



HAL
open science

MODULES DE CAUCHY, POLYNÔMES CARACTERISTIQUES ET RESOLVANTES

Annick Valibouze

► **To cite this version:**

Annick Valibouze. MODULES DE CAUCHY, POLYNÔMES CARACTERISTIQUES ET RESOLVANTES. LITP 95/62, LITP unité associée CNRS 248. 1996. hal-04691124

HAL Id: hal-04691124

<https://hal.science/hal-04691124v1>

Submitted on 7 Sep 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**INSTITUT
BLAISE PASCAL**

FÉDÉRATION D'UNITÉS - FU0007

**Modules de Cauchy, polynomes
caractéristiques et résolvantes**

A. VALIBOUZE

LITP 95/62

Janvier 1996

**LABORATOIRE
INFORMATIQUE THÉORIQUE
ET PROGRAMMATION**



unité associée 248

MODULES DE CAUCHY, POLYNÔMES CARACTÉRISTIQUES ET RÉSOLVANTES

ANNICK VALIBOUZE*

Soit k un corps de caractéristique 0. Dans tout cet article, nous considèrerons un polynôme $f \in k[x]$ de degré n , dont la famille des racines dans une clôture algébrique de k est $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Pour simplifier les formules, nous supposerons que le polynôme f est unitaire.

Les modules de Cauchy forment une base standard réduite pour l'ordre lexicographique de l'idéal des relations symétriques entre les racines de f (voir [10]).

Cet article montre comment ces modules de Cauchy permettent de calculer le polynôme caractéristique associé à un polynôme $\Psi \in k[x_1, \dots, x_n]$. Ce résultat sera utilisé pour décrire une nouvelle méthode de calcul des résolvantes.

1. NOTATIONS

Pour tout polynôme $\Psi \in k[x_1, \dots, x_n]$, l'évaluation, $\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, de Ψ en les racines de f (pour la numérotation choisie) sera notée $\tilde{\Psi}$.

L'action de \mathfrak{S}_n , le groupe symétrique de degré n , sur Ψ est définie par $\tau.\Psi = \Psi(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)})$ pour tout $\tau \in \mathfrak{S}_n$.

Pour $i = 1, \dots, n$, notons e_i la i -ième *fonction symétrique élémentaire* en x_1, \dots, x_n définie par :

$$e_i = \sum_{m \in \mathfrak{S}_n.(x_1 \dots x_i)} m$$

Posons $e_0 = 1$ et $s_i = e_i - \tilde{e}_i$, pour $i = 1, \dots, n$. Rappelons que $f(x) = x^n - \tilde{e}_1 x^{n-1} + \tilde{e}_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n \tilde{e}_n$.

2. POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

L'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_n sur α est définie, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, par $\alpha_\sigma = (\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)})$.

Soit V la variété $\{\alpha_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ et I l'idéal de cette variété. Cet idéal est appelé *l'idéal des relations symétriques entre les racines du polynôme f* . Cet idéal est l'ensemble des polynômes $r \in k[x_1, \dots, x_n]$ tels que $\tilde{\tau}.r = 0$ pour tout $\tau \in \mathfrak{S}_n$. Il est bien connu que l'idéal I est engendré par les n polynômes s_1, s_2, \dots, s_n . Le paragraphe 4 présente d'autres générateurs : les modules de Cauchy.

Pour $j = 1, \dots, n$, notons Θ_j la multiplication par x_j dans $k[x_1, \dots, x_n]/I$. C'est un endomorphisme du k -espace vectoriel $k[x_1, \dots, x_n]/I$.

Date: 18 Décembre 1995.

* projet GALOIS du GDR de Calcul Formel MEDICIS ; supportée par GAGE, le Centre de Calcul Formel de l'École Polytechnique.

Théorème 2.1. (Yokoyama-Noro-Takeshima) Le polynôme

$$\chi_{\Psi}(T) = \prod_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (T - \Psi(\alpha_{\sigma})) = \prod_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (T - \widetilde{\sigma} \cdot \Psi)$$

est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme $\Psi(\Theta_1, \dots, \Theta_n)$ du k -espace vectoriel $k[x_1, \dots, x_n]/I$.

