J. Anderies, C. Folke, B. Walker, E. Ostrom, Aligning Key Concepts for Global Change Policy: Robustness, Resilience, and Sustainability, *Ecology and Society* 18 (2). doi:10.5751/ES-05178-180208.
URL <https://www.ecologyandsociety.org/vol18/iss2/art8/>
- [21] S. Martin, I. Alvarez, Anticipating shocks in the state space: Characterizing robustness and building increasingly robust evolutions, *SIAM Journal on Control and Optimization* 57 (1) (2019) 490–509. arXiv:<https://doi.org/10.1137/16M1061175>, doi:10.1137/16M1061175.
URL <https://doi.org/10.1137/16M1061175>
- [22] I. Alvarez, L. Zaleski, J.-P. Briot, M. de A. Irving, Collective management of environmental commons with multiple usages: A guaranteed viability approach, *Ecological Modelling* 475 (2023) 110186. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2022.110186>.
URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304380022002848>
- [23] L. Doyen, Lipschitz Kernel of a Closed Set-Valued Map, *Set-Valued Analysis* 8 (1) (2000) 101–109. doi:10.1023/A:1008722524668.

- [24] F. Lavallée, Thèse, Ph.D. thesis, Sorbonne Université, Modélisation, exploration de modèles, théorie de la viabilité pour l'aide à la gestion des espèces végétales invasives : application au cas des renouées asiatiques le long d'un cours d'eau. (2020).
URL https://theses.hal.science/tel-03836187v1/file/manuscrit_th%C3%A8se_Lavall%C3%A9e.pdf
- [25] S. Martin, I. Alvarez, Solving viability problems in dynamic games using individual strategies derived from guaranteed viability kernels : application to an agricultural cooperative model, *Automatica*. To appear.
- [26] L. Doyen, De Lara, Michel, Stochastic viability and dynamic programming, *Systems and Control Letters* 59 (10) (2010) 629–634, arXiv : 1002.1140.
- [27] J.-C. Alais, P. Carpentier, M. De Lara, Multi-usage hydropower single dam management : chance-constrained optimization and stochastic viability, *Energy Systems* 8 (1) (2017) 7–30. doi:10.1007/s12667-015-0174-4.
- [28] N. Fellmann, C. Blanchet-Scalliet, C. Helbert, A. Spagnol, D. Sinoquet, Kernel-based sensitivity analysis for (excursion) sets, *Technometrics* (2024) 1–13doi:10.1080/00401706.2024.2336537.
- [29] A. Oubraham, G. Zaccour, A Survey of Applications of Viability Theory to the Sustainable Exploitation of Renewable Resources, *Ecological Economics* 145 (2018) 346–367. doi:10.1016/j.ecolecon.2017.11.008.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921800917301386>
- [30] A. Rapaport, J. Terreaux, L. Doyen, Viability analysis for the sustainable management of renewable resources, *Mathematical and Computer Modelling* 43 (5-6) (2006) 466–484. doi:10.1016/j.mcm.2005.12.014.
URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0895717705005455>
- [31] C. Sanogo, S. Ben Miled, N. Raissi, Viability Analysis of Multi-fishery, *Acta Biotheoretica* 60 (1) (2012) 189–207. doi:10.1007/s10441-012-9153-5.
URL <https://doi.org/10.1007/s10441-012-9153-5>
- [32] E. Ostrom, *Gouvernance des biens communs* (traduction française de l'original de 1990), Deboeck supérieur, 2010.
- [33] J. C. Péreau, L. Doyen, L. R. Little, O. Thébaud, The triple bottom line : Meeting ecological, economic and social goals with individual transferable quotas, *Journal of Environmental Economics and Management* 63 (3) (2012) 419–434. doi:10.1016/j.jeem.2012.01.001.