



**HAL**  
open science

## Distances over hyper graphs

Jean-Jacques Salone

► **To cite this version:**

| Jean-Jacques Salone. Distances over hyper graphs. 2024. hal-04682969

**HAL Id: hal-04682969**

**<https://hal.science/hal-04682969v1>**

Preprint submitted on 31 Aug 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

# Distances sur des hypergraphes

Salone Jean-Jacques  
ingénieur diplômé de l'Institut d'optique graduate school,  
professeur de mathématiques,  
doctorant en sciences de l'éducation

*Résumé :*

*Les hypergraphes sont des ensembles de parties d'un ensemble. Objets mathématiques complexes, ils sont le sujet de recherches de plus en plus nombreuses depuis les travaux précurseurs de Berge, en particulier en ce qui concerne leur classification, leur coloration, leur orientation. Dans cet article nous nous intéresserons à leur connexité. Cette notion autorisera leur décomposition en familles d'hypergraphes connexes minimaux et emboîtés, qui conduira ensuite à la définition de métriques non triviales sur les ensembles de sommets. Une ultime décomposition d'un hypergraphe sera proposée pour conclure, faisant apparaître une structure fractale.*

## I. Définitions et notation préliminaires

### I.1. Hypergraphes

$H=(O,R)$  :  $O$  fini,  $O \neq \emptyset$ ,  $R \in P^2(O)$ ,  $R \neq \emptyset$ ,  $\emptyset \notin R$ .

Contrairement à la définition proposée par Berge dans 'Hypergraphes' (1987, Paris : Bordas), les points isolés ( $x \in O$ ,  $\forall P \in R$ ,  $x \notin P$ ) sont envisagés, et les parties  $P \in R$  seront supposées non répétées (ie :  $\forall (P,Q) \in R^2$ ,  $P \neq Q$ ).

Pour toute la suite de ce paragraphe, nous supposerons donnés :  
un hypergraphe  $H=(O,R)$ , un couple  $(x,y) \in O^2$ , une partie  $P \in R$ .

Notation des cardinaux :

$\| O \| = \text{card}(O)$  ;  $\| P \| = \text{card}(P)$  ;  $\| R \| = \text{card} \{ x \in O, x \in R \}$ .

$| R | = \text{card}(R) = \text{card} \{ P \in P^2(O), P \in R \}$ .

Extensions de la relation d'appartenance :

$x \in R$  :  $\exists P \in R, x \in P$

$P \in H$  :  $P \in R$

Support d'un hypergraphe:

$S^{-1}(H) = S^{-1}(R) = \{x \in O, x \in R\}$

### I.2. Incidences

Dans ce paragraphe, on supposera donné un autre hypergraphe  $H'=(O',R')$

Sous-hypergraphes :

$H' \subset H$  :  $O' \subset O$  et  $R' \subset R$  (sous-hypergraphe partiel de  $H$  engendré par  $R'$  puis induit par  $O'$ )

$H' \subset P$  :  $\forall x' \in H'$ ,  $x' \in P$  (hypergraphe inclus dans une partie)

Intersections :

$H' \cap H = (O' \cap O, R' \cap R)$

$H' \cap P = \{x' \in H', x' \in P\}$

Réunions :

$$H' \cup H = (O' \cup O, R' \cup R)$$

$$H' \cup P = (O' \cup P, R' \cup \{P\})$$

Différence :

$$H - H' = (O, \{P \in H \mid P \notin H'\})$$

Hypergraphe simple :

$$\forall (P, Q) \in H^2, P \subset Q \Rightarrow P = Q$$

Recouvrement : (voir Lavallée, I. (1974). Recouvrements d'un ensemble par une sous-famille de ses parties. Thèse de docteur-ingénieur en mathématiques de l'université Paris VI)

$H'$  est un recouvrement de  $H$  :  $H' \subset H$  et  $\forall x \in H, x \in H'$

### I.3. Connexité

Soit  $H$  un hypergraphe et  $x, y$  deux de  $O$ . On définit :

Chemins relatifs à  $H$  :

$$[xy]/R = (x_i) (1 \leq i \leq I) \text{ telle que :}$$

$$x_1 = x \text{ et } x_I = y,$$

$$i > 1 \Rightarrow \exists P \in R, x_{i-1} \in P, x_i \in P$$

où  $I-1$  est la longueur du chemin.

NB : Si  $x=y$  et  $[xx] = (x ; x)$ , la longueur est nulle.

