



HAL
open science

Conditions aux limites fortement non linéaires pour les équations d'Euler de la dynamique des gaz

François Dubois

► **To cite this version:**

François Dubois. Conditions aux limites fortement non linéaires pour les équations d'Euler de la dynamique des gaz. 1988. hal-04699670

HAL Id: hal-04699670

<https://hal.science/hal-04699670v1>

Submitted on 17 Sep 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Conditions aux limites fortement non linéaires pour les équations d'Euler de la dynamique des gaz

François Dubois^a

^a *Aérospatiale, Division Systèmes Stratégiques et Spatiaux, Les Mureaux, France.*

octobre 1988 *

Keywords: équations aux dérivées partielles, systèmes hyperboliques, problème de Riemann
AMS classification: 76M12.

Abstract

We study various formulations of the boundary conditions for the Euler equations of gas dynamics from a mathematical and numerical point of view. In the case of one space dimension, we recall the classical results, based on an analysis of the linearized problem. Then we present a more recent formulation of the problem, which allows for nonlinear effects at the boundary of the study domain. This formulation fits naturally into a finite volume discretization, and we present a significant one-dimensional test case.

Résumé

Nous étudions diverses formulations des conditions aux limites pour les équations d'Euler de la dynamique des gaz d'un point de vue mathématique et numérique. Dans le cas d'une dimension d'espace, nous rappelons les résultats classiques, fondés sur une analyse du problème linéarisé et nous présentons une formulation plus récente du problème, qui autorise la prise en compte d'effets non linéaires importants au bord du domaine d'étude. Cette formulation s'insère naturellement dans une discrétisation par la méthode des volumes finis et nous présentons un cas test monodimensionnel significatif.

* Proposé avec le titre "Conditions aux limites fortement non linéaires" pour le cours CEA-EDF-INRIA sur les "Méthodes de différences finies et équations hyperboliques", organisé par Pierre-Louis Lions à l'INRIA Rocquencourt du 29 novembre au 02 décembre 1988. Édition septembre 2024.

1) Introduction

• Les équations d'Euler de la dynamique des gaz constituent un système hyperbolique non linéaire de lois de conservation. Nous pouvons les écrire sous cette forme dans le cas de deux dimensions spatiales par exemple :

$$(1.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) + \frac{\partial}{\partial y} g(W) = 0$$

avec des variables conservatives W et des flux $f(W)$, $g(W)$ donnés par :

$$(1.2) \quad W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^t$$

$$(1.3) \quad f(W) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u v, \rho u E + p u)^t$$

$$(1.4) \quad g(W) = (\rho v, \rho u v, \rho v^2 + p, \rho v E + p v)^t$$

où ρ (respectivement u, v, E, p) désigne la densité (respectivement les deux composantes de la vitesse, l'énergie totale spécifique et la pression). Il suffit de se donner la pression comme fonction des variables conservatives pour définir complètement le système hyperbolique (1.1) ; nous choisissons simplement une loi d'état de gaz parfait polytropique :

$$(1.5) \quad p = (\gamma - 1) \rho \left(E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right).$$

• Le problème de Cauchy posé sur \mathbb{R}^2 pour le système (1.1) associé à la condition initiale

$$(1.6) \quad W(0, x, y) = W_0(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

n'a fait, à notre connaissance, l'objet d'aucun résultat d'existence globale en temps, même pour des données W_0 régulières. Il en est de même pour le problème de Cauchy (1.1)(1.6) posé à une seule dimension d'espace. Nous devons donc aborder le problème aux limites posé sur un domaine Ω de \mathbb{R}^2 :

$$(1.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) + \frac{\partial}{\partial y} g(W) = 0 & t \geq 0, \quad (x, y) \in \Omega \\ W(0, x, y) = W_0(x, y) & t = 0, \quad (x, y) \in \Omega \\ \text{Condition limite } (W(t, x, y)) = 0 & t \geq 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

avec prudence. Pourtant, c'est bien une approximation de "la" solution du problème aux limites (1.7) que cherche l'ingénieur, dans un domaine Ω qui est souvent **non borné**.

• La difficulté mathématique de l'étude du problème (1.1)(1.6) est liée à la présence d'**ondes non linéaires** qui imposent une étude en termes de solutions faibles (voir par exemple Lax [La73] ou Smoller [Sm83]). De plus, l'unicité des solutions faibles est en général en défaut et une **inégalité d'entropie** doit être ajoutée afin d'exclure des solutions physiquement non admissibles telles que les chocs de détente par exemple (Germain-Bader [GB53], Oleinik [Ol57], Godunov [Go61], Lax [La71]). Le problème aux limites (1.7) n'est quant à lui parfaitement compris mathématiquement que dans le cas **linéaire** (Kreiss [Kr70], Higdon [Hi86] et les références citées).

• L'approche numérique pose par ailleurs un problème pratique important : les schémas aux différences les plus classiques (Lax-Wendroff [LW60], Mac Cormack [Mc69]) proposent

un calcul **centré** des approximations des dérivées en espace qui permettent d'incrémenter en temps les valeurs $W_{i,j}$ grâce aux valeurs $W_{i+1,j+1}$, $W_{i,j+1}$, $W_{i-1,j+1}$, \dots situées dans un **voisinage discret** du point de grille (i, j) . Il est donc nécessaire d'introduire un "schéma à la limite" pour incrémenter les valeurs $W_{i,j}$ situées au bord du domaine de calcul (voir par exemple Richtmyer-Morton [RM67]). La situation est même paradoxale : dans certaines situations physiquement bien déterminées (entrée ou sortie subsonique par exemple), les études linéaires montrent que le problème est bien posé avec moins de conditions limites que le système (1.1) ne compte d'équations (voir par exemple Olinger-Sundström [OS78], Yee-Beam-Warming [YBW82] ou Gustafsson [Gu85]). Les conditions aux limites supplémentaires doivent également être telles que le schéma **global** (*i.e.* le schéma à l'intérieur et le schéma à la limite) reste stable. Le travail classique de Gustafsson, Kreiss et Sundström [GKS72] a permis de développer une méthode d'analyse de la stabilité des schémas aux différences finies pour des systèmes hyperboliques **linéaires**.

- Dans ces notes de cours, nous nous limiterons essentiellement à des problèmes **monodimensionnels**, ce qui correspond pour le problème aux limites (1.7) à une analyse dans la direction normale à la frontière. Dans une première partie, nous étudions le problème continu. Au cours d'une seconde partie, nous nous intéressons aux schémas numériques existants pour l'écriture de conditions aux limites linéaires ou non. Enfin nous proposons une méthode de type volumes finis qui étend très simplement l'approche originale de Godunov [Go59] (voir aussi Godunov *et al.* [GZIKP79]) et permet la prise en compte de fortes non-linéarités à la frontière du domaine de calcul.

2) Etude du problème continu

2.1) Quelques rappels élémentaires

- Nous réécrivons le système (1.1) des équations d'Euler dans le cas d'une seule dimension d'espace. La composante v de la vitesse est identiquement nulle et l'on a simplement :

$$(2.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) = 0$$

avec

$$(2.2) \quad W = (\rho, \rho u, \rho E)^t$$

$$(2.3) \quad f(W) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u E + pu)^t.$$

La pression est calculée grâce à la loi d'état (1.5). Il est utile d'écrire (2.1) sous forme **non conservative** et nous choisissons pour cela les variables V définies par :

$$(2.4) \quad V = (\rho, u, S)^t.$$

L'entropie spécifique adimensionnalisée S est reliée aux autres variables thermodynamiques ρ, p par la relation :

$$(2.5) \quad p = S \rho^\gamma$$

(voir les textes classiques tels que Courant-Friedrichs [CF48] ou Landau-Lifchitz [LL54]) et le système (2.1) s'écrit sous forme équivalente

$$(2.6) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + A(V) \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

lorsque la solution $V(t, x)$ est régulière. Nous avons :

$$(2.7) \quad A(V) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial S} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

La célérité du son c , définie par

$$(2.8) \quad c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, S)} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

intervient dans le calcul des valeurs propres $\lambda_j(W)$ de la matrices $A(V)$:

$$(2.9) \quad \lambda_1(W) \equiv u - c < \lambda_2(W) \equiv u < \lambda_3(W) \equiv u + c.$$

Les vecteurs propres associés à ces valeurs propres se calculent facilement :

$$(2.10) \quad r_1(V) = \begin{pmatrix} \rho \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r_2(V) = \begin{pmatrix} \partial p / \partial S \\ 0 \\ -c^2 \end{pmatrix}; \quad r_3(V) = \begin{pmatrix} \rho \\ c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

• Le **problème de Riemann** $R(W_g, W_d)$ associé au système (2.1) est un problème de Cauchy particulier ; la condition initiale est composée de deux états constants :

$$(2.11) \quad W_0(x) = \begin{cases} W_g & x < 0 \\ W_d & x > 0. \end{cases}$$

La solution entropique de ce problème est constituée d'ondes de choc, d'ondes de détente et d'une discontinuité de contact, séparés par au plus deux états constants (voir par exemple Courant-Friedrichs [CF48], Landau-Lifchitz [LL54], Godunov *et al.* [GZIKP79]). Rappelons que le long d'une détente, les invariants de Riemann associés sont constants, *i.e.*

$$(2.12) \quad w_1^1 = S; \quad w_2^1 = u + \frac{2}{\gamma-1} c \quad \text{1-détente}$$

$$(2.13) \quad w_1^2 = u; \quad w_2^2 = p \quad \text{2 -discontinuité de contact}$$

$$(2.14) \quad w_1^3 = S; \quad w_2^3 = u - \frac{2}{\gamma-1} c \quad \text{3 -détente.}$$

Rappelons également que le long d'une telle détente, $W = W(x/t)$ est une solution autosemblable qui satisfait à l'équation différentielle :

$$(2.15) \quad \frac{d}{d\left(\frac{x}{t}\right)} \left(W\left(\frac{x}{t}\right) \right) = r_j \left(W\left(\frac{x}{t}\right) \right) \quad j = 1 \text{ ou } 3.$$

A travers une onde de choc ou une discontinuité de contact de célérité σ , on a les relations de Rankine-Hugoniot :

$$(2.16) \quad [f(W)] = \sigma [W].$$

Rappelons que le champ numéro 2 (linéairement dégénéré) peut être vu à la fois comme un choc et une détente. La solution du problème de Riemann consiste à construire trois j -courbes $U_j(W)$ dans l'espace des phases (ou des états) au voisinage de chaque état W :

$$(2.17) \quad \begin{cases} W \in U_j(W) \\ \forall W' \in U_j(W), \text{ la solution de } R(W, W') \text{ ou de } R(W', W) \\ \text{est une onde simple décrite plus haut.} \end{cases}$$

Les états intermédiaires W_1 et W_2 sont alors définis de sorte que

$$(2.18) \quad W_1 \in U_1(W_g); \quad W_2 \in U_2(W_1); \quad W_d \in U_3(W_2).$$

Pour plus de détails concernant les courbes $U_j(\bullet)$, nous renvoyons à Lax [La73] ou Smoller [Sm83].