Dans le prochain paragraphe est présenté le calcul de ce polynôme caractéristique proposé par J.M. Arnaudiès. Dans le paragraphe 5 sera présentée une nouvelle méthode de calcul.

3. FORMULE DE POISSON-PERRON

Notons x_{n+1} , une indéterminée supplémentaire. Pour $\Psi \in k[x_1, \dots, x_n]$ de degré $d > 0$, l'homogénéisé de Ψ , noté Ψ^* , est donné par :

$$\Psi^* = x_{n+1}^d \Psi\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \quad .$$

En particulier, $s_i^* = e_i - \tilde{e}_i x_{n+1}^i$.

Nous notons $\text{Res}(g_1, \dots, g_n)$, le résultant de n polynômes g_1, \dots, g_n homogènes non constants à n variables.

Théorème 3.1. (Arnaudiès) Soit $\Psi \in k[x_1, \dots, x_n]$ alors

$$\chi_{\Psi}(T) = \text{Res}(s_1^*, \dots, s_n^*, T x_{n+1}^d - \Psi^*) \quad .$$

Ce théorème démontré dans [3] se déduit de la formule de Poisson-Perron (voir [2], p. 243).

4. MODULES DE CAUCHY

Les résultats de ce paragraphe proviennent de l'article [10].

4.1. Définition. Les n fonctions définies par récurrence dans $k(x)$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x) \quad \text{et pour } k = 2, \dots, n \\ f_k(x) &= f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x) = \frac{f_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-2}, x) - f_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})}{x - x_{k-1}} \end{aligned}$$

sont les *fonctions interpolaires* introduites par Ampère (voir [1]). Rappelons ce théorème (voir [6]) :

Théorème 4.1. (Cauchy) Soit $F(x_1, \dots, x_n)$ un polynôme à coefficients dans k et symétrique en les variables x_1, \dots, x_n . Pour éliminer x_n, \dots, x_1 dans le polynôme F , il suffit de diviser successivement F par les divers termes de la suite $f_n(x_n), \dots, f_2(x_2), f_1(x_1)$, en considérant chaque f_i comme une fonction de x_i . Le dernier reste obtenu sera indépendant de x_1, \dots, x_n et donnera la valeur $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ en fonction des coefficients de f .

Théorème 4.2. (Machì-Valibouze) Soient $f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ les polynômes associés à $f \in k[x]$ obtenus à partir des fonctions interpolaires. Ces n polynômes, appelés *modules de Cauchy*, forment une base standard réduite de l'idéal I pour l'ordre lexicographique.

Soient r un entier positif et s un entier compris entre 1 et n . Notons $h_r(x_1, \dots, x_s)$ la r -ième fonction symétrique complète, c'est-à-dire la somme des monômes de degré r en x_1, \dots, x_s , avec $h_0(x_1, \dots, x_s) = 1$.

Théorème 4.3. (Machì-Valibouze) Soit le polynôme $f(x) = x^n - \tilde{e}_1 x^{n-1} + \tilde{e}_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n \tilde{e}_n$ à coefficients dans k . Alors, pour $0 \leq r < n$, le $(r+1)$ -ième module de Cauchy associé à f est donné par :

$$(1) \quad f_{r+1}(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}) = \sum_{i=0}^{n-r} (-1)^i \tilde{e}_i h_{n-r-i}(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}) \quad .$$

En particulier $f_1(x_1) = f(x_1)$ et $f_n(x_1, \dots, x_n) = e_1 - \tilde{e}_1$.

(La démonstration de ce théorème utilise des séries génératrices tronquées.)

