



HAL
open science

ARTICULATION ENTRE HISTOIRE ET DIDACTIQUE : LE CAS DE L'ENSEIGNEMENT DE LA MESURE EN CM2

Charlotte de Varent

► **To cite this version:**

Charlotte de Varent. ARTICULATION ENTRE HISTOIRE ET DIDACTIQUE : LE CAS DE L'ENSEIGNEMENT DE LA MESURE EN CM2. 2024. hal-04711587

HAL Id: hal-04711587

<https://hal.science/hal-04711587v1>

Preprint submitted on 8 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ARTICULATION ENTRE HISTOIRE ET DIDACTIQUE : LE CAS DE L'ENSEIGNEMENT DE LA MESURE EN CM2

Charlotte DE VARENT

(CREAD, SPHERE)

charlotte.devarent@gmail.com

Résumé

Cette recherche porte sur l'analyse des effets, en termes d'observation de manuels scolaires, du croisement d'études épistémologiques et didactiques, ainsi que plus généralement sur la perception de l'enseignement de la mesure. Une analyse épistémologique, du contexte et des programmes ainsi qu'une synthèse de travaux en didactique concernant le savoir mathématique à transposer sont articulés pour élaborer une grille d'analyse des manuels concernant l'introduction de l'unité de mesure d'aire. Nous identifions des effets de cette articulation sur la sélection des articles de didactique, sur le choix d'observer la transition entre les cadres géométrique, numérique et algébrique (dans le contexte de l'introduction des formules en CM2), ainsi que plus généralement sur le regard porté sur l'enseignement de la mesure entre les cadres.

Mots clés

histoire des mathématiques, aire, unités de mesure, grandeurs, algèbre, transitions entre géométrie et algèbre, manuels scolaires

I. INTRODUCTION

L'utilisation de textes historiques mathématiques pour l'analyse didactique a déjà été décrite à plusieurs reprises. De Hosson et Schneeberger (2011, p. 11) ainsi que Dorier (2000, p. 29) font état des différents types d'utilisation de l'histoire en recherche et proposent des allers-retours entre textes historiques et travaux de didactique, dans le cadre d'études préalables à des expérimentations en classe. Pendant des milliers d'années, de nombreux systèmes non métriques de mesure ont donné lieu à des pratiques mathématiques riches, avec des implications sur les façons de conceptualiser les nombres, la multiplication ou encore de mobiliser le cadre géométrique. Nous analysons ici premièrement l'effet du croisement d'une analyse épistémologique (de Varent, 2018) avec l'analyse du contexte et des programmes sur la façon de sélectionner des travaux de recherche en didactique (concernant le savoir à transposer sur le sujet de l'unité de mesure d'aire et l'introduction des formules de calcul de l'aire du rectangle en CM2). Deuxièmement, nous rapportons les dimensions choisies, issues du croisement entre l'analyse épistémologique, les programmes, et les travaux de didactique, sur une analyse de manuels de CM2. Ce croisement permettrait-il de trouver un angle original d'étude des manuels, et serait-il possible de le déterminer sans faire ce détour par l'histoire ?

Troisièmement, nous évaluons si le bilan des allers-retours entre textes anciens et didactique, associés à l'analyse de manuels scolaires, permet de soulever des questions plus générales pour la didactique et l'enseignement de la mesure.

Après avoir présenté les cadres théorique et méthodologique, nous décrivons les dimensions retenues de l'analyse épistémologique à travers une liste de points à étudier. Nous analysons les travaux en didactique que cette liste permet de regrouper. Nous décrivons ensuite les dimensions que nous avons retenues (après avoir croisé les analyses épistémologiques et didactiques). Nous questionnons la possibilité de déterminer ces dimensions sans faire un détour par l'histoire des mathématiques.

Nous présentons enfin les résultats de l'étude de manuels et nous concluons sur les questions soulevées par ces résultats concernant l'enseignement de la mesure en général.

II. METHODOLOGIE ET CONTEXTE

1. Méthodologie de croisement des analyses épistémologiques et didactiques

Nous croisons une étude historique à visée épistémologique (sur le thème de l'unité de mesure d'aire et du calcul de l'aire du rectangle ; de Varent, 2018) avec une présentation des séances précédentes dans les manuels et des programmes, ainsi qu'une synthèse de travaux en didactique concernant le savoir à transposer pour analyser des manuels scolaires. La thèse de l'auteur de Varent (2018) rassemble les détails de cette analyse (pp. 230–231). Nous adoptons une méthodologie d'allers-retours réguliers entre textes historiques, travaux didactiques et manuels scolaires explicitée par de Hosson et Schneeberger (2011, p. 11) et Dorier (2000, p. 29). Nous nous situons plus largement dans le cadre de l'ingénierie didactique (Artigue, 1989)¹. En effet, ces travaux ont servi d'analyse préalable à une étude de manuels et une expérimentation en classe² que nous ne rapportons pas ici.

Ces allers-retours ont débuté sous l'angle des travaux de Roditi (2005), qui considère le calcul d'aire comme une situation multiplicative. Cette perspective a permis une première sélection de textes historiques anciens sur des thèmes variés, comme la règle de trois, la multiplication ou la division, les calculs d'aires et de volumes. Les textes anciens portant sur des situations multiplicatives ont ainsi mené à s'interroger sur les effets du système d'unités de mesure (non-métrique) adopté, sur la perception des concepts mathématiques (multiplication, nombre, aire, surface, unité de mesure...).

Ceci est conforme à l'approche historique du projet ERC « SAW³ » dans lequel nous nous inscrivons en histoire, qui consiste à ne pas substituer une approche moderne de ces concepts mathématiques aux textes anciens, afin d'en comprendre, au contraire, les subtilités en contexte. Les historiens du projet SAW nous ont, par ailleurs, amenés à adopter une approche algorithmique de ces situations. Réciproquement, les travaux de didactique nous ont permis de mobiliser des catégories pour penser les objets dans l'analyse épistémologique.

¹ Elle propose quatre phases : les analyses préalables, la conception et l'analyse *a priori* des situations, l'expérimentation, l'analyse *a posteriori* et la validation.

² Les analyses préalables comprennent l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement ; l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets, l'analyse des conceptions des élèves, les difficultés et les obstacles ; l'analyse du champ des contraintes dans lequel se situe la réalisation didactique en prenant en compte les objectifs spécifiques de la recherche.

³ <https://sawerc.hypotheses.org/>

Les travaux de Duval permettent de comprendre les résultats de ces croisements. Pour lui, il est nécessaire d'utiliser plusieurs registres pour mieux appréhender les objets mathématiques. Selon Duval, la connaissance de l'objet mathématique dans plusieurs registres permet de distinguer cet objet mathématique de ses représentations (Duval, 1993, p. 37). L'élève doit reconnaître un objet mathématique dans ses différentes représentations, et donc dans plusieurs registres. Perrin-Glorian (2004) suggère d'utiliser l'expression de « changement de cadre », que nous mobilisons ici, en fonction des connaissances des élèves : lorsqu'il y a un apport de nouvelles connaissances pour les élèves, qui n'existent pas dans l'autre cadre (pp. 68–70).

2. Contexte institutionnel : programmes et séances

Nous présentons les programmes de manière synthétique. Afin que cela soit plus concret, nous donnons un aperçu d'application des programmes à travers les séances préalables à celle qui est analysée, portant sur l'introduction du cm^2 et des formules de calcul de l'aire du rectangle. Nous avons choisi le manuel « Pour comprendre les maths » (Hachette, 2008), car il est représentatif de plusieurs manuels.

Les programmes

Au cycle 1, les élèves sont amenés à distinguer les longueur, masse, ou contenance, par des observations directes et des tris. Au cycle 2, ils travaillent sur la longueur, la masse, la capacité, la durée, et le prix. L'élève doit comprendre qu'un objet peut être considéré selon différentes grandeurs. Les unités standard sont alors introduites, en reportant l'unité puis en utilisant des instruments (Éduscol, 2016, p. 3).

Dans les programmes (Éduscol, 2008 ; 2016)⁴, il est demandé d'introduire le concept d'aire d'abord indépendamment de sa mesure, en procédant à des comparaisons directes (par exemple par découpage-recollement), puis indirectes, en utilisant une unité de mesure quelconque. Dans un deuxième temps, il est recommandé d'introduire la mesure de la grandeur en utilisant des unités de mesure standard (Éduscol, 2016, p. 2–3). Ces recommandations favorisent la capacité à différencier la grandeur, la mesure de la grandeur et l'objet qu'elle caractérise. Ceci est en adéquation avec les préconisations de Perrin-Glorian (1989–1990).

