



**HAL**  
open science

## Les références praxéologiques dans les systèmes didactiques - Complément mathématique

Jean-Jacques Salone

► **To cite this version:**

Jean-Jacques Salone. Les références praxéologiques dans les systèmes didactiques - Complément mathématique. 2024. hal-04682963

**HAL Id: hal-04682963**

**<https://hal.science/hal-04682963>**

Preprint submitted on 31 Aug 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

## **Les références praxéologiques dans les systèmes didactiques**

Thèse en didactique des mathématiques soutenue le 31 mars 2015

*Jean-Jacques Salone*

### COMPLÉMENTS MATHÉMATIQUES

« Résorber les apories de la relativité de la connaissance dans une version de relativisme si bien assumée qu'elle en devient une manière d'être et de chercher, plutôt qu'une thèse ; montrer que si la connaissance est relative à ses moyens d'accès, sa méthode ne peut consister qu'à mettre en place des réseaux de relations entre phénomènes observables. »

M. Bitbol,

*De l'intérieur du monde, pour une philosophie et une science des relations, 2010, p. 23*

## TABLE DES MATIÈRES

|   |    |
|---|----|
| Compléments mathématiques.....                                | 1  |
| 1 Théoriser la complexité : une voie médiane.....             | 3  |
| 2 L'univers est un hypergraphe : le cas des institutions..... | 6  |
| 3 Actes et discours.....                                      | 11 |
| 4 L'espace praxéologique et le concept de référence.....      | 16 |
| 5 Organisations et représentations du monde.....              | 18 |
| Bibliographie du complément.....                              | 23 |

## 1 Théoriser la complexité : une voie médiane

Ramis, Deschamps et Odoux (1983) dans le premier tome de leur cours de mathématiques spéciales caractérisent une théorie mathématique par les données d'un « *univers*, ou collection des *termes* de la théorie » (Ibid., p. 5), d'« *axiomes* », de « *règles* » et de « *schémas* permettant de déduire des relations vraies, dites *théorèmes*, d'axiomes ou d'autres relations vraies ». En outre ils précisent qu'une théorie mathématique repose sur un système sémiotique constitué de « *signes logiques* », de « *signes spécifiques* » et de « *lettres* » :

Les lettres peuvent représenter soit des *termes* (ou *objets* étudiés dans la théorie), soit des *relations* entre ces termes. (Op. cité, p. 5)

Le concept d'ensemble est ensuite abordée. Ils introduisent ensuite leur chapitre par une phrase :

Historiquement, la notion d'*ensemble* a été dégagée des notions d'*objets* et de *collection d'objets*, que nous considérerons comme intuitives chez le lecteur. (Op. cité, p. 5)

Cette phrase révèle la difficulté qui se cache derrière leur conception de ce qu'est une théorie : comment poser, et surtout définir, *ex nihilo* les termes **primitifs** de l'univers ? C'est-à-dire comment définir un objet sans s'appuyer sur d'autres objets ou concepts préexistants ? Cela ne peut se faire que par le recours à l'intuition, qu'en faisant appel au sens général des choses et à l'expérience sensible que chacun peut en avoir. Ce sera un artifice incontournable employé dans la modélisation mathématique que nous tentons dans ce chapitre. Nous signalerons les mots qui renvoient à de tels concepts intuitifs en les écrivant en italique lors de leur première occurrence.

**Pour construire une *théorie* au sens de Ramis et al., il faut donc *a minima* partir de concepts intuitifs afin d'identifier d'une part des *termes primitifs* (ou *objets élémentaires*, ou *composants élémentaires*) et d'autre part des *relations***

(ou des *rapports*) qu'ils peuvent entretenir. Alors seulement les *structures* (Ibid., p. 47) et les relations des *systèmes* qu'ils engendrent peuvent être définies et étudiées. Mais, même avec le principe d'intuition, cela n'est pas aussi simple qu'il n'y paraît ! En effet, les *choses*, objets ou relations, sont souvent très *complexes*, même celles que l'on souhaiterait considérer comme élémentaires. Un terme élémentaire est-il toujours parfaitement simple, bien séparé du reste du monde, immuable et déterminé ? Prenons l'exemple auquel nous intéressons dans ce mémoire : *la relation didactique* qui s'établit entre un professeur et sa classe. En TAD, elle est vue comme une des relations caractéristiques de l'*activité humaine*. Peut-on vraiment considérer un être humain comme un terme primitif ? Ou au contraire, comme le souligne Morin, faut-il le considérer comme un système vivant *auto-organisé* intrinsèquement lié à son *environnement* par une relation *écologique* qui nous oblige à entrer dans une pensée complexe ?

La pensée complexe substitue à l'emploi des concepts clos et séparés l'utilisation de macro-concepts assemblant en constellation des concepts distincts, mais inséparables bien que tendant parfois à se repousser ou s'exclure les uns les autres (ainsi il faut considérer l'homme comme un macro-concept associant en lui la notion biologique, la notion culturelle, la notion cérébrale, la notion psychique d'homo, lui-même sapiens/demens). Morin, 1977, p. 371

**Décréter qu'un objet donné de l'univers est élémentaire, un terme primitif, est donc une opération très subjective de réduction de la complexité, dépendant à la fois du théoricien et de la réalité qu'il entend modéliser.** Un objet n'est élémentaire que dans le cadre de la théorie où il prend sens.

Si nous en venons maintenant aux relations entre les êtres humains et leur environnement, la complexité est encore plus grande.