2.2) Système des équations d'Euler linéarisées

• La plupart des résultats existants concernent les équations hyperboliques linéaires. Nous linéarisons donc les équations d'Euler autour d'un **état constant** \bar{W} en posant :

$$(2.19) \quad W = \bar{W} + W'$$

et en négligeant les termes du second ordre en W' dans le système obtenu. Les résultats les plus simples résultent de la forme (2.6) des équations et l'on obtient :

$$(2.20) \quad \frac{\partial V'}{\partial t} + A(\bar{V}) \frac{\partial V'}{\partial x} = B(\bar{V}, V').$$

On peut alors poursuivre l'étude de ce système en diagonalisant la matrice $A(\bar{V})$. Nous notons φ_j les coordonnées de la perturbation V' dans la base (fixe) des vecteurs propres $r_j(\bar{V})$:

$$(2.21) \quad V' = \sum_{j=1}^3 \varphi_j r_j(\bar{V})$$

et l'on a :

$$(2.22) \quad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2\bar{\rho}\bar{c}^2} (p' - \bar{\rho}\bar{c}u') \\ \varphi_2 = -\frac{1}{\bar{c}^2} S' \\ \varphi_3 = \frac{1}{2\bar{\rho}\bar{c}^2} (p' + \bar{\rho}\bar{c}u'). \end{cases}$$

• La différence de pression p' est donnée selon la relation linéarisée :

$$(2.23) \quad p' \equiv p - \bar{p} = \frac{\partial p}{\partial S}(\bar{W}) S' + \bar{c}^2 \rho'.$$

Le changement de variables $V' \mapsto \varphi$ permet de découpler le membre de gauche de la relation (2.20) sous la forme de trois équations d'advection :

$$(2.24) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Lambda(\bar{W}) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = C(\bar{W}, \varphi)$$

où $\Lambda(\bar{W}) = \text{diag}(\bar{u} - \bar{c}, \bar{u}, \bar{u} + \bar{c})$. Le couplage entre les composantes de φ est uniquement réalisé par le second membre $C(\bar{W}, \varphi)$, qui est un opérateur non différentiel. Le système (2.24) est appelé dans la suite "système des équations d'Euler sous forme caractéristique" et les variables φ définies en (2.22) sont les "variables caractéristiques". L'intérêt essentiel de cette démarche est qu'on a ramené, dans le cas linéarisé, le système des équations d'Euler à une forme classique.

2.3) Problème aux limites pour un système hyperbolique linéaire

• Dans un article devenu classique, Kreiss [Kr70] introduit une notion de "problème bien posé" pour l'étude du problème aux limites associé au système (2.24) dans le "quart d'espace"

$t \geq 0, x \geq 0$. Nous notons Λ^I (respectivement Λ^{II}) la matrice diagonale obtenue à partir de $\Lambda(\bar{W})$ en ne conservant que les valeurs propres positives (respectivement négatives), donc nous supposons ici $\bar{u} \neq 0$. Nous décomposons également les variables caractéristiques φ sous la forme

$$(2.25) \quad \varphi = (\varphi^I, \varphi^{II})$$

de façon à utiliser les notations de Kreiss. La condition limite en $x = 0$ est écrite sous la forme

$$(2.26) \quad \varphi^I = \Sigma \varphi^{II} + g \quad t \geq 0, x \geq 0$$

et la condition initiale est simplement

$$(2.27) \quad \varphi(0, x) = \varphi_0(x) \quad t = 0, x \geq 0.$$

Le système (2.24) associé à la condition (2.26) et à la condition initiale (2.27) (l’"IVBP" (2.24)(2.26)(2.27) de façon plus concise) est alors **bien posé** dans L^2 , au sens de Kreiss.

- La condition limite (2.26) s’interprète en termes de **directions caractéristiques** : le champ φ le long des caractéristiques entrantes est une **fonction affine** des composantes le long des caractéristiques sortant du domaine d’étude. Nous insistons sur le fait que le résultat précédent peut s’étendre dans diverses directions. En particulier le cas multidimensionnel (beaucoup plus complexe) peut être abordé à l’aide des mêmes concepts : la direction x doit alors être remplacée par la normale au domaine Ω (voir par exemple Higdon [Hi86]). Dans le cas où la vitesse de référence \bar{u} est nulle (frontière caractéristique) les résultats de Kreiss ont été étendus par Majda-Osher [MO75].

- Pour la mise en œuvre pratique de la condition limite (2.26), on distingue habituellement quatre cas selon que la vitesse \bar{u} est positive (entrée) ou négative (sortie), de module supérieur à la célérité du son (supersonique) ou inférieur (subsonique).

(i) Entrée supersonique ($\bar{u} > \bar{c}$).

La composante “sortante” de φ , à savoir φ^{II} , est nulle et la relation (2.26) revient à se donner toutes les composantes de φ .

(ii) Entrée subsonique ($0 < \bar{u} < \bar{c}$).

On dispose de deux caractéristiques entrantes φ^I et d’une caractéristique sortante φ^{II} . Le problème linéarisé est donc bien posé lorsqu’on se donne l’un des couples suivants (*c.f.* Olinger-Sundström [OS78] ou Yee-Beam-Warming [YBW82]) : (densité, pression), (vitesse, pression) ou (enthalpie, entropie).

(iii) Sortie subsonique ($-\bar{c} < \bar{u} < 0$).

Une seule caractéristique entre dans le domaine de calcul et deux sont sortantes. Il est classique de se donner la pression ou la vitesse de sortie. Remarquons que le choix d’une pression imposée $p = \bar{p}$ s’écrit après linéarisation autour de $\bar{V} = (\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{p})^t$:

$$(2.28) \quad p' = 0$$

ce qui revient, dans la relation (2.26), à prendre

$$(2.29) \quad \Sigma = (-1, 0), \quad g = 0.$$

(iv) Sortie supersonique ($\bar{u} < -\bar{c}$).

Toutes les caractéristiques sont sortantes ($\varphi^I = 0$), donc aucune information n'est contenue dans la relation (2.26) ; aucune "condition analytique" n'est nécessaire dans ce cas.

- Aux quatre cas précédents, il convient de rajouter le cas singulier où $\bar{u} = 0$ qui correspond physiquement à une paroi solide. On montre (Oliger-Sundström [OS78] par exemple) que le problème aux limites (2.24)(2.27)(2.30) est bien posé dans L^2 avec la condition naturelle

$$(2.30) \quad u' = 0$$

qui revient à imposer l'imperméabilité de la paroi pour les équations linéarisées. Remarquons que (2.30) peut également s'écrire sous la forme (2.26) avec le choix

$$(2.31) \quad \Sigma = (1, 0), \quad g = 0.$$

2.4) Problème aux limites dans le cas non linéaire

- Les équations d'Euler sont abordées théoriquement dans le cas monodimensionnel à l'aide de deux approches mathématiques : la méthode de Glimm (Glimm [Gl65]) et la compacité par compensation (DiPerna [DP83]). La compacité par compensation permet à notre connaissance de n'aborder que des systèmes hyperboliques de deux équations seulement et aucune étude d'un problème aux limites fondée sur cette technique n'a encore été proposée. La méthode de Glimm permet de prouver l'existence de solutions entropiques pour le problème de Cauchy (1.1)(1.6) posé sur \mathbb{R} (*i.e.* $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$) pour un système hyperbolique quelconque lorsque la condition initiale est proche d'un état \bar{W} fixé. Il est donc naturel de faire la même hypothèse lorsqu'on s'intéresse au problème aux limites. L'analyse du nombre de conditions scalaires à imposer, développée au paragraphe précédent, a permis de formuler de façon raisonnable les conditions aux limites. Cette approche a été suivie par Nishida-Smoller [NS77] et Liu [Li77] lors de leur étude du p -système de la dynamique des gaz isentropiques. Ces auteurs montrent que, associée à une condition limite sur la pression ou la vitesse, la méthode de Glimm converge lorsque le pas du maillage tend vers zéro. Le choix d'une condition limite, écrite sous forme **forte**, résulte de l'analyse du système linéarisé. On peut donc la qualifier de "faiblement non linéaire".

- Le cas d'une inconnue w **scalaire** est très intéressant puisqu'on dispose d'un théorème d'existence et d'unicité pour le problème de Cauchy (posé dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2) (Kružkov [Kv70]). Le problème aux limites correspondant a été abordé par Bardos-Leroux-Nédélec [BLN79]. Cette étude a été généralisée aux systèmes, mais en se restreignant au cas monodimensionnel dans notre travail avec Philippe Le Floch [DL88]. De façon précise, nous montrons que sous des hypothèses raisonnables de convergence, la limite w de l'approximation visqueuse w^ϵ solution du problème parabolique suivant :

$$(2.32) \quad \begin{cases} \frac{\partial w^\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w^\epsilon) = \epsilon \frac{\partial^2 w^\epsilon}{\partial x^2} & x > 0, \quad t > 0 \\ w^\epsilon(0, x) = v_0(x) & x > 0 \\ w^\epsilon(t, 0) = u_0(t) & t > 0 \end{cases}$$

vérifie au bord du domaine une **inégalité d'entropie**, pour tout couple (η, ξ) d'entropie-flux au sens de Lax [La71] :

$$(2.33) \quad \xi(w(t, 0^+)) - \xi(w_0(t)) - d\eta(w_0(t)) \bullet (f(w(t, 0^+)) - f(w_0(t))) \leq 0$$

avec $w(t, 0^+) = \lim_{x \rightarrow 0} w(t, x)$.

- Cette inégalité généralise au cas des systèmes hyperboliques l'approche proposée initialement par Bardos-Leroux-Nédélec [BLN79] pour les lois de conservation scalaires et dans le cas où η est une entropie de Kruřkov : $\eta(w) = |w - k|$. Elle a également été obtenue indépendamment dans le cas général par Audounet [Au84] et Mazet *et al.* [MBGB87] à partir d'une formulation variationnelle entropique des équations d'Euler. Dans le cas d'une équation scalaire avec poids, nous renvoyons à Le Floch et Nédélec [LN88]. Nous proposons ici, comme dans [DL88] de **définir** la condition limite par la relation

$$(2.34) \quad w(t, 0^+) \in \mathcal{E}(w_0(t)), \quad t > 0$$

où l'ensemble limite $\mathcal{E}(w_0)$ associé à la "condition limite" W_0 est défini par :

$$(2.35) \quad \mathcal{E}(w_0) = \left\{ w / \begin{array}{l} \xi(w) - \xi(w_0) - d\eta(w_0) \bullet (f(w) - f(w_0)) \leq 0 \\ \forall (\eta, \xi) \text{ couple entropie-flux au sens de Lax} \end{array} \right\};$$

cette notion de condition à la limite constitue une extension de la condition de Dirichlet habituelle.