5. MODULES DE CAUCHY ET POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

Soient u et v deux polynômes de $k[x]$, avec $u = a^m \prod_{i=1}^m (x - \beta_i)$ où β_1, \dots, β_m sont dans une clôture algébrique de k . Le résultant en x des deux polynômes u et v , noté $\text{Res}_x(u, v)$, peut s'exprimer ainsi :

$$(2) \quad \text{Res}_x(u, v) = a^{\deg(v)} \prod_{i=1}^m v(\beta_i) \quad .$$

Théorème 5.1. Soit f un polynôme unitaire de $k[x]$ et f_1, \dots, f_n les modules de Cauchy associés à f (voir le paragraphe 4). Prenons $\Psi \in k[x_1, \dots, x_n]$ et définissons la suite R_0, R_1, \dots, R_{n-1} par récurrence :

$$(3) \quad R_0(T, x_1, \dots, x_{n-1}) = \text{Res}_{x_n}(f_n(x_1, \dots, x_n), T - \Psi(x_1, \dots, x_n))$$

$$(4) \quad R_i(T, x_1, \dots, x_{n-(i+1)}) = \text{Res}_{x_{n-i}}(f_{n-i}(x_1, \dots, x_{n-i}), R_{i-1}(x_1, \dots, x_{n-i})),$$

pour $i = 1, \dots, n-1$. Alors le polynôme caractéristique est donné par

$$(5) \quad \chi_\Psi(T) = R_{n-1}(T) \quad .$$

Preuve. Nous montrons le théorème par récurrence sur n , le degré du polynôme f . Pour $n = 1$, puisque $f = (x - \alpha_1)$ est unitaire nous avons bien

$$\text{Res}_{x_1}(f(x_1), T - \Psi(x_1)) = (T - \Psi(\alpha_1)) = \chi_\Psi(T) \quad .$$

Montrons-le également pour $n = 2$. Nous avons $f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - \tilde{e}_1$ et donc $R_0(x_1) = \text{Res}_{x_2}(f_2(x_1, x_2), T - \Psi(x_1, x_2)) = T - \Psi(x_1, \tilde{e}_1 - x_1)$. D'où

$$\begin{aligned} R_1(T) &= \text{Res}_{x_1}(f(x_1), T - \Psi(x_1, \tilde{e}_1 - x_1)) \\ &= (T - \Psi(\alpha_1, \tilde{e}_1 - \alpha_1))(T - \Psi(\alpha_2, \tilde{e}_1 - \alpha_2)) \\ &= (T - \Psi(\alpha_1, \alpha_2))(T - \Psi(\alpha_2, \alpha_1)) \\ &= \chi_\Psi(T) \quad . \end{aligned}$$

Supposons désormais que le théorème soit vrai jusqu'à $n - 1$. Il est vrai sur k , corps quelconque de caractéristique zéro, donc il l'est également sur $k[x_1]$. Ainsi, en posant pour tout x_1 , $F(x) = f_2(x_1, x)$ et en notant $F_1(x_2), F_2(x_2, x_3), \dots, F_{n-1}(x_2, \dots, x_n)$ les modules de Cauchy associés à F , nous avons $F_{k-1}(x_2, \dots, x_k) = f_k(x_1, \dots, x_k)$ pour $k = 2, \dots, n$. Notons $\beta_2(x_1), \dots, \beta_n(x_1)$ les $n - 1$ racines de $F(x)$. Par hypothèse de récurrence et puisque que $F(x)$ est unitaire, nous avons

$$R_{n-2}(T, x_1) = \prod_{\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}} (T - \Psi(x_1, \beta_{\tau(2)}(x_1), \dots, \beta_{\tau(n)}(x_1))) \quad .$$

Nous avons donc

$$R_{n-1}(T) = \prod_{i=1}^n \prod_{\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}} (T - \Psi(\alpha_i, \beta_{\tau(2)}(\alpha_i), \dots, \beta_{\tau(n)}(\alpha_i))) \quad .$$

Or, pour $i = 1, \dots, n$, pour $j = 2, \dots, n$ et pour $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$, nous savons que $\beta_{\tau(j)}(\alpha_i)$ est une racine de $F(x) = f_2(\alpha_i, x) = \frac{f(\alpha_i) - f(x)}{\alpha_i - x}$ et est donc une racine de f distincte de α_i . Ainsi, les $n!$ n -uplets $(\alpha_i, \beta_{i_2}(\alpha_i), \dots, \beta_{i_n}(\alpha_i))$ sur lesquels s'évalue Ψ dans le produit précédent sont $n!$ n -uplets $(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)})$ où σ parcourt \mathfrak{S}_n . Ceci achève la démonstration.

