



HAL
open science

Algèbres de Lie et produit scalaire invariant

Alberto Medina, Philippe Revoy

► **To cite this version:**

| Alberto Medina, Philippe Revoy. Algèbres de Lie et produit scalaire invariant. 2024. hal-04697882

HAL Id: hal-04697882

<https://hal.science/hal-04697882>

Preprint submitted on 14 Sep 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Algèbres de Lie et produit scalaire invariant

Alberto MEDINA et Philippe REVOY

Introduction

0.1 Soit G un groupe de Lie réel connexe d'algèbre de Lie A .

Dire que G est muni d'une pseudométrie biinvariante signifie qu'il existe une fonction $\mu : TG \rightarrow \mathbb{R}$ quadratique sur chaque fibre, non dégénérée et invariante par les translations à gauche et à droite du groupe G . Cela se traduit infinitésimalement par la propriété suivante : sur l'algèbre de Lie A , il existe une forme quadratique, produit scalaire non nécessairement défini positif, $q : A \rightarrow \mathbb{R}$ pour lequel les opérateurs adjoints sont antisymétriques. Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est la forme bilinéaire φ associée à q , on a donc :

$$\langle [x,y], z \rangle + \langle y, [x,z] \rangle = 0 \quad \forall x, y, z \in A$$

La forme φ est une forme bilinéaire symétrique invariante sur l'algèbre de Lie A , considérée comme A -module au moyen de la représentation adjointe.

Réciproquement, l'existence sur A d'une forme bilinéaire symétrique invariante et non dégénérée - on dira un produit scalaire invariant, même si la forme quadratique associée est indéfinie - implique que, sur tout groupe de Lie réel connexe G , d'algèbre de Lie A , il existe une pseudométrie biinvariante ([9] pour le cas défini ; le cas général se traite de façon analogue).

La recherche des groupes de Lie susceptibles d'admettre de telles pseudométries - on dira désormais métriques, même si elles sont indéfinies - suppose au préalable l'étude des produits scalaires invariants sur les algèbres de Lie réelles. Une telle étude est évidente dans le cas abélien ; dans le cas des algèbres semi-simples A , J.L. Koszul ([5])

avait déjà étudié ces formes invariantes en relation avec la cohomologie de l'algèbre A . Le premier auteur a fait en [6] une étude complète du cas où l'indice de la forme quadratique vaut 1 (métriques de Lorentz) et, dans [7], les auteurs en ont déduit des exemples d'espaces homogènes munis d'une métrique de Lorentz. Nous entreprenons ici une étude du cas général.

0.2 Le procédé utilisé pour construire les algèbres munies d'un produit scalaire invariant est celui de la double extension que nous allons décrire (cf §4 et 5).

Les algèbres abéliennes et les algèbres semi-simples, munies d'un produit scalaire déduit de la forme de Killing (cf §3), sont les bases à partir desquelles toutes ces algèbres seront obtenues. Soit \mathcal{C} la classe des algèbres de Lie possédant un produit scalaire invariant φ : si (A_1, φ_1) et (A_2, φ_2) sont deux objets de \mathcal{C} , leur produit $A_1 \times A_2$ muni de la forme $\varphi_1 \perp \varphi_2$ en est un. Réciproquement si un objet (A, φ) de \mathcal{C} possède un idéal propre non dégénéré pour φ , (A, φ) est produit direct d'objets de \mathcal{C} de dimension inférieure à celle de A . Apparaît donc la notion d'objet irréductible : ce sont soit des algèbres simples, soit l'algèbre abélienne de dimension 1 ou enfin une algèbre non simple dont tout idéal propre est isotrope. Pour ramener ces dernières algèbres à des algèbres de dimension inférieure, on utilise la notion de double extension.

Soit pour cela (W, ψ) un objet de \mathcal{C} , S une algèbre de Lie simple, ou abélienne de dimension 1 et $\beta \in H^2(W, S^*)$ un 2-cocycle, S^* étant considéré comme un W -module trivial. Pour d fixé dans S , la formule :

$$\langle d, \beta(x, y) \rangle_{S \times S^*} = \psi(d.x, y)$$

définit $x \xrightarrow{d} d.x$ et en fait une dérivation, antisymétrique pour ψ , de l'algèbre W . De plus l'application $d \mapsto d.$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie de W dans l'algèbre de Lie des dérivations (antisymétriques) de W .

On considère alors les deux suites exactes suivantes :

$$0 \rightarrow S^* \rightarrow J \rightarrow W \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow J \rightarrow A \rightarrow S \rightarrow 0$$

La première fait de J une algèbre de Lie au moyen du 2-cocycle β ; la seconde fait de A une algèbre de Lie au moyen de l'homomorphisme $d \mapsto d$ prolongée en une dérivation de J au moyen de la représentation coadjointe de S sur S^* . On dira que A est la double extension de (W, ψ) par S au moyen de β et A peut être munie canoniquement d'un produit scalaire invariant. De plus si (A, φ) est un objet irréductible de \mathcal{C} qui n'est ni simple, ni abélien de dimension 1, il est la double extension d'une algèbre (W, ψ) de \mathcal{C} . De façon précise.

Théorème. La classe \mathcal{C} des algèbres de Lie qui possèdent un produit scalaire invariant est la plus petite classe d'algèbres de Lie qui contienne les algèbres simples et les algèbres abéliennes et qui soit stable par produit direct et par double extension.

Il y a deux types différents de double extension suivant que S est abélienne, de dimension 1, ou une algèbre simple. Si on se restreint à la sous classe de \mathcal{C} formée des algèbres résolubles, on peut énoncer le

Théorème. La classe $\mathcal{C}(R)$ des algèbres résolubles qui possèdent un produit scalaire invariant est la plus petite classe d'algèbres de Lie contenant les algèbres abéliennes et stable par produit direct et par double extension par une algèbre abélienne de dimension 1.

0.3 Résumons maintenant le plan de l'article. Dans les paragraphes 4 et 5, nous décrivons la notion de double extension et démontrons les deux théorèmes fondamentaux. Le paragraphe 3 concerne le cas semi-simple et les deux premiers paragraphes introduisent les propriétés des idéaux qui joueront un rôle important dans la suite.

Dans les trois derniers paragraphes, on construit des exemples intéressants de ces algèbres : produit scalaire d'indice 1, algèbres 2-nilpotentes... ainsi qu'une application simple de la double extension. Dans toute la suite A est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K de caractéristique 0 ; ce n'est que dans certains exemples qu'il peut être nécessaire que $K = \mathbb{R}$ (cf §3 et §6).

Un exposé des deux principaux résultats, orienté vers les applications géométriques, a été présenté au séminaire Sud Rhodanien 1982-1983.

1. Produit scalaire invariant.

Soit A une algèbre de Lie et soit $\langle , \rangle : A \times A \rightarrow K$ un produit scalaire, c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. On dit que ad_x est antisymétrique, $x \in A$, si, pour tout couple (y, z) d'éléments de A , on a :

$$\langle \text{ad}_x(y), z \rangle + \langle y, \text{ad}_x(z) \rangle = 0$$

1.1 Lemme 1) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in A$ ad_x est antisymétrique

(ii) $(x, y, z) \xrightarrow{w} \langle \text{ad}_x(y), z \rangle = \langle [x, y], z \rangle$

est une forme trilinéaire alternée.

2) Si (i), et (ii), est vérifiée, w est un 3-cocycle relativement à la représentation triviale.

La partie 1 du lemme est claire ; pour la seconde partie, un calcul immédiat donne $dw(x, y, z, t) = 2 \langle \mathcal{J}(x, y, z), t \rangle = 0$ où $\mathcal{J}(x, y, z) = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ d'après l'identité de Jacobi. Le produit scalaire \langle , \rangle sur A est dit invariant s'il vérifie l'une des deux conditions du lemme 1.1.

Réciproquement, soit A un K -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire et soit w une forme trilinéaire alternée sur A . On définit alors sur A une multiplication K -bilinéaire et anticommutative par l'égalité : $\langle x \cdot y, z \rangle = w(x, y, z)$. De plus les multiplications (à gauche et à droite) sont antisymétriques par rapport au produit scalaire. Mais ce produit ne vérifie pas toujours l'identité de Jacobi : on a le

1.2 Lemme 1) L'application $w' : A^4 \rightarrow K$ définie par

$$w'(x,y,z,t) = \langle x.y, z . t \rangle + \langle y.z, x.t \rangle + \langle z.x, y.t \rangle$$

est une forme 4-linéaire alternée.

2) $(A, .)$ est une K -algèbre de Lie si et seulement si $w' = 0$.

La première partie se vérifie immédiatement en faisant $x = y$ (resp. $x = z, x = t$). Comme les multiplications sont antisymétriques, on a $w'(x,y,z,t) = \langle \mathcal{J}(x,y,z), t \rangle$ d'où la deuxième partie du lemme.

Les lemmes précédents permettent d'étudier complètement le cas où la dimension de l'espace A ne dépasse pas 4 ; en dimension 1 et 2, $w = 0$, donc le seul produit de Lie possible est 0 et A est abélienne. Alors tout produit scalaire est invariant.

C'est encore le cas dès que $w = 0$, quelle que soit la dimension de A . Si A est de dimension 3 et $w \neq 0$, toutes les formes trilinéaires alternées sur A sont proportionnelles donc le produit scalaire détermine l'algèbre A , qui est toujours une algèbre de Lie puisque $\wedge^4 A = 0$ et $w' = 0$. Ainsi si $K = \mathbb{C}$, il y a un seul produit scalaire, à isomorphisme près et une seule structure d'algèbre : $A = \underline{sl}_2(\mathbb{C})$ munie de sa forme de Killing. Sur le corps \mathbb{R} , il y a deux possibilités suivant l'indice du produit scalaire : si l'indice vaut 0, $A = \underline{SO}_3(\mathbb{R})$ et sinon $A = sl_2(\mathbb{R})$. Dans les deux cas, la forme de Killing est proportionnelle au produit scalaire de A .