- Pour un système hyperbolique linéaire, le choix d'une entropie particulière permet de montrer que l'inégalité d'entropie à la limite (2.33) est équivalente à la condition classique (2.26) avec le choix $\Sigma = 0$ (pas de réflexion d'onde). Nous le détaillons pour l'équation d'**advection**

$$(2.36) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w(t, x) \in \mathbb{R}$$

qui admet le couple entropie-flux $(\eta, \xi) = (w^2, a w^2)$. L'inégalité (2.33) s'écrit alors dans ce cas particulier

$$(2.37) \quad a(w - w_0)^2 \leq 0$$

et nous pouvons en déduire facilement la discussion classique sur le nombre de conditions aux limites du paragraphe 2.

- Le cas de l'équation de Burgers ($f(w) = w^2/2, w \in \mathbb{R}$) permet de calculer complètement l'ensemble $\mathcal{E}(w_0)$ (voir aussi Le Floch [LF88]) et l'on a :

$$(2.38) \quad \mathcal{E}(w_0) = \begin{cases}] - \infty, -w_0] \cup \{w_0\} & w_0 \geq 0 \\] - \infty, 0] & w_0 \leq 0. \end{cases}$$

Nous lisons la relation (2.38) de la façon suivante : lorsque w_0 est strictement positif (entrée "supersonique" en mécanique de Burgers) et l'état limite w "proche" de celui-ci, alors w est égal à w_0 et l'étude linéarisée du problème à la limite (qui revient dans ce cas à étudier l'équation d'advection) fournit la bonne condition. Lorsque w est "assez loin" (*i.e.* $|w - w_0| > 2w_0$) on peut accepter à la limite des états "sortants" et la condition d'entropie (2.34)(2.35) s'avère "fortement non linéaire".

CONDITIONS AUX LIMITES FORTEMENT NON LINÉAIRES

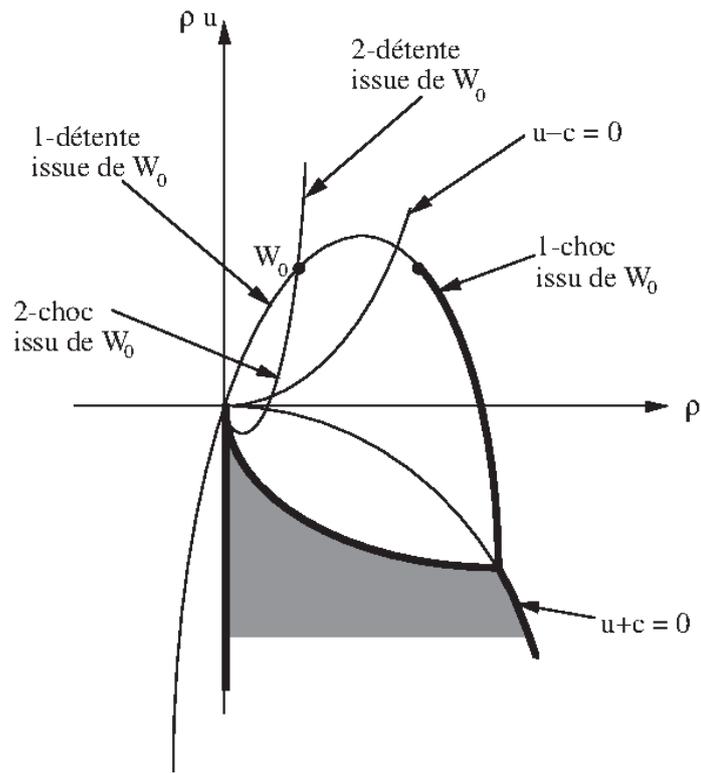


Figure 1. Ensemble limite $\mathcal{V}(W_0)$ [représenté en trait fort et à l'aide des zones grisées] pour les équations d'Euler-Saint Venant de la dynamique des gaz dans l'approximation isentropique. Cas d'une entrée supersonique.

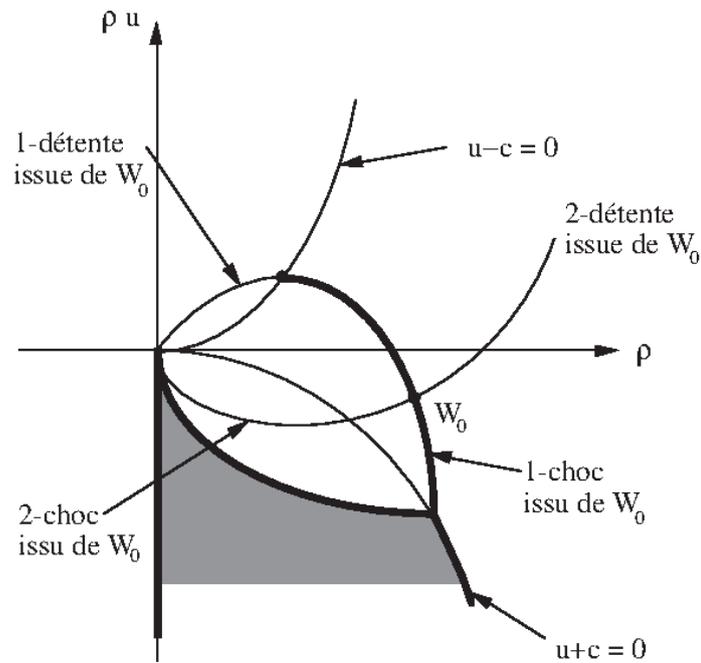


Figure 2. Ensemble limite $\mathcal{V}(W_0)$ [représenté en trait fort et à l'aide des zones grisées] pour les équations d'Euler-Saint Venant de la dynamique des gaz dans l'approximation isentropique. Cas d'une sortie subsonique ; le cas d'une entrée subsonique est analogue.

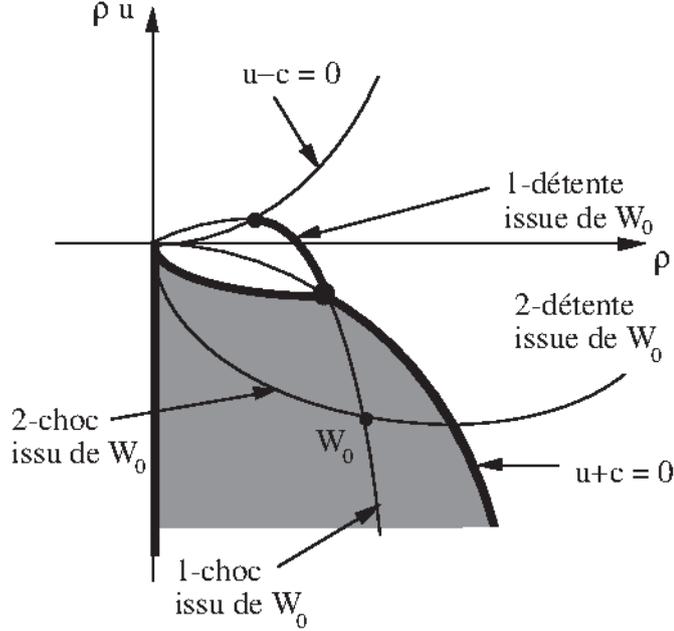


Figure 3. Ensemble limite $\mathcal{V}(W_0)$ [représenté en trait fort et à l'aide des zones grisées] pour les équations d'Euler-Saint Venant de la dynamique des gaz dans l'approximation isentropique. Cas d'une sortie supersonique de nombre de Mach inférieur à $\frac{2}{\gamma-1}$.

- Dans le cas d'un système général de lois de conservation, l'explicitation de l'ensemble limite échoue car il est très difficile de manipuler pratiquement toutes les entropies η . Notons toutefois que pour le p -système (défini par exemple dans Lax [La73]), Benabdallah-Serre [BS87] ont obtenu un régionnement non trivial de l'ensemble $\mathcal{E}(w_0)$.

- Nous avons par ailleurs remarqué que dans les cas particuliers d'une équation **scalaire** (non nécessairement convexe) et d'un **système hyperbolique linéaire**, l'ensemble limite $\mathcal{E}(w_0)$ est caractérisé simplement à l'aide du **problème de Riemann** (*c.f.* partie 1 et [DL87]) :

$$(2.39) \quad \mathcal{E}(w_0) = \mathcal{V}(w_0) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{valeurs en } \frac{x}{t} = 0^+ \text{ de la solution entropique} \\ \text{du problème de Riemann } R(w_0, w), w \text{ variant} \end{array} \right\}.$$

Une seconde formulation de la condition limite s'écrit alors simplement [DL87] :

$$(2.40) \quad w(t, 0^+) \in \mathcal{V}(w_0(t)) \quad t > 0.$$

Elle a l'avantage d'introduire un ensemble limite $\mathcal{V}(w_0)$ **calculable explicitement**. Remarquons que Benabdallah-Serre [BS87] ont montré que l'inclusion

$$(2.41) \quad \mathcal{V}(w_0) \subset \mathcal{E}(w_0)$$

est toujours satisfaite, mais que l'égalité (2.39) peut être en défaut. Par ailleurs, Dubroca-Gallice [DG88] ont montré que la méthode de Glimm converge lorsqu'on l'associe à la

première condition limite (2.34) et que pour le p -système, la condition plus restrictive (2.40) conduit également à un problème bien posé.

- Avec Philippe Le Floch [DL87], nous avons calculé et représenté graphiquement l'ensemble $\mathcal{V}(w_0)$ dans le cas des équations d'Euler-Saint Venant de la dynamique des gaz **isentropiques** ainsi qu'illustré aux figures 1 à 3. Même lorsque l'état w_0 correspond à une entrée supersonique (figure 1), l'ensemble admissible $\mathcal{V}(w_0)$ n'est réduit à $\{w_0\}$ que dans un **voisinage** de w_0 , ce qui correspond à l'approche linéarisée. L'état w_0 peut être relié à l'état $w(t, 0^+)$ par un 1-choc, ou bien $w(t, 0^+)$ peut correspondre à une sortie supersonique (!).

- L'utilisation du problème de Riemann pour formuler la condition limite conduit à un problème bien posé lorsque les données w_0 et v_0 sont des états constants :

$$(2.42) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) = 0 & x > 0, \quad t > 0 \\ w(0, x) = v_0 & x > 0 \\ w(t, 0^+) \in \mathcal{V}(w_0) & t > 0. \end{cases}$$

Nous pouvons par ailleurs envisager de fortes non linéarités et pour les équations d'Euler, seuls les problèmes d'apparition du vide limitent la construction de la solution du problème de Riemann $R(w_g, w_d)$. De plus, le calcul des points frontières utilise alors les mêmes outils que le calcul des points intérieurs, comme nous l'étudions dans la seconde partie.