Remarque 1. Si f est unitaire, alors il est facile de voir que $f_i(x_1, \dots, x_i)$ est également unitaire en x_i pour $i = 1, \dots, n$. Dans le cas où f n'est pas unitaire, et où a est son coefficient dominant, il est toujours possible de poser $g(x) = a^{n-1} f(x/a)$ qui, lui, est un polynôme unitaire. Si l'on désire garder f , il faut alors introduire le coefficient dominant de f ainsi que ceux des modules de Cauchy f_2, \dots, f_n dans le calcul des résultants successifs.

6. POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE ET RÉSOVANTES

Nous allons étudier le lien entre les polynômes caractéristiques et les résolvantes. La résolvante a été introduite par Lagrange (voir [8]) pour étudier a priori les polynômes d'une variable et est un outil important de la théorie de Galois.

Soit $\Psi \in k[x_1, \dots, x_n]$. Notons H le groupe constitué des permutations de \mathfrak{S}_n qui laissent le polynôme Ψ invariant. C'est-à-dire

$$H = \{\tau \in \mathfrak{S}_n \mid \tau.\Psi = \Psi\} \quad .$$

Par exemple, si $\Psi = x_1 + x_2$, alors $H = \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_{n-2}$. Soit $\mathfrak{S}_n.\Psi$ l'orbite de Ψ sous l'action de \mathfrak{S}_n .

$$\mathfrak{S}_n.\Psi = \{\tau.\Psi \mid \tau \in \mathfrak{S}_n\}$$

Alors, la résolvante de f par Ψ , notée $L_{\Psi, f}$ est définie comme suit :

$$(6) \quad L_{\Psi, f}(T) = \prod_{\Theta \in \mathfrak{S}_n.\Psi} (T - \Theta) \quad .$$

Soit T une transversale gauche de \mathfrak{S}_n modulo H . Pour tout $\tau \in T$ et pour tout $h \in H$, on a $\tau\Psi = \tau h\Psi$ et si $\sigma \in T$ avec $\sigma \neq \tau$, alors $\sigma\Psi \neq \tau\Psi$. Donc, nous avons

les deux identités (bien connues) suivantes :

$$(7) \quad \begin{aligned} L_{\Psi, f}(T) &= \prod_{\tau \in T} (T - \Psi(\alpha_{\tau(1)}, \dots, \alpha_{\tau(n)})) \quad \text{et} \\ \chi_{\Psi}(T) &= L_{\Psi, f}^{[H]}(T) \quad . \end{aligned}$$

Voici, traduit en terme de résultants, le calcul proposé par Lagrange (voir [8]) :

Soit $U_0(T, x_1, \dots, x_{n-1}) = \text{Res}_{x_n}(f(x_n), T - \Psi(x_1, \dots, x_n))$ et, par récurrence sur $k = 1, \dots, n-1$, $U_k(T, x_1, \dots, x_{n-k-1}) = \text{Res}_{x_{n-k}}(f(x_{n-k}), U_{k-1}(T, x_1, \dots, x_{n-k}))$. Alors, d'après 2 et puisque f est unitaire :

$$(8) \quad U_{n-1}(T) = \prod_{i_1=1}^n \prod_{i_2=1}^n \cdots \prod_{i_n=1}^n (T - \Psi(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n})) \quad .$$

Nous voyons que dans cette formule ne sont pas exclues les égalités deux à deux, trois à trois, \dots , n à n des indices apparaissant dans les produits et que, par conséquent, U_{n-1} comporte des facteurs "parasites" déjà signalés par Lagrange. Ce sont ces facteurs parasites qu'évite la suite R_{n-1} , obtenue à partir des modules de Cauchy.

Lagrange signalait également des puissances parasites provenant des symétries de la fonction Ψ , que nous retrouvons dans la formule 7. Il est possible de prendre en compte des symétries dans le cas où l'arité de Ψ est différente de n . C'est ce que nous allons voir maintenant.

7. PRISE EN COMPTE DE L'ARITÉ

Soit $\Psi \in k[x_1, \dots, x_n]$. Si m est le plus petit entier tel qu'il existe m entiers distincts i_1, \dots, i_m tels que $\Psi \in k[x_{i_1}, \dots, x_{i_m}]$, alors Ψ est dit d'arité m .