Dans le cas d'un corps quelconque, si φ est le produit scalaire de A , $A = \underline{SO}(\varphi)$ et la forme de Killing est proportionnelle à φ .

Supposons maintenant que la dimension de A vaut 4 ; on va montrer que $w' = 0$, donc A sera une algèbre de Lie. En effet, on peut supposer w non nul ; alors c'est une forme trilinéaire alternée décomposable, c'est-à-dire qu'il existe une base $e_i, 1 \leq i \leq 4$, de A telle que $w(e_i, e_j, e_k) = 0$ dès que $4 \in \{i, j, k\}$. On a alors

$$w'(x,y,z,e_4) = \langle \mathcal{J}(x,y,z), e_4 \rangle = \sum_i w(u_i, v_i, e_4) = 0 ;$$

comme $\wedge^4 A$ est de dimension 1 et de base $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, $w' = 0$ et A est une algèbre de Lie. Ce raisonnement montre en fait que dès que w est une forme trilinéaire alternée décomposable (produit extérieur de

3 formes linéaires), l'algèbre anticommutative A est de Lie.

Nous allons maintenant rappeler la notion de support d'une forme trilinéaire alternée. Par définition si w est une forme trilinéaire alternée sur A , donc un élément de $\wedge^3 A^*$, son support est le sous-espace S_w de A^* intersection de tous les sous-espace V de A^* tels que w soit dans l'image de $\wedge^3 V$ par l'injection naturelle $\wedge^3 V \rightarrow \wedge^3 A^*$. Le rang de w est la dimension de S_w ; à S_w , on peut associer un sous-espace de A , l'orthogonal S_w^0 de S_w par la dualité canonique $A \times A^* \rightarrow K$. Ainsi $S_w^0 = \{x \mid x \in A \text{ et } \forall y, z \in A \ w(x, y, z) = 0\}$. Comme nous supposons de plus A muni d'un produit scalaire, on peut encore associer à w , un sous-espace S'_w de A , l'orthogonal de S_w^0 dans A pour ce produit scalaire et on a $\dim S'_w = \text{rang } w$.

Comme pour les algèbres de Lie, on appelle centre de A , la sous-algèbre $Z(A)$ formée des éléments x de A tels que $x.y = 0 \ \forall y \in A$ et algèbre dérivée de A le sous-espace vectoriel $\mathfrak{D}(A)$ engendré par les produits $x.y$ de deux éléments de A . On a alors

1.3 Lemme : 1) $Z(A)$ et $\mathfrak{D}(A)$ sont deux sous-espaces orthogonaux vis à vis du produit scalaire de A

$$2) Z(A) = S_w^0 \text{ et } \mathfrak{D}(A) = S'_w.$$

Il suffit de revenir aux définitions : si $x \in Z(A)$, c'est que $x.y = 0 \ \forall y \in A$ et donc $\langle x.y, z \rangle = 0$ quels que soient y et z dans A . Donc c'est que $w(x, y, z) = 0$ et x est dans S_w^0 . Le reste se vérifie de la même façon.

1.4 Lemme : Soit $d \in \text{End}_K(A)$ une application linéaire antisymétrique vis à vis du produit scalaire de A . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) d est une dérivation de l'algèbre A .
- (ii) d est une dérivation de w .

En effet, si d est une dérivation de A , pour tout couple (x, y) $d(x.y) = dx.y + x.dy$; donc pour tout z dans A

$\langle d(x.y), z \rangle = \langle dx.y, z \rangle + \langle x.dy, z \rangle$. Comme d est antisymétrique $\langle d(x.y), z \rangle = -\langle x.y, dz \rangle = -w(x, y, dz)$. Comme le second membre

est $w(dx,y,z) + w(x,dy,z)$, d est une dérivation de w . La réciproque se fait de façon analogue en utilisant la non-dégénérescence du produit scalaire.

Dorénavant, nous supposons que A est une algèbre de Lie, dont on note le produit par un crochet, munie d'un produit scalaire invariant, et nous allons étudier les propriétés qui en découlent pour les idéaux de A . (beaucoup de propriétés ne font pas intervenir l'identité de Jacobi et sont valables dans le cas plus général de ce paragraphe).

2. Idéaux.

Les propriétés fondamentales des idéaux découlent de l'invariance du produit scalaire : $\langle [x,y],z \rangle = \langle x, [y,z] \rangle$. Ainsi l'orthogonal I^\perp d'un idéal I est lui-même un idéal. Désignons par $C^r(A)$ et $C_r(A)$ respectivement les idéaux des suites centrales descendante et ascendante de A . On a alors le

2.1 Lemme : Soit A une algèbre de Lie munie d'un produit scalaire invariant :

- (1) $C^r(A)^\perp = C_r(A)$ quelque soit l'entier r
- (2) Un sous-espace \mathcal{J} de A est un idéal de A si et seulement si le centralisateur $Z_A(\mathcal{J}) = \{x \mid x \in A \text{ et } [x,y] = 0 \ \forall y \in \mathcal{J}\}$ contient \mathcal{J}^\perp .
- (3) Tout idéal de dimension 1 est contenu dans le centre de A .

La première assertion, généralisation de 1.3 qui en est le cas $r = 1$, se démontre par récurrence sur r . La seconde affirmation découle de la définition d'un idéal : supposons que \mathcal{J} est un idéal et soit $x \in \mathcal{J}^\perp$: si $y \in \mathcal{J}$ et $z \in A$, $[y,z] \in \mathcal{J}$ et $\langle x, [y,z] \rangle = 0$, donc $\langle [x,y],z \rangle = 0$. Comme z est arbitraire dans A , on a $[x,y] = 0$ et x est bien dans $Z_A(\mathcal{J})$. La réciproque est évidente. La dernière partie du lemme se démontre ainsi : soit $I = Kz$ un idéal de dimension 1 et I^\perp son orthogonal, idéal de codimension 1. Comme $Z_A(I)$ contient I^\perp , il suffit de montrer que $Z_A(I)$ ne peut être égal à I^\perp . En effet cela signifierait qu'il existe $c \in A$ tel que $\langle z,c \rangle$ et $[z,c]$ sont tous deux non nuls. Comme I est un idéal, $[z,c] = \lambda z$, $\lambda \neq 0$ et

$\langle [z,c],c \rangle = \lambda \langle z,c \rangle$ est non nul, ce qui est impossible car
 $\langle [z,c],c \rangle = \langle z,[c,c] \rangle = 0$, d'où la contradiction.

Le lemme suivant rassemble d'autres propriétés des idéaux de A .

2.2 Lemme : Soit A une algèbre de Lie munie d'un produit scalaire invariant et I un idéal minimal de A

- 1) Si I est non dégénéré, c'est un idéal simple, ou abélien de dimension 1.
- 2) Si I est dégénérée, I est totalement isotrope et commutatif.
- 3) L'idéal I^\perp est un idéal propre maximal de A .

Dans la première hypothèse, A est produit direct des idéaux I et I^\perp et tout idéal de I est un idéal de A , donc I est simple puisque minimal. Si par contre I est dégénéré, $I \cap I^\perp$ n'est pas réduit à $\{0\}$; comme c'est un idéal de A contenu dans I , c'est qu'il est égal à I par minimalité de I . De plus, comme $I \subset I^\perp$ et comme $I^\perp \subset Z_A(I)$, d'après le lemme précédent I est commutatif. Le fait que I^\perp est maximal provient de ce que l'orthogonalité renverse le sens des inclusions.

Ces lemmes permettent déjà d'affirmer que certains groupes de Lie (resp. certaines algèbres de Lie) ne possèdent pas de pseudométriques biinvariantes (resp. de produits scalaires invariants). il suffit par exemple que la conditions (1) de 2.1 ne soit pas vérifiée. C'est le cas par exemple pour l'algèbre de Lie du groupe d'Heisenberg car $Z(A) = \mathfrak{D}(A)$ est de dimension 1 et donc on n'a pas $\dim Z(A) + \dim \mathfrak{D}(A) = \dim A$. Il en est de même pour toute algèbre de Lie résoluble de centre nul car on a toujours $\mathfrak{D}(A) \neq A$ et donc $\dim \mathfrak{D}(A) + \dim Z(A) < \dim A$, ce qui est en contradiction avec 2.1. Parmi les groupes de Lie nilpotents non abéliens de dimension 5, dont la liste est donnée dans [2], seule celui d'algèbre de Lie notée $\mathfrak{g}_{5,4}$ peut posséder une pseudométrie invariante et on peut effectivement montrer qu'il en possède une. Le lemme 2.2 permet aussi de caractériser les algèbres de Lie dont le produit scalaire est défini (ou encore, n'a pas de vecteurs isotropes [6])

2.3 Proposition : Si le produit scalaire de A n'a pas de vecteurs isotropes, A est réductive : A est somme orthogonale d'idéaux simples et d'idéaux abéliens de dimension 1.

C'est une conséquence immédiate de la partie 1) de 2.2.

Notons, réciproquement, qu'une algèbre A simple compacte sur \mathbb{R} a un produit scalaire invariant, la forme de Killing, qui est définie négative. Si A est réelle simple mais non compacte, la forme de Killing est indéfinie.

