



HAL
open science

Hypergraphs : morphisms and isometries

Jean-Jacques Salone

► **To cite this version:**

| Jean-Jacques Salone. Hypergraphs : morphisms and isometries. 2024. <hal-04682970>

HAL Id: hal-04682970

<https://hal.science/hal-04682970v1>

Preprint submitted on 10 Sep 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Hypergraphes : morphismes et isométrie

Jean-Jacques SALONE, 2011

Rappels et compléments:

Nous rappelons dans ce paragraphe des définitions et des théorèmes présentés dans (Salone, Ref1).
 Hypergraphe : $H=(O,R) : O \text{ fini}, O \neq \emptyset, R \subseteq \mathcal{P}^2(O), R \neq \emptyset, \emptyset \notin R, (P,Q) \in R^2, P \neq Q$.

Soient un hypergraphe $H=(O,R)$, un couple $(x,y) \in O^2$, une partie $P \subseteq R$.

Notation des cardinaux :

$$\| O \| = \text{card}(O) ; \| P \| = \text{card}(P) ; \| R \| = \text{card} \{ x \in O, x \in R \}.$$

$$\| R \| = \text{card}(R) = \text{card} \{ P \in \mathcal{P}^2(O), P \in R \}.$$

Extensions de la relation d'appartenance :

$$x \in R : \exists P \in R, x \in P$$

$$P \in H : P \in R$$

Support d'un hypergraphe:

$$S^{-1}(H) = S^{-1}(R) = \{x \in O, x \in R\}$$

Dans l'écriture d'un hypergraphe $H = (O,R)$ on omettra d'écrire O quand cela ne soulèvera pas de difficultés particulières, et on identifiera H et R . C'est le cas des hypergraphes où O est le support.

Soit $H'=(O',R')$

Sous-hypergraphes :

$H' \subseteq H : O' \subseteq O \text{ et } R' \subseteq R$ (sous-hypergraphe partiel de H engendré par R' puis induit par O')

$H' \subseteq P \subseteq H : x' \in H', x' \in P$ (hypergraphe inclus dans une partie)

Intersections :

$$H' \cap H = (O' \cap O, R' \cap R)$$

$$H' \cap P = \{x' \in H', x' \in P\}$$

Réunions :

$$H' \cup H = (O' \cup O, R' \cup R)$$

$$H' \cup P = (O' \cup P, R' \cup \{P\})$$

Différences :

$$H - H' = (O, \{P \in H' \cap P\} \cup \{H'\})$$

$$H - P = H - \{\emptyset, \{P\}\}$$

Hypergraphe simple :

$$\emptyset \notin (P,Q) \in H^2, P \cap Q = \emptyset, P = Q$$

Recouvrement : (voir Lavallée, I. (1974). Recouvrements d'un ensemble par une sous-famille de ses parties. Thèse de docteur-ingénieur en mathématiques de l'université Paris VI)

H' est un recouvrement de $H : H' \subseteq H$ et $\bigcup_{x \in H} x \in H'$

Hypergraphe connexe :

$$\forall (x,y) \in H^2, xRy : \exists P \in R, x \in P, y \in P$$

Hypergraphe connexe minimal :

H est connexe et $\exists P \subset H, H - P$ n'est pas connexe.

On a :

Connexe minimal \iff simple

On admettra : H Connexe minimal $\iff S^{-1}(H) = O$

Ensemble des parties d'un hypergraphe

On note :

$P^2(H) = \{ H', \exists P \subset H', \prod I > 0, \prod J > 0, \prod \{ H_{i,j} \subset H, H_{i,j} \text{ connexe minimal} \}, P = \{ H_{i,j}, 1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J \}$

Définition d'un hypergraphe fractal

Soit $H = (O, R)$ un hypergraphe. H sera dit fractal si :

- (i) : $H = \{ H_i, 1 \leq i \leq N \}$; 'Hypergraphes de niveau i' ;
- (ii) : $\exists x \in O, \{x\} \in R$;
- (iii) : $O \in R$;
- (iv) : $\exists i, \prod N(j), H_i = \{ H_{i,j}, 1 \leq j \leq N(j) \}$;
- (v) : $\exists i, H_i$ est un recouvrement de H ;
- (vi) : $\forall i, j, H_{i,j}$ est connexe minimal ;
- (vii) : $\forall i, j \neq j', H_{i,j} \cap H_{i,j'} = \emptyset$;
- (viii) : $\forall i > 1, \exists j, H_{i,j} \in P^2(H_{i-1})$.