Relation d'équivalence des chemins relative à  $H$ :

$$xRy : \exists [xy]/R.$$

Classes d'équivalences :

$$x \mapsto [x] = \{x' \in O, xRx'\}$$

Ensemble quotient :

$$H/R = \{ [x], \forall x \in O \}$$

Projection canonique :

$$s: O \rightarrow H/R, x \mapsto [x]$$

Images réciproques :

$$x \mapsto O([x]) = s^{-1}([x])$$

Sous-hypergraphes réciproques (étoile):

$$x \mapsto H(x) = (O', R')$$

$$\text{où } O' = O([x]) \text{ et } R' = \{ P \in R, x \in P \}$$

Hypergraphe connexe :

$$\forall (x, y) \in H^2, xRy$$

Longueur minimale des chemins

On rappelle que si  $H$  est un hypergraphe connexe et tel que  $S^{-1}(H) = O$ , la longueur minimale des chemins dans  $H$  relativement à  $R$  définit une distance sur  $O \times O$ . Cette distance est à valeurs entières et est bornée par le diamètre de l'hypergraphe :

$$\text{Diam}(H) = \text{Max} \{ \text{longueur minimale de } [xy]/R, \forall (x, y) \in O^2 \}$$

## II. Théorème de décomposition

$\forall H=(O,R)$  un hypergraphe,  $\exists \{H_{i,j} = (O_{i,j}, R_{i,j}), 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N(i)\}$ , tel que :

(i) :  $\forall i, \forall j, H_{i,j} \subset H$  (ie :  $H_{i,j}$  est un sous-hypergraphe)

(ii) :  $\forall i, \forall j, \forall (x, x') \in O^2_{i,j}, \exists [xx']/R_{i,j}$  (ie :  $H_{i,j}$  est connexe)

(iii) :  $\forall i, j \neq j' \Rightarrow H_{i,j} \cap H_{i,j'} = \emptyset$

$$(iv) : N > 1 \Rightarrow \{ \forall i > 1, \forall j, (\exists j', \exists P \in H_{i-1,j'}, H_{i,j} \cap P \neq \emptyset) \Rightarrow (H_{i,j} \subset P) \}$$

Note : L'indice i varie de 1 à N, et les indices j varient dans des intervalles dépendant de i, de 1 à N(i).

### Démonstration

La démonstration repose sur une construction algorithmique explicite de la famille  $\{H_{i,j}\}$ . Dans l'écriture de l'algorithme, les instructions sont terminées par un point-virgule et sont indentées. Les commentaires sont précédés d'une double barre oblique.

Deux fonctions sur des hypergraphes sont d'abord définies :

- la fonction pr1 extrait d'un hypergraphe un sous-hypergraphe simple de même ensemble quotient mais constitué d'un nombre minimal de composantes connexes ;
- la fonction pr2 complète un hypergraphe en lui ajoutant les parties non chevauchantes d'un second hypergraphe.

Function pr1 (var:  $H' = (O', R')$  )

$$O^* := S^{-1}(H');$$

//  $O^*$  est le support de  $H'$ . On y oublie les points isolés.

//  $R' = \emptyset \Rightarrow O^* = \emptyset$

// on a:  $\|O^*\| \leq \|O'\|$

$$U := \{ H'' \subset H', S^{-1}(H'') = O^* \};$$

// U est l'ensemble des sous-hypergraphes partiels qui ont le même support que  $H'$

// U est non vide car  $H' \in U$ .

$$U^* := \{ H''' \in U, |H'''| = \text{Min} \{ |H''|, \forall H'' \in U \};$$

//  $U^*$  est constitué de sous-hypergraphes ayant un nombre de parties minimal, donc simples

// La non vacuité de  $U^*$  repose sur l'existence d'un minimum pour l'ensemble des cardinaux, car c'est une partie non vide de l'ensemble des entiers naturels

$$H^* := \text{alea} (H''' \in U^*);$$

// Le sous-hypergraphe  $H^*$  extrait est simple et minimal (au sens défini ci-dessus)

// il y a existence mais pas unicité de  $H^*$

// on a:  $H^* = (\emptyset, \emptyset) \Leftrightarrow R' = \emptyset$

// on a  $|H^*| \leq |H'|$  avec égalité si et seulement si  $H'$  est simple et minimal

$$\text{return: pr1}(H') = H^* = (O^*, R^*)$$

Function pr2 (var:  $H' = (O', R')$ ,  $H^* = (O^*, R^*)$ )