Objet	Grandeur (un concept, une propriété ou caractéristique)	Mesure ⁵ (la mesure de la grandeur, dans une unité de mesure qui a été sélectionnée : le nombre dépend de l'unité de mesure)
Surface	Aire	3 cm^2 (nombre)
Segment	Longueur	3 cm (ou 30 mm ou 0,3 dm, etc.)
Solide	Volume	3 cm^3

Tableau 1 : Distinctions dans le vocabulaire concernant les grandeurs aire, longueur, volume

Du découpage-recollement à l'unité de forme quelconque

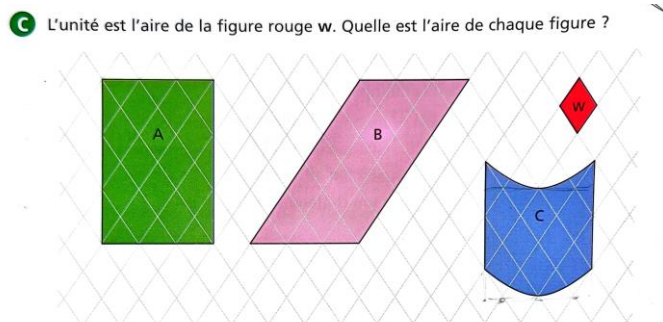
L'application de ces préconisations est présentée à travers l'exemple du manuel « Pour comprendre les maths » (Hachette, 2008). Ce manuel détermine la progression en cinq

⁴ On retrouve la même approche en 2008 qu'en 2016.

⁵ Le décalage avec une « mesure physicienne » comportant une indication de l'incertitude sur cette valeur mesurée ainsi que des indications sur la manière d'obtenir cette valeur mesurée et son incertitude pourrait être analysé.

périodes⁶. En conformité avec les recommandations des programmes, des activités permettent d'introduire progressivement le calcul l'aire avec le cm^2 :

- Les auteurs proposent d'abord en période 1 des activités de découpage-recollement pour comparer des aires directement.
- La mesure est ensuite introduite en période 2, d'abord avec une unité de mesure d'aire de forme quelconque comme ici, le losange.



Extrait 1 : Pour comprendre les maths CM2 (Hachette, 2008, p. 138)⁷

Le calcul d'aire est lié au cadre unidimensionnel et mobilise l'addition. L'action de mesurage consiste à reporter un étalon (le losange), et elle est explicite pour l'élève. L'unité de mesure de l'aire « losange » n'est pas associée à un nombre. Celle-ci est représentée cependant à la fois dans le registre symbolique avec le nom « w » et dans le registre des figures avec le losange.

Il est ensuite question de réaliser une mesure de l'aire d'une surface avec deux unités de mesure différentes. Cela permet d'aborder le concept d'aire sans prendre en compte de nombre (Perrin-Glorian, 1989–1990). L'élève est amené à voir que la valeur numérique de l'aire dépend du choix de l'unité d'aire. Pour l'unité de mesure « u », la mesure d'aire peut être « $4u$ » alors qu'elle sera différente pour une unité de mesure « u' », qui, elle, pourrait être « $400 u'$ ». La valeur numérique (ici « 4 » ou « 400 ») peut être différente pour une même aire.

Le manuel propose aussi des activités en période 3 qui permettent de distinguer la surface et l'aire :

- l'introduction de figures de même aire, ayant différentes formes ;
- le calcul de l'aire par encadrement ;
- des travaux qui ont pour but de distinguer l'aire du périmètre.

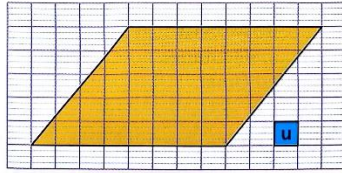
L'unité de mesure d'aire de forme carrée

En période 4, l'unité de mesure prend la forme d'un carré, souvent un carreau du quadrillage dessiné en arrière-plan. Nous appellerons « pavage » le quadrillage qui permet de compter des carreaux pour mesurer l'aire. L'élève est amené à donner le nombre d'unités de mesure (de forme carrée). Le calcul d'aire mobilise l'addition, dans un cadre unidimensionnel. L'élève doit déduire qu'il y a un report d'étalon, ici le carreau. Grâce à cette étape, le mesurage de l'aire est donc encore en partie explicite.

⁶ Période 1 : De la rentrée aux vacances de la Toussaint
Période 2 : Des vacances de la Toussaint aux vacances de Noël
Période 3 : Des vacances de Noël aux vacances d'Hiver
Période 4 : Des vacances d'Hiver aux vacances de Printemps
Période 5 : Des vacances de Printemps aux vacances d'Été

⁷ L'étalon est ici coupé en deux (Figures A et B). Pour la figure C, il faut effectuer un découpage-recollement et obtenir un carré afin de mesurer l'aire à l'aide de l'unité « w ».

- Reproduis cette figure sur ton cahier.
- Quelle est l'aire de ce parallélogramme avec l'unité u ?
 - Construis un rectangle de même aire.
 - Construis un triangle de même aire.



Extrait 2 : Pour comprendre les maths CM2 (Hachette, 2008, p. 54)

L'unité de mesure d'aire centimètre carré

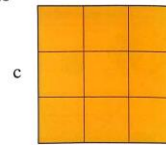
Le centimètre carré est introduit en Période 4 à travers l'aire d'un carré d'un centimètre de côté. L'élève doit compter le nombre de carrés reportables sur la figure (des cm^2) comme il le faisait juste avant, mais le carré a une aire fixe : 1 cm^2 . L'unité de mesure reste associée à l'addition itérée, dans le cadre géométrique. Les additions concernant les nombres sont encore associées à la juxtaposition de figures.

Compter des carreaux : de l'addition vers la multiplication

- B** Trace sur ton cahier un carré de 3 cm de côté, un carré de 5 cm de côté et un carré de 10 cm de côté.

- Calcule la mesure de l'aire de chacun de ces carrés.
- Complète la formule qui permet de calculer l'aire A d'un carré de côté c :

$$A = c \times \dots$$



- C** Utilise les résultats précédents pour compléter.
 $1 \text{ cm}^2 = \dots \text{ mm}^2$; $1 \text{ dm}^2 = \dots \text{ cm}^2$; $1 \text{ m}^2 = \dots \text{ dm}^2$; $1 \text{ m}^2 = \dots \text{ cm}^2$

- D** Trace sur ton cahier un rectangle de longueur $L = 5 \text{ cm}$ et de largeur $l = 3 \text{ cm}$.

- Calcule la mesure de son aire.
- Complète la formule qui permet de calculer l'aire A d'un rectangle :

$$A = \dots \times \dots$$



Mémo

Extrait 3 : Pour comprendre les maths CM2 (Hachette, 2008, p. 138)

Généralisation et formule

L'élève doit utiliser la multiplication, qui est alors nommée : « longueur \times largeur » pour le rectangle, et à établir un lien avec le compte des carreaux du pavage. Cela lui permet théoriquement, de dégager la formule. Dans de Varent (2023) nous comparons comment les manuels permettent à l'élève de passer de l'addition à la multiplication, et à généraliser, ainsi que la place qui est donnée à l'unité de mesure centimètre carré (cm^2) dans ces étapes.

III. ARTICULATION ENTRE ANALYSES EPISTEMOLOGIQUES ET DIDACTIQUES

1. Résumé des résultats de l'analyse épistémologique

L'analyse épistémologique détaillée dans (de Varent, 2023) apporte une première conclusion : elle englobe l'aire du rectangle d'une façon large, conduisant à réunir divers champs de travaux de didactique :

- changement de registre/de cadre,
- géométrie,
- bidimensionnalité, multiplication,
- mesure, unités de mesure,
- recherches théoriques sur le savoir de référence à transposer (aire, mesure),
- algèbre et arithmétique,
- didactique et algorithmique.

Les textes historiques anciens permettent une meilleure compréhension des concepts en jeu, et proposent des interprétations variées de ces concepts. Par exemple, les distinctions telles que « surface, aire, nombre » pour effet d'observer dans les textes anciens ces concepts qui sont mobilisés ou non selon ces distinctions (Perrin-Glorian, 1989–1990, p. 32).

De plus, l'approche utilisée par les historiens du projet SAW a conduit à une approche algorithmique de ces situations de calcul d'aire. Nous nous sommes en effet intéressés à chaque étape du calcul : Quel est l'élément donné en entrée ? Qu'est-ce qui est multiplié ou additionné ? Quel est l'élément donné en sortie du calcul ?