Notons que :

- pour $i=1$, on a $1 \leq j \leq \|H\| = N(1)$ et $\forall j, \exists x \in H, H_{1,j} = \{x, \{x\}\}$
- On a donc $H_1 = \{ \{x, \{x\}\}, \exists x \in S^{-1}(H) \}$.
- pour $i=N$, on a $1 \leq j \leq 1$ et $H_N = H_{N,1} = S^{-1}(H)$.

Dans (Salone Réf), nous avons démontré qu'un hypergraphe fractal peut être construit sur un hypergraphe quelconque, par des extractions successives de connexes minimaux et leur complétion. Y ont également été définies des distances sur les hypergraphes fractaux à partir de N-upplets d'entiers non nuls :

Pour tout (i,j) et pour tout couple (x,y) de sommets tels qu'existe au moins un chemin $[xy]$ dans $H_{i,j}$, on notera:

$|y - x|_{i,j}$ la longueur minimale des chemins $[xy] / H_{i,j}$.

On note :

$H(x) = \{ H_{i,j}, x \in H_{i,j} \}$; étoile d'hypergraphes

$H(x,y) = \{ H_{i,j}, (x,y) \in H_{i,j} \} = H(x) \cap H(y)$;

$i(x,y) = \text{Max} \{ i, \prod j, H_{i,j} \in H(x,y) \}$;

$j(x,y) = j / H_{i(x,y),j} \in H(x,y)$;

$W(x,y) = H_{i(x,y),j(x,y)}$; 'plus petit hypergraphe connexe minimal contenant x et y'.

Théorème

Soit (D_i) un N-upplet d'entiers non nuls tels que :

$$! \quad i < N, D_{i+1} > D_i \cdot \text{Max} \{ \text{Diam}(H_{i,j}), ! \quad j \}$$

Alors l'application :

$$d : S^{-1}(H) \times S^{-1}(H) \rightarrow \mathbb{N}$$

$$d(x,y) = D_{i(x,y)} \cdot |y - x|_{i(x,y)j(x,y)}$$

est une distance finie.

On dira que d est une 'distance fractale sur H de coefficients $(D_i)'$.

NB : $i(x,x) = 1$ et $W(x,x) = \{x, \{x\}\}$. On a posé ! $x ! \quad H, d(x,x) = 0$.

On a :

$$P1 : d(x,y) = D_i \iff i = i(x,y) \text{ et } \prod P ! \quad W(x,y), x ! \quad P, y ! \quad P$$

On a :

$$! \quad (x,y) ! \quad H^2, d(x,y) = D_{i(x,y)} \cdot |y - x|_{i(x,y)j(x,y)} \text{ si } x \neq y \text{ et } d(x,x) = 0$$

et

$$! \quad i < N, D_{i+1} > D_i \cdot \text{Max} \{ \text{Diam}(H_{i,j}), ! \quad j \}$$

Donc

$$P2 : ! \quad (x,y) ! \quad H^2, x \neq y \iff D_{i(x,y)} \leq d(x,y) < D_{i(x,y)+1}$$

Toujours dans la même référence, nous avons défini, pour H fractal considéré comme le N-upplet d'hypergraphes (H_i) , et pour tout $i, H_i = \{H_{i,j}\}$, la suite d'applications (h_i) , avec $1 \leq i < N$, définie par :

$$h_i : H_i \rightarrow P^2(H_i),$$

$$! \quad H_{i,j} ! \quad \mu_i, h_i(H_{i,j}) = H_{i+1,j'} ! \quad \mu_{i+1} / H_{i,j} ! \quad H_{i+1,j'} \text{ (NB : } H_{i+1,j'} \text{ est unique)}$$

et qui vérifie :

$$h_i(H_i) = H_{i+1}$$

$$\text{où } h_i(H_i) = ! \quad \{ h_i(H_{i,j}), ! \quad H_{i,j} ! \quad \mu_i \}$$

Morphismes et isométries

On note $H = (H_i, 1 \leq i \leq N) = ((H_{i,j}), 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N(i))$ un hypergraphe fractal.

Chaque hypergraphe (H_i) , pour $i > 0$, étant un élément de $P^2(H_{i-1})$, peut être considéré comme étant constitué d'hypergraphes connexes minimaux appartenant à H_{i-1} . On rappelle que $N > 1$.

