



**HAL**  
open science

# On the Adaptive Continuous Finite-Time Regulation of 1-DOF Mechanical Systems $\star$

Emmanuel Cruz-Zavala, Jaime A Moreno, Antonio Loria, Marco Arteaga

## ► To cite this version:

Emmanuel Cruz-Zavala, Jaime A Moreno, Antonio Loria, Marco Arteaga. On the Adaptive Continuous Finite-Time Regulation of 1-DOF Mechanical Systems  $\star$ . Conferencia Nacional de Control Automático, Oct 2024, Mexico, México. hal-04685464

**HAL Id: hal-04685464**

**<https://hal.science/hal-04685464v1>**

Submitted on 3 Sep 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# On the Adaptive Continuous Finite-Time Regulation of 1-DOF Mechanical Systems<sup>\*</sup>

Emmanuel Cruz-Zavala<sup>\*</sup> Jaime A. Moreno<sup>\*\*</sup>  
Antonio Loria<sup>\*\*\*</sup> Marco Arteaga<sup>\*\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup> *Department of Computer Science at the University of Guadalajara (UdG) (e-mails: emmanuel.cruz1692@academicos.udg.mx, emmanuel.nuno@academicos.udg.mx)*

<sup>\*\*</sup> *Instituto de Ingeniería at the Universidad Nacional Autónoma de México (e-mail: JMorenoP@iingen.unam.mx)*

<sup>\*\*\*</sup> *Laboratoire des signaux et systèmes, CNRS, France (e-mail: antonio.loria@cnrs.fr)*

<sup>\*\*\*\*</sup> *Facultad de Ingeniería at the Universidad Nacional Autónoma de México (e-mails: marteagp@unam.mx)*

---

**Abstract:** In this paper, we propose an adaptive control scheme for achieving finite-time regulation in the simplest nonlinear mechanical system: a one degree of freedom Euler-Lagrange system. Our control approach consists of two components: a Proportional-Derivative (PD) nonlinear feedback and a finite-time estimation algorithm, which is based on a Dynamic Regressor Extension and Mixing (DREM) estimator. We emphasize that finite-time regulation of Euler-Lagrange systems using adaptive control has not been addressed in the literature. Although the control system under analysis is basic, it reveals important aspects of the finite-time convergence of the closed-loop system. The performance of the proposed controller is demonstrated through simulations.

*Keywords:* Finite-Time Control, Adaptive Control, DREM, Euler-Lagrange systems.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Una de las técnicas más utilizadas para lidiar con la incertidumbre paramétrica es el Control Adaptativo. Frecuentemente se explota la propiedad de que el sistema es linealmente parametrizable, como por ejemplo el modelo de un robot, que se puede reescribir como el producto de una matriz regresora y un vector de parámetros constantes. Con esto se construye la ley de estimación de parámetros, que suele ser del tipo gradiente y conduce a los controladores adaptativos clásicos basados en pasividad, que aseguran la regulación o el seguimiento de trayectorias de manera asintótica (véase Slotine and Li (1987); Ortega and Spong (1989); Loria et al. (2005) donde se aplica la llamada trayectoria de referencia virtual o Tomei (1991); Kelly (1993, 1997) para una solución alternativa). Sin embargo, la estimación robusta y uniforme de los parámetros solo esta garantizada cuando se presenta la condición de Excitación Persistente (EP). En ausencia de esta, la presencia de pequeñas incertidumbres pueden provocar serios problemas en los controladores adaptativos, como la deriva de parámetros, que puede

provocar inestabilidad del sistema de control (Rohrs et al., 1985; Sastry and Bodson, 1989). En Loria et al. (2005) se demostró que la condición necesaria y suficiente para garantizar la convergencia robusta de la estimación de parámetros es que la matriz regresora sea de EP a lo largo de las trayectorias de referencia, algo que puede verificarse *a priori*. Sin embargo, en el caso de la regulación, la matriz regresora rara vez será de EP.

El control adaptativo de tiempo finito (TF) también se ha desarrollado para ciertos tipos de sistemas no lineales utilizando el método de backstepping (Hong et al., 2006, 2010; Cai et al., 2016; Zimenko et al., 2019; Sun et al., 2019). Este interés surge de las características que poseen los controladores TF cuando se conocen las cotas de la incertidumbre (o perturbación) en comparación con una ley de control convencional tipo Proporcional-Derivativo (PD) (Venkataraman and Gulati, 1993). En general, estas propiedades son: mayor robustez, respuestas transitorias rápidas y mayor precisión. Los resultados reportados garantizan la estabilización en TF independientemente de si los parámetros se estiman correctamente o no. Sin embargo, estos resultados no se pueden aplicar para hacer regulación en TF con una ley de adaptación. Cabe resaltar que estos enfoques sólo funcionan bajo la condición de que los términos en el regresor sean de mayor orden

---

<sup>\*</sup> Este trabajo es financiado por: CONAHCyT, a través del proyecto de Ciencia Básica y de Frontera CBF2023-2024-1964; y PAPIIT-UNAM, a través del proyecto IN106323.

que los términos de la retroalimentación de estado en el controlador, algo que no se cumple al escribir el sistema en el error de regulación, y, en el mejor de los casos, sólo se obtiene estabilidad práctica (véase Cai et al. (2016)). En Huang et al. (2014) se resuelve el problema de consenso de TF para una clase de sistemas mecánicos utilizando el enfoque adaptable de TF antes mencionado. En dicho trabajo se consideró que cada agente de la red posee una matriz de inercia diagonal y que no existen pares de gravedad. Lo cual deja fuera una amplia clase de sistemas mecánicos.