Tout phénomène d'auto-organisation dépend, non seulement de sa détermination ou de sa logique singulière, mais aussi des déterminations ou de la logique de son environnement. Il faut tenter de

lier en un discours dialogique – donc complexe – l'explication par l'intérieur et l'explication par l'extérieur. Morin, 1980 , p. 66

La complexité se loge partout, des relations multiples et changeantes aux structures organisationnelles induites. **Identifier des systèmes, leurs structures et leurs relations, est donc aussi un acte théorique subjectif qui ne peut éluder la question de la complexité du monde.** En ce qui concerne la relation didactique, nous avons vu dans le chapitre consacré au cadre théorique qu'elle correspond à un système, *l'institution Classe*. Mais une Classe est une chose complexe à la fois de l'intérieur, structurée par les relations de communication et de coopération qu'elle nécessite entre ses agents didactiques, et de l'extérieur, reliée *a minima* à d'autres Classes au sein d'un établissement scolaire. Qu'est ce donc, dans cette complexité, qu'un élève ou un professeur ? Sont-ils distinguables de leurs réseaux scolaires ? Nous nous heurtons vite à une aporie entre une vision purement monadiste qui partirait de termes primitifs élémentaires, séparés et définis par leurs natures propres, et une vision purement structuraliste pour laquelle seule des relations, plus ou moins complexes, existeraient. La voie que nous adoptons dans ce mémoire est médiane : les choses du monde seront simultanément définies par ce qu'elle paraissent être et par les relations au monde qui leur sont attribuées. Leur connaissance est à la fois une expérience sensible et une construction théorique. Ainsi, **les termes primitifs seront précisés par des relations et des structures a priori invariables qui leur seront explicitement associées.** Suivant Bitbol, nous nous situons donc dans une approche philosophique des relations :

Les relations (légal, fonctionnelles) s'y voient [dans la philosophie des relations] certes assigner la priorité sur les substances ou objets connectés. Mais s'il en va ainsi, c'est parce que des pôles d'invariance opérant comme relata dans l'apparaître se trouvent constitués par l'acte d'avancer des relations légales, et non pas parce que ces relations seraient ontologiquement génératrices des entités qu'elles relient. L'induction des relata par les relations est définition de thèmes de

recherche pour nos capacités de comparer, et non pas création de choses par des abstractions. La priorité des relations sur les relata est celle de leur source dans le connaître, et non pas celle d'une entité-fondement. Un fondement arrête, alors qu'une source jaillit. Bitbol, 2010 ,p. 419-420

## 2 L'univers est un hypergraphe : le cas des institutions

**Mais quels peuvent être les outils, mathématiques a priori, susceptibles de permettre la modélisation de systèmes complexes de relations ?** La question a été déjà envisagée par Von Bertalanffy (1968/1993) dans sa *théorie générale des systèmes*. Pour cet auteur aussi, les termes primitifs, qu'il appelle 'éléments', ne sont pas identifiables *ex nihilo* mais en grande partie via les relations qu'ils soutendent. Les relations sont ainsi au centre de sa modélisation et permettent d'étudier ce qu'il nomme des systèmes :

Un système peut être défini comme un complexe d'éléments en interaction. Par « interaction » nous entendons des éléments  $p$  liés par des relations  $R$ , en sorte que le comportement d'un élément  $p$  dans  $R$  diffère de son comportement dans une autre relation  $R'$ . S'il se comporte de la même façon dans  $R$  et  $R'$ , il n'y a pas interaction et les éléments se conduisent indépendamment par rapport aux relations  $R$  et  $R'$ . Von Bertalanffy, 1968/1993, p. 53

Von Bertalanffy dresse également un état des lieux des théories de son époque qui s'intéressent aux systèmes (Ibid., pp. 16-28). Parmi ces cadres théoriques, trois retiennent notre attention : la théorie des ensembles, que nous avons déjà évoquée avec Ramis et al., la théorie des graphes et la théorie des réseaux. Nous ne développerons pas ici ce que peuvent être ces théories ; nous allons plutôt entrer directement dans une théorie qui les englobe toutes les trois, la **théorie des hypergraphes**, initialement développée par Berge (1987).

**Qu'est-ce qu'un hypergraphe ?** Pour répondre à cette question, il est d'abord

nécessaire d'accepter *a minima* le cadre mathématique de la théorie des ensembles. Tout comme Ramis et all, nous supposons le lecteur familier avec des termes qui en sont issus. Un *hypergraphe sur un ensemble fini*  $X$  est alors définissable comme une *famille de parties* de  $X$ . Berge (1987, p.1) en donne la définition suivante :

*Soit*  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  *un ensemble fini.*

*Un hypergraphe sur*  $X$  *une famille*  $H = (E_1, E_2, \dots, E_m)$  *de parties de*  $X$

*avec :*

$$i) E_i \neq \emptyset \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$ii) \cup \{E_i, i=1, 2, \dots, m\} = X$$

Les éléments de  $X$  sont appelés « *sommets* » et les parties  $E_i$  de  $H$  des « *arêtes* », et correspondent à ce que nous avons appelé jusqu'à présent, respectivement, des termes primitifs et des relations. A priori, dans cette définition, les relations envisagées ne concernent que celles entre les termes primitifs, laissant de côté celles entre d'éventuels systèmes. Mais il n'en est rien. Les arêtes peuvent en effet avoir de nombreuses incidences entre-elles comme par exemple se contenir les unes les autres. L'hypergraphe est potentiellement un système complexe dont la structure n'est pas contrainte a priori.

Un hypergraphe [...] est considéré comme un des meilleurs candidats à la modélisation graphique d'un SdS [Système de systèmes] représenté sur plusieurs niveaux, dans le sens où les sommets [...] de l'hypergraphes correspondent aux composants systèmes de plus bas niveau de modélisation, et où les hyperarêtes [...] représentent l'ensemble des composants systèmes de niveaux supérieurs et leurs interactions. (Khalil, 2012, p. 59)

En outre, il peut être *valué*, c'est-à-dire qu'il est possible d'associer des valeurs à ses sommets et à ses arêtes, les valeurs étant prises dans des domaines quelconque à préciser.