Les algorithmes utilisés dans les textes anciens pour calculer l'aire du rectangle sont variés. L'approche algorithmique invite à analyser les registres mobilisés à chaque étape, ainsi qu'à prêter attention aux transitions entre les cadres. Cette perspective issue des textes historiques nous amène à considérer :

- la formule comme un algorithme, avec des étapes de résolution, et des éléments en entrée et en sortie ;
- la conception du nombre à chaque étape de cet algorithme ;
- la conception de l'unité de mesure à chaque étape ;
- le recours éventuel au cadre géométrique, et à quelle étape du calcul d'aire ;
- le lien entre opération sur des objets géométriques et opération sur les nombres. Par exemple, le fait d'associer un nombre de carreaux à un découpage du plan, ou d'associer un nombre de reports d'étalon à un nombre seul ;
- les implications du système métrique sur la conception de ces objets. Par exemple, les effets du choix d'une unité de mesure d'aire comme le cm^2 , de forme toujours carrée, liée à l'unité de mesure de longueur ;
- la place donnée à la bidimensionnalité, les éventuelles notions implicites qui risquent d'en découler ;
- la place donnée au mesurage. Par exemple, l'action explicite de report d'un étalon ou, au contraire, la présence d'une multiplication sans recours au mesurage.

Ainsi, l'analyse épistémologique a permis de réunir des travaux de didactique issus de différents champs de recherche, de réunir des approches différentes des concepts, et d'analyser les textes anciens et actuels avec une approche algorithmique.

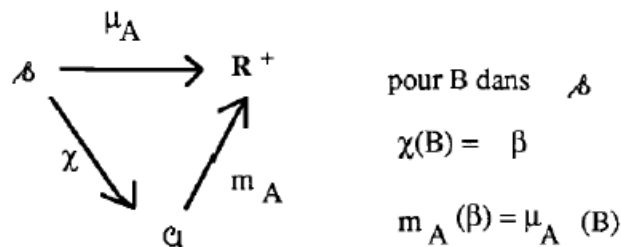
2. Utilisation des dimensions retenues pour sélectionner des travaux en didactique

L'analyse épistémologique conduit à s'intéresser spécifiquement à la transition entre l'addition dans le cadre géométrique unidimensionnel et la formule multiplicative de l'aire du rectangle, dans les cadres arithmétique et algébrique dans une perspective bidimensionnelle. Elle suggère de réunir des travaux de recherche sur la mesure, les transitions entre les cadres, la notion de nombre et de mesurage, et la multiplication. Le contenu de ces travaux permettra de s'interroger, ensuite, dans l'analyse des manuels scolaires, sur le sens que peut théoriquement donner l'élève au nombre et à l'unité de mesure à chaque étape de l'algorithme, selon les informations fournies par les manuels.

Modélisation du réel et implicites du système métrique

Pressiat (2002) montre qu'associer l'addition des aires à la partition du plan n'est pas une évidence (pp. 283–284). Pour introduire l'aire, cet auteur fait appel à l'addition des aires de sous-figures composant une figure, ou au découpage-recollement, pour calculer l'aire d'une figure lorsque l'on connaît déjà l'aire d'une autre. La justification du calcul suppose, pour acquis implicite, une relation entre le cadre géométrique et le cadre numérique, entre les opérations sur les figures et celle sur les nombres, et les propriétés de la fonction mesure.

D'après ce problème mathématique, Perrin-Glorian (1989–1990) explique que dans toutes les présentations traditionnelles de la mesure, l'aire est soit un nombre, soit l'application mesure elle-même ; elle dépend du choix de l'unité. Perrin-Glorian (1989–1990) donne à l'application mesure un sens indépendant de l'unité choisie, en termes des classes d'équivalence obtenues (p. 10). Donc, même si la mesure est à définir pour cela, la grandeur aire possède sa représentation mathématique propre. D'un point de vue mathématique, il est possible de donner un autre sens au mot « aire », indépendant de l'unité : si on choisit une surface unité A et définit l'application μ_A correspondante, on peut définir une relation d'équivalence RA par $S R A S'$, si et seulement si : $\mu_A(S) = \mu_A(S')$.



Extrait 4 : Diagramme commutatif (Perrin-Glorian, 1989-1990, p. 10)

Les classes d'équivalence obtenues ne dépendent pas du choix de A . Il est possible d'appeler l'aire β de B la classe d'équivalence de B pour n'importe laquelle des relations RA et de définir la mesure de l'aire β comme la mesure de n'importe laquelle des surfaces de β . Le diagramme est commutatif. Il est possible de « donner un fondement mathématique à la notion d'aire en tant que grandeur, même s'il faut définir au préalable la mesure pour lui donner ce fondement » (Perrin-Glorian, 1989–1990, p. 10). L'auteur explique que ce qui intéresse les mathématiques est l'application entre les surfaces et les nombres (μ_A). Les comparaisons de surfaces se ramènent aux comparaisons de nombres, les juxtapositions de surfaces à des additions de nombres, et dans ces conditions, la considération des autres flèches peut apparaître comme un détour inutile.

Ces auteurs relèvent des implicites sur la relation entre le plan et la mesure pourrait avoir deux conséquences au moins : une assimilation de certains objets mathématiques par les auteurs de manuels et *a fortiori* les élèves, faute d'explicitation des concepts qui entrent en jeu dans chaque cadre, tels que l'aire et la mesure d'aire, le nombre, l'aire et la surface. Mais la relation à la justification pourrait aussi être « mal entamée » : en effet, les auteurs de manuels n'ont pas précisé que des propriétés sont utilisées pour relier l'addition des aires à la partition du plan. Et que celles-ci sont donc acceptées comme vraies à ce stade de la scolarité, puisque la démonstration n'est pas facile.

Le sens donné au pavage

Outhred et Mitchelmore (1992) démontrent que construire un pavage est une activité cognitivement problématique. Les élèves qui ne s'imaginent pas le pavage en lignes et colonnes, ne calculent pas, ou peu souvent, le nombre de carreaux par multiplication. Il s'agit d'une étape importante de la généralisation de la formule. L'étude porte sur les années 1 à 4 (6-7 ; 7-8 ; 8-9 ; 9-10 ans). Le passage de l'addition itérée à la multiplication n'est pas automatique pour tous les élèves. De plus, seuls les élèves qui avaient tracé des pavages structurés avaient mesuré les côtés du rectangle. Cependant, et cela est important, certains des élèves qui ont fait de tels pavages n'avaient pas utilisé la mesure de la longueur du côté pour calculer le nombre de carreaux sur un côté du rectangle. Ils ne feront donc pas automatiquement le lien entre le nombre de centimètres et le nombre de carreaux (cm²).

Outhred et Mitchelmore (1996) mettent l'accent sur la compréhension intuitive de la mesure d'aire avant son enseignement. Ils réalisent leur enquête auprès de 155 élèves de quatre écoles d'un milieu socio-économique moyen de Sydney, sur les années scolaires 1 à 4). Ils dégagent quatre principes de base pour l'acquisition de la mesure d'aire :

- Le rectangle doit pouvoir être couvert sans trou ni chevauchement.
- Il doit pouvoir être couvert par pavage de carrés.
- Il faut pouvoir trouver (spontanément) le nombre d'unités selon chaque côté en mesurant les longueurs.
- Le nombre d'unités d'une grille rectangulaire doit être vu comme le produit du nombre unités de chaque ligne et colonne.

Ils hiérarchisent les stratégies des élèves par niveaux :

- Niveau 1 : l'élève ne prend pas en compte que toute la surface doit être couverte avec des unités identiques (trous, chevauchements, taille de l'unité changeante).
- Niveau 2 : l'élève se rend compte que toute la surface doit être couverte, mais il rencontre des difficultés pour assurer la systématisation du recouvrement et la congruence des unités.
- Niveau 3 : la grille est construite, les unités estimées, mais l'élève ne voit pas la relation entre la taille de la grille et les longueurs des côtés du rectangle.
- Niveau 4 : l'élève voit le rapport entre la surface de la grille et les longueurs d'un des côtés du rectangle, mais étant focalisé sur une dimension, il aura du mal à construire une grille correcte.
- Niveau 5 : la grille est construite, les deux côtés sont mesurés.

Selon l'étude, seulement un tiers des élèves d'année 3 (8-9 ans) et trois quarts seulement des élèves d'année 4 (9-10 ans) sont de niveau 4 ou 5. Outhred et Mitchelmore (1996) soulignent que la recherche a mis l'accent sur les principes 1 et 4 et souhaitent souligner l'importance du principe 3. Le nombre d'unités selon chaque côté doit pouvoir être trouvé (spontanément) en mesurant les longueurs, principe « qui apparaît avoir été complètement négligé par la littérature. Il peut sembler évident aux adultes que les nombres dans la grille dépendent des mesures du côté, mais ce n'est clairement pas évident pour les élèves » (Outhred et Mitchelmore, 1996, p. 94).

Outhred et Mitchelmore établissent enfin un rapport entre cette capacité et celle de mesurer à la règle. Ils montrent que la mesure à la règle n'est pas automatiquement considérée comme le compte d'un nombre d'espaces de taille 1 cm (donnée par le nombre inscrit sur la règle). C'est cependant une caractéristique essentielle qui permet d'associer le nombre d'unités carrées à la longueur du côté. L'implication pour l'enseignement est que la mesure à la règle ne devrait pas être enseignée comme une habilité mécanique.