//  $H^*$  est l'hypergraphe à compléter par les parties non chevauchantes de  $H'$

$$O^{**} := O^*;$$

// L'ensemble des sommets est inchangé

$$V := \{ P' \in H', (\forall P \in H^*, P' \cap P \neq \emptyset \Rightarrow P' \subset P) \text{ et } (\exists Q \in H^*, P' \subset Q) \};$$

// V récupère de  $H'$  toutes les parties incluses non chevauchantes

$$V^{**} := V \cup R^*;$$

$$H^{**} := (O^{**}, V^{**});$$

// il y a unicité de  $H^{**}$

$$\text{return: pr2}(H') = H^{**} = (O^{**}, R^{**})$$

L'algorithme à proprement parler construit la famille de sous-hypergraphes  $H_{i,j}$  en les extrayant puis en les complétant successivement. Il repose sur une boucle conditionnelle qui se termine lorsqu'il ne

reste plus de parties à extraire.

```
Begin;
// Initialisations:
i := 0;
H0' := H;
// Construction de la famille de sous-hypergraphes:
while (Hi' ≠ ( .. , ∅ ));
// construction des sous-hypergraphes de niveau i:
// extraction d'un sous-hypergraphe simple connexe et minimal
Hi* := pr1(Hi');
// décomposition de l'hypergraphe minimal en hypergraphes connexes
{Hi,j* , 1 ≤ j ≤ N(i) } := { Hi*([x]), ∀ [x] ∈ Hi*/Ri* };
// récupération des parties incluses dans chaque composante
for ( 1 ≤ j ≤ N(i) ), Hi,j := pr2(Hi' , Hi,j* );
// reconstitution de l'hypergraphe de niveau i
Hi := (∅, ∅);
for ( 1 ≤ j ≤ N(i) ), Hi := Hi ∪ Hi,j;
// suppression du sous-hypergraphe minimal avant itération :
Hi+1' := Hi \ Hi*;
// Hi* étant non vide, on a l'inégalité stricte | Hi' | < | Hi+1' |
i++;
end while
N := i;
// N est le nombre de 'niveaux' de la décomposition
End;
```

#### Preuve de l'arrêt de l'algorithme :

Elle repose sur l'inégalité stricte précédente (en gras dans le texte) et sur la finitude de H (| H | < ∞ car ||O|| < ∞).

La suite des cardinaux ( |H<sub>i</sub>'| ) est strictement décroissante dans les entiers naturels, elle atteint donc la valeur minimale 0. H<sub>i</sub>' est alors de la forme ( .. , ∅ ) ce qui est la condition d'arrêt.

#### Non vacuité de la famille:

$H \neq (O, \emptyset) \Rightarrow N \geq 1$  et  $O \neq \emptyset \Rightarrow N(1) \geq 1$ .

### **III. Distances sur un hypergraphe complet**

#### **III.1. Complétion d'un hypergraphe**

On définira un hypergraphe complet par :

H = (O , R) est complet :

- i)  $\forall x \in O, \{x\} \in R.$
- ii)  $O \in H$

Remarque :

Si H vérifie i),  $S^{-1}(H) = O$ . Cela conduit à omettre O de l'écriture des hypergraphes vérifiant i), et à

identifier H et R.

### Propriétés

Pour un hypergraphe complet H, toute décomposition  $\{H_{i,j}\}$  à N niveaux est telle que :

$$N \geq 2 ;$$

$$\forall i,j, H_{i,j}, x \in H_{i,j} \Rightarrow \{x\} \in H_{i,j} ; (H_{i,j} \text{ vérifie la propriété i}) ;$$

$$\text{si } i = 1, \text{ on a } 1 \leq j \leq 1 \text{ et } H_{1,1} = \{S^{-1}(H), \{S^{-1}(H)\}\} ;$$

$$\text{si } i = 2, H_2 = \cup \{H_{2,j}, \forall j\} \text{ est une recouvrement de H;}$$

$$\text{si } i = N, \text{ on a } \forall 1 \leq j \leq N(i), \exists ! x \in S^{-1}(H), H_{i,j} = \{x, \{x\}\} ;$$

$$\forall (x,y) \in S^{-1}(H) \times S^{-1}(H), \exists (i,j) / \exists [xy]/H_{i,j} ; (\text{ie : H est connexe}).$$

Soit  $\{H_{i,j}\}$  une décomposition d'un hypergraphe complet H. Pour tout (i,j) et pour tout couple (x,y) de sommets tels qu'existe au moins un chemin [xy] dans  $H_{i,j}$ , on notera:

$$|y - x|_{i,j} \text{ la longueur minimale des chemins } [xy] / H_{i,j}.$$

### III.2. Première mise en relation de deux sommets

Soit un hypergraphe complet H et  $\{H_{i,j}\}$  une de ses décompositions. Soient x et y deux sommets de H.