Recientemente se han hecho esfuerzos considerables para relajar la condición de EP. En esta dirección, en Aronovskiy et al. (2017) se introdujo la llamada Mezcla y Extensión Regresora Dinámica (DREM, por sus siglas en inglés) y se demostró que puede obtenerse convergencia aún en ausencia de EP, y que si el regresor es de EP entonces también lo será el regresor escalar producido por la DREM (véase Korotina et al. (2020)). A parte de proveer una condición menos restrictiva en ciertos escenarios, la DREM asegura: (a) una respuesta transitoria monótona (es decir, sin picos ni oscilaciones) de la estimación independientemente de la condición de excitación; y (b) un ajuste de la ganancias simple y transparente, debido a que como no hay acoplamiento entre los elementos del estimador cada elemento del vector de parámetros estimados se ajusta con una ganancia escalar separada, sin afectar a los transitorios de los otros elementos (Korotina et al., 2020), características que no poseen los estimadores clásicos. La DREM también se ha aplicado para la estimación en modelos no linealmente parametrizados, (Ortega et al., 2021). En particular, en Romero et al. (2021) se propuso una parametrización simple para la identificación de sistemas Euler-Lagrange (EL) utilizando su ecuación de balance de potencia.

La DREM también se ha aplicado para la estimación de parámetros en TF (véase Wang et al. (2020)), y para diseñar leyes adaptables con condiciones diferentes a las de EP. Cuando se cumplen tales condiciones, se logra una mejora en el desempeño de la estimación de parámetros, pero cuando no, la adaptación puede simplemente detenerse, lo que podría ser inaceptable para el control de sistemas EL. Teniendo esto en cuenta, el trabajo Arteaga (2024) introduce un esquema adaptativo compuesto, que combina el algoritmo de gradiente estándar con un término adicional basado en la DREM, que posee potencia menor a uno, con lo que la estimación de parámetros se logra en TF, pero el seguimiento es asintótico.

Es notable que el problema de regulación en TF, empleando un control adaptable, no ha sido resuelto ni siquiera para un sistema EL de un grado de libertad. Este trabajo busca resolver este problema utilizando la DREM y, además, develar algunos aspectos importantes sobre el empleo de este algoritmo cuando se usa en un control adaptable. La estructura del trabajo es la siguiente. En la Sección 2 se establece la notación y las herramientas

matemáticas utilizadas a lo largo del artículo. Además, se define y parametriza al sistema y se construye el regresor dinámico utilizando la DREM. En la Sección 3 se establece y demuestra el resultado principal, y se desarrolla un ejemplo de simulación para mostrar el desempeño del control adaptable propuesto. Finalmente se establecen algunas conclusiones en la Sección 4.

## 2. PRELIMINARES

### 2.1 Notación y herramientas matemáticas

$\mathbb{R}$  representa el conjunto de todos los números reales,  $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ ,  $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ .  $\mathbb{N}$  es el conjunto de los números naturales y para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\bar{n} := \{1, \dots, n\}$ . Una función  $\mathbf{f}(t)$  pertenece a la clase  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , si sus derivadas  $\dot{\mathbf{f}}, \ddot{\mathbf{f}}, \dots, \mathbf{f}^{(k)}$  existen y son continuas. Si  $V(\cdot) \in \mathcal{C}^1$  entonces  $\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) = [\partial_{x_1} V(\mathbf{x}), \dots, \partial_{x_n} V(\mathbf{x})]^\top$ , con  $\partial_{x_i} := \partial/\partial x_i$  e  $i \in \bar{n}$ . Una función de valor real que es definida positiva (o semidefinida) positiva se denota por  $V(\mathbf{x}) \succ 0$  (o  $V(\mathbf{x}) \succeq 0$ ). Se define el operador continuo que produce la potencia  $p$  signada de  $z$  como  $[z]^p := |z|^p \text{sign}(z)$ , para cualquier  $z \in \mathbb{R}$  y cualquier  $p \in \mathbb{R}_{>0}$ , donde  $\text{sign}(z)$  es la función *signo* estándar. Algunas propiedades son: (**SP1**)  $[z]^p = z^p$ , para cualquier entero impar  $p$ ;  $|z|^p = z^p$ , para cualquier entero par  $p$ . Además, para cualquier  $p, q \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $[z]^p [z]^q = |z|^{p+q}$  y  $[z]^p |z|^q = [z]^{p+q}$ . La acción de un operador  $H : \mathcal{L}_\infty \rightarrow \mathcal{L}_\infty$  de una señal continua  $u(t)$  se denota por  $H[u](t)$  y el operador de diferenciación de  $u(t)$  se define como  $s^i[u](t) := \frac{d^i}{dt^i} u(t)$ .