Les considérations précédentes amènent à distinguer trois types d'algèbres de Lie munies d'un produit scalaire invariant : les algèbres simples munies de la forme de Killing (cf §3) ; l'algèbre abélienne de dimension 1 munie d'un produit scalaire quelconque et enfin les algèbres de Lie, non simples et de dimension plus grande que 1, telles que tout idéal propre est dégénéré. On a alors le résultat suivant.

2.4 Proposition . Toute algèbre de Lie munie d'un produit scalaire invariant se décompose en produit d'idéaux orthogonaux de l'un des trois types ci-dessus.

La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de A ; si A est de dimension 1, le résultat est clair. Si la dimension de A dépasse 1, A est ou bien du premier type, ou bien du troisième type, ou bien A possède un idéal propre I non dégénéré. Dans ce dernier cas, A est somme orthogonale des idéaux I et I^\perp , auxquels l'hypothèse de récurrence s'applique.

La proposition 2.4 montre qu'il faut étudier les algèbres de Lie des types 1 et 3, ce que nous allons faire dans les paragraphes suivants.

3. Algèbres simples :

Soit A une algèbre de Lie simple sur le corps K . Il existe sur A une forme bilinéaire symétrique invariante, la forme de Killing, $K(x,y) = \text{Tr } \text{ad}_x \circ \text{ad}_y$. Soit maintenant b une autre forme bilinéaire symétrique invariante sur A ; comme la forme de Killing est non dégénérée, il existe une application linéaire $u : A \rightarrow A$ unique telle $b(x,y) = K(u(x),y)$ quels que soient x et y dans A . Le noyau de u est le radical de b : c'est un idéal de A , et donc b est non dégénérée si et seulement si $b \neq 0$. Dans le cas où K est algèbriquement clos,

un argument analogue au lemme de Schur montre que b est proportionnelle à la forme de Killing. Dans le cas général :

3.1 Lemme . L'ensemble des applications linéaires $u : A \rightarrow A$ telles que $(x, y) \mapsto K(u(x), y)$ est un produit scalaire invariant est un sous-corps commutatif $K(A)$ de l'anneau $\text{End}_K(A)$.

Que $K(A)$ soit formé d'éléments inversibles et de 0 provient de ce qui a déjà été dit. Ecrire que $K(u(x), y)$ est invariant équivaut à la condition (C) :

$$u([x, y]) = [u(x), y] = [x, u(y)] \quad \forall x, y \in A.$$

De plus si u et v vérifient la condition (C), $u \circ v$ et $v \circ u$ la vérifient également et ces deux applications coïncident sur $\mathfrak{D}(A)$: $(u \circ v)([x, y]) = u([v(x), y]) = [u \circ v(x), y]$ mais aussi $(u \circ v)([x, y]) = u([x, v(y)]) = [u(x), v(y)] = [v(x), u(y)]$ est aussi égal à $(v \circ u)([x, y])$. Comme $\mathfrak{D}(A) = A$, on obtient bien le lemme 3.1.

Remarque. Si A est une algèbre de Lie telle que $\mathfrak{D}(A) = A$ qui possède un produit scalaire invariant, le raisonnement précédent est valable : $K(A)$ est alors un sous-anneau commutatif de $\text{End}_K(A)$. C'est donc un anneau semi-local complet, produit fini d'anneaux locaux complets (de dimension finie). La décomposition de l'unité 1 en somme d'idempotents indécomposables correspond à la décomposition de A en somme orthogonale d'idéaux indécomposables I_k chacun d'eux vérifiant $\mathfrak{D}(I_k) = I_k$. Revenant au cas simple, on a la

3.2 Proposition . Soit A une algèbre de Lie simple réelle ; l'espace des formes bilinéaires symétriques invariantes est de dimension au plus 2. Il est toujours de dimension 1 si A est de dimension impaire.

En effet $K(A)$ ne peut être que \mathbb{R} ou \mathbb{C} ; de plus si la dimension de A sur \mathbb{R} est impaire, tout endomorphisme de A a au moins une valeur propre réelle et tout élément de $K(A)$ est une homothétie réelle.

Etudions de plus près le cas où $K(A) = \mathbb{C}$: alors A a une structure naturelle de \mathbb{C} -espace vectoriel et la condition (C) signifie que le crochet est \mathbb{C} -bilinéaire si bien que A est en fait une \mathbb{C} -algèbre

de Lie, simple puisqu'elle l'est en tant qu'algèbre de Lie réelle. Soit alors $K_{\mathbb{C}} : A \times A \rightarrow \mathbb{C}$ la forme de Killing de A sur \mathbb{C} ; pour toute forme \mathbb{R} -linéaire non nulle $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, l'application $(x,y) \mapsto f(K_{\mathbb{C}}(x,y))$ est un produit scalaire invariant sur l'algèbre réelle A . On voit donc, puisque $K(A)$ est de dimension 2, que tout produit scalaire invariant est de la forme $f \circ K_{\mathbb{C}}$; l'espace de ces formes admet par exemple pour base $\operatorname{Re} \circ K_{\mathbb{C}}$ et $\operatorname{Im} \circ K_{\mathbb{C}}$. Soit maintenant A' une forme réelle de l'algèbre de Lie simple complexe A , de sorte que $A' \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} A$, à la fois en tant que \mathbb{R} - et que \mathbb{C} -algèbre de Lie. La forme de Killing de A sur \mathbb{C} est l'extension de la forme de Killing (réelle) de A' ; soit alors A_1 et A_2 les sous-espaces réels de A formés des vecteurs réels, A' , et des vecteurs imaginaires purs iA' . Pour la forme bilinéaire symétrique $\operatorname{Re} K_{\mathbb{C}}$, les sous-espaces A_1 et A_2 sont orthogonaux et les formes quadratiques y sont opposées car $K_{\mathbb{C}}(ix, iy) = -K_{\mathbb{C}}(x, y)$; la forme $\operatorname{Re} \circ K_{\mathbb{C}}$ est donc de signature (n, n) ; les autres produits scalaires invariants ont alors tous la même signature (n, n) , en particulier la forme de Killing $K_{\mathbb{R}}$, car sur $K(A) - \{0\}$, la fonction signature est continue donc localement constante.

En fait, les algèbres de Lie réelles simples A telles que $K(A) \simeq \mathbb{C}$ ne sont autres que les algèbres de Lie complexes simples, considérées comme \mathbb{R} -algèbre de Lie. La plus petite est $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ qui en tant qu'algèbre de Lie réelle est l'algèbre $\mathfrak{so}_{3,1}(\mathbb{R})$, algèbre de Lie du groupe de Lorentz.

§4. Double-extension par une algèbre abélienne.

Soit A une algèbre de Lie munie d'un produit scalaire invariant. On dira que A est irréductible s'il n'existe pas de décomposition non triviale de A en produit direct de deux idéaux I et J orthogonaux vis à vis de ce produit scalaire. Si A n'est pas irréductible, elle est produit d'idéaux irréductibles, les idéaux minimaux parmi les idéaux non dégénérés de A , et il suffit de s'intéresser à chacun de ces composants. Nous allons d'abord étudier le cas où le centre de A n'est pas réduit à 0. Tout sous-espace de $Z(A)$ étant un idéal, A possède des idéaux minimaux de dimension 1 qui sont totalement isotropes; $Z(A)$

lui-même est totalement isotrope. En effet sinon $Z(A)$ contient un idéal non dégénéré et A ne serait pas irréductible.

Soit donc I une droite dans $Z(A)$; I^\perp l'idéal orthogonal de I est un idéal maximal de A qui contient I . On a les deux suites exactes d'algèbres de Lie :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow I \rightarrow I^\perp \rightarrow I^\perp/I \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow I^\perp \rightarrow A \rightarrow A/I^\perp \rightarrow 0 \end{aligned}$$

La restriction à I^\perp du produit scalaire de A est dégénérée et a pour radical I ; en conséquence, sur l'algèbre de Lie $W = I^\perp/I$, il y a un produit scalaire invariant "dédoublé" de celui de A par restriction à I^\perp puis par passage au quotient. La première suite exacte est définie par un 2-cocycle $\beta : \wedge^2 W \rightarrow I$ et la seconde suite exacte est définie par un homomorphisme de l'algèbre abélienne A/I^\perp dans l'algèbre de Lie des dérivations de I^\perp . Posons $I = Ke$ et $A/I^\perp = Kd$ et relevons d en un élément, encore noté d , de A ; on peut supposer que $\langle d, e \rangle_A = 1$ puisque ce produit scalaire doit être non nul. De plus on peut toujours supposer que d est un vecteur isotrope de A . Le 2-cocycle β est en fait un 2-cocycle à valeurs scalaires puisqu'on a choisi un générateur e de I et la structure d'algèbre de Lie de I^\perp est donnée par :

$$\begin{aligned} [x, e] &= 0 \quad \forall x \in W \\ [x, y]_{I^\perp} &= [x, y]_W + \beta(x, y)e. \end{aligned}$$

Alors $\text{ad}_A d$ est une dérivation de l'algèbre I^\perp et $\text{ad}_A d(e) = 0$ puisque e est dans $Z(A)$. La dérivation $\text{ad}_A d$ de I^\perp est donc une application de W dans $I^\perp = W \oplus Ke$, $x \mapsto d(x) + f(x)e$

Ecrivons que $\text{ad}_A d$ est antisymétrique : on a

$\langle [d, x], d \rangle = 0 = \langle f(x)e, d \rangle = f(x)$, ce qui montre que $\text{ad}_A d$ apparaît comme une dérivation de l'algèbre W . De même, soient x et y deux éléments quelconques de W : on a dans A

$\langle d, [x, y]_A \rangle = \langle [d, x], y \rangle$ soit la relation (*)
 $\beta(x, y) = \langle d(x), y \rangle_W$ pour tout couple (x, y) d'éléments de W . Cela montre que les deux suites exactes sont étroitement dépendantes :

la connaissance du 2-cocycle β détermine la dérivation d et inversement. Cela correspond en fait à un isomorphisme entre l'espace $H^2(W; K)$, K W -module trivial, et le sous-espace de $H^1(W; W)$, W W -module pour la représentation adjointe, formé des dérivations antisymétriques modulo les dérivations intérieures. Le 2-cocycle β est un cobord si et seulement si la dérivation d est intérieure.