Soit l'ensemble :

$$W(x,y) = \{ H_{i,j}, (x,y) \in H_{i,j}^2 \}$$

est non vide car H étant complet,  $W(x,y)$  contient  $H_{1,1}$  dans lequel se trouvent x et y. D'autre part, les  $H_{i,j}$  étant connexes, ils sont tous de niveaux i différents :

$$H_{i,j} \in W(x,y) \text{ et } H_{i',j'} \in W(x,y) \Rightarrow i \neq i'$$

$$\forall i, H_{i,j} \in W(x,y) \text{ et } H_{i,j'} \in W(x,y) \Rightarrow j = j'.$$

$W(x,y)$  est l'intersection des étoiles autour de x et y, les arêtes étant prise exclusivement dans la décomposition.

On définit alors les indices de première mise en relation de x et y par :

$$i(x,y) = \text{Max } \{ i, \exists j, H_{i,j} \in W(x,y) \}$$

$$j(x,y) = j / H_{i(x,y),j} \in W(x,y)$$

et on note :

$$H(x,y) = H_{i(x,y),j(x,y)}$$

### Propriété

$\forall H' \in \{H_{i,j}\}, (x,y) \in H'^2 \Rightarrow H(x,y) \subset H'$  ; (ie :  $H(x,y)$  est l'hypergraphe connexe minimal contenant x et y).

### III.3 Théorème 2

Soit H un hypergraphe complet et  $\{H_{i,j}\}$  une décomposition à N niveaux.

Soit  $(D_i)$  un N-upplet d'entiers non nuls tels que :

$$\forall i < N, D_{i+1} > D_i . \text{Max } \{ \text{Diam}(H_{i,j}), \forall j \}$$

Alors l'application :

$$d : S^{-1}(H) \times S^{-1}(H) \rightarrow \mathbb{N}$$

$$d(x,y) = D_{i(x,y)} \cdot |y - x|_{i(x,y)j(x,y)}$$

est une distance.

### Démonstration

-  $\forall (x,y) \in H^2, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  ?

Puisque  $\forall i, D_i > 0$ , on a  $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |y - x|_{i(x,y)j(x,y)} = 0 \Leftrightarrow x = y$  puisque la longueur minimale des chemins est une distance sur  $H(x,y)$ .

-  $\forall (x,y) \in H^2, d(x,y) = d(y,x)$  ?

Cela résulte immédiatement de  $i(x,y) = i(y,x)$  et par conséquent  $|y - x|_{i(x,y)j(x,y)} = |x - y|_{i(y,x)j(y,x)}$ .

- Inégalité triangulaire :  $\forall (x,y,z) \in H \times H \times H, d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$  ?

Le cas où deux au moins des sommets  $x, y, z$  sont confondus étant trivial, supposons que  $x \neq y \neq z$ . On a alors  $i(x,y) < N, i(y,z) < N$  et  $i(x,z) < N$  car l'hypergraphe de niveau  $N$  ne contient que des singletons.

Distinguons alors deux cas, selon que  $i(x,y)$  et  $i(y,z)$  sont égaux ou différents.

Premier cas:  $i(x,y) = i(y,z)$

Dans ce cas,  $H(x,y)$  et  $H(y,z)$  étant au même niveau  $i = i(x,y)$ , ils sont soit disjoints soit confondus. Or ils contiennent tous les deux le sommet  $x$ , ils sont donc confondus :  $H(x,y) = H(y,z)$ . Mais alors  $H(x,y)$  contient  $z$ , il contient donc  $H(x,z)$  car ce dernier est l'hypergraphe connexe minimal contenant  $x$  et  $y$ . Par conséquent,  $i(x,z) \geq i(x,y)$ . Si  $i(x,z) = i(x,y)$ , on est ramené à l'inégalité triangulaire définie sur  $H(x,y) = H(x,z)$ . Enfin, si  $i(x,z) > i(x,y)$ , on a :

$$d(x,y) + d(y,z) = D_{i(x,y)} \cdot |y - x|_{i(x,y)j(x,y)} + D_{i(y,z)} \cdot |z - y|_{i(y,z)j(y,z)} \text{ par définition de } d ;$$