Catégories

Soit HF la catégorie dont les objets sont les hypergraphes fractals et où les morphismes sont les applications :

$$g : HF \rightarrow HF, H \mapsto g(H) = H^*$$

définie par :

$$g = (g_i) = g_1 \circ \dots \circ g_i \dots \circ g_N, \text{ avec } 1 \leq i \leq N, \text{ avec :}$$

$$g_1 : H_1 \rightarrow H^*_1, ! \quad x ! \quad H_1, g_1(\{x\}) = \{x^*\} ! \quad H^*_1$$

$$\text{et pour } i > 1, g_i : H_i \rightarrow H^*_i, ! \quad H_{i-1,j} ! \quad H_i \mapsto g_i(H_{i-1,j}) = H^*_{i-1,j'} ! \quad H^*_i$$

vérifiant la condition de compatibilité :

$$\{ \prod_{i>1} (H_{i-1,j}, H_{i-1,j'}) \} \cdot H_i^2, \\ \{ \prod P \cdot H_i, (H_{i-1,j}, H_{i-1,j'}) \} \cdot P^2 \} \cdot \{ \prod P^* \cdot H_i^*, (g_i(H_{i-1,j}), g_i(H_{i-1,j'})) \} \cdot P^{*2} \}$$

Un isomorphisme de H sur H* est un morphisme de H sur H* vérifiant en outre :

$$N = N^*, \\ \{ i, g_i \} \text{ est bijective,}$$

et la condition de compatibilité plus forte :

$$\{ i>1, \{ P \cdot H_i, g_i(P) \} \cdot H_i^* \}$$

Soit g un isomorphisme de H sur H*.

- g_i étant bijective, on a : $|H_i^*| = |H_i| = \|H_i^*\| = \|H_i\| = \|H^*\| = \|H\|$,
- pour $i>1$, la condition de compatibilité forte implique $|H_i^*| = |H_i|$.

Les applications partielles g_i étant toutes bijectives, on a $H^* = ((g_i(H_{i,j}), 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N(i)))$.

En particulier, on a :

$$N = N^* ; \\ \{ i, N(i) = N^*(i) \} ; \\ \{ i, g_i(H_i) \} \cdot H_i^* ; \text{ donc } H^* = (g_i(H_i), 1 \leq i \leq N)$$

Les applications partielles g_i établissent ainsi des bijections entre les hypergraphes connexes minimaux d'un hypergraphe H_i de niveau i et ceux de son image, et des bijections entre les parties elle-mêmes qu'ils contiennent.

Il s'en suit que les chemins dans chaque H_i et H_i^* sont aussi en bijection, et que deux chemins en bijection ont la même longueur :

si $(H_{i-1,j}, 1 \leq j \leq L)$ est un chemin dans H_i , alors $(g_i(H_{i-1,j}), 1 \leq j \leq L)$ est un chemin dans $g_i(H_i)$.

Il en découle encore que les connexes minimaux contenant deux sommets sont aussi en bijection et de même niveau avec :

$$\{ (x,y) \} \cdot H^2, W(g_1(x), g_1(y)) = g(W(x,y))$$

Un automorphisme de H est un isomorphisme de H sur H.

Le groupe $\text{Aut}(H)$ des automorphismes de H est un sous groupe du groupe des permutations des sommets de H. C'est, en termes d'action du groupe les permutations, le stabilisateur de H.

La définition des morphismes se traduit en termes de groupes par :

$$\text{Aut}(H) = \{g = (g_i), \text{ avec } g_i \in \text{Aut}(H_i), 1 \leq i \leq N \}$$

Isométries

Soit H et H* deux hypergraphes fractals de même nombre de niveaux N, et soit d et d* des distances fractales respectivement sur H et H* et associées aux coefficients (D_i) et (D_i^*) .

On dira qu'une application f de H sur H* est une isométrie si :

$$f : H \rightarrow H^*, x \in H \mapsto f(x) \in H^*, f \text{ est bijective ;} \\ \text{et } \{ (x,y) \} \cdot H^2, D_{i(x,y)} \cdot d^*(f(x), f(y)) = D_{i(f(x), f(y))}^* \cdot d(x,y).$$

Il est clair que l'égalité de cette définition est équivalente à l'égalité des longueurs des chemins dans H ou H* qui sont en bijection. Autrement dit, les isométries sont les isomorphismes.

Automorphismes et particules.

On note $H = (H_i, 1 \leq i \leq N) = ((H_{i,j}), 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N(i))$ un hypergraphe fractal.

On rappelle que $! x ! H, ! 1 \leq i \leq N, H_i(x)$ désigne l'hypergraphe connexe minimal de niveau i et contenant x . (étoile d'hypergraphes dans H_i)

Propriété :

$$! x ! H, \prod [1 \leq i(x) \leq N, \{ H_i(x) = \{x\} \} \Leftrightarrow \{ i \leq i(x) \}$$

Interprétation : $i(x)$ est le dernier niveau avant que x ne soit relié à un autre sommet y .