Le deuxième item de cette définition mérite quelque attention. Il impose en

effet non seulement que l'univers  $X$  des termes primitifs soit entièrement recouvert par les relations de l'hypergraphe  $H$ , mais aussi, corollairement, que tout terme primitif soit pris dans au moins une relation. Cela peut sembler restrictif, car, si nous revenons à l'exemple anthropologique, des structures existent dans lesquelles le groupe d'êtres humains impliqués n'est pas un invariant, au moins *temporellement*, et pour la modélisation desquelles il faudrait donc pouvoir envisager l'apparition de termes primitifs dans  $X$  ainsi que leurs éventuelles disparitions. C'est le cas par exemple dans une Classe où des élèves nouveaux peuvent arriver en cours d'année et d'autres être absents certains jours. Cet item autorise cependant l'existence de singletons, c'est-à-dire de termes primitifs en relation uniquement avec eux-mêmes. Nous nous en accommoderons donc afin de ne pas complexifier les objets mathématiques utilisés au détriment de la lisibilité de notre propos.

Reprenons l'exemple d'une Classe  $C$ , dans une version minimaliste à un seul type de termes primitifs, des êtres humains. On a donc un ensemble  $C$  fini de sommets, tous des êtres humains, qui ont deux valeurs possibles : 'professeur' ou 'élève'. Supposons que la Classe soit constituée d'un professeur  $y$  et de trente élèves  $x_i$ , avec  $i \in [1;30]$ . On a  $C = \{y, x_1, \dots, x_{30}\}$ . Une relation didactique dans cette Classe est alors un système modélisable par un hypergraphe  $H$  sur  $C$ . Avec une relation didactique qui serait sans aucun échange entre ses agents, pas même un professeur qui joue son rôle, l'hypergraphe  $H$  ne contiendrait qu'une seule partie de  $C$ , partie qui est  $C$  lui-même :  $H_0 = (C)$ . Mais la relation didactique n'est pas aussi *simple* (Un hypergraphe est dit simple lorsque aucune de ses arêtes n'en contient une autre :  $E_i \subset E_j \Rightarrow i = j$ ). Elle est dissymétrique, faites de rapports entre un professeur et chacun de ses élèves, et parfois de relations entre élèves. Les élèves peuvent être considérés individuellement ou en groupes, dont le groupe classe. L'outil hypergraphe permet de décrire formellement ces variations :

- professeur en relation au groupe classe :

$$H_1 = (X = \{x_1, \dots, x_{30}\}, C)$$

- professeur en relation avec des groupes d'élèves (5 groupes de 6) :

$$H2=(G1=\{x1,\dots,x6\}, \dots, G5=\{x25, \dots, x30\}, C)$$

- professeur en relation avec un élève particulier  $x1$  :

$$H3=(\{y,x1\}, C)$$

- professeur en relation avec un élève  $x1$  qui est lui-même en relation avec un groupe  $G1$  :

$$H4 = (\{y,x1\}, G1=\{x1,\dots,x6\}, C)$$

- élève  $x1$  en relation à l'élève  $x2$  :

$$H5 = (\{x1,x2\}, C)$$

- élève  $x1$  en relation au reste du groupe classe :

$$H6 = ( \{x2,\dots,x30\}, X, C)$$

Tel est l'intérêt d'utiliser un tel objet mathématique. Il réside, comme nous tentons de le montrer dans ce chapitre, dans son efficacité pour décrire les systèmes complexes auxquels nous nous intéressons. C'est pour cela que les hypergraphes sont de plus en plus utilisés en Intelligence Artificielle pour modéliser des systèmes complexes (Khalil, 2012) voire 'connaissants' (Vallée et Monsuez, 2010). Permettant d'envisager des relations autres que binaires, ils sont d'une portée plus générale que les graphes ou les réseaux. Dans la théorie des hypergraphes, plusieurs outils sont développés pour appréhender la complexité. Quelques-uns seront exploités par la suite.

Le *premier axiome* que nous formulons maintenant est ontologiquement lié à ce choix d'objet mathématique pour modéliser : **l'univers  $K$ , ou du moins celui auquel nous nous intéressons et qui contient des êtres humains, est un hypergraphe.** Dans cette perspective, tout objet  $O$  (ou terme, ou système) contenu dans l'univers d'étude  $K$  est représenté par un sous-hypergraphe *induit* par un sous-ensemble de sommets (ou termes primitifs) et partiellement *engendré* par une sous-famille  $A$  d'arêtes (ou relations, ou rapports) (d'après Berge, 1987, p. 3) :

$$O = (E_j \cap A, j \in J, J \subset \{1, 2, \dots, m\}, E_j \cap A \neq \emptyset)$$

Même les termes primitifs de  $U$  pourront être considérés comme des sous-

hypergraphes partiels de  $K$ , des singletons. On notera  $A \in B$  pour signifier qu'un hypergraphe  $A$  est un sous-hypergraphe partiel d'un hypergraphe  $B$ , et, par une certaine homologie discursive, nous dirons que  $A$  'appartient à'  $B$ , ou que  $A$  'est dans'  $B$ , plutôt que  $A$  'est un sous-hypergraphe partiel de '  $B$ . Quand  $B$  sera  $K$ , il sera généralement sous entendu et on dira simplement que  $A$  est un hypergraphe. Ainsi, le premier axiome sera formulé par :