Réciproquement, soit W une K -algèbre de Lie munie d'un produit scalaire invariant et soit β un 2-cocycle à valeurs scalaires. Soit $P = Ke \oplus Kd$ un plan muni d'une forme quadratique hyperbolique dont $\{e, d\}$ est une base hyperbolique : e et d sont isotropes et $\langle e, d \rangle_P = 1$. On munit $W \oplus P = A$ d'une structure d'algèbre de Lie avec un produit scalaire invariant dont $I = Ke$ est un idéal, contenu dans le centre, $I^\perp = W \oplus I$ et l'algèbre quotient I^\perp/I canoniquement isomorphe à W : on dira que A est la double-extension de W au moyen de β (ou de la dérivation antisymétrique d). Donnons le crochet sur A :

$$[(x, \lambda e + \mu d), (x', \lambda' e + \mu' d)] = ([x, x']_W + \mu d(x') - \mu' d(x), \beta(x, x'))$$

et le produit scalaire est

$$\langle (x, \lambda e + \mu d), (x', \lambda' e + \mu' d) \rangle_A = \langle x, x' \rangle_W + \lambda \mu' + \lambda' \mu$$

Ce crochet fait bien de A une algèbre de Lie et le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ est invariant.

Notons que le produit scalaire de A est dans la même classe de Witt que le produit scalaire de W puisque ils ne diffèrent que par un plan hyperbolique. De plus A dépend de β (et de d) et de W ; mais un calcul immédiat montre si on modifie β par un cobord (ou bien, on ajoute à d une dérivation intérieure de W), l'algèbre de Lie obtenue est isomorphe à celle construite à l'aide de β . On a donc démontré le

4.1 Théorème . Soit A une algèbre de Lie munie d'un produit scalaire invariant, irréductible et de centre non nul. Alors l'indice de A est strictement positif ; il existe une algèbre de Lie W de dimension $\dim A - 2$, un produit scalaire invariant appartenant à la même classe

de Witt que celui de A , et un 2-cocycle β à valeurs scalaires tels que l'algèbre A est la double extension de W par β . La dérivation définie par $\langle d(x), y \rangle_W = \beta(x, y)$ est antisymétrique. La classe d'isomorphisme de A ne dépend que de la classe de cohomologie de β .

Remarquons enfin que si $\beta = 0$, l'algèbre A n'est pas irréductible, puisque $d = 0$ et A est produit direct de W et du plan hyperbolique P . Si $H^2(W; K) = 0$, ou si toute dérivation antisymétrique de W est intérieure, W n'a pas de double extension irréductible. Le théorème précédent permet de caractériser les algèbres de Lie résolubles munies d'un produit scalaire invariant ; il suffit donc de s'intéresser aux algèbres de Lie A irréductibles. Comme $\mathfrak{D}(A)$ diffère de A , le centre de A est non réduit à 0 et totalement isotrope comme on l'a vu au début du paragraphe. Il en résulte que A sera double-extension d'une algèbre de Lie W qui sera résoluble, mais pas nécessairement irréductible ! On peut alors recommencer avec chaque facteur de W , le processus de réduction jusqu'à obtenir des algèbres de Lie "indécomposables" et pour lequel le processus ne peut continuer. Cela signifie qu'en fin de parcours, les algèbres obtenues sont nécessairement abéliennes. Inversement, si W est une algèbre de Lie résoluble, toute double-extension de W est encore résoluble. On a donc démontré le

4.2 Théorème . La classe $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ des algèbres de Lie résolubles munies d'un produit scalaire invariant est la plus petite classe d'algèbres de Lie qui contienne les algèbres de Lie abéliennes et qui soit stable par produit direct et par double extension par une algèbre de Lie abélienne de dimension 1.

5. Double extension par une algèbre simple.

Supposons maintenant que l'algèbre de Lie irréductible A a son centre nul, mais n'est pas une algèbre simple. Cela signifie donc que tout idéal propre de A est dégénéré (et que A en possède effectivement). Si I est un idéal minimal non nul de A , I est contenu dans I^\perp puisque $I \cap I^\perp$ ne peut être que 0 ou I . De plus I n'est pas de dimension 1 car $Z(A)$ est nul ; comme I est minimal, I^\perp est

maximal et A/I^\perp est une algèbre simple de dimension, la même que celle de I , donc supérieure à 1. Il s'en suit que A/I^\perp est une algèbre simple non abélienne. De plus le centralisateur $Z_A(I)$ est un idéal contenant I^\perp ; comme $Z(A) = 0$, $Z_A(I)$ est exactement I^\perp et I est un A/I^\perp -module simple non trivial (si \mathfrak{J} est un sous- A/I^\perp -module de I , c'est un idéal de A , donc $\mathfrak{J} = I$ ou $\{0\}$).

Soit maintenant $A = R \oplus S$ une décomposition de Lévi de A : I étant abélien est contenu dans R ; de plus A/I^\perp est un quotient simple non abélien de A , I^\perp contient R et la projection de S sur A/I^\perp est surjective ; A/I^\perp s'identifie donc à un facteur simple de S . Notons que si $A = R \oplus S'$ est une autre décomposition de Lévi de A , S et S' sont conjugués dans A par un automorphisme $\exp(\text{ad}_x)$ où ad_x est nilpotent ; un tel automorphisme est une isométrie pour le produit scalaire de A puisque ad_x est antisymétrique. Il en résulte que la restriction du produit scalaire à S ne dépend pas de la sous-algèbre de Lévi choisie.

Appelons S_0 l'algèbre simple A/I^\perp . On a comme au paragraphe précédent les deux suites exactes :

$$0 \rightarrow I \rightarrow I^\perp \rightarrow W \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow I^\perp \rightarrow A \xrightarrow{\pi} S_0 \rightarrow 0$$

Comme S_0 est simple, la projection π possède une section ν et on identifiera S_0 à la sous-algèbre $\nu(S_0)$ de A . Comme S_0 est un supplémentaire de I^\perp dans A , $H = I \oplus S_0$ est un sous-espace non dégénéré de A qui est hyperbolique puisque I en est un sous-espace totalement isotrope de dimension $\frac{1}{2} \dim H$. Soit alors H^\perp son orthogonal : $A = H \oplus H^\perp$ et $I^\perp = I \oplus H^\perp$. On peut alors identifier W et H^\perp en tant que sous-espace vectoriels de I^\perp de sorte que, dans la première suite exacte, on a pour x et y dans H^\perp , $[x, y]_A = [x, y]_W + \beta(x, y)$ où β est un 2-cocycle de W à valeurs dans I , I étant considéré comme un W -module trivial. Soit alors d un élément de S_0 et x un élément de H^\perp : posons $d(x) = [d, x]_A = d_1(x) + \lambda_d(x)$ où $d_1(x) \in H^\perp$ et $\lambda_d(x) \in I$. Ecrivons que le produit scalaire de A est invariant : soit d et d' dans S_0 et x dans H ; on a $\langle [d, d'], x \rangle_A = 0$ et

$\langle [d, d'], x \rangle_A = \langle d, [d', x] \rangle = \langle d, \lambda_{d'}(x) \rangle_H$. Ce dernier produit scalaire doit donc être constamment nul ; faisant décrire à d , S_0 tout entier et tenant compte du fait que I est totalement isotrope, on en déduit que $\lambda_{d'}(x) = 0$ pour tout x et pour tout d' .

Prenons maintenant x et y dans W et d dans S_0 : on a

$\langle d, [x, y] \rangle_A = \langle d, \beta(x, y) \rangle$ et comme le produit scalaire de A est invariant, c'est encore égal à

$\langle [d, x], y \rangle = \langle d_1(x), y \rangle_W$. On a donc, quels que soient x et y dans W et d dans S_0 , la relation fondamentale :

$$(**) \quad \langle d, \beta(x, y) \rangle_H = \langle d_1(x), y \rangle_W.$$

C'est l'analogie de la relation (*) vue au paragraphe précédent et cela nous montre que les deux suites exactes reliant A et W sont équivalentes : la donnée de β équivaut à celle de l'application $d \mapsto d_1$ de S_0 dans l'algèbre de Lie des dérivations antisymétriques de W . La propriété d'antisymétrie de d_1 équivaut au caractère alterné de β ; dire que d_1 est une dérivation signifie alors que β est un 2-cocycle.