On appelle 'particule d'ordre k et de rang n ' tout hypergraphe connexe minimal $H_{i,j}$ de H qui vérifie :

$$\| H_{i,j} - ! \{x\}, ! x ! H_{i,j} \| = k ;$$

$$\text{Max} \{ \text{Max} \{ 0 ; i - i(x) \}, ! x ! H_{i,j} \} = n.$$

En particulier, si $H_{i,j}$ est un singleton $\{x\}$, on a $k=0$ et puisque $i(x) \geq i$, $n=0$.

En particulier, pour $i > 1$, si $H_{i,j} = K_k = \{x_1, \dots, x_m, \dots, x_k\}$, avec $k > 1$, il est d'ordre k . Puisqu'il ne contient que des singletons, on a nécessairement $H_{i-1}(x_m) = \{x_m\}$ et $i(x_m) = i-1$, donc $n=1$.

En particulier, pour $i=N$, $H_{N,1} = S^{-1}(H)$ est d'ordre $\|H\|$ et de rang $N - \min \{ i(x), ! x ! H \}$. S'il contient un singleton, il est d'ordre N .

On dira que deux particules $H_{i,j}$ de H et $H^*_{i',j'}$ de H^* sont du même type de particules lorsqu'elles seront de même ordre et de même rang, et lorsqu'elles vérifieront :

$$H_{i,j} - ! \{x\}, ! x ! H_{i,j} \text{ et } H^*_{i',j'} - ! \{x\}, ! x ! H^*_{i',j'} \text{ sont isomorphes.}$$

Être du même type est une relation d'équivalence dans l'ensemble des hypergraphes fractals, et l'ensemble des particules du même type constituent une sous-catégorie.

Classification des particules d'ordre inférieur à 4

Les groupes d'automorphismes des particules d'un même type sont isomorphes. Pour une particule A , on note $\| \text{Aut}(A) \|$ l'ordre de son groupe d'automorphisme. Ces automorphismes peuvent laisser des points de A invariants. Leurs ensembles, $\text{Inv}(A)$, sont en bijection pour un type de particules donné, et on note $\| \text{Inv}(A) \|$ son cardinal.

On note a,b,c,d quatre sommets. On omettra l'écriture des singletons quand cela ne prêterait pas à confusion.

A	Aut(A)	Inv(A)	k	n	\ Aut(A)\	\ Inv(A)\
{a}	$\Sigma(1)$	a	0	0	1	1
{ab}	$\Sigma(2)$	\emptyset	2	1	2	0
{abc}	$\Sigma(3)$	\emptyset	3	1	6	0
{{ab} {abc}}	$\Sigma(2)$	c	3	1	2	1
{{ab} {bc}}	$\Sigma(2)$	b	3	1	2	1
{{ab} {bc} {ca}}	$\Sigma(3)$	\emptyset	3	1	6	0
{abcd}	$\Sigma(4)$	\emptyset	4	1	24	0
{{abc} {abd}}	$\Sigma(2) \times \Sigma(2)$	\emptyset	4	1	4	0
{{abc} {ad} {bd} {cd}}	$\Sigma(4)$	\emptyset	4	1	24	0

$\{\{abc\} \{ad\} \{bd\}\}$	$\Sigma(2) \times \Sigma(2)$	\emptyset	4	1	4	0
$\{\{abc\} \{ad\}\}$	$\Sigma(2)$	c,d	4	1	2	2
$\{\{ab\} \{ac\} \{bc\} \{ad\} \{bd\} \{cd\}\}$	$\Sigma(4)$	\emptyset	4	1	24	0
$\{\{ab\} \{ac\} \{bc\} \{ad\} \{bd\}\}$	$\Sigma(2) \times \Sigma(2)$	\emptyset	4	1	4	0
$\{\{ab\} \{ac\} \{bc\} \{ad\}\}$	$\Sigma(2)$	c,d	4	1	2	2
$\{\{ab\} \{bc\} \{cd\} \{da\}\}$	$D(4)$	\emptyset	4	1	8	0
$\{\{ab\} \{bc\} \{cd\}\}$	$\Sigma(2)$	\emptyset	4	1	2	0
$\{\{ab\} \{cd\} \{abcd\}\}$	$\Sigma(2) \times \Sigma(2) \times \Sigma(2)$	\emptyset	4			