**Axiome 1 (ontologique) :**  $\exists U : \text{ensemble des termes primitifs}, \exists K : \text{l'univers (observable) :$

**i)  $K$  est un hypergraphe sur  $U$**

**ii)  $\exists \{x_h \in K, x_h : \text{être humain}, h \in H \subset \mathbb{N} \}$**

En outre les êtres humains tissent de nombreuses relations entre eux et avec le reste du monde, créant ainsi des systèmes plus complexes qu'eux. Ce sont par exemple des *institutions*. Pour définir ce concept, partons de celui que Berge (1987, p,3) appelle une **étoile**. Si  $H$  est un hypergraphe sur  $X$ , alors, pour tout  $x$  appartenant à  $X$ , l'étoile  $H(x)$  centrée en  $x$  est l'hypergraphe partiel de  $H$  formé par les arêtes contenant  $x$ . Nous étendrons cette définition à un sous-hypergraphe partiel de  $H$  : si  $HA$  est un sous-hypergraphe partiel de  $K$  induit par un ensemble  $A$  de sommets de  $X$ , l'étoile centrée sur  $HA$  est l'hypergraphe partiel de  $H$  formé par les arêtes contenant  $A$ . L'étoile centrée sur un être humain modélise son univers relationnel, l'ensemble de ses rapports au monde. Mais, parmi les relations auxquelles il appartient, certaines peuvent contenir aussi d'autres êtres humains : ce ne sont plus alors des relations qui lui sont *personnelles*, ou *propres*, mais des relations *partagées*. Plus généralement, un hypergraphe sur un ensemble d'êtres humains sera une institution s'il existe au moins une relation au monde qui lui soit propre :

**Définition 1 :** Soit  $I \in K$ . ***I* institution :**

**i)  $I$  est engendré par  $G=\{x_1, x_2, \dots, x_g\}$ , un ensemble d'êtres humains**

**ii)  $H(I) \neq \emptyset$**

**iii)  $\exists E \in H(I), \forall x \in K \cap E, x \text{ être humain} \Leftrightarrow x \in G$**

Si  $G$  est réduit à un seul être humain  $x$ , les arêtes de son étoile qui vérifient l'item iii constituent son **rapport personnel au monde**. En ce sens **tout être humain sera considéré comme une institution, une *personne***. Dans le cas général, de telles relations seront dites **propres** à l'ensemble  $G$ , et par extension, à l'institution  $I$ .

### 3 Actes et discours

À ce stade de la théorie, l'univers  $K$  de notre recherche est encore très abstrait. On sait seulement que cet univers contient des êtres humains aux relations multiples et variées. **Comment définir les êtres humains sans juste postuler leur existence comme dans l'axiome 1 et sans non plus trop entrer dans leurs complexités constitutives ou relationnelles ?** Sachant que notre étude s'inscrit dans un champ didactique, il n'est nullement question ici d'aborder leurs aspects biologiques, physiques, psychiques,... Nous devons plutôt les inscrire dans un cadre anthropologique où leur activité est essentielle. Il nous faut donc examiner plus en détail **le concept d'action**. Or parler d'action c'est présupposer que les objets de l'univers ne sont pas immuables mais qu'au contraire ils évoluent sous l'effet de leurs interactions. **L'univers  $K$  est dynamique**. Un cadre pratique et amplement suffisant pour nos objectifs est fourni par la physique aristotélicienne : tout mouvement, tout changement, est observable ou mesurable s'il est associé au concept de Temps :

Que donc le temps soit le nombre d'un mouvement selon l'antérieur et le postérieur, et qu'il soit continu [...], c'est manifeste. Aristote (-300/2002, p. 256) (livre IV, [220a25])

Ce sera le **deuxième axiome** :

**Axiome 2 (dynamique):**  $\exists T : \text{le Temps, ensemble continu et ordonné, } \forall t \in T, U = U(t), K = K(t)$  ( $K$  et  $U$  'sont fonction de ', ou 'dépendent de ',  $T$ )

Cet axiome permet d'envisager non seulement des **modifications** des hypergraphes

comme étant des *variations*<sup>1</sup> de leurs *états* entre divers *instants*, mais aussi leur *création* ou leur *destruction*. Précisons quelque peu les concepts qui sont sous-jacents à cette phrase. Par *instant*, nous entendons un élément  $t$  du Temps. Par *état d'un hypergraphe à l'instant  $t$* , nous entendons l'ensemble des parties de  $U$  qu'il contient à l'instant  $t$ . Quant au concept de *variation d'un hypergraphe*, nous nous contenterons ici d'en dire que c'est ce qui a changé dans sa composition entre deux instants donnés, et que les données brutes de son *état initial* et de son *état final*, d'une paire d'hypergraphes donc, suffisent pour décrire cette variation. En particulier, créer et détruire sont des variations de l'hypergraphe univers  $K$  dans son ensemble.

Si ces évolutions de l'univers et des ses constituants ne sont pas toutes *fortuites*, le concept d'*acte* peut alors être abordé.