Il ne reste plus qu'à donner explicitement le crochet d'un élément u de I et d'un élément d de S_0 , c'est-à-dire la structure de S_0 -module de I . Par antisymétrie, on a, quels que soient (d, d', u) dans $S_0^2 \times I$, la relation :

$$\langle [u, d], d' \rangle_H = \langle u, [d, d'] \rangle_H.$$

Les éléments d et u étant fixés, $d' \mapsto \langle u, [d, d'] \rangle_H$ est une forme linéaire sur S_0 et il existe donc un élément v de I unique tel que $\langle v, d' \rangle_H = \langle u, [d, d'] \rangle_H$ pour tout d' de S_0 ; il est clair alors que v dépend linéairement de u et de d , et on posera $[u, d] = v$. La structure de S_0 -module de I l'identifie avec S_0^* considéré comme module au moyen de la représentation coadjointe. L'espace vectoriel sous-jacent à A est donc $S_0^* \oplus W \oplus S_0$ et le crochet de Lie y est donné par la formule

$$[(u, x, s), (v, y, t)] = ([u, t] - [v, s] + \beta(x, y), [x, y]_W + s(y) - t(x), [s, t])$$

Réciproquement la donnée d'une algèbre de Lie W munie d'un produit scalaire invariant, d'une algèbre simple, non abélienne, S_0 ,

et d'un homomorphisme d'algèbre de Lie de S_0 dans l'algèbre des dérivations antisymétriques de W permet de construire une algèbre A double-extension de W selon la formule du crochet donnée plus haut.

On a donc montré le

5.1 Théorème . Soit A une algèbre de Lie non simple, de centre nul, qui possède un produit scalaire invariant pour lequel tout idéal propre est dégénéré. Alors l'indice de ce produit scalaire est au moins 3 ; il existe dans A une sous-algèbre simple S_0 et un idéal totalement isotrope I , isomorphe à S_0^* en tant que S_0 -module. De plus A est double extension de l'algèbre $W = I^\perp/I$ au moyen d'un homomorphisme de S_0 dans l'algèbre des dérivations de W .

Remarquons que le produit scalaire sur l'algèbre A double extension de W n'est pas entièrement déterminé, en ce sens que l'on a $\langle (u,x,s), (v,y,t) \rangle = \langle x,y \rangle_W + u(t) + v(s) + \varphi(s,t)$ et la forme φ restriction à S_0 du produit scalaire de A est simplement astreinte à être invariante sur S_0 . Comme on l'a vu au paragraphe 3, il y a donc un espace vectoriel de dimension 1 ou 2 de formes possibles pour φ lié à la forme de Killing de S_0 ; de plus si A est donné a priori avec un produit scalaire invariant, on a déjà dit au début de ce paragraphe que la restriction à S_0 était donnée indépendamment du choix de la sous-algèbre S_0 .

Enfin si β est le 2-cocycle 0, W est un idéal de A et A n'est plus irréductible : A est le produit direct des idéaux W et $W^\perp = S_0^* \times S_0$, W^\perp apparaissant comme la double extension de l'algèbre 0, à l'aide du cocycle trivial.

Etudions la dépendance de l'algèbre A vis à vis du cocycle β : si on ajoute à β un cobord, les deux nouvelles suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & I & \rightarrow & I^\perp & \rightarrow & W \rightarrow 0 \\ & & & & & & \\ 0 & \rightarrow & I^\perp & \rightarrow & A & \xrightarrow{\pi} & S_0 \rightarrow 0 \end{array}$$

associées au nouveau cocycle β' , donnent une algèbre A' isomorphe à A . Comme S_0 est une algèbre de Lie simple, l'homomorphisme $S_0 \rightarrow \text{Dér } W$ est soit nul, soit injectif ; dans le premier cas, $\beta = 0$ et W est un idéal non dégénéré de A . Dans le second cas, dire que deux homomorphismes

$S_0 \xrightarrow{\varphi_i} \text{Dér } W$, $i = 1, 2$ donnent le même cocycle, signifie que les composés de φ_i avec la projection $\pi : \text{Dér } W \rightarrow \text{Dér } W/\text{Ad}W$ coïncident. Cela signifie donc que pour tout d dans S_0 , $\varphi_1(d) - \varphi_2(d)$ est une dérivation intérieure de W . Choisisant un relèvement $\psi : \text{Ad } W \rightarrow W$ de la projection $x \mapsto \text{ad}_x$, on a pour tout x de W , $(\varphi_1(d) - \varphi_2(d))(x) = [\psi(d), x]_W$. Il en résulte que les 2-cocycles β_1 et β_2 sont cohomologues :

$$\langle d, \beta_1(x, y) - \beta_2(x, y) \rangle_W = \langle \psi(d), [x, y] \rangle_W.$$

On peut alors construire explicitement l'automorphisme linéaire de $I^\perp = I \oplus W$ qui fait passer de la multiplication associée à β_1 à celle associée à β_2 ; de la même façon, on construit un automorphisme linéaire de $A = I^\perp \oplus S_0$ qui réalise un isomorphisme de A double extension de W construite à l'aide de φ_1 avec la même extension construite avec φ_2 . On voit donc qu'une double extension de W est déterminée en fait par un homomorphisme de S_0 dans l'algèbre de Lie des dérivations "extérieures" antisymétriques $\text{Dér } W/\text{Ad } W$; si par exemple W est abélienne, l'algèbre de Lie S_0 devra être une sous-algèbre simple de $\underline{O}(W)$. Si, par contre, toute dérivation antisymétrique de W est intérieure, toute double-extension de W est triviale, c'est-à-dire est un produit direct de W et de son orthogonal : c'est le cas par exemple si W est semi-simple ou comme on le verra dans des exemples ultérieurs.

Dans tous les cas considérés, la classe de Witt du produit scalaire A est la même que celle du produit scalaire de W . Notons enfin que les procédés employés aux paragraphes 4 et 5 permettent d'obtenir toutes les algèbres avec un produit scalaire invariant. En effet d'après 2.4, il suffit de considérer le cas où A est irréductible. Dans ce cas, ou le centre est non nul et A est double extension d'une algèbre W par une algèbre abélienne de dimension 1, ou bien le centre est réduit à $\{0\}$ et A est double extension d'une algèbre W par une algèbre simple non commutative S , quotient de A par un idéal maximal propre. On peut donc maintenant énoncer le résultat sous la forme suivante :

5.2 Théorème . La classe \mathcal{C} des algèbres de Lie qui peuvent être munies d'un produit scalaire est la plus petite classe d'algèbres de Lie qui

contienne les algèbres de Lie abéliennes et les algèbres simples et qui soit stable par produit direct et par double extension

6. Produit scalaire invariant d'indice inférieur ou égal à 2.

Les algèbres munies d'un produit scalaire invariant d'indice 0 (ou défini) sont connues (cf.2.3). Si l'indice du produit scalaire est inférieur ou égal à 2 et si A est irréductible et non simple, d'après le théorème 5.1, A s'obtient par une double-extension du type vu en 4, c'est-à-dire à partir d'une algèbre W de la classe C et d'une dérivation antisymétrique. De plus l'indice du produit scalaire de W est celui de A diminué d'une unité. Regardons d'abord le cas où l'indice de A vaut 1. L'algèbre W du théorème 4.1 est donc d'indice 0 et, d'après 2.3, elle est somme orthogonale d'un idéal abélien et d'un idéal semi-simple. Comme toute dérivation d'une algèbre semi simple est intérieure, l'idéal semi-simple de W reste un idéal non dégénéré de A : il est nul car on a supposé A irréductible. Donc A est la double extension d'une algèbre de Lie abélienne munie d'un produit scalaire défini positif par une dérivation antisymétrique. Cette dérivation est inversible car son noyau - qui coïncide avec le radical du 2-cocycle $\beta : (x,y) \mapsto \langle dx,y \rangle_W$ - est un idéal non dégénéré de la double extension A . Comme on a supposé A irréductible, cet idéal est 0 et le 2-cocycle β est non dégénéré. Alors la dimension de W est paire. Supposons désormais que K est le corps des réels et rappelons le résultat suivant sur la classification des formes bilinéaires alternées sur \mathbb{R} .

6.1 Proposition. Soit V un espace euclidien de dimension n et $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire alternée. Alors il existe une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_{2p}, e_{2p+1}, \dots, e_n)$ de V et des scalaires $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ tels que

$$(1) \quad \beta(e_{2i-1}, e_{2i}) = \lambda_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq p$$

$$(2) \quad \beta(e_k, e_l) = 0 \quad \text{si } \{k, l\} \neq \{2i-1, 2i\}$$

La démonstration de ce résultat classique se fait par récurrence sur la dimension de V . D'abord on trouve le couple $\{e_1, e_2\}$ et le scalaire λ_1

en considérant la fonction continue $\tilde{\beta} : S(V) \times S(V) \rightarrow \mathbb{R}$ restriction de β au produit de la sphère unité (compacte) de V par elle-même : le couple (e_1, e_2) est le point où $\tilde{\beta}$ atteint son sup qui est le scalaire λ_1 . On démontre alors que e_1 et e_2 sont orthogonaux pour le produit scalaire de V et que l'orthogonal du plan (e_1, e_2) pour β coïncide avec l'orthogonal de ce même plan pour le produit scalaire de V . Notons enfin que β est non dégénérée si et seulement si $n = 2p$.

Ce résultat a une traduction en termes de dérivation antisymétrique. Si $d : V \rightarrow V$ est une dérivation antisymétrique de V , son rang est pair et il existe une base orthonormée (e_i) , $1 \leq i \leq n$, de V et des scalaires non nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, $2p \leq n$, pour lesquels :

$$d(e_{2i-1}) = \lambda_i e_{2i}, \quad d(e_{2i}) = -\lambda_i e_{2i-1} \quad \text{et} \quad d(e_k) = 0 \quad \text{si} \quad k > 2p.$$

On suppose désormais que $n = 2p$: d est inversible et β non dégénérée. La structure de l'algèbre de Lie I^\perp obtenue à l'aide de la suite exacte $0 \rightarrow I \rightarrow I^\perp \rightarrow W \rightarrow 0$ et du 2-cocycle β se décrit dans la base e_i , $0 \leq i \leq 2p$ par les crochets : $[e_{2i-1}, e_{2i}] = \lambda_i e_0$ et $[e_k, e_\ell] = 0$ si $\{k, \ell\} \neq \{2i-1, 2i\}$. C'est donc une algèbre de Lie isomorphe à l'algèbre d'Heisenberg de dimension $2p+1$. Toutes les algèbres I^\perp sont isomorphes, mais elles ne sont pas isométriques.