A continuación se introducen herramientas de homogeneidad ponderada (véase por ejemplo Bacciotti and Rosier (2005)). Dadas las coordenadas  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ , y las *coordenadas de pesos*  $\mathbf{r} \triangleq [r_1, \dots, r_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ ,  $r_i > 0$ ,  $i \in \bar{n}$ , el operador dilatación  $\Delta_{\epsilon}^{\mathbf{r}}$  se define como  $\Delta_{\epsilon}^{\mathbf{r}} \mathbf{x} \triangleq [\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n]^\top$ .

*Definición 1.* Una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice  $\mathbf{r}$ -homogénea de grado  $l \in \mathbb{R}$  (o  $(\mathbf{r}, l)$ -homogénea), si para cualquier  $\epsilon > 0$  y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  se cumple que  $V(\Delta_{\epsilon}^{\mathbf{r}} \mathbf{x}) = \epsilon^l V(\mathbf{x})$ .  $\triangleleft$

Las funciones homogéneas poseen algunas propiedades.

*Lema 1.* Sean  $V_k$ ,  $k = 1, 2$ , dos funciones continuas y  $\mathbf{r}$ -homogéneas de grados  $l_k \in \mathbb{R}_{>0}$ , respectivamente.

(a) Si  $V_1$  es definida positiva, entonces existen constantes  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $c_1 [V_1(\mathbf{x})]^{l_2/l_1} \leq V_2(\mathbf{x}) \leq c_2 [V_1(\mathbf{x})]^{l_2/l_1}$  para toda  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Además, si  $V_2$  es definida positiva, entonces  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ .  $\triangleleft$

(b) Si  $V_1$  es diferenciable, entonces las derivadas parciales  $\partial_{x_i} V(\mathbf{x})$  son  $(l_V - r_i, \mathbf{r})$ -homogéneas.  $\triangleleft$

*Lema 2.* (Hestenes (1966)). Sean  $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\kappa : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  dos funciones continuas y  $(\mathbf{r}, m)$ -homogéneas. Defina  $Z = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : \kappa(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ . Si  $\eta(\mathbf{x}) > 0$  para toda  $\mathbf{x} \in Z$ , entonces existen  $\lambda^*, c \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que para toda  $\lambda \geq \lambda^*$  y para toda  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ,  $\eta(\mathbf{x}) + \lambda \kappa(\mathbf{x}) > c \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{r}, p}^m$ .  $\triangleleft$

El siguiente resultado viene de Cruz-Zavala et al. (2018).

*Lema 3.* Para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  y cualesquiera constantes  $A, B, C, D, r_1, r_2, m \in \mathbb{R}_{>0}$ , con  $m > r_2$ , la función  $v_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$v_1(x, y) = (v_0(x, y))^{\frac{m}{2r_2}} + DC[x]^{\frac{m-r_2}{r_1}} y,$$

dónde  $v_0(x, y) \triangleq A|y|^2 + B|x|^{\frac{2r_2}{r_1}}$ , es no negativa si

$$0 < D^2 \leq \frac{Am}{C^2 r_2} \left[ \frac{Bm}{m-r_2} \right]^{\frac{m-r_2}{r_2}}. \quad (1)$$

Además,  $v_1(x, y) \leq 2v_0^{\frac{m}{2r_2}}(x, y)$ .  $\triangleleft$

## 2.2 El Robot de un grado de libertad

Considere el robot de un grado de libertad sin fricción descrito por

$$J\ddot{q} + mg\text{lsen}(q) = \tau, \quad (2)$$

siendo  $J$  la inercia,  $m$  la masa,  $l$  la longitud,  $g$  la contante de aceleración de la gravedad,  $q$  la posición y  $\dot{q}$  la velocidad. Se busca llevar la posición articular  $q$  a la posición deseada  $q_d \in \mathbb{R}$  en TF sin conocer con exactitud los valores de los parámetros  $m$  y  $l$ . Si se conocieran exactamente estos valores, el controlador

$$\tau = -P[q - q_d]^a - D[\dot{q}]^b + mg\text{lsen}(q), \quad (3)$$

con los exponentes

$$a = \frac{m_c}{r_1}, \quad b = \frac{m_c}{r_2}, \quad m_c := 2r_2 - r_1 \quad (4)$$

tales que  $r_1$  y  $r_2$  satisfacen

$$2r_2 > r_1 > r_2, \quad (5)$$

asegura la convergencia a la posición deseada  $q_d$  en tiempo finito. El controlador (3) es un controlador PD de TF que se puede derivar fácilmente con la metodología introducida en Cruz-Zavala et al. (2020).

Considerando que los parámetros  $m$  y  $l$  son inciertos pero constantes y  $e = q - q_d$ , el controlador (3) podría modificarse como sigue

$$\tau = -P[e]^a - D[\dot{q}]^b + \Psi(q)\theta_e, \quad \Psi(q) = g\text{sen}(q). \quad (6)$$

Ahora el último término del controlador utiliza un estimado del producto  $\theta = ml$  denotado por  $\theta_e$ .

Utilizando como variables de estado  $e_1 = q - q_d$ ,  $e_2 = \dot{q}$  y  $\tilde{\theta} = \theta_e - \theta$ , la dinámica del sistema (2) con el controlador (6) queda descrita por la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= J^{-1}[-P[e_1]^a - D[e_2]^b + \Psi(e_1 + q_d)\tilde{\theta}] \end{aligned} \quad (7)$$

donde falta diseñar la dinámica de  $\tilde{\theta}$ , es decir, la dinámica del estimador del parámetro desconocido.