Mais tout ce qui change change soit par accident [...] ; soit on dit simplement que <ce qui change> change du fait de quelque chose de lui change, par exemple tout ce qui est dit <changer> selon ses parties [...] ; soit il existe quelque quelque chose qui n'est mû ni par accident, ni du fait d'aucune de ses parties, mais par le fait de se mouvoir par soi-même premièrement. Aristote (-300/2002, p. 273) (livre 5, [224a25])

***Axiome 3 (téléologique) :*** *Il existe des variations de l'univers (et donc potentiellement de ses termes, primitifs ou non) en fonction de  $T$  qui sont dans une relation causale :*

*Soit  $C = \{ (\Delta y(t, t'), \Delta z(t'', t''')) , (t, t', t'', t''') \in T^4, (y, z) \in K^2, \Delta z(t'', t''') \text{ 'est fonction de } \Delta y(t, t') \}$ . On a :*

$$i) \quad C \neq \emptyset$$

---

1 On pourra définir la variation d'un hypergraphe  $H$  dépendant de  $T$  entre deux instants  $t$  et  $t'$  par la différence symétrique entre  $H(t)$  et  $H(t')$  :  $\Delta H(t, t') = H(t) \cup H(t') - H(t) \cap H(t')$

**On définira un acte comme une variation d'un hypergraphe en partie causée par un état d'un hypergraphe (un changement par accident).**

**Définition 2 :**

$\forall (t, t') \in T^2, \forall x \in K$  ; on note  $\Delta x(t, t')$  la variation de  $x$  entre les instants  $t$  et  $t'$ .

Soit  $O \in K$  et  $(t, t') \in T^2$ , et soit  $x \in K \text{ et } (t'', t''') \in T^2$ .

On dira que  $\Delta O(t, t')$  est 'un **acte** réalisé entre les instants  $t$  et  $t'$  et que  $x$  est un de ses **facteurs** si :

$$i) (\Delta x(t'', t'''), \Delta O(t, t')) \in C$$

En outre  $\Delta O(t, t')$  est un **acte de création** à l'instant  $t$  si :

$$ii) t = t' \text{ et } O(t) \neq \emptyset \text{ et } \forall i \in T, i < t \Rightarrow O(i) = \emptyset$$

et c'est un **acte de destruction** si :

$$t = t' \text{ et } O(t) \neq \emptyset \text{ et } \forall i \in T, i \geq t'' \Rightarrow O(i) = \emptyset$$

Sinon,  $\Delta O(t, t')$  sera un **acte de modification de O**.

Notons qu'avec cette définition un facteur  $x$  de  $\Delta O$  peut contenir tout ou partie de  $O$  lui-même. Un acte met donc en relation un objet  $O$  et au moins un facteur. C'est cette relation que nous appellerons une **action**. Mais un acte peut être multifactoriel, pouvant impliquer plusieurs objets de  $K$  comme facteurs. La relation qui s'établit alors est une action complexe, modélisable par un nouvel hypergraphe.

Nous définirons donc une action comme un hypergraphe mettant en relation deux termes : un objet  $O$  dont la variation constitue l'acte, et un hypergraphe  $M$  réunissant les facteurs de l'acte :

**Définition 3 :** Soit  $O \in K$  et soit  $(t, t') \in T^2$ , tels que  $\Delta O(t, t') \neq (\emptyset ; \emptyset)$  est un acte

On définit l'ensemble des facteurs de l'acte  $\Delta O(t, t')$  par :

$$M(t) = \{ (A \in K, (t'', t''') \in T^2), A(t'', t''') \text{ facteur de } \Delta O(t, t') \}$$

On notera l'acte :  $M(t) \Rightarrow \Delta O(t, t')$

On définit l'**action** de  $M$  sur  $O$  à l'instant  $t$  comme l'*hypergraphe*' :

$$(M, O)(t) = M(t) \cup O(t) \cup O(t')$$

Pour alléger les écritures, nous omettrons souvent certains paramètres temporels lorsqu'ils seront jugés superflus. Dans le cas où un facteur est un être humain, on dira plutôt que c'en est un *acteur*. Dans cet ensemble  $M$  de facteurs, il est commode pour notre modélisation de distinguer les acteurs des autres facteurs. On écrira alors ce milieu  $M$  comme la réunion d'un hypergraphe  $A$  réunissant les acteurs et d'un hypergraphe  $M(A)$  réunissant le reste des facteurs.  $M(A)$  s'interprète alors comme le ***milieu actionnel*** de l'action réalisée par  $A$ . Il comporte certes une composante matérielle et dénuée d'intention, mais aussi une composante plus immatérielle, comme un « contexte cognitif de l'action » (Sensevy, 2007, p. 23-24), ou plus sociale, comme « un ensemble de conditions et de contraintes » (Chevallard, 2007, p. 13).

Toujours pour rester dans l'exemple précédente, l'action peut être évaluée en fonction de la structure de l'ensemble de ses acteurs  $A$ . Pour cela, nous supposerons d'abord que l'objet  $O$  sur lequel porte l'action ne contient jamais d'êtres humains autres que les acteurs eux-mêmes. Même quelqu'un de passif, mais présent d'une façon ou d'une autre dans le milieu, sera considéré comme acteur. Nous suivons ensuite Vernant (2010, p. 144-146) en distinguant trois

types d'actions :

- les actions *singulières*, qui n'ont qu'un seul acteur et qui n'ont d'effet sur aucun autre être humain. Ce sont des relations personnelles à l'être humain  $x$  envisagé.  $A = (\{x\})$  ;
- les actions *collectives*, où les acteurs sont plusieurs mais sans relations directes entre-eux si ce n'est être acteur de l'action considérée. C'est une relation qu'ils partagent. :  $A = (\{x_1, \dots, x_{30}\})$  par exemple pour un groupe de trente acteurs ;
- et les actions *coopératives*, relations partagées par plusieurs acteurs agissant ensemble de façon concertée sur le monde :  $A = H_1 = (X, C)$  par exemple, pour en revenir à la relation didactique, où  $C$  est une Classe constituée d'un professeur  $y$  et d'une ensemble d'élèves  $X$ .