3) Discrétisation des conditions aux limites

3.1) Différences finies ou volumes finis ?

- Nous notons Δx (respectivement Δt) le pas d'espace (respectivement de temps), supposé uniforme, en vue de l'écriture sous forme discrète de l'équation (2.1). Les schémas conservatifs sont fondés sur une écriture des équations sous forme intégrale :

$$(3.1) \quad \frac{1}{\Delta t} \left(W_j^{n+1} - W_j^n \right) + \frac{1}{\Delta x} \left(f_{j+1/2} - f_{j-1/2} \right) = 0$$

et pour les points intérieurs au domaine de calcul, W_j^n représente une approximation de la valeur ponctuelle de W au temps $t^n = n \Delta t$ et au point x_j aussi bien que la valeur moyenne du champ $W(t^n, \bullet)$ sur un intervalle de mesure $h = \Delta x$ autour du point x_j . On peut raisonnablement dire que les deux méthodes coïncident dans ce cas.

- Lorsqu'on se place sur un intervalle borné (figure 4), les deux méthodes conduisent à des problèmes spécifiques. Avec la méthode des différences finies, on construit en général un "schéma frontière" **différent** du schéma (3.1), alors que la méthode des volumes finis traite les cellules du bord comme les autres et ne demande qu'une évaluation du **flux frontière**. Nous détaillons ces deux approches dans les paragraphes qui suivent, en étudiant successivement le cas des équations d'Euler **linéarisées**, le cas d'une paroi et enfin celui d'une frontière fluide. La précision des méthodes proposées est variable selon les problèmes et les méthodes utilisées. La méthode des différences finies permet l'écriture de schémas au besoin très précis

alors que celle des volumes finis dégénère au premier ordre dans la plupart des exemples que nous proposons.

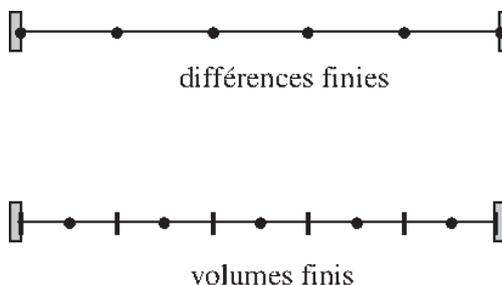


Figure 4. Points de calcul pour la résolution des équations d’Euler par la méthode des différences finies (en haut) : $x_j = j h$ et celle des volumes finis (en bas) : $x_j = (j + 1/2) h$.

3.2) Equations d’Euler linéarisées

• Nous nous limitons à la frontière de gauche (située en $x = 0$) d’un domaine de calcul $\{x > 0\}$. Une condition du type (2.26), *i.e.*

$$(3.2) \quad \varphi^I = \Sigma \varphi^{II} + g \quad t \geq 0, \quad x = 0$$

entre les variables caractéristiques entrantes φ^I et sortantes φ^{II} assure p relations à la frontière (où p est le nombre de valeurs propres positives de (2.24), *i.e.* le nombre de composantes de φ^I).

• La méthode des différences finies demande donc $(n - p)$ relations supplémentaires qui constituent les “conditions aux limites numériques” à ajouter aux relations (3.2) pour calculer l’état au bord. Diverses méthodes classiques (extrapolation en espace, en espace-temps, schéma décentré au bord, etc...) sont d’utilisation courante (voir par exemple Yee, Beam et Warming [YBW82] ou Cambier, Escande et Veillot [CEV86]) et conduisent à des schémas bien posés au sens de la stabilité GKS (voir par exemple Goldberg-Tadmor [GT87] et les références incluses). Nous détaillons ici le procédé qui nous semble le plus satisfaisant, celui des **relations de compatibilité** (Viviand-Veillot [VV78], voir aussi Bramley-Sloan [BS77] et Kentzer [Ke71]).

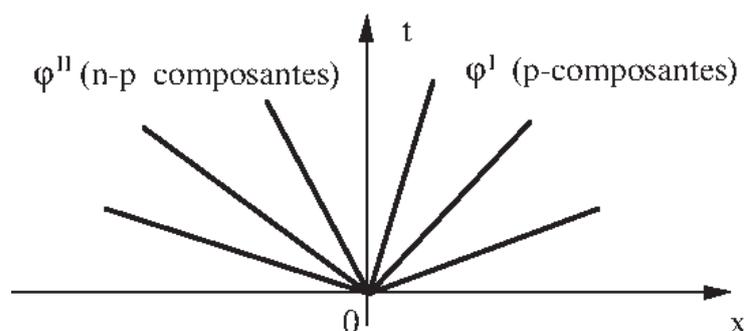


Figure 5. Directions caractéristiques au bord du domaine de calcul.

- Les relations de compatibilité reviennent, dans le cas linéaire, à discrétiser les équations du système (2.24) qui correspondent aux **ondes sortantes** (composantes φ^{II}) ; on obtient ainsi $n - p$ équations d’advection :

$$(3.3) \quad \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial t} + \Lambda^{II}(\overline{W}) \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial x} = P^{II} C(\overline{W}, \varphi)$$

où P^{II} est le projecteur associé aux variables φ^{II} dans la décomposition (2.25) (figure 5). Le schéma final se déduit de (3.2)(3.3) : une discrétisation **décentrée** de la dérivée spatiale $\frac{\partial}{\partial x}$ présente au sein de la relation (3.3) permet de calculer φ^{II} en $x = 0$ au temps t^{n+1} à partir de φ au temps t^n et la relation (3.2) achève la construction. L’évaluation des dérivées spatiales à l’instant t^{n+1} conduit à divers schémas implicites à la frontière (voir par exemple Yee, Beam et Warming [YBW82]).

- La méthode des volumes finis s’applique sans modification essentielle au bord de Ω ; il suffit de prendre $j = 1$ dans la relation (3.1) qui définit le schéma. Le flux aux interfaces est évalué de façon **décentrée** par une méthode d’ordre un de Godunov [Go59] ou d’ordre deux de Van Leer [VL79]. A la paroi, le flux $f_{j+1/2}$ est calculé de façon à prendre en compte la relation (3.2) :

$$(3.4) \quad f_{1/2} = \Lambda^+(\overline{W}) (\Sigma \varphi_1^{II} + g) + \Lambda^-(\overline{W}) \varphi_1^{II}$$

où φ_1^{II} désigne la composante numéro II de l’état W_1 ou bien une valeur extrapolée en $x = 0^+$ du champ à partir des valeurs dans les premières mailles (pour les calculs d’ordre deux). Remarquons que l’écriture (3.4) de la condition limite (3.2) **affaiblit** cette dernière puisque seul le flux numérique utilise la condition à la limite. Notons également que l’état paroi qui permet d’évaluer le flux grâce à la relation (3.4) résulte d’une extrapolation en espace des variables sortantes φ^{II} et d’un calcul des variables entrantes φ^I à partir de la relation (3.2), avant l’incrémenter en temps (3.1), alors que l’approche par la méthode des différences finies jointe aux relations de compatibilité revient à coupler les deux étapes pour les composantes sortantes, avant de recalculer φ^{II} grâce à la condition limite (3.2). L’avantage de l’approche “volumes finis” pour les calculs frontières tient au fait qu’aucun schéma numérique supplémentaire n’est nécessaire (pour les calculs au premier ordre en espace au moins !) pour prendre en compte la frontière, comme l’avaient remarqué Godunov *et al.* [GZIKP79] et Rizzi [Ri81] par exemple. Signalons aussi que les études théoriques de stabilité à la frontière sont beaucoup moins développées avec cette approche qu’avec l’approche “différences finies” classique.

3.3) Frontière fluide

- Comme on l’a vu dans la première partie, on distingue classiquement quatre cas selon le type d’écoulement à la frontière, c’est à dire le nombre p de composantes de φ^I . L’approche aux différences finies remplace la relation (3.2) par p relations **non linéaires** adaptées au problème, *i.e.* état imposé, enthalpie totale et entropie imposées, pression imposée ou pas de relation pour les quatre cas classiques :

$$(3.5) \quad B(W) = 0 \quad (p \text{ relations non linéaires}).$$

Les $(n - p)$ relations supplémentaires sont le plus souvent issues des **relations de compatibilité** (Viviand-Veuillot [VV78]) : le système (2.1) admet des vecteurs propres $r_j(W)$ (2.10) et des formes linéaires propres $\ell_j(W)$ (ou “vecteurs propres à gauche” ; $\ell_j(W)^t$ est en fait vecteur propre de $A(W)^t$), définies par les relations

$$(3.6) \quad \ell_j(W) \bullet A(W) = \lambda_j(W) \ell_j(W).$$

Le système (2.1) est réécrit sous la forme non conservative équivalente

$$(3.7) \quad \ell_j(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial t} + \lambda_j(W) \ell_j(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

qui constitue l’ensemble des relations de compatibilité sous forme non linéaire. On ne conserve pour définir le schéma limite que les indices j qui correspondent à des directions caractéristiques sortantes ($j = 1, \dots, n - p$) et l’on a en définitive :

$$(3.8) \quad \begin{cases} B_j(W) = 0 & j = 1, \dots, p \\ \ell_j(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial t} + \lambda_j(W) \ell_j(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial x} = 0 & j = 1, \dots, n - p. \end{cases}$$

Lorsqu’on utilise la valeur de grille W_0^n (sur la frontière du domaine de calcul) dans l’expression de la forme linéaire ℓ_j [on approche $\ell_j(W)$ par $\ell_j(W_0^n)$], les relations (3.7) sont identiques aux relations (3.3) linéarisées et fournissent les schémas explicites les plus utilisés (Viviand-Veuillot [VV78], Cambier-Escande-Veuillot [CEV86] et les références incluses). Lorsqu’on linéarise le terme en $\frac{\partial}{\partial t}$ de (3.8) autour de la valeur de grille W_0^n , (Chakravarthy [Ch83]), les relations obtenues définissent un schéma **implicite** pour l’incrément $(W_0^{n+1} - W_0^n)$ du point frontière.

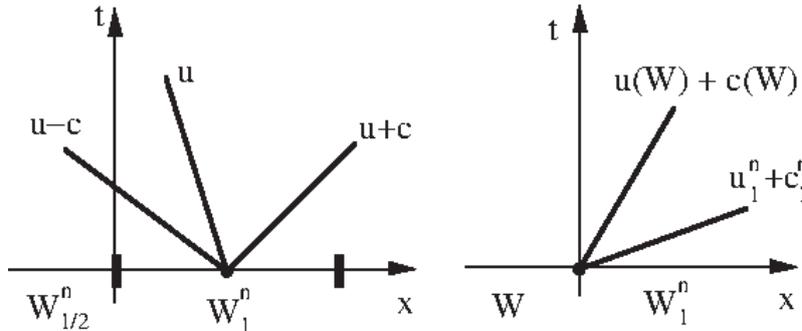


Figure 6. Sortie subsonique faiblement non linéaire (d’après Osher-Chakravarthy [OC83]).