En los resultados subsecuentes la convergencia en TF se considera que se presenta durante un intervalo de tiempo determinado y, además, no para toda  $t_0$  (Ríos et al., 2016). En particular, se considera  $t_0 = 0$  el instante en que se empieza a ejecutar la tarea de regulación. En este caso, la convergencia en TF puede presentarse en el intervalo  $t \in [0, T_f]$ ,  $T_f \in \mathbb{R}_{>0}$ , es decir, la función de asentamiento  $T$  satisface  $\bar{T} \leq T_f$ .

## 2.3 Parámetroización y construcción del regresor dinámico: la DREM

Basado en Ortega et al. (2021), el sistema EL (2) satisface la extensión regresora

$$\mathbf{y} = \Omega(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta} \quad (8)$$

dónde

$$\mathbf{y} = H(s)[\boldsymbol{\tau}], \quad H(s) = \frac{1}{s + \lambda_1}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} J \\ ml \end{bmatrix} \quad (9)$$

y la matriz regresora

$$\Omega(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = H(s) \begin{bmatrix} s[\dot{q}] \\ g\text{sen}(q) \end{bmatrix}^\top \quad (10)$$

*Comentario 1.* Observe que  $H(s)s[\dot{q}] = \frac{s}{s+\lambda_1}\dot{q}$ , este término puede calcularse sin diferenciación, evitando las mediciones de aceleración del sistema (2).  $\triangleleft$

Multiplicando (8) por  $\Omega^\top(t)$  y aplicando el filtro lineal  $H(s) = \frac{1}{s+\lambda_2}$  (no necesariamente  $\lambda_1 = \lambda_2$ ), se llega a la extensión del regresor de Kreisselmeier

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Y}}(t) &= -\lambda_2 \mathbf{Y}(t) + \Omega^\top(t)\mathbf{y}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t) &= -\lambda_2 \boldsymbol{\Phi}(t) + \Omega^\top(t)\Omega(t) \end{aligned} \quad (11)$$

que produce la relación

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}.$$

Multiplicando esta ecuación por la matriz adjunta de  $\boldsymbol{\Phi}(t)$  se obtiene

$$\mathbf{x}_e = \boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{x}_e := \text{adj}\{\boldsymbol{\Phi}\}\mathbf{Y} \quad \boldsymbol{\phi} := \det\boldsymbol{\Phi}. \quad (12)$$

Con base en lo anterior, se propone el estimador de parámetros

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\boldsymbol{\Upsilon}_\theta \boldsymbol{\Xi}_\theta, \quad \boldsymbol{\Xi}_\theta = \begin{bmatrix} f(\phi)[\phi\hat{\theta}_J - x_{e1}]^c \\ f(\phi)[\phi\hat{\theta}_U - x_{e2}]^c \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde  $c > 0$ ,  $\boldsymbol{\Upsilon}_\theta := \text{diag}(\Upsilon_J, \Upsilon_U)$  es una matriz diagonal,  $\theta_i$  es el  $i$ -ésimo elemento de  $\boldsymbol{\theta}$  y  $x_{ei}$  es el  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbf{x}_e$ . La función continua  $f(\phi)$  tiene el mismo signo que su argumento escalar  $\phi$ , es decir,  $f(\phi)\phi > 0$  para toda  $\phi \neq 0$ . Como  $f(\phi)$  es continua, también implica que  $f(0) = 0$ .

Como  $\boldsymbol{\theta}$  tiene valor constante y  $x_{ei} = \phi\theta_i$ , la dinámica del error en los parámetros satisface

$$\dot{\tilde{\theta}}_i = -\Upsilon_{\theta_i} f(\phi)[\phi]^c [\tilde{\theta}_i]^c \quad (14)$$

dónde  $\tilde{\theta}_i$  es el  $i$ -ésimo elemento del error del vector de parámetros  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}$  y hemos aplicado la propiedad **SP1**. Cuando  $f(\phi) = \phi$  se obtiene el estimador introducido en Wang et al. (2020), que toma como base el algoritmo propuesto en Rueda-Escobedo and Moreno (2015).

*Comentario 2.* Los elementos  $x_{ei}$  en (12) se puede calcular usando la regla de Cramer como

$$x_{ei} = \det\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{x}_e, i}, \quad \forall t > 0 \quad (15)$$

donde  $\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{x}_e, i}$  es la matriz  $\boldsymbol{\Phi}$  donde se reemplaza la  $i$ -ésima columna con el vector  $\mathbf{Y}$ , para toda  $i \in \{1, 2\}$ . Esto evita el cálculo de la matriz adjunta  $\text{adj}\{\boldsymbol{\Phi}\}$  en la implementación numérica del estimador (13).  $\triangleleft$

*Lema 4.* Considere la ecuación

$$\dot{x} = -\Gamma\zeta(t)[x]^c \quad (16)$$

con constante  $\Gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ . Suponga que  $\int_{t_0}^t \zeta(\sigma)d\sigma \geq \mu$ , para alguna constante  $\mu \geq |x(t_0)|^{1-c}/[\Gamma(1-c)]$  y que  $\zeta(t)$  es una función continua tal que  $\zeta(t) > 0$  para todo  $t > t_0$ . Si  $1 > c > 0$ ,  $x(t)$  va a cero en TF. Por otro lado, si  $c \geq 1$  y  $\int_{t_0}^t \zeta(\sigma)d\sigma \rightarrow \infty$ ,  $x(t)$  va asintóticamente a cero.