Vernant value plus finement les actions coopératives selon qu'il s'agit de compétitions ou de collaborations (leur « polarité »), ou selon qu'elles sont plus ou moins « poussées », juste *communes* ou plutôt *conjointes* (leur « degré »): les actions *communes* et les actions *conjointes*. Les actions coopératives nous intéressent plus particulièrement car elles sont fondatrices des relations didactiques. **La Classe apparaît alors comme une institution dont les rapports propres au monde résultent de la coopération de ses agents humains.**

Toujours en suivant Vernant, nous distinguerons les *dialogues* parmi les actions réalisées par les être humains. Un dialogue sera défini comme une :

activité communicationnelle conjointe [qui] constitue la forme principielle de l'usage discursif humain. Comme tel, nous le caractériserons comme interaction langagière à finalité transactionnelle. (Vernant, 2010, p. 146-147)

Par le dialogue, un ensemble d'acteurs  $A$  agit de façon propre sur l'univers  $K$ . Dans un dialogue, les acteurs interlocuteurs coopère en produisant des *discours* a priori singuliers, dont ils sont les *auteurs*, mais qui sont modifiés, voire détruits, par l'ensemble de locuteurs pour venir constituer un nouveau discours coproduit. La

production d'un discours  $D$  nécessite un milieu actionnel certes constitué d'un contexte langagier qui fournit les *signes ostensifs* présents dans le *texte, oral* ou *écrit*, du discours et de contextes téléologiques ou cognitifs propres aux acteurs, mais également d'objets matériels, partagés dans le cas d'un discours dialogique, qui sont ceux qui sont modifiés par l'acte. Par exemple, dans le cas d'un discours oral, la composante matérielle du milieu est l'air ambiant qui entoure les interlocuteurs ; c'est souvent une feuille de papier et de l'encre dans le cas des discours écrits. Ainsi, avec les discours, notre modèle se voit enrichi d'un nouveau type d'hypergraphes. Formellement, nous ne définirons pas ce qu'est un discours, ce sera même un terme primitif. Nous nous contenterons d'un troisième axiome minimaliste, liant l'existence des discours à l'activité créatrice des institutions :

**Axiome 3 (sociologico-discursif)** :

***i)  $\{D \in U, D : \text{discours}\} \neq \emptyset$***

***ii)  $\forall D \text{ discours}, \exists ! I \in K, I : \text{institution}, I \text{ facteur unique de la création de } D$***

On appellera **espace discursif** l'hypergraphe partiel de  $K$  engendré par les discours. On le notera  $HD$ .

#### **4 L'espace praxéologique et le concept de référence**

Nous avons jusqu'à présent peuplé l'univers d'étude  $K$  de types d'objets, les êtres humains et les discours, qui n'ont jamais été vus comme des termes primitifs de  $U$  mais comme des systèmes complexes. Quels sont donc, au delà d'éventuelles composantes matérielles, les termes primitifs de notre modèle ? La Théorie Anthropologique du Didactique permet d'avancer en identifiant un essentiel pour notre sujet de recherche : les *praxéologies ponctuelles*. Pour Chevallard (2007, p. 9) ce sont des « organisations anthropiques » modélisées par la réunion d'un type de tâche et d'une technique associée, ainsi que des discours technologico-théoriques qui justifient cette dernière. Les praxéologies ponctuelles

sont, toujours pour Chevallard, des « atomes » qui peuvent se rassembler en systèmes plus complexes appelés des *praxéologies* et que l'on pourra identifier à ce que l'on nomme généralement, hors du champ didactique, des *savoirs*. Notre hypothèse théorique principale est alors que **les êtres humains, les institutions, et parfois leurs discours, contiennent des praxéologies ponctuelles. Tout comme les discours, les praxéologies ponctuelles sont des produits institutionnels que nous ne définirons pas formellement et qui seront des termes primitifs.** Le quatrième axiome peut être ainsi formulé :

*Axiome 4 :*

- i)  $\{p \in U, p : \text{praxéologie ponctuelle}\} \neq \emptyset$
- ii)  $\forall p \text{ praxéologie ponctuelle}, \exists ! I \in K, I : \text{institution}, p \text{ est un sous hypergraphe partiel de } I$
- iii)  $\forall I \text{ institution}, \exists D \text{ discours d'auteur } I, \exists p \text{ praxéologie ponctuelle}, p \in I, p \text{ est facteur de } D. (D \text{ est dit 'technologico-théorique'})$

Le sous-hypergraphe de K induit par les praxéologies ponctuelles est l'**espace praxéologique**. On le notera HP. Dans cet espace, les praxéologies ponctuelles sont en relations les unes avec les autres, faisant ainsi apparaître des organisations praxéologiques.

En TAD, l'ensemble *organisé* des praxéologies que possède un être humain est appelé son *équipement praxéologique*. Nous conserverons ce vocable pour désigner également l'ensemble des praxéologies d'une institution I que nous noterons EP(I). Ainsi, **l'institution Classe possède son propre équipement praxéologique** constitué et organisé par la coopération du professeur et des élèves. Mais ces équipements praxéologiques ne sont pas directement observables. Ils ne le sont que via les discours (ou plus généralement aux actes) produits. Les discours eux-mêmes n'explicitent que très rarement les praxéologies de leurs auteurs, et véhiculent par conséquent des éléments praxéologiques incertains, que

seul les auditeurs ou lecteurs pourront interpréter de façon subjective. Pour le chercheur, identifier, chez une institutions ou dans un discours, des praxéologies ponctuelles et leurs organisations relève donc d'un double défi : entrer dans des discours pour mieux analyser l'intérieur des institutions.