- Pour les méthodes de volumes finis, Osher-Chakravarthy [OC83] ont proposé un procédé que nous généraliserons dans la troisième partie. L’idée consiste à calculer l’état frontière $W_{1/2}$ par une étude des ondes non linéaires d’un problème de Riemann et non plus par les relations de compatibilité (3.7). L’état frontière $W_{1/2}$ vérifie toujours la condition limite (3.5) et est relié à l’état W_1^n dans la première maille par une famille de p ondes simples (*c.f.* (2.17)(2.18)) et la figure 6) ; il appartient donc à une variété de codimension p (qui passe par l’état $W_{1/2}$) et satisfait aux p équations (3.5), ce qui pose *a priori* correctement le problème. Nous détaillons le cas d’une sortie subsonique où la pression de sortie est supposée fixée (voir également Osher-Chakravarthy [OC83]) et la variété est alors de codimension

$p = 1$. Nous utilisons le solveur du problème de Riemann proposé par Osher [Os81], qui n'utilise que des ondes de détentes, éventuellement multivaluées (voir Van Leer [VL84], Osher [Os84] et divers détails dans [Du87]).

- On détermine d'abord l'état W de pression imposée \bar{p} tel que W est lié à l'état W_1^n par une 3-onde de détente (*c.f.* 1.14) :

$$(3.9) \quad \begin{cases} p(W) & = \bar{p} \\ u(W) - \frac{2}{\gamma-1} c(W) & = u_1^n - \frac{2}{\gamma-1} c_1^n \\ \frac{p(W)}{\rho(W)^\gamma} & = \frac{p_1^n}{\rho_1^{n\gamma}}. \end{cases}$$

Si l'on suppose $u_1^n < 0 < u_1^n + c_1^n$, l'état W_1^n dans la première cellule satisfait aux inégalités de sortie subsonique (figure 6). Il s'agit donc d'un cas de **faible non-linéarité** et c'est l'hypothèse faite le plus souvent dans les applications (voir par exemple Hemker-Spekrijse [HS86]). Dans ce cas, l'état $W_{1/2}$ de paroi est exactement l'état intermédiaire calculé en (3.9) et l'on a :

$$(3.10) \quad f_{1/2} = f(W)$$

où le flux $f(\bullet)$ est déterminé à la relation (2.3).

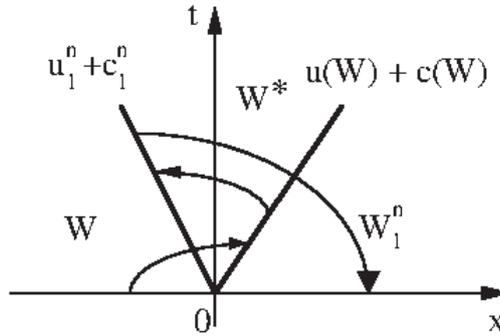


Figure 7. Sortie subsonique fortement non linéaire calculée grâce au schéma d'Osher [Os81].

- Si, au contraire, on suppose $u_1^n + c_1^n \leq 0$, l'état W_1^n n'est pas lui-même un état correspondant à une sortie subsonique. Il y a donc **forte non linéarité** à la frontière et dans ce cas, les travaux de Osher-Chakravarty [OC83] donnent déjà quelques éléments de réponse. L'état W est relié à W_1^n par une **détente éventuellement multivaluée** et il faut abandonner la notion d'état frontière si l'on utilise le flux d'Osher. Il suffit de déterminer le flux à l'entrée du domaine à l'aide de W , W_1^n et de l'état sonique W^* le long de la 3-détente, calculée grâce aux relations

$$(3.11) \quad \begin{cases} u(W^*) + c(W^*) & = 0 \\ u(W^*) - \frac{2}{\gamma-1} c(W^*) & = u_1^n - \frac{2}{\gamma-1} c_1^n \\ \frac{p(W^*)}{\rho(W^*)^\gamma} & = \frac{p_1^n}{\rho_1^{n\gamma}}. \end{cases}$$

Avec Osher-Chakravarthy [OC83], nous supposons que l'état W vérifie la condition $u(W) + c(W) \geq 0$; la 3-onde de détente "contient" la frontière fluide $\frac{x}{t} = 0$ (*c.f.* figure 7) et le flux numérique de frontière s'exprime selon

$$(3.12) \quad f_{1/2} = f(W) - f(W^*) + f(W_1^n).$$

D'autres cas de figure doivent être envisagés pour prendre en compte les différentes configurations que peut prendre la 3-détente (éventuellement multivaluée). Nous reviendrons dans la troisième partie sur une présentation générale de ces problèmes.

- Le cas d'une frontière fluide peut donc être traité dans de nombreux cas non linéaires comme une extension du cas linéaire, où les conditions aux limites non-linéaires (3.5) sont couplées aux relations de compatibilité (3.7) associées aux caractéristiques sortantes. Cette approche est traditionnelle pour les schémas de volumes finis, le calcul de l'état du bord proposé par Osher-Chakravarthy [OC83], par résolution d'un **problème de Riemann partiel**, ne définit le schéma à la frontière que par l'introduction du flux numérique associé.

- Signalons enfin le problème des conditions aux limites **absorbantes**, où il faut exprimer que les ondes quittent le domaine de calcul sans réflexion. L'étude monodimensionnelle de Hedstrom [He79] revient à écrire que l'état à la frontière est une "combinaison" d'ondes de détente **sortantes**, ce qui implique (Hedstrom [He79]) :

$$(3.13) \quad \ell_j \cdot \frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

Les relations (3.13) sont à substituer à (3.5) dans une formulation non linéaire de type (3.8) pour les schémas aux différences finies. Pour une extension bidimensionnelle, nous renvoyons à Thompson [Th87].

3.4) Parois solides

- Ce cas de condition limite est physiquement très différent du précédent puisqu'un obstacle est présent dans l'écoulement et la condition limite physique

$$(3.14) \quad u = 0 \quad (u : \text{vitesse de l'état paroi } W)$$

exprime la non-pénétrabilité du fluide à la paroi.

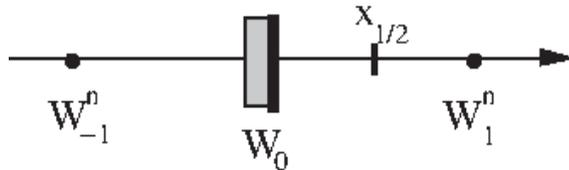


Figure 8. Point fictif dans la paroi (schémas aux différences finies).

- Le traitement de (3.13) à l'aide des schémas aux différences a été proposé très tôt. L'approche traditionnelle propose d'introduire un point fictif W_{-1} dans la paroi (figure 8) et d'écrire une condition de symétrie

$$(3.15) \quad \begin{cases} u_{-1} & = -u_1 \\ p_{-1} & = p_1 \\ \rho_{-1} & = \rho_1 \end{cases}$$

de façon à incrémenter l'état paroi W_0 à l'aide du schéma à trois points utilisé pour les points intérieurs. Mais Moretti [Mo68] a montré que les conditions (3.15) introduisent des conditions supplémentaires à la paroi qui sur-spécifient le problème continu. Aussi Roache [Ro72] recommande-t-il d'utiliser les volumes finis ("second mesh system"). L'approche courante actuellement depuis Viviand-Veuillot [VV78] utilise la relation de compatibilité correspondant à la valeur propre λ_1 (sortant du domaine de calcul) pour calculer la pression paroi (essentiellement pour les applications aérodynamiques !). Pour les détails, nous renvoyons à Cambier-Escande-Veuillot [CEV86].

- L'utilisation des volumes finis est plus facile à formuler ; compte tenu de la condition de non-pénétrabilité (3.14), le flux frontière $f_{1/2}$ prend la forme algébrique suivante (*c.f.* (2.3)) :

$$(3.16) \quad f_{1/2} = (0, p_{1/2}, 0)^t$$

et la pression paroi $p_{1/2}$ définit complètement le schéma. Dans ce cas, la méthode de l'"état miroir" (condition de symétrie) définit encore un état fictif W_0 de sorte que :

$$(3.17) \quad \begin{cases} u_0 & = -u_1 \\ p_0 & = p_1 \\ \rho_0 & = \rho_1 \end{cases}$$

Cet état ne sert qu'à l'évaluation du flux paroi (3.16), par l'intermédiaire d'une résolution exacte du problème de Riemann $R(W_0, W_1)$. En effet, l'extrapolation de la pression et de la densité proposés dans (3.17) ne sont pas introduits explicitement dans le schéma numérique, ce qui n'est pas le cas avec l'approche aux différences finies (relations (3.15)).

- Notons également que dans le cas de faibles non linéarités à la paroi (le plus courant ; la vitesse normale u_1 dans la cellule jouxtant le bord est "petite"), le calcul de la pression $p_{1/2}$ peut être effectué par extrapolation à l'aide d'un schéma aux différences précis au second ordre (voir par exemple Lerat [Le81]). Signalons enfin l'approche utilisée à l'Inria (Stoufflet [St84] par exemple). Celle-ci s'apparente à la fois aux différences finies (ou aux éléments finis !) puisque le nœud à calculer est situé sur la paroi et aux volumes finis puisque le schéma utilisé, du premier ordre en espace, revient à écrire un bilan dans la demi-maille $[x_0, x_{1/2}]$ (figure 8). Le flux paroi est évalué grâce à la relation (3.16) et la pression correspondante est simplement la pression de l'état W_0 .

4) Problème de Riemann partiel à la frontière

- Nous présentons dans cette dernière partie une technique générale qui permet la prise en compte des fortes non linéarités aux frontières du domaine de calcul, lorsqu'on utilise la méthode des volumes finis et les schémas "de type Godunov" (au sens de Harten-Lax et Van Leer [HLV83]). Dans le premier paragraphe, nous exposons l'ensemble du schéma dans le cas d'une précision du **premier ordre**, puis nous montrons (au second paragraphe) comment

le cas particulier de faibles effets non linéaires conduit aux résultats classiques exposés plus haut. Nous terminons par un cas test monodimensionnel où de fortes non linéarités sont présentes.