Les élèves ne déterminent donc pas automatiquement le nombre de carreaux d'un pavage par multiplication. Le pavage n'est pas automatiquement lié à la mesure du côté du rectangle ; la longueur elle-même n'est pas forcément perçue comme le report d'une unité de longueur. En mesurant les longueurs, le nombre d'unités de mesure d'aire selon chaque côté n'est pas automatiquement calculé.

Formules et bidimensionnalité

Perrin-Glorian (1989–1990) mentionne quelques erreurs fréquentes des élèves :

- la difficulté d'exprimer l'aire d'une surface qui n'est pas pavée par des carrés ;
- les difficultés à distinguer l'aire et la surface, l'aire et le périmètre ;
- l'utilisation de formules inadaptées sur des surfaces comme le parallélogramme ou le triangle (p. 31 ; voir aussi Rogalski-Muret, 1984, p. 14). Dans de Varent (2023), nous rappelons les erreurs les plus courantes des élèves et des futurs enseignants.

Selon Simon et Blume (1994), les futurs enseignants dans leur étude ont répondu aux problèmes de l'aire en multipliant, mais leur choix d'opération était souvent le résultat de l'apprentissage d'une procédure ou d'une formule pour l'aire d'un rectangle plutôt que le résultat d'un solide lien conceptuel entre leur compréhension de la relation entre l'aire et la mesure de longueur du côté. Ils ont aussi indiqué qu'il était difficile pour les futurs enseignants de faire le lien entre les dimensions linéaires et la surface rectangulaire. Ils disent que s'il est effectivement possible pour eux 1) de mobiliser la grille et 2) de voir le total de carreaux comme le résultat à obtenir pour mesurer l'aire, l'étape 3), qui consiste à comprendre comment les mesures linéaires déterminent la taille de la grille, leur est nécessaire et difficile.

Des propositions de Perrin-Glorian (1989–1990) ont été faites pour donner du sens au mesurage et au cm^2 , dans le contexte bidimensionnel :

- détacher la mesure du pavage en travaillant sur différents pavages possibles pour une même surface,
- utiliser un tableau permettant d'exprimer le fait que toute aire mesurée avec une unité « u » peut être exprimée avec n'importe quelle unité en relation avec « u »,
- travailler la relation entre l'aire et les dimensions des côtés en fonction du pavage mis à disposition;
- et la variation de l'aire du rectangle en fonction des côtés
- pointer les différences et les relations entre aires et longueurs, travailler le lien entre dimensions du rectangle et aire, l'agrandissement du rectangle
- donner des consignes visant à éviter l'erreur « un carré de côté $\frac{1}{2}$ cm est un demi centimètre carré » ; et « un parallélogramme d'aire 1 cm^2 a tous ses côtés de longueur 1 cm ».

La mesure et le mesurage entre épistémologie et didactique

Munier et Passelaigue (2012) s'intéressent à l'articulation entre didactique et épistémologie dans l'enseignement des grandeurs et de la mesure. Elles clarifient des notions conceptuelles et postures épistémologiques possibles. Elles distinguent différents points de vue sur les grandeurs :

- la grandeur comme immensité,
- la grandeur, en référence à une grandeur de nature particulière (comme la longueur),

- la grandeur, en référence à la variabilité (ce qui peut être augmenté ou diminué),
- la grandeur, en référence à la mesure et au mesurage (la grandeur est ce qui peut être mesuré),
- la grandeur comme propriété commune à un ensemble d'objets équivalents.

Nous prendrons, comme Munier et Passelaigue, la définition du VIM (2008), qui définit les grandeurs comme « propriétés d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance que l'on peut exprimer quantitativement sous la forme d'un nombre et d'une référence » (p. VI). Nous avons donc défini « grandeur » comme une propriété, un attribut, qui permet de décrire les objets ou les phénomènes. Cette première description peut conduire à comparer les objets selon un point de vue, la propriété choisie. Ainsi, il est possible de comparer directement deux objets allongés et de déterminer si leurs longueurs sont équivalentes, c'est-à-dire d'une grandeur donnée (Munier & Passelaigue, 2012, p. 4).

Elles distinguent une « espèce de grandeur » (Munier & Passelaigue, 2012, p. 4), c'est-à-dire l'aspect qui est commun à des grandeurs mutuellement comparables. Il s'agit de l'ensemble des résultats communs donnés par l'étude des objets selon un point de vue choisi. Par exemple, la longueur peut s'appeler « circonférence, hauteur, profondeur... » : ces dernières grandeurs sont donc de même nature.

Selon le vocabulaire employé par le VIM (2008), les formulations comme « 2 cm » ou « 3 cm² » s'appellent la valeur de la grandeur (par exemple la valeur de la longueur, ou de l'aire), en référence à un objet (segment, surface...) (p. 28). C'est l'ensemble d'un nombre et d'une référence, constituant l'expression quantitative d'une grandeur. Par exemple :

Longueur d'une tige donnée: 5,34 m ou 534 cm.

Le VIM (2008) propose aussi de nommer « 5,34 » ou « 534 » la valeur numérique de la grandeur (longueur, aire...) selon une unité de mesure choisie (p. 13).

Munier et Passelaigue (2012) utilisent enfin le terme « étalon de mesure » pour l'utilisation de l'unité de mesure qui est reportée dans l'opération de mesurage. Munier et Passelaigue rappellent que la mesure peut alors cacher :

- l'opération de mesurage, et
- le résultat de cette opération.

On l'appelle communément la mesure, qui est le résultat de l'opération de mesurage, avec une unité de mesure choisie. Munier et Passelaigue rappellent que pour certaines grandeurs, le mesurage ne peut se faire directement. Nous avons expliqué plus haut les conditions de modélisation du réel mises en place pour pouvoir utiliser les mêmes nombres dans le monde des grandeurs et dans celui des opérations mathématiques. L'unité de mesure reportée, liée à l'action de mesurage, est donc distincte de l'unité de mesure, conçue comme l'élément d'une expression arithmétique ou algébrique.

Enfin, d'après Munier et Passelaigue, la valeur de la grandeur constitue la classe d'équivalence de toutes les mesures possibles selon toutes les unités de mesure. Cette définition est un peu différente de celle du VIM (établie ci-dessus). Il est possible de distinguer la grandeur à mesurer, l'ensemble des mesures possibles et la mesure effective, selon une unité donnée.

Lorsqu'on mesure une grandeur, sa « mesure » est un nombre déterminé en fonction d'un étalon pris comme référence, qui permet d'élaborer une classe d'équivalence que nous appelons « valeur » d'une grandeur. La valeur d'une grandeur ne dépend pas de sa mesure mais elle peut être exprimée par cette mesure. Par exemple la longueur d'une tige peut être exprimée en centimètres ou en décimètres : les nombres sont différents mais la valeur de la longueur de la tige est indépendante de ces nombres. Cette valeur constitue la classe d'équivalence (Munier & Passelaigue, 2012).

Cette distinction est illustrée sur un exemple :

Objet	Grandeur	Classe d'équivalence des mesures possibles de la grandeur	Mesure	Nombre
	concept, propriété, caractéristique		mesure de la grandeur avec une unité de mesure choisie	valeur numérique de la grandeur mesurée avec une unité de mesure choisie
Segment	Longueur	2 cm 0,2 dm 20 mm Etc.	2 cm	2

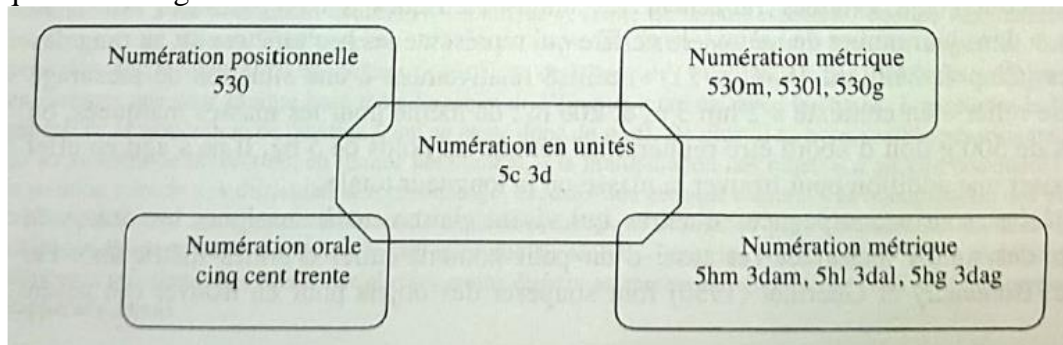
Tableau 2 : Concept intermédiaire entre grandeur et mesure

Le travail épistémologique de Munier et Passelaigue les conduit à utiliser le vocabulaire du VIM également, et à faire des distinctions qui se rapprochent de celles qui m'intéressent. Il semble qu'ici, l'analyse historico-épistémologique rencontre l'analyse didactique sur le terrain conceptuel, et que les outils puissent être utiles à tous. Les distinctions qu'elles proposent permettront d'explicitier ce qui n'est pas transposé dans l'enseignement actuel. Dans les tableaux de conversion, les relations entre unité de mesure standard sont pensées pour leur aspect pratique. Il est possible que cela ait des conséquences sur leur enseignement, mais cela ne nous paraît pas avoir été un thème phare en recherche. Seuls quelques travaux, tels l'ouvrage dirigé par Clements et Bright (2003) et l'étude de Chambris (2009), ont souligné un recul dans la réflexion sur ce thème dans l'enseignement.