Pour conduire un tel travail d'analyse des discours puis des équipements praxéologiques, un nouveau concept a été employé dans nos recherches, le concept de *référence praxéologique*. Dans l'espace discursif, des discours sont en relation. Ce sont de telles relations que nous appelons des références praxéologiques. Avant de pouvoir les définir formellement, le concept de *connexité* doit être évoqué. Si  $H$  est un hypergraphe sur un ensemble  $X$ , deux sommets  $x_1$  et  $x_2$  peuvent parfois être reliés d'arêtes en arêtes, en suivant des *chemins*. Un chemin  $[x_1 \ x_2]$ , de longueur  $n$ , est donc une suite  $(E_1, \dots, E_n)$  d'arêtes qui ont deux à deux une intersection non vide, la première contenant  $x_1$  et la dernière contenant  $x_2$ . Un hypergraphe est alors dit *connexe* si tous ses sommets peuvent être reliés par des chemins.

***Définition 4 :*** Soit  $D_1$  et  $D_2$  deux discours.

On dira que ***D1 fait référence à la source D2*** si :

i)  $\exists [D_1 \ D_2]$  un chemin dans  $HD$  allant de  $D_1$  à  $D_2$

ii) La création de  $D_2$  est antérieure à celle de  $D_1$

Notons que c'est dans l'existence de tels chemins que se loge toute la difficulté de la modélisation. Le cadre méthodologique a tenté de clarifier cela en distinguant les auto-références pour lesquelles le chemin ne contient qu'une seule arête, de celles pour lesquelles il est plus long.

## **5 Organisations et représentations du monde**

Pour conclure ce chapitre sur les hypergraphes et leur application à la modélisation des relations didactiques, abordons la question de la structure de ces réseaux relationnels. Qu'est-ce qu'une **organisation** ? Nous en avons rencontré déjà plusieurs dans le cadre théorique. Examinons-en quelques-unes afin d'en

dégager une modélisation hypergraphique générale. L'institution Classe modélisée par les six hypergraphes H1 à H6, dans le deuxième paragraphe, sera notre exemple de départ. La première structure qui apparaît dans leurs écritures sont des inclusions : ainsi dans H1 le groupe classe X est inclus dans la Classe C, dans H2 les cinq groupes G1 à G5 sont disjoints et inclus dans C. Dans H6, les inclusions se font sur quatre **niveaux de complexité** : au niveau 0 se trouvent les élèves, puis la partie {x2, ..., x30} est au niveau 2 et est incluse dans X, de niveau 3, qui est inclus dans C de niveau 4. Le modèle hypergraphique devra donc intégrer une valuation des arêtes en termes de niveaux de complexité. Nous retrouvons fréquemment ce principe de 'sphères emboîtées' en TAD ou en sociologie. Ainsi l'échelle des niveaux de codétermination inférieurs (les plus génériques) est au moins à trois niveaux de complexité (Chevallard, 2002, p. 10) et peut être rapprochée de l'organisation institutionnelle scolaire de la société :

| <b>Niveaux de codétermination</b> | <b>Niveaux d'organisation scolaires</b> | <b>Niveaux de complexité (relatifs)</b> |
|-----------------------------------|---|---|
| Pédagogie                         | Établissement scolaire                  | 1                                       |
| École                             | Système éducatif                        | 2                                       |
| Société                           | Société                                 | 3                                       |

**Tableau 7 : Niveaux de complexités 1**

L'espace praxéologique est aussi organisé en TAD sur ce principe. Ainsi les praxéologies ponctuelles s'amalgament sur cinq niveaux de complexité, identifiables aux cinq niveaux de codétermination supérieurs, et partiellement correspondant à des regroupement successifs de blocs praxéologiques (Chevallard, 2002, p.2).

| Niveaux de codétermination | Niveaux d'organisation praxéologiques | Niveaux de regroupement des blocs praxéologiques | Niveaux de complexité (relatifs) |
|----------------------------|---------------------------------------|--|----------------------------------|
| Sujet d'étude              | Ponctuelle                            | Type de tâche / technique                        | 1                                |
| Thème                      | Locale                                | Technologie                                      | 2                                |
| Secteur                    | Régionale                             | Théorie  | 3                                |
| Domaine                    | Globale                               |  | 4                                |
| Discipline                 | Discipline                            |  | 5                                |

**Tableau 8 : Niveaux de complexités 2**

Mais revenons aux hypergraphes de la Classe, et plus spécifiquement à H4. Il est bien distribué sur trois niveaux, les élèves étant au niveau 0 et la Classe au niveau 2. Le groupe G1 et le binôme  $\{y, x1\}$  sont bien de niveau 1, mais ils présentent une forme d'incidence nouvelle : ils ont une **intersection** non vide en la personne de x1. Ce phénomène d'intersection entre des parties d'un hypergraphe se retrouve à plusieurs niveaux dans les modélisations didactiques. C'est éminemment le cas dans l'échelle des niveaux d'organisation praxéologiques : les praxéologie ponctuelles qui s'agrègent en praxéologies locales ne sont presque jamais disjointes, les techniques associées ayant souvent des points communs, et les sujets d'étude étant connectés les uns aux autres. Ces incidences se poursuivent vers les niveaux supérieurs, jusqu'à la discipline et au delà.