4.1) Volumes finis prenant en compte la frontière

• Nous rappelons que nous cherchons une approximation W_j^n de la valeur moyenne des variables conservatives (2.2) dans la maille $K_j =](j-1/2)\Delta x, (j+1/2)\Delta x[$ au temps $t^n = n\Delta t$. Le schéma de Godunov [Go59] ou les méthodes de type Godunov ([Harten-Lax-Van Leer [HLV83]) consistent à intégrer la loi de conservation (2.1) dans le domaine d'espace-temps $]n\Delta t, (n+1)\Delta t[\times K_j$ et on l'écrit usuellement :

$$(4.1) \quad \frac{1}{\Delta t} \left(W_j^{n+1} - W_j^n \right) + \frac{1}{\Delta x} \left(f_{j+1/2} - f_{j-1/2} \right) = 0 \quad j = 1, \dots, N.$$

Pour les mailles internes $(j + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, N - \frac{1}{2})$, le flux numérique correspondant est calculé par résolution exacte (Godunov) ou approchée (Roe [Ro81], Osher [Os81], Collela-Glaz [CG85]) du problème de Riemann $R(W_j^n, W_{j+1}^n)$; nous notons Φ le flux numérique correspondant :

$$(4.2) \quad f_{j+1/2} = \Phi(W_j^n, W_{j+1}^n), \quad j = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Nous supposons que le flux numérique Φ est calculé grâce aux **ondes** d'un problème de Riemann (*c.f.* (2.17)(2.18)) et non par une décomposition de flux, ce qui en pratique nous limite aux solveurs de Godunov (exact), Osher (ondes de détente seulement) ou Collela-Glaz (ondes de choc seulement) ; le solveur de Roe (discontinuités de contact seulement) ne définit pas à notre connaissance de j -ondes U_j dans l'espace des états et nous ne l'utilisons donc pas dans la suite.

• A la frontière du domaine de calcul, les conditions aux limites conduisent à se donner certains paramètres caractéristiques (voir les relations (3.5)). Nous appelons **variété limite** (et nous notons \mathcal{M}) l'ensemble des états qui satisfont les conditions "que l'on désire obtenir" à la frontière. Ainsi, pour les cas habituels de frontières fluides, nous avons par exemple :

$$(4.3) \quad \mathcal{M} = \{W_0\} \quad \text{entrée supersonique}$$

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M} = \left\{ \begin{array}{l} \text{états } W \text{ tels que les variables non conservatives} \\ (\rho, u, p) \text{ vérifient } \frac{1}{2}u^2 + h(\rho, p) = H, \frac{p}{\rho^\gamma} = S \end{array} \right\} \\ \text{entrée subsonique d'enthalpie totale et d'entropie imposées.} \end{array} \right.$$

$$(4.5) \quad \mathcal{M} = \{W / p = \bar{p}\} \quad \text{sortie subsonique de pression imposée}$$

$$(4.6) \quad \mathcal{M} = \{W / u + c \leq 0\} \quad \text{sortie supersonique.}$$

La variété \mathcal{M} (à bord éventuellement, *c.f.* (4.6)) est de codimension p . Notons que le cas d'une paroi solide définit également une variété \mathcal{M} , qui dépend du pas de temps :

$$(4.7) \quad \mathcal{M} = \{ \text{état miroir de } W_1^n, \text{ défini par la relation (3.16)} \}.$$

• A la frontière gauche ($x = 0$), nous posons un "**problème de Riemann partiel**" $P(\mathcal{M}, W_1^n)$ entre la variété frontière \mathcal{M} et l'état dans la première cellule W_1^n . Cette notion, introduite dans [Du87] et [DL89] ne correspond pas à un problème de Cauchy comme pour le problème de Riemann usuel $R(W_g, W_d)$. Une solution de $P(\mathcal{M}, W_1^n)$ n'est tout d'abord

définie que dans l'espace des états et consiste en une suite d'au plus $\text{codim } \mathcal{M}$ j -ondes séparées par des états constants, en suivant la démarche classique pour résoudre la problème de Riemann (voir Lax [La73] par exemple.) On cherche un état $W = W_0$ appartenant à \mathcal{M} , et p états intermédiaires W, \dots, W_{p-1} de sorte que

$$(4.8) \quad \begin{cases} W = W_0 \in \mathcal{M} \text{ et il existe } W_1, W_2, \dots, W_{p-1} \text{ (} p = \text{codim } \mathcal{M}\text{)} \\ \text{tels que } W_1 \in U_{3-(p-1)}(W_0), W_2 \in U_{3-(p-2)}(W_1), \dots, \\ W_p = W_1^n \in U_3(W_{p-1}). \end{cases}$$

Une fois l'état W déterminé grâce aux relations (4.8) (qui ne conduisent pas toujours à un état unique, voir par exemple le cas (4.4) dans [Du87]), la solution de $P(\mathcal{M}, W_1^n)$ est définie dans l'espace (x, t) comme la solution du problème de Riemann **classique** $R(W, W_1^n)$. Le flux frontière $f_{1/2}$ est alors simplement le flux numérique associé au problème de Riemann $R(W, W_1^n)$:

$$(4.9) \quad f_{1/2} = \Phi(W, W_{j+1}^n), \quad W \in \mathcal{M} \text{ solution de (4.8).}$$

Comme les ondes du problème de Riemann peuvent prendre une célérité arbitraire, on n'a pas forcément $f_{1/2} = f(W)$ comme le proposent implicitement Hemker et Spekreijse [HS86] par exemple.

- Le cas d'une sortie subsonique de pression imposée a été abordé au cours de la seconde partie. Les relations (3.9) sont dans ce cas équivalentes aux conditions (4.8) et il suffit d'interpréter les ondes du problème de Riemann $R(W, W_1^n)$. Sur la figure 9 par exemple, l'état W_1^n correspond à une sortie supersonique et la 3-détente est entièrement localisée dans le quadrant $\{\frac{x}{t} \leq 0, t \geq 0\}$. Le flux paroi est seulement déterminé par l'état W_1^n : $f_{1/2} = f(W_1^n)$. [On comparera avec les autres cas de figure (3.10) et (3.12) relatifs à ce même problème].

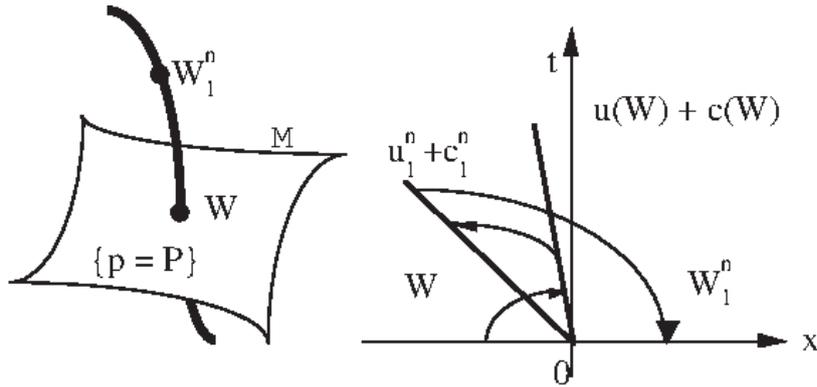


Figure 9. Sortie subsonique de pression imposée, formulée à l'aide du problème de Riemann partiel $P(\mathcal{M}, W_1^n)$ et utilisant le flux multivalué de Osher.

- Nous détaillons maintenant les deux cas triviaux pour l'étude linéarisée, à savoir l'entrée et la sortie supersonique. Dans le premier cas, la variété \mathcal{M} est un singleton (*c.f.* (4.3)) et le problème de Riemann partiel est en fait un problème de Riemann classique. Ainsi, le flux paroi peut être différent de $f(W_g)$, comme les figures 1 à 3 le montrent. Dans

le second cas, \mathcal{M} est une variété à bord (*c.f.* (4.6)) et l'état W défini par la relation (4.8) est exactement W_1^n si ce dernier appartient à \mathcal{M} , mais est confondu avec l'état sonique W^* appartenant à la 3-détente dans le cas contraire. Nous insistons sur le fait que le flux de sortie **ne se réduit pas toujours à une extrapolation** du type

$$(4.10) \quad f_{1/2} = f(W_1^n) \quad (W_1^n \in \mathcal{M}, \text{ définie en (4.6)})$$

comme nous l'avons proposé jusqu'ici, puisqu'il faut également tenir compte de l'éventualité

$$(4.11) \quad f_{1/2} = f(W^*) \quad (W_1^n \notin \mathcal{M}, \text{ c.f. (4.6)}) .$$

- La méthode décrite dans ce paragraphe permet le calcul du flux paroi comme le flux d'un problème de Riemann partiel, posé entre la "variété limite" \mathcal{M} qui décrit les conditions physiques à imposer et l'état W_1^n dans la cellule touchant le bord. Lorsqu'on utilise une résolution **exacte** du problème de Riemann, nous généralisons la formulation de la condition limite proposée dans [DL87] et l'état à la frontière peut être très **éloigné** à la fois de l'état W_1^n et de la variété \mathcal{M} . Nous avons ainsi **affaibli** la notion de condition limite pour prendre en compte les fortes ondes non linéaires présentes à la frontière du domaine de calcul. Les calculs algébriques relatifs aux cas de figure (4.3) à (4.6) sont exposés dans [Du87] lorsqu'on utilise le solveur proposé par Osher pour résoudre le problème de Riemann.

4.2) Cas des faibles non linéarités

- Nous supposons dans ce paragraphe que l'interaction au bord du domaine est faible, *i.e.*

(4.12) W_1^n appartient à un voisinage de \mathcal{M} .

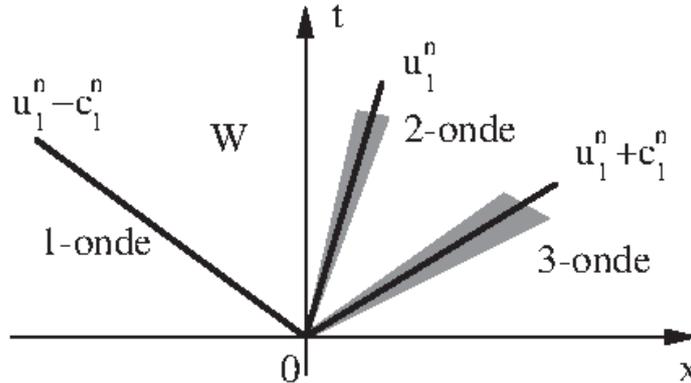


Figure 10. Entrée subsonique faiblement non linéaire.

Quitte à prendre un voisinage assez petit, il est alors clair que le problème de Riemann partiel a ses $\text{codim } \mathcal{M}$ ondes à l'intérieur du quadrant $\{\frac{x}{t} > 0, t \geq 0\}$ (figure 10) puisque les vitesses des ondes du problème de Riemann partiel sont des grandeurs positives voisines des valeurs propres $\lambda_j(W_1^n)$. Le quadrant $\{\frac{x}{t} \leq 0, t \geq 0\}$ contient donc seulement l'état constant W déterminé aux relations (4.8). On peut alors parler d'un état frontière et l'on a clairement

$$(4.13) \quad f_{1/2} = f(W).$$

Le calcul de l'état W est effectué soit par résolution d'un problème de Riemann (voir Osher-Chakravarthy [OC83] et Hemker-Spekrejse [HS86]), soit par approximations des ondes non linéaires par des discontinuités de vitesses $\lambda_j(W_1^n)$. On retrouve alors les relations de compatibilité (relations (3.3)) qui, jointes à la condition

$$(4.14) \quad W \in \mathcal{M}$$

permet de calculer l'état frontière de façon approchée (voir Veillot et Viviand [VV78], Chakravarthy [Ch83], Cambier-Escande-Veillot [CEV86]).

