



HAL
open science

Estabilização robusta via realimentação de estados amostrados em sistemas LPV: condições polinomiais quadráticas

Lucas A.L. Oliveira, Kevin Guelton, K.M. Motchon, Valter J.S. Leite

► To cite this version:

Lucas A.L. Oliveira, Kevin Guelton, K.M. Motchon, Valter J.S. Leite. Estabilização robusta via realimentação de estados amostrados em sistemas LPV: condições polinomiais quadráticas. XXV Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2024), Sociedade Brasileira de Automática (SBA), Oct 2024, Rio de Janeiro, Brazil. hal-04681311

HAL Id: hal-04681311

<https://hal.science/hal-04681311v1>

Submitted on 29 Aug 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Estabilização robusta via realimentação de estados amostrados em sistemas LPV: condições polinomiais quadráticas [★]

Lucas A. L. Oliveira ^{*,**} Kevin Guelton ^{**} Koffi M. D. Motchon ^{**}
Valter J. S. Leite ^{*,***}

^{*} PPGMMC, CEFET-MG, Belo Horizonte-MG, Brasil (e-mail: arantesl@hotmail.com)

^{**} Université de Reims Champagne-Ardenne, CReSTIC UR 3804, Reims, França, (e-mails: {kevin.guelton, koffi.motchon}@univ-reims.fr)

^{***} Departamento de Engenharia Mecatrônica, CEFET-MG/Campus Divinópolis, Divinópolis-MG, Brasil (e-mail: valter@ieee.org)

Abstract: This work addresses the robust stabilization of linear time-varying parameter systems (LPV) with sampled state feedback, using linear matrix inequalities (LMIs) for controller synthesis. By employing the time-varying delay systems approach, a Lyapunov-Krasovskii (L-K) looped functional is proposed, whose time derivative results in a quadratic polynomial whose negativity needs to be ensured. Thus, the negativity of quadratic functions is exploited with the Pólya's Theorem, leading to new convex conditions for controller synthesis. Finally, numerical examples illustrate the achievements of the new technique, comparing them with the literature.

Resumo: Este trabalho trata a estabilização robusta de sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo (LPV) com realimentação de estados amostrados, utilizando desigualdades matriciais lineares (LMIs) para a síntese de controladores. Por meio da abordagem de sistemas com atraso variante no tempo, propõe-se um funcional *looped* de Lyapunov-Krasovskii (L-K), cuja derivada temporal resulta em um polinômio quadrático que precisa ter a negatividade assegurada. Assim, a negatividade de funções quadráticas é explorada com o Teorema de Pólya, resultando em novas condições convexas de síntese de controladores. Por fim, exemplos numéricos ilustram os resultados alcançados com a nova técnica, comparando-os com a literatura.

Keywords: Sampled-data control; LPV Systems; Negative definiteness of quadratic functions; Robust stabilization; Lyapunov-Krasovskii looped functionals.

Palavras-chaves: Controle amostrado; Sistemas LPV; Negatividade definida de funções quadráticas; Estabilização robusta; Funcionais *looped* de Lyapunov-Krasovskii.

1. INTRODUÇÃO

Os sistemas de controle via rede permitem soluções ágeis e versáteis na indústria e no dia a dia, alinhados com os conceitos de Indústria 4.0 e Internet das Coisas (IoT) (Liu et al., 2019). No entanto, são conhecidos vários problemas técnicos decorrentes dessa tecnologia, tais como o congestionamento, atrasos e perda de dados, que exigem novas técnicas para garantir o projeto de controladores estabilizantes. O controle de dados amostrados (em inglês, *sampled-data control*) visa tratar esses problemas, especialmente no que diz respeito às amostragens não periódicas, além de possibilitar o projeto do controlador com base no modelo contínuo da planta, sem a necessidade de discretização (Nešić et al., 1999).

Uma alternativa para modelar os sistemas não lineares são os sistemas LPV (Briat, 2015), que podem capturar dinâmicas não lineares utilizando um conjunto convexo de modelos lineares, cujos parâmetros podem mudar ao longo do tempo. Este tipo de modelagem abrange amplas aplicações práticas, como veículos autônomos (Hachem et al., 2023) e projéteis guiados de longo alcance (Vincio et al., 2022).

Os sistemas de controle com dados amostrados podem ser representados como sistemas com atraso no tempo (Fridman, 2010), nos quais o sinal de controle é caracterizado como uma entrada com atraso variante no tempo. Dentre as abordagens mais comuns, o uso de funcionais de Lyapunov-Krasovskii (L-K) se mostra frequente principalmente por levar mais diretamente a formulações convexas mais abrangentes (Fridman, 2010). Nessa abordagem, Seuret (2012) introduziu uma estrutura de funcionais de L-K conhecidos como funcionais *looped*, cujos valores se repetem em cada instante de amostragem e permitem a introdução de termos não positivos entre amostragens no

[★] Este trabalho recebeu apoio do CEFET-MG, das Agências Brasileiras CAPES, FAPEMIG (APQ-02100-22), CNPq (311891/2022-5 e 408411/2023-6), dos Projetos Stic-Amsud/CAPES, NetConHybSDP (20/2022), e cotutela CoPolCA entre CEFET-MG e URCA (França).

funcional de L-K, resultando em condições de estabilidade menos conservadoras. Se tratando de controle amostrado em sistemas LPV, Gomes da Silva Jr. et al. (2015) utilizaram a abordagem de funcionais *looped* para a estabilidade e a estabilização de sistemas LPV com a realimentação de estados amostrados. O mesmo método foi estendido considerando saturação de entrada (Palmeira et al., 2018). A fim de obter resultados menos conservadores, o lema da projeção é utilizado em Hooshmandi et al. (2018) e funcionais *looped* com dependência polinomial nos parâmetros são propostos em Hooshmandi et al. (2020).