La structure hypergraphique que nous proposons prend donc en compte ces deux aspects : niveaux d'inclusion et intersections. Pour les niveaux d'inclusion, ou de complexité, la structure doit permettre une répartition des objets sur ces niveaux, les termes primitifs obtenant le niveau 0. Ensuite, un objet de niveau donné ne peut être contenu par un objet de niveau supérieur qu'entièrement. Cela a pour conséquence que les intersections non inclusives n'ont lieu qu'entre objets de même niveau de complexité, comme dans l'exemple praxéologique précédent. La structure obtenue sera appelée une **organisation** (ou un *hyperarbre fractal*) :

**Définition 5 :** Soit  $X$  un ensemble fini et  $H$  un hypergraphe sur  $X$ .

La paire  $(X, H)$  est une organisation (ou un hyperarbre fractal) si :

- $H = H_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_c$ , avec  $c \in \mathbb{N}$ ,  $c > 0$ , tels que  
 $\forall k \in \{0, \dots, c\}$ ,  $H_k$  est un hypergraphe, sur une partie de  $X$ , simple. Le nombre  $k$  est son niveau de complexité
- $\forall k \in \{0, \dots, c\}$ ,  $H_k = H_{k,1} \cup H_{k,2} \cup \dots \cup H_{k,d(k)}$ , avec  $d(k) \in \mathbb{N}$ ,  $d(k) > 0$ ,  $d(k)$  dépendant de  $k$ , tels que :
  - $d(0) = \text{Card}(X)$  et  $\forall l \in \{1, \dots, d(0)\}$ ,  $\exists ! x \in X$ ,  $H_{0,l} = (\{x\})$
  - $d(c) = 1$
  - $\forall k \in \{0, \dots, c\}$ ,  $\forall l \in \{1, \dots, d(k)\}$ ,  $H_{k,l}$  est connexe
  - $\forall k \in \{0, \dots, c\}$ ,  $\forall (l, m) \in \{1, \dots, d(k)\}^2$ ,  $H_{k,l} \cap H_{k,m} = \emptyset$   
( $H_k$  est ainsi décomposé en ses  $d(k)$  composantes connexes)
  - $\forall k \in \{0, \dots, c-1\}$ ,  $\forall l \in \{1, \dots, d(k)\}$ ,  
 $\forall k' \in \{k+1, \dots, c\}$ ,  $\forall l' \in \{1, \dots, d(k')\}$ ,  
 $H_{k,l} \cap H_{k',l'} \neq \emptyset \Rightarrow \exists E \in H_{k',l'}, H_{k,l} \subset E$

Comment cette structure apparaît-elle dans la modélisation proposée dans le cadre théorique ? Au moins trois types d'organisations auront été distinguées : des organisations *sociales*, des organisations *actionnelles* et des organisations *praxéologiques*. Les termes primitifs sont communs à ces organisations, les praxéologies ponctuelles et les discours en étant les deux catégories principales dans notre étude. L'échelle complète des niveaux de codétermination est un tel hyperarbre fractal. L'organisation institutionnelle scolaire que nous avons proposée est moins complexe, ne prenant pas en compte les niveaux les plus spécifiques. Elle va des praxéologies ponctuelles à la société en passant successivement par les équipement praxéologiques personnels, les élèves et les professeurs, les Classes, les établissements scolaires et le système éducatif. Cette organisation institutionnelle scolaire est complétée par une autre organisation institutionnelles, non scolaires, modélisée par un deuxième hyperarbre fractal

allant des êtres humains à la société en passant par leurs réseaux primaires (familles, amis, ...). Pour mieux se *représenter* et étudier les relations didactiques, d'autres hyperarbres fractals, dérivés des organisations sociales, ont été encore mis en œuvre de façon plus ou moins explicite. Le concept de milieu actionnel par exemple induit ainsi un hypergraphe partiel de  $K$  constitué exclusivement des relations actionnelles. Les deux hyperarbres sociaux précédents se prolongent alors dans cet espace actionnel pour l'organiser : le niveau de complexité d'un milieu est celui de l'institution pour laquelle il est un milieu actionnel.

## BIBLIOGRAPHIE DU COMPLÉMENT

- ARISTOTE. (-330/2002). *Physique*. In Pellegrin P. (Trad). Paris : Flammarion (GF 887).
- BERGE, C. (1987). *Hypergraphes : combinatoire des ensembles finis*. Paris : Bordas.
- BITBOL, M. (2010). *De l'intérieur du monde. Pour une philosophie et une science des relations*. Paris : Flammarion.
- CHEVALLARD, Y. (2002). *Organiser l'étude, 3, écologie et régulation*. In *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (pp 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage. [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id\\_article=53](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53)
- CHEVALLARD, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. In Ruiz-Higueras L, Estepa A, Javier Garcia F. (Eds.) *Sociedad, Escuela y Mathematicas : aportaciones de la Teoria Antropologica de la Didactico* (pp 705-746). Baeza (Espagne): : Universidad de Jaen. [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe\\_et\\_present\\_de\\_la\\_TAD-2.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD-2.pdf)
- KHALIL, W. (2012). *Contribution à la modélisation graphique de système de systèmes*. Thèse de doctorat de l'Université Lille 1.
- MORIN, E. (1977). *La méthode, tome 1 : La Nature de la nature*. Paris : Le Seuil.
- MORIN, E. (1980). *La méthode, tome 2 : La Vie de la vie*. Paris : Le Seuil.
- RAMIS, E., DESCHAMPS, C. ET ODOUX, J. (1983). *Cours de mathématiques spéciales, tome 1 : algèbre*. Paris : Masson.
- SENSEVY, G. (2007). *Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique*. In Sensevy G, Mercier A. (Eds.) *Agir ensemble:l'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (pp. 13-49). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
- VALLÉE, N. ET MONSUEZ, B. (2010) *A formal model of systemC components using fractal hypergraphs*. In *Proceeding of the International MultiConderence of Engineers and Computer Scientists 2010 Vol II*. Hong Kong : China.
- VERNANT, D. (2010). *Introduction à la philosophie contemporaine du langage, du langage à l'action*. Paris : Armand Colin.
- VON BERTALANFFY, L. (1968/1993). *General System Theory*. New York : Georges Braziller,Inc. In J-B. Chabrol (Trans.), *Théorie générale des systèmes*. Paris: Dunod.