Dans les années 1970, les instructions officielles ont demandé d'éliminer les grandeurs des mathématiques de l'école. Chambris (2007) rappelle l'importance des grandeurs pour la construction des savoirs numériques. A partir de 1980, des grandeurs et du continu sont introduits dans le numérique, dans les manuels. Elle pose la question générale de la fonction du domaine « mesure » dans l'enseignement des mathématiques au primaire. Il semblerait que les grandeurs réapparaissent sans être liées aux théories mathématiques, mais à la physique ou le développement des connaissances par les élèves. Cela semble avoir pour conséquence une rupture entre les mathématiques et la didactique. Enfin, en 1970, il semble qu'on crée le domaine « mesure » pour constituer le numérique. Compte-tenu des incursions multiples des grandeurs et du continu dans le numérique, nous pouvons nous demander où en est aujourd'hui la fonction du domaine « mesure » dans l'enseignement des mathématiques du primaire (Chambris, 2007, pp. 29–30).

Elle explique qu'avant la réforme, entre 1930 et 1970, les manuels présentaient une progression particulière pour l'étude du système métrique. « On observe un entrelacement des leçons des deux domaines. On a ainsi une sorte de progression « en crabe » (Chambris, 2009, p. 215). La progression était constituée d'un enseignement des unités puis du mètre ; de la dizaine et des dizaines, de « l'entre deux dizaines » puis du décamètre, etc. De plus, Chambris met en valeur le fait que cette progression était accompagnée de discours récurrents pour étudier le système métrique, sur les relations entre unités métriques d'une part, et les relations entre position, unités de la numération et unités métriques d'autre part. « Dans l'écriture d'un nombre exprimant des longueurs, si le mètre est pris pour unité, les hectomètres s'écrivent au rang des centaines » (Boucheny & Guérinet, 1930, p. 52, cité par Chambris, 2009, p. 215)

Une forme de numération, la numération en unités, permet de faire le lien entre numération positionnelle, numération orale, numération métrique, et numération au sein d'un système métrique lié à une grandeur.



Extrait 5 : la numération en unités (Chambris, 2009, p. 215)

Chambris (2009) pose la question, à savoir :

D'une certaine façon, accepter que les grandeurs contribuent à l'étude de la numération suppose probablement de renoncer à certaines conceptions des mathématiques véhiculées puissamment par la réforme et dont on peut faire le pari que certaines sont profondément ancrées dans les imaginaires mathématiques des enseignants. Finalement, notre étude peut être vue comme un point de départ pour une étude comparative. [...](pp. 220–221)

La rencontre avec ces travaux pourrait se terminer par une réflexion sur la construction d'une progression dans l'apprentissage du système métrique, en lien avec ses aspects conceptuels, ainsi que les cadres numérique et géométrique.

3. Conclusion sur le croisement des analyses épistémologiques et didactiques, concernant le savoir de référence à transposer

L'unité de mesure entre les cadres

L'unité de mesure est liée à la fois à une forte polysémie, à plusieurs concepts, et à une multiplicité de cadres et de registres. Ces aspects complexes liés aux unités de mesure posent la question de leur transmission. L'unité de mesure n'apparaît pas, *a priori*, dans les études sur les concepts. C'est un objet ambigu, puisqu'il peut relever :

- du pôle « surface » : l'objet (il peut être représenté par plusieurs figures, plusieurs formes possibles, ou implicitement, la forme fixe d'un carré, selon les cas) ;
 - du pôle « grandeur » : le cm^2 est une unité d'aire (c'est une aire donnée ayant pour valeur numérique d'aire « 1 », comme le carré de côté 1 cm) ;
 - du pôle nombre (le centimètre carré est caractérisé par sa mesure d'aire, 1 cm^2) ;
- et enfin être un symbole représentant un objet sur lequel il est possible d'opérer, puisque l'on peut « multiplier » (« $\text{cm} \times \text{cm}$ »).

L'unité de mesure relève donc des cadres géométrique, arithmétique, et algébrique, ainsi que des registres des formules (symbolique), des figures, du nombre et des grandeurs. De même, l'unité de mesure peut être liée :

- au mesurage (report d'unité de mesure, que Munier et Passelaigue appellent alors « étalon ») ;
- à l'expression d'une mesure (selon une unité de mesure choisie) ;
- à une opération, comme l'addition ($1 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$) ou la multiplication ($3 \times 1 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$) ;
- être elle-même multipliée : $\text{cm} \times \text{cm} = \text{cm}^2$.

Perspective historique et travail inter-cadres

Le croisement des analyses didactique et épistémologique a conduit à s'intéresser :

-à l'aire, comme situation multiplicative parmi d'autres – situation dans laquelle les unités de mesure entrent en jeu de façons diverses ;

-à l'implication de cette perspective multiplicative et de l'utilisation du système métrique sur la compréhension des concepts (aire, surface, nombre, multiplication, unité de mesure) :

-à regarder le calcul d'aire dans une perspective algorithmique.

Au CM2, la généralisation de la formule dans le cadre algébrique apporte la connaissance nouvelle d'un point commun à tous les calculs d'aire du carré et du rectangle, en fonction de la mesure des longueurs. Selon Perrin-Glorian, il s'agit d'un changement de cadre à ce stade de la scolarité. Dans le cas de l'aire du rectangle, le registre des figures (dans le cadre géométrique avec le pavage du rectangle), est remplacé par des formules ($c \times c$ ou $l \times L$ dans le registre symbolique ou par le cadre numérique), quand on applique la formule. Les objets manipulés (les unités de mesure représentées par des carreaux) sont ensuite représentés par des symboles (comme le « cm^2 ») dans le registre symbolique quand on utilise la formule. Ils sont transférés dans le cadre numérique lors de l'application de la formule à des cas concrets de calcul.

Croisée de travaux de didactique

Le croisement des analyses épistémologique et didactique nous a permis de rassembler des travaux en didactique issus de différents champs en histoire et didactique des mathématiques et de la physique : géométrie, grandeurs, bidimensionnalité, mesure, unité, découpage du plan, raisonnement à plusieurs variables. En effet, le choix initial était de se concentrer sur les unités de mesure dans la transition inter-cadres entre géométrie (pavage) et la formule de l'aire du rectangle conduit à réunir des travaux sur les grandeurs en géométrie (voir Perrin-Glorian, 2002) et des travaux qui abordent les liens entre aire ou volume et bidimensionnalité (Rogalski-Muret, 1984 ; Vergnaud, 1983). Des travaux posent le problème du point de vue épistémologique : Munier et Passelaigne (2012) ou le VIM⁸ (2008) abordent les différences entre mesure, mesurage, unité de mesure, et valeurs numériques associées à la mesure. Chambris (2009) analyse l'articulation dans l'enseignement de la notion d'unité entre le système métrique et les unités de numération. Du point de vue du savoir à transposer, plusieurs travaux les implications d'une mise en relation entre l'addition de valeurs numériques issues de mesure et le découpage du plan dans le monde physique en raison des relations de proportion entre grandeurs (de Courtenay, Darrigol & Schlaudt, 2019 ; Perrin-Glorian, 1989–1990 ; Pressiat, 2002).

Outhred et Mitchelmore (1992 ; 1996) remettent en question l'apprentissage spatial du pavage et du sens qu'il est possible de donner aux carreaux. Viennot (1992) engage enfin à penser le moment de l'introduction des règles du raisonnement sur plusieurs variables dans les formules en lien avec l'apprentissage de la dépendance fonctionnelle par des raisonnements du type « si telle grandeur augmente et si telle autre est maintenue constante, alors telle autre diminue » (pp. 139-140).