*Demostración.* Directa mediante la integración de (16).  $\triangleleft$

Es bien conocido que cuando  $c = 1$  y  $\zeta(t)$  es de EP, la solución de la ecuación (16) converge de forma exponencial. De hecho, con  $c = 1$ , la solución de (16) es

$$x(t) = x(t_0)e^{-\Gamma \int_{t_0}^t \zeta(\sigma)d\sigma}. \quad (17)$$

Se observa que si  $\int_{t_0}^t \zeta(\sigma)d\sigma \rightarrow +\infty$  entonces  $x(t) \rightarrow 0$ , y en el caso que  $\int_{t_0}^t \zeta(\sigma)d\sigma \rightarrow c_1$  entonces  $x(t) \rightarrow c_2$ , donde  $c_1$  y  $c_2$  son algunas constantes.

### 3. RESULTADO PRINCIPAL: CONTROL ADAPTABLE INDIRECTO EN TIEMPO FINITO

Para este esquema, el estimador se reduce a

$$\dot{\hat{\theta}}_U = -\Upsilon_U f(\phi)[\phi\hat{\theta}_U - x_{e2}]^c, \quad (18)$$

dónde la ganancia  $\Upsilon_U > 0$ , el exponente  $c \in (0, 1)$ , el término

$$f(\phi) = \frac{[\phi]^d}{1 + |\phi|^{c+d}}, \quad (19)$$

con  $\phi$  y  $x_{e2}$  obtenidas de la ecuación (12), y  $d \in \mathbb{R}_{>0}$ .

Recordando que  $\tilde{\theta} = \theta_e - \theta$ , con  $\theta_e := \hat{\theta}_U$ , la ecuación dinámica del error paramétrico es

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Upsilon_U f(\phi)[\phi]^c [\tilde{\theta}]^c. \quad (20)$$

En (6) sólo se requiere la estimación del parámetro involucrado en el torque debido a la gravedad.

*Proposición 1.* Considere el sistema (2) con la parametrización (8). Sea el control adaptativo descrito por (6), junto con el estimador de parámetros (18), (11) y (12). Si existe un  $\ell > 0$  tal que

$$\int_0^\ell f(\phi(\sigma))[\phi(\sigma)]^c d\sigma \geq |\tilde{\theta}(0)|^{1-c}/\Upsilon_U(1-c), \quad (21)$$

entonces existe un  $T_f \geq \ell$  tal que el tiempo de convergencia  $T \in (0, T_f]$  y el origen  $(e_1, e_2, \tilde{\theta}) = (0, 0, 0)$  del sistema (7) y (20) es un equilibrio estable en tiempo finito en el intervalo de tiempo  $(0, T_f]$ .  $\triangleleft$

Un par de observaciones son pertinentes aquí. Primero, la convergencia con respecto al tiempo *a priori* no es uniforme. Segundo, la validez del resultado anterior confía en que se pueda cumplir (21), que tampoco *a priori* puede verificarse. Finalmente, la convergencia en TF no está garantizada para todo tiempo futuro, después que los errores convergen en tiempo finito, ésta puede perderse en algún tiempo posterior  $t \geq T_f$ , si existe alguna pequeña perturbación en el estimador.

#### 3.1 Prueba de la Proposición 1

La idea de la prueba es simple. Se halla una función de Lyapunov que muestra que el sistema (7) es entrada-estados estable de TF con respecto a la variable  $\tilde{\theta}$  (Hong et al., 2010). Además, como  $\tilde{\theta}$  se hace cero en TF, la regulación se alcanzará en tiempo finito.

*Lema 5.* La función

$$\mathcal{V}(e) = (\gamma_2 + \gamma_1)V_0^{\frac{m}{2r_2}} + \gamma_1 d_1 J e_1 e_2, \quad m = r_1 + r_2 \quad (22)$$

con  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ ,  $V_0(e) = \frac{J}{2}e_2^2 + \frac{r_1}{2r_2}P|e_1|^{2r_2/r_1}$ , y

$$0 < d_1^2 \leq \frac{J}{2} \frac{r_1 + r_2}{r_2} \left[ \frac{(r_1 + r_2)P}{2r_2} \right]^{\frac{r_1}{r_2}}, \quad (23)$$

es una función de Lyapunov entrada-estados estable de tiempo finito con respecto a la variable  $\tilde{\theta}$ .