$$d(x,y) + d(y,z) = D_{i(x,y)} [ |y - x|_{i(x,y)j(x,y)} + |z - y|_{i(x,y)j(x,y)} ] \text{ car } i(x,y) = i(y,z) ;$$

$$d(x,y) + d(y,z) > D_{i(x,y)} \text{ car } x \neq y \neq z ;$$

$$d(x,y) + d(y,z) > D_{i(x,z)} \cdot \text{Max} \{ \text{Diam}(H_{i,j}), i=i(x,z), \forall j \} \text{ par définition de } (D_i) \text{ et parce que}$$

$$i(x,z) > i(x,y) ;$$

$$d(x,y) + d(y,z) > D_{i(x,z)} \cdot |z - x|_{i(x,z)j(x,z)} \text{ par définition d'un maximum ;}$$

$$d(x,y) + d(y,z) > d(x,z) \text{ par définition de } d.$$

Deuxième cas :  $i(x,y) \neq i(y,z)$

Supposons  $i(y,z) > i(x,y)$ .

Par construction de la décomposition, les hypergraphes de niveau  $i(x,y)$  contiennent les hypergraphes de niveau  $i(y,z)$ . Comme  $H(x,y)$  et  $H(y,z)$  sont respectivement dans ces niveaux, et puisqu'ils ont en commun le sommet  $y$ , on a l'inclusion stricte :

$$H(y,z) \subsetneq H(x,y).$$

$H(y,z)$  contenant le sommet  $z$ , il en est alors de même de  $H(x,y)$  qui par conséquent contient l'hypergraphe connexe minimal  $H(x,z)$  :

$$H(x,z) \subset H(x,y).$$

Les deux sous-hypergraphes  $H(y,z)$  et  $H(x,z)$  sont donc dans  $H(x,y)$  et ont une intersection non vide car contenant au moins  $z$ . Par construction de  $\{H_{i,j}\}$ , deux cas sont alors possibles :

- Premier sous-cas :  $H(x,z) \subset H(y,z) \subsetneq H(x,y)$  ;

- Deuxième sous-cas :  $H(y,z) \subsetneq H(x,z) \subset H(x,y)$ .

Le premier sous-cas est impossible, car  $x \in H(x,y) \Rightarrow x \in H(y,z)$  et puisque  $H(x,y)$  est l'hypergraphe minimal contenant  $x$  et  $y$ , on aurait  $H(x,y) \subset H(y,z)$  ce qui contredirait  $H(y,z) \subsetneq H(x,y)$ .

Il ne reste donc que le deuxième sous-cas. On a alors  $y \in H(y,z) \Rightarrow y \in H(x,z) \Rightarrow H(x,y) \subset H(x,z) \Rightarrow H(x,z) = H(x,y)$ .

Par construction de  $\{H_{i,j}\}$ , toute partie P de  $H(x,y)$  contenant y contient  $H(y,z)$  et donc z. Donc tout chemin de x à y dans  $H(x,y)$  est aussi un chemin de x à z et s'en suit l'égalité des distances :

$$|y - x|_{i(x,y)j(x,y)} = |z - x|_{i(x,z)j(x,z)} \cdot$$

D'où :

$$d(x,y) + d(y,z) = D_{i(x,y)} \cdot |y - x|_{i(x,y)j(x,y)} + D_{i(y,z)} \cdot |z - y|_{i(y,z)j(y,z)}$$

$$d(x,y) + d(y,z) = D_{i(x,z)} \cdot |z - x|_{i(x,z)j(x,z)} + D_{i(y,z)} \cdot |z - y|_{i(y,z)j(y,z)}$$

$$d(x,y) + d(y,z) > D_{i(x,z)} \cdot |z - x|_{i(x,z)j(x,z)}$$

$$d(x,y) + d(y,z) > d(x,z)$$

#### IV. Fractalité (théorème 3)

Soit H un hypergraphe complet, et  $\{H_{i,j}\}$  une décomposition de N niveaux.