4.3) Etude d'un cas test

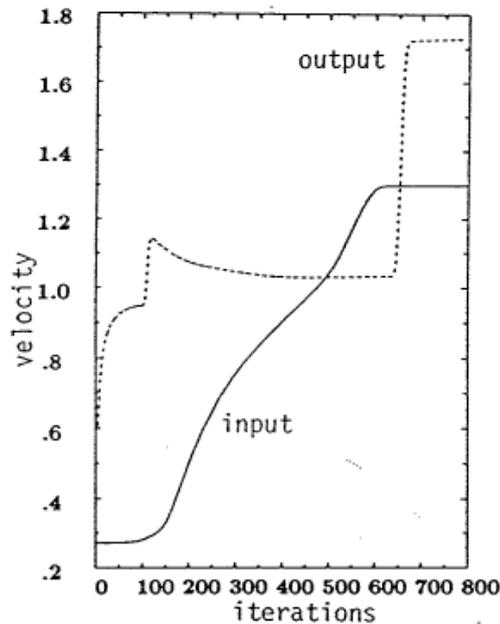


Figure 11. Tuyère divergente. Évolution de la vitesse en $x = 0$ (ligne continue) et $x = 1$ (ligne pointillée) pour le maillage contenant 80 cellules.

- Nous avons étudié un cas test très simple, déjà abordé entre autres par Yee, Beam et Warming [YBW82] : il s'agit du calcul d'un écoulement entièrement supersonique dans une tuyère divergente. La section $A(x)$ est donnée par la relation

$$(4.15) \quad A(x) = 1.598 + 0.347 \operatorname{th}(8x - 4) \quad 0 \leq x \leq 1$$

et l'entrée supersonique est définie par l'état suivant :

$$(4.16) \quad \rho_g = 0.502, \quad u_g = 1.299, \quad p_g = 0.381.$$

L'écoulement supersonique recherché est solution stationnaire du modèle quasi-monodimensionnel des tuyères, obtenu en adjoignant aux équations d'Euler (2.1) un terme source afin de prendre en compte les variations de section dans les bilans (voir par exemple Liu [Li82]). Nous avons effectué le calcul [Du87] à l'aide d'un schéma explicite en temps (CFL=0.9), du premier ordre en espace et divers maillages de 20, 40 et 80 cellules. Le problème de Riemann

aux interfaces a été traité à l'aide du flux d'Osher. Les conditions initiales correspondent à un état de vitesse nulle qui a même entropie et même enthalpie totale que l'état décrit en (4.16), *i.e.*

$$(4.17) \quad \rho_i = 1, \quad u_i = 0, \quad p_i = 1.$$

Rappelons le traitement des conditions aux limites : l'entrée est supersonique donc le flux limite est évalué à l'aide du problème de Riemann entre l'état amont (4.16) et celui présent au pas de temps étudié dans la première cellule. La sortie, supersonique également, est calculée à l'aide de l'un des flux (4.10) ou (4.11) selon que l'état de la dernière cellule est supersonique sortant ou non.

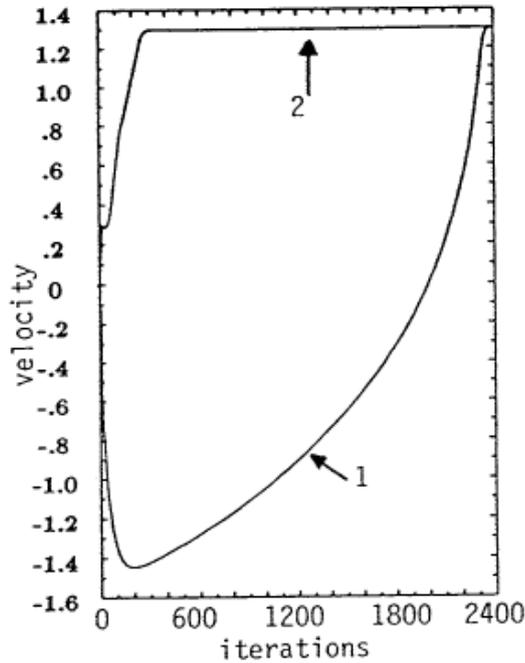


Figure 12. Tuyère divergente, 20 points de grille, sortie supersonique. Évolution de la vitesse en $x = 0$ avec la condition limite traditionnelle (4.18) (courbe 1) et avec la condition (4.9) fondée sur le problème de Riemann (courbe 2).

- Malgré l'inadéquation entre une condition initiale d'état subsonique (!) (4.17) et les conditions aux limites (4.16), le régime stationnaire est atteint après une évolution instationnaire importante mais régulière (figure 11). Afin de mesurer l'importance du choix de chacune des deux conditions au bord, nous avons effectué deux tests complémentaires. Dans le premier cas, toutes choses égales par ailleurs, nous changeons le traitement numérique de la condition d'entrée, en remplaçant le problème de Riemann $R(W_g, W_1^n)$ par une évaluation "classique" du flux :

$$(4.18) \quad f_{1/2} = f(W_g).$$

La convergence, qui demandait 200 pas de temps environ avec 20 points de grille, en demande trois fois plus (figure 12) et la vitesse en $x = 0$ commence par être négative (l'entrée

supersonique se comporte comme une sortie pendant la plus longue partie du transitoire !) avant d’atteindre la valeur finale exacte. Dans le second cas, nous avons simplement remplacé (par rapport à l’expérience initiale de la figure 11), la condition de sortie supersonique par une extrapolation classique (4.10) à **tous** les pas de temps. Le résultat est encore plus surprenant : après une phase transitoire très brève (trois fois plus rapide que pour le test initial), on obtient une solution convergée **subsonique** (figure 13), et celle-ci est stable par raffinements successifs du maillage. La prise en compte des fortes non-linéarités de frontière est donc essentielle pour qu’une évolution instationnaire converge vers “la” solution définie par les conditions aux limites que l’on se donne, et ce avec une vitesse de convergence la plus élevée possible.

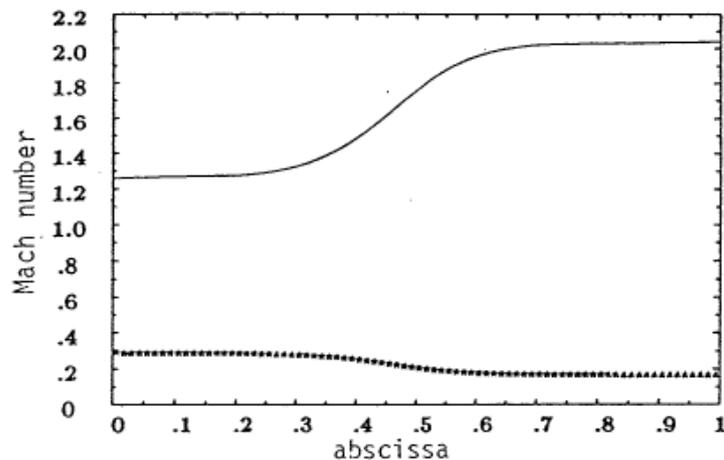


Figure 13. Tuyère divergente, 80 points de grille. Nombre de Mach à convergence (étoiles) avec une condition limite de sortie calculée grâce à l’extrapolation (4.10) et solution exacte (ligne continue).

- La géométrie d’une tuyère étant assez simple, et sans faire une analyse détaillée de l’interaction des ondes instationnaires de choc et de détente avec les ondes stationnaires induites par la géométrie (pour laquelle nous renvoyons par exemple à Liu [Li82]), nous pouvons tenter d’interpréter simplement les divers phénomènes qui se produisent au cours de ces trois expériences numériques. Avec nos conditions limites initiales, nous imposons la résolution du problème de Riemann $R(W_g, W_1^n)$, lequel comporte un 1-choc de vitesse négative et un 3-choc de vitesse positive (figure 10). Par ailleurs, la condition de sortie fait entrer une 1-détente par l’aval du domaine de calcul. L’écoulement d’entrée se stabilise vite autour d’une valeur intermédiaire relative au problème de Riemann $R(W_g, W_i)$ (figure 11) tandis que le 3-choc interagit avec la 1-détente au milieu de la tuyère. Le résultat de cette interaction conduit à une augmentation régulière de la vitesse en entrée et à un 1-choc qui sort de la tuyère après 650 pas de temps environ (figure 11, ligne fine).

- Lorsqu’on force la condition de flux (4.18), le 1-choc présent au temps $t = 0$ à l’entrée est animé d’une vitesse positive et est réfléchi brutalement par la tuyère (figure 12). La 1-détente centrée en $x = 1$ envahit alors progressivement la tuyère, mais les interactions

internes sont plus fortes que dans le cas précédent et le phénomène met plus de temps à s'établir. Si l'on traite classiquement la condition de sortie, on ne crée pas de 1-détente en $x = 1$ et la tuyère réagit comme un tube à choc : la 3-détente sort du domaine étudié et la solution stationnaire est essentiellement liée à l'état intermédiaire du problème de Riemann posé à l'entrée (figure 13).

5) Conclusion

- Nous avons passé en revue les diverses approches mathématiques et numériques pour l'étude du problème des conditions aux limites associées à la résolution des équations d'Euler de la dynamique des gaz. La prise en compte de fortes non-linéarités peut s'écrire théoriquement à l'aide d'une **inégalité d'entropie à la frontière**. Lorsqu'on interprète cette dernière grâce au **problème de Riemann**, les effets non linéaires présents à la frontière sont pris en compte naturellement avec la **méthode des volumes finis** qui **affaiblit** la condition limite ; la discussion classique sur les différents cas de figure (entrée ou sortie, sub ou supersonique) se réinterprète à l'aide d'un **problème de Riemann partiel** entre une variété limite et un état fluide. Les premiers tests numériques montrent l'intérêt d'une telle méthode.

- Toutefois, il reste de nombreuses questions sans réponse actuellement : quelle est la stabilité non linéaire des schémas numériques ainsi définis ? Comment aborder le cas d'un domaine multidimensionnel ? Enfin, dans la plupart des applications, on étudie les fortes non-linéarités **à l'intérieur** du domaine de calcul et la frontière ne joue pas un rôle déterminant pour la prise en compte des effets non linéaires !