Venons en à l'algèbre A elle-même : on pose $d = e_{2p+1}$ et on a alors la table de multiplication de A dans la base $\{e_0, e_1, \dots, e_{2p}, e_{2p+1}\}$ donnée par :

$$[e_{2i-1}, e_{2i}] = \lambda_i e_0, \quad 1 \leq i \leq p$$

$$[e_{2p+1}, e_{2i-1}] = \lambda_i e_{2i}$$

$$[e_{2p+1}, e_{2i}] = -\lambda_i e_{2i-1}$$

et tous les autres crochets sont nuls. Notons $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ cette algèbre de Lie qui est résoluble puisque son algèbre de Lie dérivée est I^\perp qui est nilpotente. Énonçons le résultat démontré :

6.2 Théorème . Toute algèbre de Lie réelle A non simple, munie d'un produit scalaire d'indice 1 (de Lorentz) et irréductible est une algèbre résoluble de dimension paire $2p+2 \geq 4$ et il existe des scalaires $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ tels que $A \simeq A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$. Deux algèbres

$A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ et $A(\mu_1, \dots, \mu_p)$ sont isomorphes et isométriques si et seulement si il existe un nombre réel $k > 0$ tel que $\mu_i = k \lambda_i$.

La première partie du théorème a déjà été démontrée ; montrons maintenant que $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \simeq A(k\lambda_1, \dots, k\lambda_p)$. En effet si (e_i) (resp f_i) est une base de la première algèbre (resp. seconde), vérifiant les relations définissant $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ (resp. $A(\mu_1, \dots, \mu_p)$), l'application linéaire $u : A(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \rightarrow A(\mu_1, \dots, \mu_p)$ définie par $u(e_i) = f_i$ si $1 \leq i \leq 2p$, $u(e_0) = k f_0$ et $u(e_{2p+1}) = \frac{1}{k} f_{2p+1}$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie et une isométrie. La réciproque est claire.

Notons que les algèbres de 6.2 ne sont pas nilpotentes. On a le résultat suivant : toute algèbre de Lie nilpotente qui possède un produit scalaire invariant d'indice inférieur ou égal à 1, est abélienne.

Les algèbres $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ permettent de construire sur des groupes de Lie résolubles des pseudométriques biinvariante d'indice 1 ([7]). Ainsi pour $p = 1$, on obtient le groupe diamant, ou groupe oscillateur, groupe résoluble non exponentiel considéré dans [1] et [7]. De plus ces groupes possèdent des sous-groupes uniformes et fournissent des exemples d'espaces homogènes pseudoriemannniens munis d'un groupe transitif d'isométries (voir [7] pour plus de détails).

Le cas où le produit scalaire est d'indice 2 est plus compliqué et nous ne décrivons par toutes les algèbres irréductibles A de la classe C dont le produit scalaire est d'indice 2. D'après les résultats de 4 et 5, une algèbre telle que A est une double extension, par une dérivation antisymétrique, d'une algèbre W de C dont le produit scalaire est d'indice 1. Comme A est irréductible, A ne contient pas d'idéal semi-simple. Donc W peut être soit une algèbre abélienne munie d'un produit scalaire d'indice 1, soit une algèbre $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, soit la somme orthogonale d'une algèbre $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ et d'une algèbre abélienne avec un produit scalaire défini positif.

Dans le premier cas, il s'agit d'étudier les endomorphismes antisymétriques d'un espace vectoriel V muni d'un produit scalaire q de signature $(n-1, 1)$ et c'est seulement pour les petites valeurs de n que ces endomorphismes peuvent être décrits facilement. Si la dimension de V vaut 2, d est soit 0, soit bijective : si $\{e_1, e_2\}$ est une base

orthogonale de V telle que $q(e_1) = -q(e_2) = 1$, toute dérivation antisymétrique est proportionnelle à la dérivation δ définie par $\delta(e_1) = e_2$ et $\delta(e_2) = e_1$.

Si la dimension de V est 3, deux cas sont possibles : ou bien il existe un plan hyperbolique H que d laisse invariant et sur lequel d est proportionnelle à δ (alors d est nulle sur la droite H^\perp), ou bien d est nilpotente : $d^3 = 0$ et d est de rang 2. Dans ce dernier cas, il existe une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de V telle que $q(e_2) = 1$ et $\{e_1, e_3\}$ est un plan hyperbolique orthogonal à e_2 dont e_1 et e_3 sont des vecteurs isotropes de produit scalaire 1. Alors d est proportionnelle à la dérivation δ' définie par $\delta'(e_i) = e_{i+1}$ pour $i = 1, 2$ et $\delta'(e_3) = 0$. La double extension de l'algèbre abélienne \mathbb{R}^3 au moyen de la dérivation δ' est une algèbre de Lie 3-nilpotente de dimension 5. Dans une base (e_i) , $0 \leq i \leq 4$, sa table de multiplication est donnée par $[e_4, e_1] = e_2$, $[e_4, e_2] = e_3$ et $[e_1, e_2] = e_0$, tous les autres crochets étant nuls. C'est la plus petite algèbre de Lie nilpotente non abélienne dans la classe C . Quand la dimension de V augmente, nous ne savons plus décrire les dérivations antisymétriques de V .

Venons au second cas, quand W est une algèbre $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, qui se prête bien aux calculs. Notons e_i , $0 \leq i \leq 2p+1$, la base canonique de W : alors $Z(W)$ a pour base e_0 et $\mathfrak{D}(W)$ a pour base e_i , $0 \leq i \leq 2p$. Comme une dérivation laisse globalement invariants le centre et l'algèbre dérivée de W , une dérivation δ de $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ s'écrit matriciellement par blocs :

$$\delta = \begin{pmatrix} \alpha & \varphi & \gamma \\ 0 & U & y \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Dans cette écriture, α, β et γ sont scalaires, U un endomorphisme de l'espace W' engendré par les e_i , $1 \leq i \leq 2p$, y est un vecteur de W' et φ une forme linéaire sur W' ; on a $\delta(e_0) = \alpha e_0$, $\delta(e_{2p+1}) = \gamma e_0 + y + \beta e_{2p+1}$. Il faut maintenant tenir compte de l'antisymétrie de δ : cela donne $\gamma = 0$, $\alpha + \beta = 0$ et $\varphi(x) + \langle x, y \rangle_{W'} = 0$ pour tout x de W' ; de plus U est antisymétrique pour le produit scalaire de W' .

De plus δ est une dérivation de $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$: cela donne dans $\text{End}(W')$ la relation $[d, U] = \alpha d$, où d est la restriction de $\text{ad } e_{2p+1}$ à W' . On en déduit que pour tout entier n , $[d^n, U] = n \alpha d^n$ soit, pour tout polynôme P , $[P(d), U] = \alpha d P'(d)$. Soit alors Q le polynôme minimal de d : on a $\alpha d Q'(d) = 0$ et comme d est inversible dans $\text{End}(W')$, $\alpha Q'(d) = 0$. Comme Q est minimal, c'est que $\alpha = 0$ et que $[d, U] = 0$; la matrice de δ se présente sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \varphi & 0 \\ 0 & U & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs une dérivation intérieure de $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ $\text{ad } z$ où $z = \lambda e_{2p+1} + t$, $t \in W'$ a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & \varphi_{dt} & 0 \\ 0 & \lambda d & -dt \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en désignant par φ_{dt} la forme linéaire $x \mapsto \langle dt, x \rangle_{W'}$. Ainsi en ajoutant une dérivation intérieure à δ , on peut annuler y et φ , si bien que δ est représentable par une application linéaire antisymétrique $U : W' \rightarrow W'$ qui commute avec d , 2 applications U_1 et U_2 étant équivalentes si leur différence est proportionnelle à d . On a ainsi montré la

6.3 Proposition : L'algèbre des dérivations antisymétriques de $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ modulo l'idéal des dérivations intérieures est la partie antisymétrique du commutant de $\mathbb{R}[d]$ dans $\underline{\text{gl}}(W') = M_{2p}(\mathbb{R})$ modulo la relation d'équivalence vue plus haut.

Ce commutant dépend des valeurs λ_i : si tous les λ_i sont différents, $\mathbb{R}[d]$ est un espace vectoriel de dimension $2p$; le polynôme minimal de d , et son polynôme caractéristique, est $\prod_{i=1}^p (d^2 + \lambda_i)$ et le commutant de $\mathbb{R}[d]$ est exactement $\mathbb{R}[d]$. Les éléments antisymétriques de $\mathbb{R}[d]$ sont les polynômes impairs de $\mathbb{R}[d]$: l'algèbre des dérivations antisymétriques définie en 6.3 est l'algèbre abélienne de base

$d^3, d^5, \dots, d^{2p-1}$ de dimension $p-1$.