Soit donc $\Psi \in k[x_1, \dots, x_n]$ d'arité m . Il est possible de supposer (en renumérotant les variables) que $\Psi \in k[x_1, \dots, x_m]$. Le sous-groupe H de \mathfrak{S}_n laissant Ψ invariant est nécessairement de la forme $K \times \mathfrak{S}_{n-m}$, où K est un sous-groupe de \mathfrak{S}_m .

Dans ce cas, la méthode de Lagrange consiste à modifier la suite finie U_k en posant $U_{n-m} = \text{Res}_{x_m}(f(x_m), T - \Psi(x_1, \dots, x_m))$ et en conservant la récurrence jusqu'à U_{n-1} .

Pour la méthode utilisant les modules de Cauchy, nous modifions, de même, la suite finie R_k comme suit (pour $k \in [1, m]$) :

$$(9) \quad V_{n-(m+1)}(T, x_1, \dots, x_m) = (T - \Psi(x_1, \dots, x_m)),$$

$$(10) \quad V_{n-k}(T, x_1, \dots, x_{k-1}) = \text{Res}_{x_k}(f_k(x_1, \dots, x_k), V_{n-k-1}(T, x_1, \dots, x_k)).$$

Il en découle naturellement l'identité suivante :

$$(11) \quad R_{n-k} = V_{n-k}^{(n-m)!} \quad ,$$

pour $k = m+1, \dots, 1$. Pour le voir, il suffit de constater que c'est vrai pour $k = m+1$ et d'utiliser l'identité $\text{Res}_x(g(x), h(x)k(x)) = \text{Res}_x(g(x), h(x))\text{Res}_x(g(x), k(x))$, pour tous polynômes g, h, k .

Nous en déduisons les deux identités suivantes :

$$(12) \quad \chi_{\Psi}(T) = V_{n-1}(T)^{(n-m)!} \quad \text{et}$$

$$(13) \quad V_{n-1}(T) = L_{\Psi, f}(T)^{|K|} \quad .$$

Remarque 2. L'arité est également utilisée pour accélérer les calculs de résolvantes dans la méthode basée sur les fonctions symétriques (voir [16]).

8. ÉLIMINATIONS SUCCESSIVES DE SYMÉTRIES

Dans la pratique, le calcul de $L_{\Psi, f}(T)$ ne se réalise pas sans éliminer au fur et à mesure les puissances parasites dues aux symétries du polynôme Ψ (voir 13). Nous allons illustrer ceci à travers deux exemples :

Exemple 1. Si $\Psi = x_1 + x_2 + x_3$, nous avons

$$V_{n-2}(T, x_1) = \text{Res}_{x_2}(f_2(x_1, x_2), \text{Res}_{x_3}(f_3(x_1, x_2, x_3), T - (x_1, x_2, x_3))) \quad .$$

Il est alors possible d'éliminer des symétries à ce niveau puisque :

$$\begin{aligned} V_{n-2}(T, x_1) &= \prod_{i=2}^{n-1} \prod_{j \in I(i)} (T - (x_1 + \beta_i(x_1) + \beta_j(x_1))) \\ &= \prod_{i=2}^n \prod_{2 \leq j < i} (T - (x_1 + \beta_i(x_1) + \beta_j(x_1)))^2 = W_{n-2}(T, x_1)^2 \quad . \end{aligned}$$

où $I(i) = \{j \in [2, n] \mid j \neq i\}$ et $\beta_2(x_1), \dots, \beta_n(x_1)$ sont les racines de $f_2(x_1, x)$. Il suffit de calculer la forme sans facteur carré de $V_{n-2}(T, x_1)$ pour obtenir $W_{n-2}(T, x_1)$ et poser $W_{n-1}(T) = \text{Res}_{x_1}(f_1(x_1), W_{n-2}(T, x_1))$. Soit :

$$W_{n-1}(T) = \prod_{k=1}^n \prod_{i=2}^n \prod_{2 \leq j < i} (T - (\alpha_k + \beta_i(\alpha_k) + \beta_j(\alpha_k))) \quad .$$

Ainsi,

$$(14) \quad W_{n-1}(T) = L_{\Psi, f}(T)^3 \quad ,$$

puisque pour $k = 1, \dots, n$, le facteur $(T - (\alpha_k + \alpha_i + \alpha_j))$ est obtenu 3 fois avec $(T - (\alpha_k + \beta_i(\alpha_k) + \beta_j(\alpha_k)))$, $(T - (\alpha_i + \beta_k(\alpha_i) + \beta_j(\alpha_i)))$ et $(T - (\alpha_j + \beta_i(\alpha_j) + \beta_k(\alpha_j)))$.