References

- [Au84] J. Audounet, "Solutions discontinues paramétriques des systèmes de lois de conservation et des problèmes aux limites associés", *Séminaire*, Université Toulouse 3, 1983-84.
- [BLN79] C. Bardos, A.Y. Leroux, J.C. Nédélec, "First Order Quasilinear Equations with Boundary Conditions", *Communications in Partial Differential Equations*, volume 4, pages 1017-1034, 1979.
- [BS87] A. Benabdallah, D. Serre, "Problèmes aux limites pour les systèmes hyperboliques non-linéaires de deux équations à une dimension d'espace", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, tome 303, Série 1, pages 677-680, 1987.
- [BS77] J.S. Bramley, D.M. Sloan, "A comparison of boundary methods for the numerical solution of hyperbolic systems of equations", *Journal of Engineering Mathematics*, volume 11, n°3, pages 227-239, 1977.
- [CEV86] L. Cambier, B. Escande, J.P. Veuillot, "Calcul d'écoulements internes à grand nombre de Reynolds par résolution des équations de Navier-Stokes", *La Recherche Aéronautique*, n°1986-6, pages 415-432, 1986.

- [Ch83] S. Chakravarthy, “Euler solutions, Implicit schemes and Boundary Conditions”, *AIAA Journal*, volume 21, n°5, pages 699-706, 1983.
- [CG85] P. Colella, H.M. Glaz, “Efficient Solution Algorithms for the Riemann Problem for Real Gases”, *Journal of Computational Physics*, volume 59, pages 264-289, 1985.
- [CF48] R. Courant, K.O. Friedrichs. *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience, New-York, 1948.
- [DP83] R. Di Perna, “Convergence of the Viscosity Method for Isentropic Gas Dynamics”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, volume 91, pages 1-30, 1983.
- [Du87] F. Dubois, “Boundary Conditions and the Osher Scheme for the Euler Equations of Gas Dynamics”, *Rapport interne n°170 du Centre de Mathématiques Appliquées de l'École Polytechnique*, Palaiseau, septembre 1987.
- [DL87] F. Dubois, P. Le Floch, “Condition à la limite pour un système de lois de conservation”, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, tome 304, Série 1, pages 75-78, 1987.
- [DL88] F. Dubois, P. Le Floch, “Boundary Conditions for Nonlinear Hyperbolic Systems of Conservation Laws”, *Journal of Differential Equations*, volume 71, n°1, pages 93-122, 1988.
- [DL89] F. Dubois, P. Le Floch, “Boundary Conditions for Nonlinear Hyperbolic Systems of Conservation laws”, Second International Conference on Hyperbolic Problems (J. Ballmann, R. Jeltsch Editors), *Notes on Numerical Fluid Dynamics*, volume 24, pages 96-104, Vieweg, Braunschweig, 1989.
- [DG88] B. Dubroca, G. Gallice, “Problème mixte pour un système de lois de conservation monodimensionnel”, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, tome 306, Série 1, pages 317-320, 1988.
- [GB53] P. Germain, R. Bader, “Unicité des écoulements avec chocs dans la mécanique de Burgers”, *Note technique ONERA OA n°11/1711-1*, mai 1953.
- [Gl65] J. Glimm, “Solutions in the Large for Nonlinear Hyperbolic Systems of Conservation Laws”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, volume 18, pages 95-105, 1965.
- [Go59] S.K. Godunov, “A Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics”, *Matematicheskii Sbornik*, volume 47, pages 271-290, 1959.
- [Go61] S.K. Godunov, “An interesting class of quasilinear Systems”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, volume 139, pages 521-523 ; voir aussi *Soviet mathematics - doklady*, American Mathematical Society, volume 2, pages 947-949, 1961.
- [GZIKP79] S.K. Godunov, A. Zabrodine, M. Ivanov, A. Kraiko, G. Prokopov. *Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz*, Éditions de Moscou, 1979.

- [GT87] M. Goldberg, E. Tadmor, “Convenient Stability Criteria for Difference Approximations of Hyperbolic Initial-Boundary Value Problems II”, *Mathematics of Computation*, volume 48, n°178, pages 503-520, 1987.
- [Gu85] B. Gustafsson, “Numerical Boundary Conditions, in Large Scale Computations in Fluid Mechanics” (Engquist, Osher, Somerville Editors), *Lectures in Applied Mathematics*, volume 22, AMS, Providence, pages 279-308, 1985.
- [HLV83] A. Harten, P.D. Lax, V. Van Leer, “On Upstream Differencing and Godunov-type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws”, *SIAM Review*, volume 25, n°1, pages 35-61, janvier 1983.
- [HS86] P.W. Hemker, S.P. Spekreijse, “Multiple Grid and Osher’s Scheme for the Efficient Solution of the Steady Euler Equations”, *Applied Numerical Mathematics*, volume 2, pages 475-493, 1986.
- [Hi86] R.L. Higdon. Initial-Boundary Value Problems for Linear Hyperbolic Systems, *SIAM Review*, volume 28, n°2, pages 177-217, 1986.
- [Ke71] C.P. Kentzer, “Discretization of Boundary Conditions on Moving Discontinuities”, in *Lecture Notes in Physics* (M. Holt Ed.), volume 8, Springer Verlag, Berlin, pages 108-113, 1971.
- [Kr70] H.O. Kreiss. Initial Boundary Value Problems for Hyperbolic Systems, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, volume 23, pages 277-298, 1970.
- [Kv70] S. Kružkov, “First Order Quasi-Linear Systems in Several Independent Variables”, *Matematicheskii Sbornik*, volume 123, pages 228-255, et *Mathematics of the USSR-Sbornik*, volume 10, n°2, pages 217-243, 1970.
- [LL54] L. Landau, E. Lifchitz. *Fluid Mechanics*, 1954, Editions de Moscou, 1967.
- [La71] P.D. Lax, “Shock Waves and Entropy”, in *Contributions to Nonlinear Functional Analysis* (Zarantonello Ed.), Academic Press, New York, pages 603-634, 1971.
- [La73] P.D. Lax. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, Conference Board in Mathematical Sciences, volume 11, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1973.
- [LW60] P.D. Lax, B. Wendroff, “Systems of Conservation Laws”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, volume 13, pages 217-237, 1960.
- [LF88] P. Le Floch, “Explicit Formula for Scalar Nonlinear Conservation Laws with Boundary Conditions”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, volume 10, pages 265-287, 1988.
- [LN88] P. Le Floch, J.C. Nédélec, “Explicit Formula for Weighted Scalar Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws”, *Transactions of the American Mathematical Society*, volume 308, pages 667-683, 1988.
- [Le81] A. Lerat. *Sur le calcul des solutions faibles des systèmes hyperboliques de lois de conservation à l’aide de schémas aux différences*, Thèse d’Etat, Université Paris 6, 1981.
- [Li77] T.P. Liu, “Initial-Boundary Value Problems for Gas Dynamics”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, volume 64, pages 137-168, 1977.

- [Li82] T.P. Liu, “Transonic Gas Flow in a Duct of Varying Area”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, volume 80, n°1, pages 1-18, 1982.
- [Mc69] R.W. Mac Cormack, “The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering”, *AIAA Paper* n°69-354, 1969.
- [MO75] A. Majda, S. Osher, “Initial-Boundary Value Problems for Hyperbolic Equations with Uniformly Characteristic Boundaries”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, volume 28, pages 607-675, 1975.
- [MBGB87] P. Mazet, F. Bourdel, R. Greborio, J. Borée, “Application de la méthode variationnelle d’entropie à la résolution des équations d’Euler”, *ONERA, Centre d’Etudes et de Recherches de Toulouse*, Rapport Interne, 1987.
- [Mo68] G. Moretti, “The Importance of Boundary Conditions in the Numerical Treatment of Hyperbolic Equations”, *Polytechnic Institute of Brooklyn*, PIBAL Report n°68-34, 1968 ; voir aussi *Physics of Fluids*, volume 12, pages II-13–II-20, 1969.
- [NS77] T. Nishida, J. Smoller, “Mixed Problems for Nonlinear Conservation Laws”, *Journal of Differential Equations*, volume 23, pages 244-269, 1977.
- [Ol57] O. Oleinik, “Discontinuous Solutions of Nonlinear Differential Equations”, *Uspehi Matematicheskikh Nauk*, volume 12, pages 3-73 ; voir aussi *American Mathematical Society Translations: Series 2*, volume 26, pages 95-172, 1957.
- [OS78] J. Olinger, A. Sundström, “Theoretical and Practical Aspects of Some Initial Boundary Value Problems in Fluid Dynamics”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, volume 35, pages 419-446, 1978.
- [Os81] S. Osher, “Solution of Singular Perturbation Problems and Hyperbolic Systems of Conservation Laws”, in *Mathematical Studies* n°47 (Axelsson-Franck-Van der Sluis Editors), pages 179-205, North Holland, Amsterdam, 1981.
- [Os84] S. Osher, “Riemann Solvers, the Entropy Condition and Difference Approximations”, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, volume 21, pages 217-235, 1984.
- [OC83] S. Osher, S. Chakravarthy, “Upwind Schemes and Boundary Conditions with Applications to Euler Equations in General Geometries”, *Journal of Computational Physics*, volume 50, pages 447-481, 1983.
- [RM67] R.D. Richtmyer, K.W. Morton. *Difference Methods for Initial-Value Problems*, Interscience Publishing, J. Wiley & Sons, New York, 1967.
- [Ri81] A. Rizzi, “Computation of Rotational Transonic Flow”, in *Numerical Methods for the Computation of Inviscid Transonic Flows with Shock Waves*, (Rizzi-Viviand Editors), Vieweg Verlag, Braunschweig, pages 153-161, 1981.
- [Ro72] P.J. Roache. *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, Albuquerque, 1972.
- [Ro81] P. Roe, “Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes”, *Journal of Computational Physics*, volume 43, pages 357-372, 1981.
- [Sm83] J. Smoller. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer Verlag, Berlin, 1983.

- [St84] B. Stoufflet. *Résolution numérique des équations d'Euler des fluides parfaits compressibles par des schémas implicites en éléments finis*, Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Paris 6, 1984.
- [Th87] K.W. Thomson, "Time-Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems", *Journal of Computational Physics*, volume 68, pages 1-24, 1987.
- [VL79] B. Van Leer, "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme V. A Second Order Sequel to Godunov's Method", *Journal of Computational Physics*, volume 32, n°1, pages 101-136, 1979.
- [VL84] B. Van Leer, "On the relation between the Upwind-Differencing Schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe", *SIAM Journal on Scientific Computing*, volume 5, n°1, pages 1-20, 1984.
- [VV78] H. Viviand, J.P. Veuillot, "Méthodes pseudo-instationnaires pour le calcul d'écoulements transsoniques", *Publication ONERA* n°1978-4, 1978.
- [YBW82] H. Yee, R. Beam, R. Warming, "Boundary Approximations for Implicit Schemes for One-Dimensional Inviscid Equations of Gas Dynamics", *AIAA Journal*, volume 20, pages 1203-1211, 1982.