*Demostración.* La función (22), se puede escribir como

$$\mathcal{V}(e) = \gamma_2 V_0^{\frac{m}{2r_2}}(e) + \gamma_1 (V_0^{\frac{m}{2r_2}}(e) + d_1 J e_1 e_2)$$

El primer término es definido positivo. Invocando el Lema 3 con  $a = J/2$ ,  $b = r_1 P/2r_2$ ,  $c = 1$ , la suma del segundo y tercer término siempre es no negativa si  $d_1$  satisface (23). Por lo tanto, (22) es definida positiva para cualquier  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ . Lo cual implica que  $\mathcal{V}(e) \succ 0$ . Como  $V_0$  y  $\mathcal{V}$  son  $(\mathbf{r}, r_1 + r_2)$ -homogéneas, con  $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2]^\top$ , son radialmente no acotadas (Bhat and Bernstein, 2005, Lemma 4.1). Además,  $\mathcal{V} \in \mathcal{C}^1$  para valores de  $r_1 \geq r_2$ .

Derivando con respecto al tiempo a  $\mathcal{V}$  a lo largo de (7) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} \dot{\mathcal{V}} &= \frac{m}{2r_2} V_0^{\frac{r_1 - r_2}{2r_2}} (-D|e_2|^{\frac{3r_2 - r_1}{2r_2}} + e_2 \Psi(q)\tilde{\theta}) \\ &\quad \gamma d_1 e_2^2 - \gamma d_1 e_1 \left( P|e_1|^{\frac{m_c}{r_1}} + D|e_2|^{\frac{m_c}{r_2}} + \Psi(q)\tilde{\theta} \right). \end{aligned}$$

siendo  $\gamma = \gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2)$ . El lado derecho se puede reescribir como

$$\frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} \dot{\mathcal{V}} \leq -\gamma v_1(e_1, e_2) + \chi(e_1, e_2)\tilde{\theta} \quad (24)$$

siendo

$$\begin{aligned} v_1(e_1, e_2) &:= \frac{Dm}{2r_2\gamma} V_0^{\frac{r_1 - r_2}{2r_2}} |e_2|^{\frac{3r_2 - r_1}{2r_2}} - d_1 e_2^2 + d_1 P|e_1|^{\frac{2r_2}{r_1}} \\ &\quad + d_1 k_2 e_1 [e_2]^{\frac{m_c}{r_2}} \\ \chi(e_1, e_2) &:= (V_0^{\frac{r_1 - r_2}{2r_2}} e_2 + \gamma d e_1)g. \end{aligned} \quad (25)$$

Acorde con el Lema 2,  $v_1(e_1, e_2)$  es  $(\mathbf{r}, 2r_2)$ -homogénea y si  $e_2 = 0 \implies v_1 = d_1 P|e_1|^{\frac{2r_2}{r_1}} > 0$  para toda  $e_1 \neq 0$ . Entonces, no es difícil verificar que  $v_1(e_1, e_2) \succ 0$  para valores grandes de  $\frac{mP}{\gamma}$ , que es el caso cuando  $\gamma$  se elige suficientemente pequeña. Ahora haciendo uso de la propiedad (a) del Lema 1,  $v_1$  y  $\chi(e_1, e_2)$  pueden acotarse por funciones homogéneas del grado apropiado. Ya que  $v_1$  es una función homogénea, al igual que  $\chi(e_1, e_2)$ . Por lo que, el lado derecho de (24) puede acotarse como

$$\dot{\mathcal{V}} \leq -(\gamma_1 + \gamma_2)[\gamma\alpha\mathcal{V}^{\frac{2r_2}{m}} - \beta\mathcal{V}^{\frac{r_1}{2r_2}}\tilde{\theta}] \quad (26)$$

para algunas constantes  $\alpha, \beta > 0$ . De hecho, para algún  $\xi \in (0, 1)$

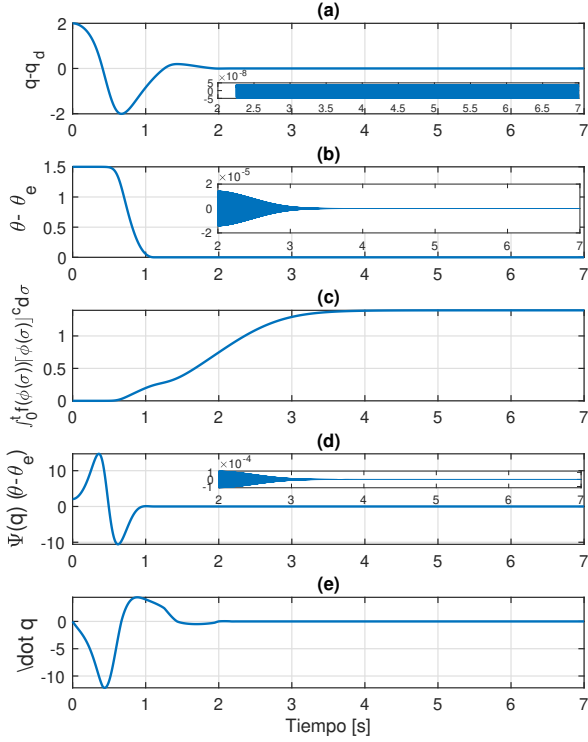


Fig. 1. Resultados de simulación del sistema de un grado de libertad con control adaptable en tiempo finito.

$$\dot{V} \leq -(\gamma_1 + \gamma_2)(1 - \xi)\gamma\alpha\mathcal{V}^{\frac{2r_2}{m}}, \quad \forall \mathcal{V}^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\beta\tilde{\theta}}{\gamma\alpha\xi} \quad (27)$$