Si tous les λ_i sont égaux, le polynôme minimal de d est $d^2 + \lambda$ et $\mathbb{R}[d]$ est le corps des complexes ; W' est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension p et le commutant de $\mathbb{R}[d]$ est $gl_{\mathbb{C}}(W')$. On se ramène au cas où $\lambda = 1$ et on pose alors pour x et y dans W' $f(x,y) = \langle x,y \rangle + i \langle x,dy \rangle$: c'est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive. La condition $[d,U] = 0$, et l'antisymétrie de U signifie que U est élément de l'algèbre de Lie unitaire $\underline{u}(p)$ et la relation d'équivalence qui définit l'algèbre de 6.3 montre que cette algèbre est $\underline{su}(p)$ qui est de dimension p^2-1 . On a donc la

6.4 Proposition . L'algèbre de Lie des dérivations antisymétriques de $A(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$ est l'algèbre de Lie $\underline{su}(p)$. Dans le cas général, soit $\lambda'_1, \dots, \lambda'_q$ les valeurs distinctes parmi les λ_i et $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ les multiplicités avec lesquelles ils interviennent. L'algèbre de Lie des dérivations antisymétriques modulo les dérivations intérieures de $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ est le quotient de l'algèbre $D = \prod_{i=1}^q \underline{u}(\alpha_i)$ par la sous-algèbre abélienne de dimension 1, plongement diagonal de \mathbb{R} dans le centre $\mathbb{R} f_1 \times \dots \times \mathbb{R} f_q$ de D .

La première partie de la proposition a été démontrée précédemment ; le cas général est laissé au lecteur. Notons que l'algèbre du groupe oscillateur n'a que des dérivations antisymétriques intérieures. Cela donne aussi le résultat cohomologique suivant :

6.5 Proposition. $\dim_{\mathbb{R}} H^2(A(\lambda_1, \dots, \lambda_p) ; \mathbb{R}) = \sum_{i=1}^q \alpha_i^2 - 1$.

En effet il y a bijection entre 2-cocycle et dérivations antisymétriques, les cobords correspondant aux dérivations intérieures.

7. Autres exemples.

7.1 Les exemples précédents montrent déjà la variété des algèbres que l'on peut obtenir par le procédé de double extension.

Nous allons tout d'abord décrire une classe d'algèbres de Lie avec produit scalaire hyperbolique. On en a déjà vu un exemple au §5 : quand on fait

une double extension d'une algèbre W au moyen d'une algèbre simple S_0 et du 2-cocycle nul, W est un idéal non dégénéré et W^\perp est l'idéal $S_0^* \times S_0$ muni d'un produit scalaire hyperbolique. De façon plus générale soit A n'importe quelle algèbre de Lie et φ une forme bilinéaire symétrique invariante, le cas échéant dégénérée. Soit alors A^* considéré comme A -module au moyen de la représentation coadjointe et $A^* \times A$ le produit semi-direct de A et de A^* correspondant. Alors la forme bilinéaire symétrique : $\langle (f,x), (g,y) \rangle = f(y) + g(x) + \varphi(x,y)$ est invariante non dégénérée et hyperbolique, puisque A^* est totalement isotrope. Si A est simple, $A^* \times A$ est une double extension de l'algèbre $\{0\}$, au sens du paragraphe 5.

Notons enfin que les propriétés suivantes de A sont héritées par $A^* \times A = L$: si A est produit des idéaux A_1 et A_2 , L est produit orthogonal de L_1 et de L_2 . Le centre de L est la somme directe de $Z(A)$ et de l'orthogonal, pour la dualité canonique, de $\mathfrak{D}(A)$: $Z(L) = \mathfrak{D}(A)^\circ \oplus Z(A)$ et on trouve $\mathfrak{D}(L)$ en cherchant l'orthogonal de $Z(L)$. Si A est nilpotente (resp. résoluble) de classe C , il en est de même de L ; si R est le radical de A , celui de L est $R' = A^* \times R$. Si d est une dérivation de A , antisymétrique par rapport à φ , le couple $\delta = (-{}^t d, d)$ est une dérivation antisymétrique de L . Si A possède une dérivation inversible, en prenant $\varphi = 0$, c'est une dérivation antisymétrique et la dérivation δ est une dérivation antisymétrique et inversible de L : ainsi l'algèbre L possède un 2-cocycle non dégénéré $\beta : L \times L \rightarrow K$ défini par $\beta(u,v) = \langle \delta(u), v \rangle_L$.

7.2 Soit maintenant K^{2n} l'algèbre de Lie abélienne munie d'un produit scalaire hyperbolique : on prend par exemple V un espace vectoriel de dimension n et sur $V \oplus V^*$ le produit scalaire canonique $\langle (x,f), (y,g) \rangle = g(x) + f(y)$. Nous allons décrire certaines doubles extensions de $V \oplus V^*$ au moyen d'une dérivation antisymétrique. Soit pour cela u un endomorphisme de V : le couple $(u, -{}^t u)$ est une dérivation antisymétrique de l'algèbre abélienne $V \oplus V^*$ et le 2-cocycle associée est

$\beta_u((x,f),(y,g)) = g(u(x)) - f(u(y))$. La double extension de $V \oplus V^*$ au moyen de β_u est une algèbre de Lie résoluble, nilpotente si u l'est. Posons $A = V \oplus \mathbb{R}e$ et définissons sur A le crochet $[x,y] = 0$ si x et $y \in V$ et $[e,x] = u(x)$, algèbre de Lie qu'on note A_u . La double extension précédemment définie est le produit semi-direct $A_u^* \times_{s.d} A_u = L_u$. Si u est bijective, $\mathfrak{D}(L_u)$ est l'algèbre d'espace sous-jacent $V \oplus V^* \oplus \mathbb{R}e$: elle est isomorphe à l'algèbre d'Heisenberg ; le cas le plus simple est celui où u est un endomorphisme semi-simple (ou même diagonalisable) ; si $\dim V = 1$ et u est l'identité, l'algèbre de Lie L_u est de dimension 4. Dans une base (e_i) , $0 \leq i \leq 3$, les crochets sont : $[e_1, e_2] = e_0$, $[e_3, e_1] = e_1$ et $[e_3, e_2] = -e_2$, tous les autres crochets étant nuls.

De la même façon que nous avons déterminé les dérivations antisymétriques de $A(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, on détermine celles de L_u quand u est diagonalisable : si les valeurs propres distinctes de u ont pour multiplicités $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, l'algèbre de Lie des dérivations antisymétriques de L_u modulo les dérivations intérieures est le quotient de $D = \mathfrak{gl}(\alpha_1) \times \mathfrak{gl}(\alpha_2) \times \dots \times \mathfrak{gl}(\alpha_k)$ par l'image de K par le plongement diagonal dans le centre de D . On a alors $\dim_{\mathbb{R}} H^2(L_u, \mathbb{R}) = \sum \alpha_i^2 - 1$.

7.3 Nous avons vu deux exemples d'algèbres de Lie résolubles non abéliennes de dimension 4 avec un produit scalaire invariant : l'algèbre du groupe oscillateur en 6.2 et l'algèbre L_u pour $u = \text{Id}_V$ et $\dim V = 1$ en 7.2. Il est facile de voir que ce sont les seules algèbres de Lie irréductibles de dimension 4 qui possèdent un produit scalaire invariant : en effet il n'y a pas d'algèbres simples de cette dimension. De plus l'indice de la forme est inférieur ou égal à 2, donc elle relève de la technique de double extension du paragraphe 4. L'algèbre W , dont ce sera la double extension, est abélienne car de dimension 2 (cf 1.2) ; si le produit scalaire de W est défini, A est isomorphe à $A(\lambda)$; s'il est indéfini, A est l'algèbre L_u décrite en 7.2. On voit donc qu'il n'y a pas d'algèbre nilpotente dans la classe \mathcal{C} , non abélienne de dimension inférieure ou égale à 4 ; en 6.2, on a donné un exemple d'algèbre nilpotente de dimension 5 avec un produit scalaire invariant. C'est la seule

à isomorphisme près comme le montre le raisonnement suivant : A nilpotente de dimension 5 dans la classe C est la double extension d'une algèbre nilpotente de dimension 3, donc d'une algèbre abélienne W . Le produit scalaire sur W ne peut être défini car A serait résoluble, non nilpotente, ou abélienne. Donc W est d'indice 1 et la dérivation antisymétrique d associée à la double extension est nilpotente. On a construit en 6.2 une telle dérivation et il est facile de montrer qu'il n'en existe pas d'autres à isomorphismes près. On a donc montré la

7.4 Proposition 1) En dimension 4, les seules algèbres de Lie résolubles non abéliennes munies d'un produit scalaire invariant sont l'algèbre du groupe oscillateur et l'algèbre $L_{\text{Id}(V)}$ où $\dim V = 1$. Les dérivations antisymétriques de ces algèbres sont toutes intérieures.

2) En dimension 5, la seule algèbre de Lie nilpotente non abélienne qui possède un produit scalaire invariant est l'algèbre 3-nilpotente construite en 6.2.

Notons enfin que l'algèbre signalée dans la seconde partie de 7.4 est l'algèbre $\mathfrak{g}_{5,4}$ indiquée par J. Dixmier en [2].

8. Algèbres de Lie 2-nilpotentes et remarques.

Soit A une algèbre de Lie 2-nilpotente munie d'un produit scalaire invariant ; les deux conditions suivantes sont réalisées : $\mathfrak{D}(A) \subset Z(A)$ et $\mathfrak{D}(A)^\perp = Z(A)$. Cela montre que $\mathfrak{D}(A)$ est totalement isotrope ; de plus, si I est un supplémentaire de $\mathfrak{D}(A)$ dans $Z(A)$, I est un idéal abélien non dégénéré et l'on a $A = I \times A'$ où A' est une algèbre de Lie 2-nilpotente sur laquelle le produit scalaire de A induit un produit scalaire invariant. On a aussi $\mathfrak{D}(A') = Z(A')$ et, en négligeant les facteurs directs abéliens, on peut supposer que cette condition est déjà réalisée sur A . Il suffira donc d'étudier les algèbres de Lie 2-nilpotentes A telle que $\mathfrak{D}(A) = Z(A)$ et l'on a la condition supplémentaire $\dim A = 2 \dim \mathfrak{D}(A)$. Choisissons alors dans A un supplémentaire V de $\mathfrak{D}(A)$ totalement isotrope.