Alors il existe une unique famille  $\{M_{i,j}\}$  de sous-hypergraphes de H, avec  $1 \leq i' \leq N$  telle que :

(i) :  $\forall i', M_{i'}$  est un recouvrement de H ;

(ii) :  $\forall i', M_{i'} = \cup \{ M_{i',j'}, 1 \leq j' \leq N'(i') \}$

(iii) :  $\forall i', j', M_{i',j'}$  est connexe et minimal ;

(iv) :  $\forall i' > 1, \forall j', M_{i',j'} \in P(M_{i'-1,j'})$ ,

où  $P(M_{i'-1,j'}) = \{ H', \forall P \in H', \exists J' \subset [1;N'(i'-1)], P = \cup \{ M_{i'-1,j''} \in M_{i'-1}, \forall j'' \in J' \}$

#### Démonstration

En reprenant les notations de la démonstration du théorème de décomposition, il suffit de poser, pour tout couple (i, j) :

$$i' = N + 1 - i \text{ et } j' = j$$

et de définir

$$\forall i', \forall j', M_{i',j'} = H_{i,j}^* \cup \{ \{x\}, \forall x \in H \setminus H_{i,j} \}.$$

Les alinéas sont alors immédiats. En particulier, les inclusions strictes des hypergraphes  $H_{i,j}^*$  implique l'alinéa (iv).

Notons que :

- pour  $i'=1$ , on a  $1 \leq j' \leq \|H\| = N'(1)$  et  $\forall j', \exists !x \in H, M_{1,j'} = \{ \{x\} \}$ .

On a donc  $M_1 = \{ \{x\}, \forall x \in S^{-1}(H) \}$ .

- pour  $i'=N$ , on a  $1 \leq j' \leq 1$  et  $M_{N,1} = H_{1,1} = S^{-1}(H)$

L'alinéa (iv) met en évidence une structure fractale : chaque hypergraphe  $M_{i',j'}$  est un hypergraphe, minimal et connexe dont les sommets sont des hypergraphes de niveau précédent  $M_{i'-1,j''}$ .

On a ainsi une suite d'application  $(f_k)$ , avec  $1 \leq k < N$ , définies par :

$$f_k : M_k \rightarrow P(M_k), \forall M_{k,j'} \in M_k, f_k(M_{k,j'}) = \{ M_{k+1,j''} \in M_{k+1}, M_{k,j'} \subset M_{k+1,j''} \}$$

et qui vérifie :

$$f_k(M_k) = \cup \{ f_k(M_{k,j'}) \in M_{k+1}, \forall M_{k,j'} \in M_k \} = M_{k+1}$$

Si  $f = f_1 \circ \dots \circ f_{kN}$ , on peut écrire  $S^{-1}(H) = f(M_1)$ .



## **V. Applications et prolongements**

### **Application aux sciences de l'éducation**

La première application envisagée s'inscrit dans les sciences de l'éducation (voir Salone J-J. (2011). Validation des connaissances, processus comparés en mathématiques. Mémoire de MR2 de l'université de Provence). L'hypergraphe H de départ est alors constitué de blocs praxéologiques (regroupements de connaissances et de compétences) relatifs à des institutions (regroupements d'être humains partageant des finalités relatives à leur action conjointe). Les décompositions de H et les distances qu'elles induisent sont dans ce cadre appelées des structures, dites horizontales lorsqu'elles sont connexes et minimales, dites verticales sinon. Ces décompositions constituent des espaces discursifs, c'est-à-dire des regroupements praxéologiques dans lesquels les êtres humains situent les objets de connaissance dont ils parlent dans leurs discours.

### **Prolongements et interprétations physiques**

Les hypergraphes complets admettant une seule décomposition constituent une catégorie. Il est alors logique de s'intéresser aux morphismes de cette catégorie.

Les isométries en particulier permettent de définir des classes d'hypergraphes partageant des propriétés de symétrie (natures des groupes d'isométrie et des ensembles de sommets invariants). Les classes d'hypergraphes à 3 niveaux sont à rapprocher des particules de la Physique Standard. Les hypergraphes de niveau N-1 peuvent avoir des interprétations cosmologiques : si l'univers observable est une composante connexe de niveau N-1, les autres composantes connexes de ce niveau sont des univers parallèles (matières obscures ?).

Les singletons sont également interprétables (vide?)

Les immersions respectant les propriétés de symétrie des hypergraphes de cette catégorie dans des espaces affines euclidiens font apparaître des différences entre les métriques de départ et d'arrivée, assimilables à des courbures spatiales.

Les morphismes plus généralement permettent d'envisager des familles ordonnées d'hypergraphes vérifiant certaines relations (dynamiques de création ou de destruction d'arêtes en particulier des singletons).

Enfin une approche encore plus quantique conduirait à envisager des lois de probabilités relatives aux décompositions possibles d'un hypergraphe complet, ou à envisager les hypergraphes complets comme des superpositions d'hypergraphes de la catégorie précédente.

Ces prolongements sont pour certains déjà abordés dans mes recherches.