Como  $2r_2/m < 1 \iff r_1 < r_2$ , la desigualdad (27) demuestra que la función  $V$  es una función entrada-estados estable de tiempo finito, (Hong et al., 2010).  $\square$

Como la ecuación de error en los parámetros (20) satisface el Lema 4 con  $\zeta(t) = \frac{|\phi(t)|^{c+d}}{1+|\phi(t)|^{c+d}}$ , si (21) se cumple,  $\tilde{\theta}$  es acotada y converge a cero en tiempo finito. Por lo tanto existe un tiempo  $t_e > 0$  tal que

$$\dot{V} \leq -(\gamma_1 + \gamma_2)\gamma\alpha\mathcal{V}^{\frac{2r_2}{m}}. \quad (28)$$

Con esto se concluye la prueba de la Proposición.  $\square$

*Ejemplo 1.* Considere que los parámetros físicos reales son:  $m = 3[\text{kg}]$ ,  $l_1 = 0,5[\text{m}]$  y  $J = 0.9375[\text{kgm}^2]$ . La posición deseada y las condiciones iniciales están dadas por  $q_d = 1[\text{rad}]$  y  $q(0) = 3[\text{rad}]$ , y  $\dot{q} = 0[\text{rad/s}]$ . Las constantes de los filtros en (9) y (11) se eligen como  $\lambda_1 = 1.2$  y  $\lambda_2 = 1$  y las ganancias son  $P = 3$ ,  $D = 2$  y  $\Upsilon = 10$ . Las simulaciones se han realizado con el método de discretización de Euler con paso fijo  $T_s = 0.1[\text{ms}]$ .

Los resultados se observan en la Figura 1 con  $d = r_2 = 1$ ,  $r_1 = 1.5$  y  $c = 0.6$ . Los parámetros convergen a cero en aproximadamente  $t \approx 1.2[\text{s}]$ , véase la Figura 1(b). Mientras que el error de regulación se hace cero en  $t \approx 2.26[\text{s}]$ , véase la Figura 1(a). La Figura 1(c) muestra la

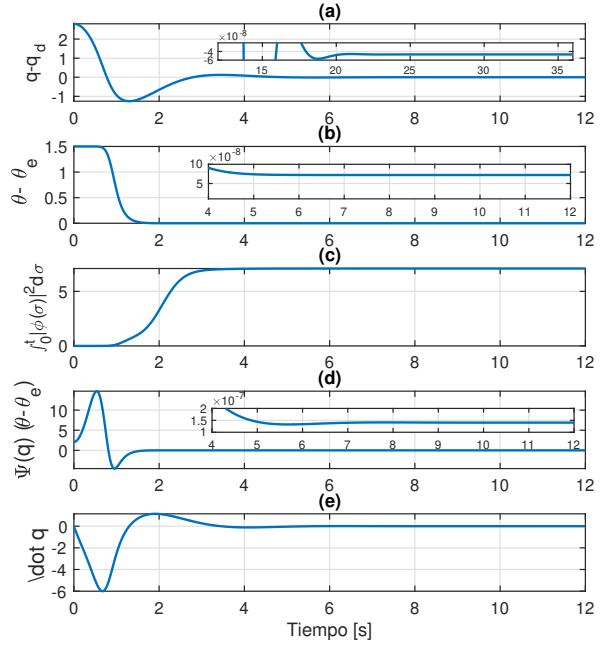


Fig. 2. Resultados de simulación del sistema de un grado de libertad con control adaptable asintótico.

evolución de la integral del término  $f(\phi)[\phi]^c$  que como se observa tiende a una constante. La Figura 1(e) muestra como el regresor del sistema multiplicado por  $\tilde{\theta}$  también se hace cero en TF debido a que el error en los parámetros también se hizo cero en tiempo finito.

Las siguientes simulaciones son para el estimador asintótico, es decir con  $d = r_2 = r_1 = c = 1$ . Para este caso las constantes de los filtros en (9) y (11) se eligen como  $\lambda_1 = 3$  y  $\lambda_2 = 1$ . Usando las mismas condiciones iniciales, ahora regulamos a  $q_d = 0.2[\text{rad}]$ .

Los resultados se observan en la Figura 2. En este caso  $\int_0^t f(\phi(\sigma))\phi(\sigma)d\sigma \rightarrow 1.6851$  con lo que  $\tilde{\theta}(t) \rightarrow 7.2 \times 10^{-8}$  aproximadamente, véase la Figura 2(b). La Figura 2(c) muestra  $\int_0^t \phi^2(\sigma)d\sigma$  con el fin de ilustrar que la normalización en (19) no es causa del acotamiento de la integral. Para el caso  $c = 1$ , siempre hay error en estado estable aunque sea arbitrariamente pequeño, véase la Figura 2 (a)-(b) y (d).