Le crochet de Lie de A est une application bilinéaire alternée μ de V dans $\mathfrak{D}(A)$, qu'on peut identifier à V^* à l'aide du produit scalaire

de $A : \mu : \wedge^2 V \rightarrow V^*$. Le fait que $\mathfrak{D}(A) = V^*$ signifie simplement que μ est surjective, ce qui implique déjà que la dimension de V doit dépasser 2 et celle de A être au moins égale à 6. Le 3-cocycle w sur $A = V \oplus V^*$ défini au paragraphe 1 est donné par $((x,f),(y,g),(z,h)) \mapsto \mu(x,y)(z)$. Le support de w est donc contenu dans V et la condition " μ surjective" signifie qu'il est exactement égal à V (cf 1.2).

Inversement, soit w une forme trilinéaire alternée sur V : on définit alors une application linéaire $\mu : \wedge^2 V \rightarrow V^*$ par la formule $\mu(x \wedge y)(z) = w(x,y,z)$. Cela permet de munir $A = V \oplus V^*$ d'une structure d'algèbre de Lie 2-nilpotente en posant $[(x,f),(y,g)] = (0, \mu(x \wedge y))$ pour laquelle le produit scalaire canonique de $V \oplus V^*$ est invariant. De plus la condition $\mathfrak{D}(A) = Z(A) = V^*$ est réalisée si et seulement si le support de w est exactement V . On a donc montré le

8.1 Théorème . Il y a équivalence entre les classes d'isomorphismes de formes trilinéaires alternées de rang n et les algèbres de Lie 2-nilpotentes A de dimension $2n$ avec un produit scalaire invariant et telle que $\mathfrak{D}(A) = Z(A)$.

Cela permet en dimension inférieure ou égale à 16 de construire toutes ces algèbres ([3]) ; la plus petite est l'algèbre de Lie 2-nilpotente libre à trois générateurs $A = V \oplus \wedge^2 V$, $\dim V = 3$. Notons que ces algèbres possèdent des dérivations antisymétriques inversibles, donc des 2-cocycles non dégénérés. Cela entraîne que sur les groupes de Lie réels associés, il existe une 2-forme non dégénérée invariante, c'est-à-dire une structure symplectique.

Enfin notons le résultat suivant

8.2 Proposition. Soit A un espace vectoriel muni d'un produit scalaire non dégénéré, w une forme trilinéaire alternée sur A et $[\ , \]$ le produit anticommutatif associé à w et au produit scalaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) le support de w dans A est totalement isotrope
- (ii) le crochet fait de A une algèbre de Lie 2-nilpotente.

L'implication (ii) \Rightarrow (i) a déjà été vue en 8.1 ; pour la réciproque, notons que si le support de w est totalement isotrope,

$\langle [x,y], [z,t] \rangle = 0$ quels que soient x,y,z et t dans A et donc
 $\langle [[x,y],z], t \rangle = 0$ quel que soit t . Cela signifie que $[[x,y],z] = 0$
 c'est-à-dire la condition (ii).

En ce qui concerne les dérivations antisymétriques d'une algèbre de Lie 2-nilpotente, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que le lemme 1.4 possède une réciproque partielle : toute dérivation d de w , considérée comme forme trilinéaire sur V (et non sur A), peut-être prolongée en une dérivation antisymétrique \bar{d} de A . De plus si d est bijective, \bar{d} l'est.

Nous terminons par une application de la technique de double extension :

8.3 Théorème . Soit A une algèbre de Lie munie d'un produit scalaire invariant. Dans l'espace des dérivations antisymétriques, l'ensemble des dérivations de rang maximal est un ouvert dense U , (au sens de la topologie de Zariski ou de la topologie ordinaire si $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Si d est dans U , la sous-algèbre $\text{Ker } d$ est abélienne.

La première affirmation est claire car la maximalité du rang se traduit par un nombre fini d'inégalités algébriques. Pour la seconde, rappelons d'abord le résultat général suivant, dû à M. Duffo et M. Vergne ([4]) : soit A une algèbre de Lie, $f \in A^*$ et $A(f) = \{x \mid x \in A \text{ et } f \circ \text{ad}_x = 0\}$. Alors $A(f)$ est une sous-algèbre de A ; l'ensemble des f de A^* tels que $A(f)$ soit de dimension minimale est un ouvert dense de A^* ; de plus si f est dans cet ouvert, $A(f)$ est une sous-algèbre abélienne de A .

Notons que $A(f) = \{x \mid x \in A \text{ et } \beta_f(x,y) = f([x,y]) = 0 \ \forall y \in A\}$, c'est-à-dire que $A(f)$ est le radical de la 2-forme exacte β_f . Dans les hypothèses de 8.3, soit d une dérivation antisymétrique de A : le noyau de d est la sous-algèbre $\text{Ker } d$ radical de la 2-forme fermée $\beta_d(x,y) = \langle dx,y \rangle$.

La démonstration de la seconde partie se fera en rendant d intérieure et donc β_d exacte au moyen d'une double extension et en appliquant le théorème de Duflo et Vergne. Soit donc B l'algèbre de Lie double-extension de A au moyen de d et de β_d (cf. 4.1). On a le

8.4 Lemme . Soit $x \in A$: $\dim \text{Ker}(d + \text{ad}_A x) = \dim \text{Ker} \text{ad}_B(d+x) - 2$.

De façon précise $\text{Ker}(d + \text{ad}_A x)$ est l'ensemble des vecteurs z de A tels que $d(z) + [x, z] = 0$ et $\text{Ker} \text{ad}_B(d+x)$ est formé des vecteurs $\lambda d + \mu e + y$ tels que $d(y) + [x, y] - \lambda d(x) = 0$ et $\langle \lambda d(x), y \rangle = 0$. Comme $d(y)$ et $[x, y]$ sont tous deux orthogonaux à y , la première condition entraîne la seconde. La condition restante peut alors s'écrire $d(y - \lambda x) + [x, y - \lambda x] = 0$, c'est-à-dire que $y - \lambda x \in \text{Ker}(d + \text{ad}_A x)$. On voit donc que l'application de $\text{Ker} \text{ad}_B(d+x)$ dans $K^2 \oplus A$ qui, à $(\lambda d + \mu e + y)$ associe $(\lambda, \mu, y - \lambda x)$ est une bijection sur $K^2 \oplus \text{Ker}(d + \text{ad}_A(x))$ d'où le lemme.

Choisissons maintenant d dans l'ouvert U dont l'existence est assurée par la première partie de 8.3 : pour $x \in A$ voisin de l'origine, $d + \text{ad}_A x$ est encore dans l'ouvert U et donc $\dim \text{Ker}(d + \text{ad}_A x)$ est constante pour x dans un voisinage de 0 dans A . Il s'en suit que, d'après 8.4, que la dimension de $\text{Ker} \text{ad}_B(d + x)$ est constante dans un voisinage de 0 dans A . Comme e est dans le centre de B , si v est voisin de l'unité du corps K et μ quelconque, la dimension du noyau de $\text{ad}_B v(d + x + \mu e)$ est constante. Cela signifie que dans un voisinage de d dans l'algèbre B $\dim \text{Ker} \text{ad}_B$ est constante. Or posons $f = \langle d, \cdot \rangle_{B^*}$: on voit qu'il existe dans B^* un ouvert V contenant f dans lequel le rang de $\beta_g, g \in V$ est constant, puisque $\text{Ker} \text{ad}_B d$ est le radical de β_f . Cela montre que dans B^* le rang de β_f , définie par $\beta_f(x, y) = \langle d, [x, y] \rangle$ est maximal et donc que la sous-algèbre $\text{Ker} \beta_f = \text{Ker} \text{ad}_B d$ est abélienne. Comme l'algèbre $\text{Ker} d$, dans A , est l'intersection de A et de $\text{Ker} \text{ad}_B d$, le résultat est démontré.

Références

- [1] P. BERNAT Représentations des groupes de Lie résolubles
ch IV Monographie SMF n°4 Dunod Paris (1972).
- [2] J. DIXMIER Sur les représentations unitaires des groupes
de Lie nilpotents III, Canad. J. Math. 10 (1958) p. 321-348.
- [3] D.Z. DJOKOVIC Classification of trivectors of an eight-dimen-
sional real vector space Lin. and Mutil. Algebra 1983,
vol 13, 3-39.
- [4] M. DUFLO et M. VERGNE Une propriété de la représentation coad-
jointe d'une algèbre de Lie CR Acad. Sci. Paris 268 (1969),
p. 583-585.
- [5] J.L KOSZUL Homologie et cohomologie des algèbres de Lie
Bull. Soc. Math. F 78, p.65-127 (1950).
- [6] A. MEDINA Groupe de Lie munis de pseudométriques de
Riemann bi-invariantes, Séminaire de Géom. Diff., 1981-1982,
Montpellier.
- [7] A. MEDINA et Ph. REVOY Sur une géométrie Lorentzienne du groupe
oscillateur Séminaire de Géom. Diff. 1982-1983 Montpellier.
- [8] A. MEDINA et Ph. REVOY Caractérisation des groupes de Lie
ayant une pseudométrie biinvariante. Applications.
Travaux en cours "Séminaire Sud-Rhodanien."
- [9] J. MILNOR Curvatures of left invariant metrics on Lie groups,
Adv. in Math, 21, 1976 p.283-329.
-