⁸ International vocabulary of metrology

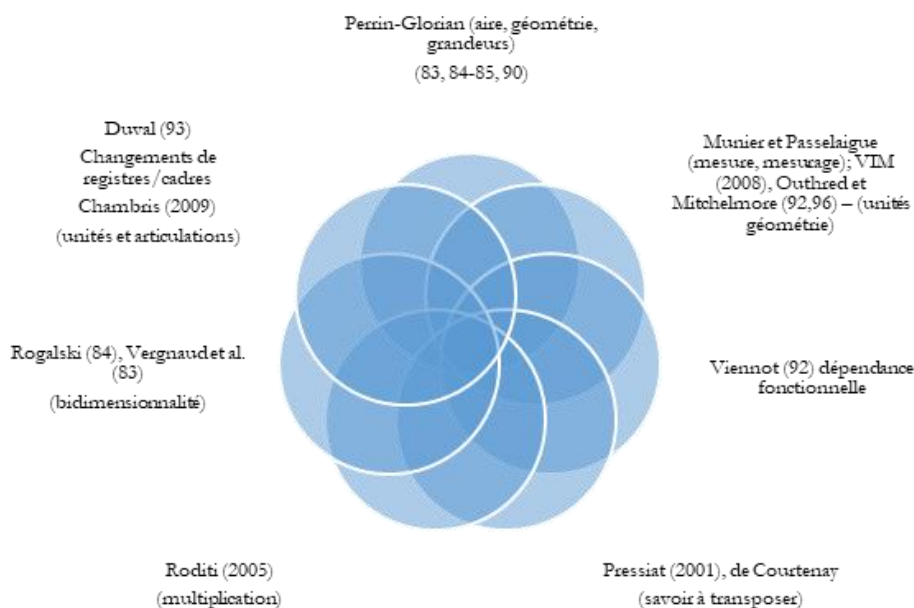


Figure 1 : Les unités de mesure à la croisée des travaux

Ces travaux mis ensemble mettent en valeur la difficulté de l'enseignement dans un contexte de transition entre géométrie et formules lorsqu'elle est impliquée. De plus, ils mettent en valeur le fait que le système métrique actuel permet de mettre en relation les unités de mesure de longueur et d'aire, ce qui implique que les unités de mesure d'aire soient représentables par un carré dont la longueur du côté est l'unité de mesure de longueur standard. Cela permet d'associer facilement l'addition au découpage du plan, c'est-à-dire de construire un parallèle entre les relations de proportions entre les grandeurs et les opérations sur les nombres. Nous nous demandons si cela peut créer des implicites dans la représentation de l'unité de mesure d'aire dans la transition entre géométrie et formules, qui seraient observables dans les manuels. Ainsi, les allers-retours entre textes historiques et travaux de didactique ont conduit à mettre le concept d'unité de mesure au centre du travail, en réunissant des travaux issus de différents champs de didactique. Cela a mis en lumière des difficultés possibles de conceptualisation de l'unité de mesure dans les transitions entre les cadres.

4. Dimensions retenues pour analyser les manuels

Ces travaux démontrent la difficulté d'enseigner dans un contexte de transition entre géométrie et formules lorsque la mesure est impliquée. En outre, ils mettent en avant le fait que le système métrique actuel permet de relier les unités de mesure de longueur et d'aire. Cela signifie que les unités de mesure d'aire doivent être représentables par un carré dont la longueur du côté est associée à l'unité de mesure de longueur standard. Cela permet, certes, d'associer facilement l'addition au découpage du plan, c'est-à-dire de construire un parallèle entre les relations de proportions entre grandeurs et les opérations sur les nombres. Dans de Varent (2023), nous analysons si cela peut créer des implicites dans la compréhension du concept d'unité de mesure d'aire, dans la transition entre géométrie et formules, qui soient observables dans les manuels. Les changements imposés par l'introduction de la formule sont récapitulés :

	Calcul d'aire avec l'unité « u », ayant une forme quelconque (losange, triangle, carré...)	Calcul d'aire avec l'unité « u », ayant la forme d'un carré	Calcul d'aire avec l'unité « cm ² », ayant la forme d'un carré
Opération	Addition itérée	Addition itérée ou multiplication pour trouver le nombre de carrés si la surface s'y prête (pavage en lignes et colonnes)	Addition itérée ou multiplication pour trouver le nombre de carrés si la surface s'y prête (pavage en lignes et colonnes)
Symbolisme	« u », « + »	« u », « + » ou « × »	« cm ² » « c », ou « l », et « L »
Besoin de prendre en compte la mesure du côté ou de la longueur/largeur (bidimensionnalité)	NON	NON	OUI si le pavage est dessiné et que c'est demandé explicitement. NON si l'élève choisit quand même l'addition itérée pour calculer le nombre de carreaux. NON si le pavage n'est pas dessiné, l'élève est amené à utiliser les dimensions des côtés.

Tableau 3 : Changements imposés par l'introduction de la formule

L'enseignement de l'unité de mesure d'aire et des formules est un défi sur plusieurs points : elle requiert l'utilisation de la multiplication plutôt que de l'addition itérée. Par ailleurs, le contexte qui était unidimensionnel (l'unité de mesure associée au carreau ou autre forme dans le cadre géométrique) devient bidimensionnel avec le rectangle, car il utilise la mesure de longueur sur un côté, pour déduire le nombre de carreaux sur une ligne ou colonne de pavage. Ceci est possible grâce aux spécificités de notre système métrique. Par ailleurs, les lettres « c » pour le carré, ainsi que « l » et « L » pour la largeur et la longueur du rectangle sont introduites aux élèves. Nous avons examiné comment ces transitions et ces distinctions sont abordées dans les manuels, et si cela donnait lieu à des étapes et à des éléments d'institutionnalisation explicites (de Varent, 2023).

En résumé, nous nous intéressons au cadre géométrique lié au registre des figures (pavage), puis au cadre algébrique lié au registre symbolique (formules) et au cadre numérique lié au registre des nombres (application des formules). Nous nous penchons sur la coordination des représentations des objets mathématiques liés au calcul d'aire, notamment les unités de mesure dans la transition du cadre géométrique aux cadres numérique et algébrique. Nous nous questionnons sur l'articulation des représentations de l'objet « unité de mesure d'aire » dans les différents registres, et l'explicitation ou non de cette articulation chez les auteurs de manuels scolaires. Duval conseille, en effet, d'être attentif à la capacité des élèves à différencier les objets de l'une de leurs représentations, ce qui engage à analyser avec précision la façon dont les manuels accompagnent la présentation de l'unité de mesure d'aire dans la transition entre ces cadres. Les allers-retours entre histoire et didactique ont permis de lister des dimensions à analyser pour étudier l'introduction de l'unité de mesure d'aire entre le cadre géométrique et les cadres arithmétique et algébrique.

Les étapes de l'algorithme de calcul d'aire ont été analysées (de Varent, 2023) à travers une reconstruction de ce qui est attendu de l'élève. Celle-ci est composée de trois étapes : l'étape de calcul du nombre de centimètres-carrés dans un rectangle pavé, l'étape de la généralisation qui permet de dégager la formule, et l'étape d'application de la formule.

A chaque étape du calcul nous avons demandé, suivant les traces écrites laissées par les manuels, comment l'élève pouvait interpréter l'objet mathématique qui entre en jeu selon les choix des manuels (surface, unité de mesure, nombre, longueur, aire) et quelle opération y était associée (addition, multiplication). Lorsque cela n'était pas expliqué dans le manuel, nous avons ajouté cette précision. Nous avons porté une attention particulière à la manière dont l'élève peut (théoriquement) se représenter l'unité de mesure d'aire à chaque étape, et si elle est reliée à la notion de mesurage par report d'un étalon, en fonction des informations que le manuel lui donne.

L'utilisation de la mesure du côté du rectangle nous a permis d'analyser si les manuels font expliciter par l'élève (ou si les manuels explicitent eux-mêmes directement) la relation entre le nombre d'unités de centimètres sur un côté et le nombre de carreaux cm^2 sur une ligne.

IV. RESUME DES RESULTATS DE L'ANALYSE DE MANUELS

Pour étudier la manière dont le centimètre carré est introduit dans les manuels de CM2 (de Varent, 2023), nous avons utilisé une analyse épistémologique d'exercices mathématiques historiques mobilisant des systèmes non-métriques, sur une analyse des programmes actuels, ainsi que sur une synthèse de travaux en didactique concernant le savoir à transposer. Ainsi, nous avons établi une grille d'analyse des manuels grâce aux allers-retours entre histoire et didactique.

A travers des dimensions sélectionnées, l'analyse des manuels de CM2 a montré qu'il existe une certaine homogénéité dans l'introduction générale de la notion d'aire, qui répond aux demandes de plusieurs travaux en didactique, notamment autour des distinctions entre surface, aire et périmètre. Les recommandations institutionnelles concernant l'introduction d'une aire sans la mesure sont aussi respectées. En revanche, l'enseignement de l'unité de mesure conventionnelle (le cm^2) semble moins uniformisé.