Exemple 2. Si $\Psi = 2x_1 + x_2 + x_3$, alors de même, nous calculons $W_{n-2}(T, x_1)$, tel que $V_{n-2}(T, x_1) = W_{n-2}(T, x_1)^2$ et nous avons finalement :

$$L_{\Psi, f}(T) = \text{Res}_{x_1}(f_1(x_1), W_{n-2}(T, x_1)) \quad .$$

Cet exemple permet de voir qu'il est préférable d'éliminer d'abord les symétries.

9. AUTRES AMÉLIORATIONS ET AUTRES MÉTHODES

L'interpolation permet de remplacer la variable T par un entier et le théorème de restes chinois permet de réaliser les calculs modulairement (voir [12]).

D'autres méthodes permettent de calculer les résolvantes. Certaines sont basées sur des séries génératrices (voir [5]) ou sur des manipulations de fonctions symétriques (voir [9] et [14]). Les résultants permettent également de calculer

très rapidement certaines résolvantes (voir [4]). K.Girstmair propose l'interpolation sur les variables x_1, \dots, x_n (voir [7]). Une méthode assez ancienne utilise les invariants (voir, par exemple, [13]).

Remarque 3. Le module SYM de MACSYMA (voir [15] et [11]) comporte différentes fonctions permettant de calculer des résolvantes.

RÉFÉRENCES

- [1] Ampère, M. 1826. Fonctions interpolaires. *Annales de M.Gergonne*
- [2] J.-M. Arnaudiès **Elimination** Thèse de l'Université P. Sabatier de Toulouse, 1989, à paraître dans Adv. in Math.
- [3] J.-M. Arnaudiès *Théorème de Bézout, Formule de Poisson-Perron et Courbes Rationnelles Planes Génériques*, Rapport interne LITP **92-24**, 1992
- [4] J.-M. Arnaudiès, A. Valibouze *Partial Computation for special Resolvents* proposed to JSC
- [5] Casperson, D., McKay, J. : *Symmetric functions, m-sets, and Galois groups* to appear in Math. Comp.
- [6] Cauchy, A. *Usage des fonctions interpolaires dans la détermination des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique donnée*. Oeuvre Volume 5 p.473 extrait 108.
- [7] Girstmair, *On the Computation of Resolvents and Galois groups* Manuscripta Mathematica **43** , 1983, P289-307
- [8] Lagrange, J.L., *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, **Mémoires de l'Académie de Berlin**, 205-421, (**Oeuvres de Lagrange**, tome IV, 205-421)
- [9] Lagrange, J.L., *Traité de la résolution des équations numériques : Notes sur la théorie des équations algébriques*, Oeuvres de Lagrange , Tome VIII, 133-367
- [10] A. Machi, A. Valibouze, (1991), *L'idéal des relations symétriques et l'idéal des relations* prépublication
- [11] Maxima DOE maintenu par William Schelter
- [12] Leonard Soicher, *The computation of the Galois groups*, Thesis in departement of computer science, Concordia University, Montreal, Quebec, Canada, (1981).
- [13] E.H. Berwick , (1929) *On Soluble Sextic equations* Proc. London Math. Soc. (2) **29**, 1-28.
- [14] A. Valibouze, (1988), *Manipulations de fonctions symétriques*, Thèse de l'Université Paris VI.
- [15] Valibouze A. (1993) **Extension SYM de MACSYMA, manuel de l'utilisateur**
- [16] A. Valibouze (1992) *Sur l'arité des fonctions*, European Journal of Combinatorics, 1993, **14**, 359-372