#### 4. CONCLUSIÓN

Este trabajo se centró en el desarrollo de esquemas de control adaptable con el fin de resolver el problema de regulación en tiempo finito sin conocer con exactitud el vector de gravedad. Este problema se encontraba abierto en la literatura, inclusive para un sistema EL de un grado de libertad. Para ello se ha utilizado una extensión dinámica regresora. En particular se ha empleado la DREM para diseñar una ley de control adaptable indirecta permitiendo el desarrollo de una ley de estimación

de parámetros simple. La estimación del parámetro se logra en tiempo finito si existe suficiente excitación durante un intervalo de tiempo, lo que a su vez garantiza que el error de regulación converja a cero en tiempo finito. Lo reportado aquí permitirá hacer diversas extensiones de control adaptable en tiempo finito de sistemas EL de  $n$ -grados de libertad.

## REFERENCES

- Aranovskiy, S., Bobtsov, A., Ortega, R., and Pyrkin, A. (2017). Performance enhancement of parameter estimators via dynamic regressor extension and mixing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(7), 3546–3550.
- Arteaga, M.A. (2024). On the exact parameter estimation for robot manipulators without persistence of excitation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 69(1), 410–417. doi:10.1109/TAC.2023.3269359.
- Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Lyapunov functions and stability in control theory*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition.
- Bhat, S. and Bernstein, D. (2005). Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 17(2), 101–127.
- Cai, M., Xiang, Z., and Guo, J. (2016). Adaptive finite-time control for uncertain nonlinear systems with application to mechanical systems. *Nonlinear Dynamics*, 84(2), 943–958.
- Cruz-Zavala, E., Nuño, E., and Moreno, J. (2020). Continuous finite-time regulation of Euler-Lagrange systems via energy shaping. *International Journal of Control*, 93(12), 2931–2940.
- Cruz-Zavala, E., Sanchez, T., Moreno, J.A., and Nuño, E. (2018). Strict Lyapunov functions for homogeneous finite-time second-order systems. In *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 1530–1535. doi:10.1109/CDC.2018.8619664.
- Hestenes, M.R. (1966). *Calculus of variations and optimal control theory*. JohnWiley & Sons, New York.
- Hong, Y., Wang, J., and Cheng, D. (2006). Adaptive finite-time control of nonlinear systems with parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(5), 858–862. doi:10.1109/TAC.2006.875006.
- Hong, Y., Jiang, Z.P., and Feng, G. (2010). Finite-time input-to-state stability and applications to finite-time control design. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(7), 4395–4418. doi:10.1137/070712043.
- Huang, J., Wen, C., Wang, W., and Song, Y.D. (2014). Adaptive finite-time consensus control of a group of uncertain nonlinear mechanical systems. *Automatica*, 3.
- Kelly, R. (1993). Comments on ‘Adaptive PD controller for robot manipulators’. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(1), 117–119.
- Kelly, R. (1997). PD control with desired gravity compensation of robotic manipulators: A review. *The International Journal of Robotics Research*, 16(5), 660–672.
- Korotina, M., Aranovskiy, S., Ushirobira, R., and Vedyakov, A. (2020). On parameter tuning and convergence properties of the DREM procedure. In *2019 European Control Conference (ECC)*, 53–58.
- Loria, A., Kelly, R., and Teel, A.R. (2005). Uniform parametric convergence in the adaptive control of mechanical systems. *European Journal of Control*, 11, 87–100.
- Ortega, R., Gromov, V., Nuño, E., Pyrkin, A., and Romero, J. (2021). Parameter estimation of nonlinearly parameterized regressions without over parameterization: Application to adaptive control. *Automatica*, 127, 109544.
- Ortega, R. and Spong, M.W. (1989). Adaptive motion control of rigid robots: a tutorial. *Automatica*, 25(6), 877–888.
- Ríos, H., Efimov, D., Polyakov, A., and Perruquetti, W. (2016). Homogeneous time-varying systems: Robustness analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(12), 4075–4080. doi:10.1109/TAC.2016.2540806.
- Rohrs, C., Valavani, L., Athans, M., and Stein, G. (1985). Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(9), 881–889.
- Romero, J., Ortega, R., and Bobtsov, A. (2021). Parameter estimation and adaptive control of Euler-Lagrange systems using the power balance equation parameterisation. *International Journal of Control*, 96(2), 475–487.
- Rueda-Escobedo, J. and Moreno, J. (2015). Non-linear gradient algorithm for parameter estimation. In *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 4086–4091. doi:10.1109/CDC.2015.7402855.
- Sastry, S. and Bodson, M. (1989). *Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness*. Prentice-Hall.
- Slotine, J.J.E. and Li, W. (1987). On the adaptive control of robot manipulators. *International Journal of Robotics Research*, 6(3), 49–59.
- Sun, Z.Y., Shao, Y., and Chen, C.C. (2019). Fast finite-time stability and its application in adaptive control of high-order nonlinear system. *Automatica*, 106, 339–348.
- Tomei, P. (1991). Adaptive PD controller for robot manipulators. *IEEE Transactions on robotics and automation*, 7(4), 565–570.
- Venkataraman, S. and Gulati, S. (1993). Terminal slider control of robot systems. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 5, 31–55.
- Wang, J., Efimov, D., and Bobtsov, A. (2020). On robust parameter estimation in finite-time without persistence of excitation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(5), 1731–1738.
- Zimenko, K., Efimov, D., and Polyakov, A. (2019). On condition for output finite-time stability and adaptive finite-time control scheme. In *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, 7099–7103. doi:10.1109/CDC40024.2019.9029981.