Premièrement, la transition entre l'addition itérée et la multiplication pour le compte des cm^2 du pavage du rectangle n'est pas toujours explicitement demandée. La multiplication est pourtant nécessaire pour la généralisation et l'introduction de la formule. Deuxièmement, l'unité de mesure cm^2 est généralement introduite comme l'aire d'un carré mesurant un centimètre de côté. On observe une grande inhomogénéité : certains manuels vont insister sur des aspects tels que la présentation d'autres formes possibles pour le cm^2 (en faisant ainsi une distinction entre l'aire et la surface pour l'unité de mesure elle-même), le calcul avec des sous-unités de mesure, ou l'utilisation de la mesure d'aire dans une situation de problème de la vie courante, alors que d'autres ne mentionnent que le pavage du rectangle dont les dimensions sont elles aussi, inhomogènes.

Seuls trois manuels amènent l'élève à faire le lien entre le nombre de cm^2 du côté du rectangle et le nombre de centimètres, explicitant ainsi le lien entre la mesure du côté et le pavage, ce qui permet de comprendre la formule. Nous pouvons nous demander si les élèves ne risquent pas d'être incapables de donner du sens à la lettre dans la formule, ou d'oublier la notion de mesurage liée au pavage, au profit de représentations géométriques erronées, introduites pour donner du sens à la formule qui donne l'impression que l'on multiplie des côtés : « $c \times c$ ». Cela rejoint le constat de difficultés d'élèves à donner du sens aux formules d'aire du rectangle et du carré, et à généraliser leur utilisation sur d'autres figures comme le triangle.

L'étude a montré ainsi que l'introduction de l'unité de mesure d'aire dans les transitions entre les cadres – entre géométrie, formules et leur application – est un enjeu important de l'enseignement à tous ses stades de l'enseignement. De nouvelles questions se posent quant à l'articulation des recherches en didactique autour de l'unité de mesure, dans la perspective d'une progression multiniveaux et inter-cadres, favorisant les liens entre l'enseignement des mathématiques et de la physique.

La perspective épistémologique permet donc de questionner les implications de l'utilisation du système métrique, notamment dans le cadre d'une situation de bidimensionnalité qui implique une relation entre les unités de mesure de longueur et d'aire, facilitée par le système métrique. Les travaux de didactique démontrent que tous les élèves ne déterminent pas automatiquement le nombre de carreaux d'un pavage par multiplication, que le lien entre le pavage et la mesure

du côté du rectangle n'est pas automatique, que la longueur elle-même n'est pas forcément perçue comme le report d'une unité de longueur, et surtout que le nombre d'unités de mesure d'aire selon chaque côté n'est pas automatiquement trouvé en mesurant les longueurs. Les résultats de didactique indiquent en effet des difficultés : le lien entre le compte des carreaux et la formule n'est pas évident, ni pour les élèves, ni pour les futurs enseignants (Outhred & Mitchelmore, 1992, 1996). La formule de l'aire du rectangle tend à être appliquée à d'autres figures, ce qui pourrait s'expliquer par une difficulté à lui donner du sens. L'aire serait ainsi considérée comme « longueur \times largeur » sans être associée à une compréhension géométrique. La relation entre la mesure d'aire en comptant des carreaux, et la mesure du côté avec une unité de mesure de longueur n'est pas évidente. En particulier, l'étape qui consiste à associer la mesure de longueur à un « nombre de carreaux sur une ligne » n'est pas explicite, pour les élèves comme pour les futurs enseignants.

L'enseignement des formules d'aire du carré et du rectangle, en rapport avec l'introduction de l'unité de mesure d'aire standard cm^2 , combine un ensemble de concepts complexes (notion d'aire, notion d'unité de mesure d'aire quelconque, introduction du cm^2 , passage de l'addition à la multiplication, généralisation, introduction de la lettre, transition entre géométrie et formules, et transition entre un cadre unidimensionnel et un cadre bidimensionnel) que les manuels présentent en deux à trois séances. Cette période trop restreinte reflète probablement les contraintes institutionnelles liées aux programmes. Par ailleurs, les relations du système métrique pour les unités d'aire sont aussi abordées. Les élèves qui savent utiliser la formule ont-ils pour autant acquis une représentation correcte des objets mathématiques concernés dans tous les registres ? Si ce n'est pas le cas, il faudra se demander si le *contrôle du sens* proposé par Duval, qui pourrait être favorisé par l'introduction de la formule par un compte des carreaux, est possible pour les élèves.

Les éléments suivants sont à retenir dans la perspective d'une future ingénierie :

- La grille effacée (*J'apprends les maths*) semble être un élément de choix pour favoriser la transition inter-cadres et assurer une cohérence dans la représentation des objets mathématiques en jeu.
- Il serait probablement intéressant de travailler davantage avec les élèves sur la construction de l'unité de mesure d'aire indépendamment de l'unité de mesure de longueur⁹, peut-être même sur les distinctions surface/aire/nombre pour l'unité de mesure elle-même¹⁰, et sur les relations métriques entre unités de mesure dans le cadre géométrique.
- Il semble essentiel de poursuivre l'enseignement des unités de mesure de longueur par report, dans la construction à la règle au cycle 2. Cette étape semble clé pour donner du sens à la mesure d'aire du rectangle. En effet, il est nécessaire que les élèves perçoivent la possibilité de reporter les unités de mesure de longueur pour concevoir les reports successifs de centimètres, et ainsi les associer aux reports successifs de cm^2 sur un côté du pavage.

⁹ Des exemples d'exercice seraient le report effectif d'unités de mesure d'aire (par exemple un drap dans la cour), un travail sur les contextes pratiques de calcul d'aire (voir *Les maths à la découverte des sciences*) ainsi que sur les ordres de grandeur.

¹⁰ Par exemple, utiliser les différentes formes de l'unité de mesure standard pour mesurer, introduire un vocabulaire spécifique : étalon (pour la forme)/unité d'aire (pour l'aire standard choisie qui peut prendre plusieurs formes)/unité de mesure pour le nombre 1 cm^2 qui peut être aussi exprimé différemment, par exemple 100 mm^2 .

V. CONCLUSION

Premièrement, l'analyse épistémologique a permis de réunir des travaux de différents champs en didactique mathématique : cadres et registres, grandeurs, multiplication, bidimensionnalité, dépendance fonctionnelle, notions d'unité, concepts liés à la mesure, pavage. Nous avons donc interrogé les unités de mesure dans la transition entre géométrie, algèbre et arithmétique en ce qui concerne les transitions entre cadres ou registres. Vis-à-vis du savoir de référence, nous avons souligné que des implicites peuvent être liés au raccourci qui consiste à s'intéresser assez directement à l'application entre surfaces et nombres, et donc à assimiler sans explicitation la somme des aires des sous-surfaces qui permettent la décomposition du rectangle (carreaux) et l'aire totale de la figure (afin de pouvoir se ramener à des comparaisons de nombres plutôt qu'à des juxtapositions). Ceci comporte le risque de passer sous silence l'existence d'une démontrabilité (la possibilité de relier addition et juxtaposition) et d'induire éventuellement chez les enseignants et les élèves l'impossibilité de se poser la question. De plus, si la question ne se pose pas, le risque est de mélanger de certains objets comme le nombre, l'aire et la surface ; le carreau, l'unité de mesure d'aire et son aire ; le nombre de carreaux, le nombre 3 dans 3 cm^2 et la mesure d'aire (3 cm^2 , 300 mm^2) avec la risque d'une perte de sens à l'ensemble. Deuxièmement, et prenant en considérant les mises en garde de Duval quant à la capacité des élèves à différencier les objets d'une de leurs représentations, nous avons analysé avec précision la façon dont les manuels accompagnent la transition entre les cadres géométrique, arithmétique et algébrique du point de vue de la compréhension des concepts comme l'unité de mesure d'aire. La perspective épistémologique de l'histoire nous a encouragés à concevoir le calcul d'aire comme un algorithme et analyser la façon dont le manuel facilite la compréhension de l'utilisation des concepts comme l'unité de mesure d'aire à chaque étape de l'algorithme de calcul. A chaque étape nous avons également indiqué dans quel cadre se situait le calcul (géométrique avec une manipulation de figures, arithmétique avec des opérations sur les nombres). Nous avons étudié si les manuels précisent ou non les objets mathématiques qui entrent en jeu et ce que devient la notion d'unité de mesure d'aire, notamment dans la perspective du mesurage (le report explicite d'un étalon choisi pour mesurer). En analysant les manuels de CM2 selon ces dimensions, nous avons constaté qu'il existe une certaine homogénéité dans l'introduction générale de la notion d'aire, qui répond aux demandes de plusieurs travaux en didactique, notamment autour des distinctions entre surface, aire et périmètre. Les recommandations institutionnelles d'introduire d'abord l'aire sans la mesure sont aussi respectées. En revanche, l'introduction de l'unité de mesure d'aire conventionnelle (1 cm^2) semble moins uniformisée, en termes de sens donné au mesurage, à la multiplication, à l'unité de mesure, au nombre et aux formules. Dans le cadre d'une transition entre le cadre géométrique et les cadres arithmétique et algébrique, n'est pas facile et risque d'altérer négativement les efforts des programmes et des auteurs de manuels pour donner du sens à la mesure et à la grandeur.

En troisième lieu, les allers-retours entre les textes anciens et de didactique, ainsi que l'étude des manuels en fonction des dimensions que cette méthode identifie, posent des questions plus larges. Il semble qu'étudier l'unité de mesure en tant qu'objet central en didactique, dans les différents cadres et dans l'optique de favoriser les transitions, est une perspective particulièrement intéressante. Les travaux sur les savoirs de référence à transposer concernant la mesure et le choix du système métrique soulignent de plus, à quel point l'assimilation des objets est possible et créatrice d'implicites pour l'enseignement.

L'enseignement des unités de mesure peut être lié plus généralement avec l'enseignement de la dépendance fonctionnelle (c'est-à-dire des relations de dépendance des variables impliquées dans une formule) et de réductionnisme dimensionnel (Viennot, 1992 ; 1996)¹¹. Nous considérons donc l'introduction du raisonnement sur plusieurs variables, en lien avec un angle d'étude fonctionnel et non uniquement numérique. Viennot (1992) rappelle l'importance d'explicitier les règles du raisonnement sur plusieurs variables et de décider du moment de cette introduction dans l'enseignement, et non au gré des systèmes et concepts étudiés (pp. 139–140).

Cela suppose une détermination explicite et à longue échéance, puisque ce sont principalement des contenus spécifiques qui sont mentionnés dans nos livres d'enseignement, et qu'un objectif en termes d'aptitude de raisonnement peut sembler a priori décourageant, et d'une efficacité diffuse. Mais, pour qui adopte ces objectifs, des pistes d'action existent, même à propos de contenus tout à fait élémentaires : on peut commencer à travailler les dépendances multifonctionnelles dès qu'on connaît l'expression de la surface d'un rectangle. Et les enjeux correspondants sont d'une importance qui se passe de commentaires. (Viennot, 1992, pp. 139–140)

Il est important d'engager une réflexion collective sur l'enseignement progressif de l'unité de mesure et de ses notations, sur plusieurs niveaux d'enseignement, celle-ci étant impliquées plus généralement dans les équations aux dimensions, tout en favorisant les transitions inter-cadres entre géométrie, arithmétique et algèbre qui donnent du sens au concept et au mesurage¹².

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Selon Simon et Blume (1994),

- ARTIGUE, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281–308.
- BOUCHENY, G. & GUERINET, A. (1930). *L'arithmétique au cours élémentaire (1re et 2e année)*. Paris : Librairie Larousse.
- CHAMBRIS, C. (2007). Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire. *Repères-IREM*, (69), 5–31.
- CHAMBRIS, C. (2009). Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2^e et 3^e années de primaire). In C. Ouvrier-Buffet & M.-J. Perrin-Glorian (Eds.), *Approches plurielles en didactique des mathématiques. Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ?* (pp. 211–222). Paris : Laboratoire de didactique André Revuz.
- CLEMENTS, D. H. & BRIGHT, G. W. (2003). *Learning and teaching measurement* (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics). Reston : NCTM.
- COMITE COMMUN POUR LES GUIDES EN METROLOGIE. (2012). *Vocabulaire international de métrologie : concepts fondamentaux et généraux et termes associés (VIM) (3^e éd.)*. Consulté à l'adresse https://www.bipm.org/utis/common/documents/jcgm/JCGM_200_2012.pdf
- DE COURTENAY, N., DARRIGOL, O. & SCHLAUDT, O. (Eds.). (2019). *The reform of the International System of Units (SI): Philosophical, historical and sociological issues* [La réforme du système international des unités (SI): dimensions philosophiques, historiques et sociologiques]. Abingdon : Routledge.
- DE HOSSON, C. & SCHNEEBERGER, P. (2011). Orientations récentes du dialogue entre recherche en didactique et histoire des sciences. *Recherches en Didactique des Sciences et des Technologies*, (3), 9–20. <https://doi.org/10.4000/rdst.363>
- DE VARENT, C. (2018). *Pluralité des concepts liés aux unités de mesure : liens entre histoire des sciences et didactique, le cas de l'aire du carré dans une sélection de textes anciens* (Thèse de doctorat, université Sorbonne Paris Cité, Paris, France). Consulté à l'adresse <https://www.theses.fr/2018USPCC106>
- DE VARENT, C. (2023). La mesure entre géométrie et formules : l'aire du rectangle en CM2 – analyse de manuels scolaires. *Grand N*, (112), 25–63.
- DORIER, J.-L. (2000). Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire : perspective théorique sur leurs interactions. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz*, (12).
- DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (5), 37–65.
- MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE. (2016). *éduscol : grandeurs et mesures au cycle 3* (Publication n° 609168). Consulté à l'adresse http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/16/8/RA16_C3_MATH_grand_mesur_N.D_609168.pdf
- MUNIER, V. & PASSELAIGUE, D. (2012). Réflexions sur l'articulation entre didactique et épistémologie dans le domaine des grandeurs et mesures dans l'enseignement primaire et secondaire. *Trema*, (38), 106–147. <https://doi.org/10.4000/trema.2840>
- OUTHRED, L. & MITCHELMORE, M. (1992). Representation of area: A pictorial perspective [Les représentations de l'aire : une perspective picturale]. In W. Geeslin & K. Graham (Eds.), *Actes de la 16^e conférence PME* (Vol. 2, pp. 194–201). Durham : University of New Hampshire.
- OUTHRED, L. & MITCHELMORE, M. (1996). Children's intuitive understanding of area measurement [La compréhension intuitive de la mesure d'aire chez les enfants]. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Actes de la 21^e conférence PME* (Vol. 3, pp. 91–98). Valence : International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- PERRIN-GLORIAN, M.-J. (1989–1990). L'aire et la mesure. *Petit x*, (24), 5–36. Consulté à l'adresse https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/24x1_1570438041435-pdf
- PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2002). Problèmes didactiques liés à l'enseignement des grandeurs. Le cas des aires. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11^e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 299–315). Grenoble : La pensée sauvage.
- PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2004). Éclairages et questions pour la didactique des mathématiques : cadres et registres en jeu dans la résolution de problèmes en lien avec les connaissances des élèves et recherches sur l'action des enseignants en classe. *Revue Internationale de Didactique des Mathématiques*, (9), 67–82.
- PRESSIAT, A. (2002). Grandeurs et mesures : évolution des organisations mathématiques de référence et problèmes de transposition. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11^e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 283–293). Grenoble : La pensée sauvage.
- RODITI, E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques : entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris : Editions L'Harmattan.
- ROGALSKI-MURET, J. (1984). *Acquisition de la bidimensionalité (combinatoire, espace, mesure) chez les élèves d'âge scolaire et préscolaire* (Thèse de doctorat). Disponible sur HAL Thèses. (HAL Id n° tel-01267409)
- VERGNAUD, G. (Ed.). (1983). Didactique et acquisition du concept de volume. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(1), 9–25.
- VIENNOT, L. (1992). Raisonement à plusieurs variables : tendances de la pensée commune. *Aster*, (14), 127–141. <https://doi.org/10.4267/2042/9088>
- VIENNOT, L. (1996). *Raisonnement en physique : la part du sens commun*. Bruxelles : De Boeck Université.

MANUELS SCOLAIRES

Pour comprendre les mathématiques CM2

Manuel de l'élève :

NOUVELLE EDITION PROGRAMMES 2008, HACHETTE EDUCATION

AUTEURS : BLANC, J.-P., DEBU, P., GELY, J., LAFONT, E., PEYNICHOU, D., VARGAS, A.

HACHETTE EDUCATION EDITION NUMERO 4, DEPOT 2012, HACHETTE LIVRE 2008

Livre du maître :

« GUIDE PEDAGOGIQUE », NOUVELLE EDITION PROGRAMMES 2008, HACHETTE EDUCATION

EDITION NUMERO 2, DEPOT : 2011, HACHETTE LIVRE 2008

J'apprends les maths CM2

Manuel de l'élève :

NOUVELLE EDITION PROGRAMMES 2008, RETZ

AUTEURS : BRISSIAUD, R. (DIRECTION), CLERC, P., LELIEVRE, F., OUZOULIAS, A.

EDITION NUMERO 3, DEPOT 2010 (PRESENTE EDITION), RETZ 2007 (PREMIERE EDITION)

Livre du maître :

« LIVRE DU MAÎTRE », NOUVELLE EDITION PROGRAMMES 2008, RETZ

EDITION NUMERO 3, DEPOT 2010 (PRESENTE EDITION),