A escolha de um funcional adequado e sua derivada temporal são fundamentais para reduzir o conservadorismo das soluções. Uma forma de melhorar os funcionais L-K é construí-los para obter uma derivada que dependa polinomialmente do parâmetro do atraso, cuja negatividade em um determinado intervalo precisa ser assegurada. Neste trabalho, o caso dos polinômios quadráticos no parâmetro do atraso é estudado. Lemas que garantem a negatividade em funções quadráticas com menor conservadorismo despertou a atenção da comunidade de sistemas com atraso no tempo (Liu et al., 2023), incluindo as soluções necessárias e suficientes baseadas no procedimento-S (Park e Park, 2020) para sistemas precisamente conhecidos, cuja desvantagem é a adição de variáveis de decisão no problema. Porém, tais condições são apenas suficientes para tratar sistemas incertos ou dependentes de parâmetros.

Este trabalho investiga o uso de funções quadráticas na estabilização de sistemas LPV com realimentação de estados amostrados e propõe o uso do teorema de Pólya para obter condições menos conservadoras para a negatividade de polinômios quadráticos. Diferente de aplicações para análise de estabilidade de sistemas incertos (Oliveira e Peres, 2005), são desenvolvidas duas condições de síntese de controladores robustos utilizando LMIs baseadas na negatividade de funções quadráticas para sistemas LPV: a primeira utilizando o teorema de Pólya, e a segunda, para fins de comparação, utilizando o lema de Park e Park (2020). O sistema com dados amostrados é representado como um sistema com atraso no tempo e funções *looped* de L-K cuja derivada resulta em um polinômio de segundo grau são propostas. Por fim, dois exemplos numéricos são apresentados demonstrando os resultados propostos e comparações com a literatura.

Notações: Os conjuntos dos números reais (positivos) e naturais são denotados por \mathbb{R} (\mathbb{R}_+) e \mathbb{N} , respectivamente. $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ são, respectivamente, uma matriz de dimensões $n \times m$ com entradas reais e um vetor com n posições e entradas reais. $M \in \mathbb{S}^n$ são matrizes simétricas com dimensão $n \times n$ com entradas reais. A transposição de M é representada por M^\top , e $M_{(i)}$ denota a i -ésima linha da matriz M . \mathbb{K} denota o conjunto das funções vetoriais no \mathbb{R}^n diferenciáveis em $t \in [0, T]$. A norma euclidiana de $M \in \mathbb{R}^n$ é representada por $\|M\|$. $\text{diag}\{M_1, M_2\}$ é uma matriz diagonal composta por blocos M_1 e M_2 . $\text{He}\{M\}$ representa $M + M^\top$. Em matrizes quadradas, o símbolo \star representa os blocos transpostos simétricos. As matrizes \mathbf{I} e $\mathbf{0}$ denotam, respectivamente, as matrizes identidade e nula de dimensões apropriadas.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere um sistema LPV contínuo no tempo descrito como

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t), \quad (1)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor das entradas. As matrizes dependentes de parâmetros $A(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ pertencem a um politopo com N vértices conhecidos:

$$[A(\alpha(t)) \ B(\alpha(t))] = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) [A_i \ B_i]. \quad (2)$$

O vetor de parâmetros variantes no tempo é representado por $\alpha(t) \in \Lambda_N$, em que $\Lambda_N = \{\alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}$. Assuma que $\alpha(t)$ é diferenciável, de forma que qualquer matriz $Y(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) Y_i$ tem sua derivada no tempo denotada por:

$$\dot{Y}(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i(t) Y_i. \quad (3)$$

Uma vez que $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$, tem-se que $\sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i(t) = 0$. Suponha que as taxas de variação desses parâmetros tenham limites conhecidos, dados por:

$$\underline{b}_i \leq \dot{\alpha}_i \leq \bar{b}_i, \ 0 \in [\underline{b}_i, \bar{b}_i], \ \forall i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Os espaços nos quais $\dot{\alpha}_i, i = 1, \dots, N$, variam podem ser determinados por uma região delimitada pela interseção entre as restrições lineares $\sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i(t) = 0$ e (4), portanto representada pela região politópica convexa dada pelo conjunto $\mathcal{B} = \{\phi \in \mathbb{R}^N : \phi = \sum_{\ell=1}^M \beta_\ell h_{\ell(i)}, \sum_{i=1}^N h_{\ell(i)} = 0, \beta \in \Lambda_M\}$, $\forall \ell = 1, \dots, M$, em que os vetores h_ℓ são os vértices do politopo das taxas de variação dos parâmetros.

Assumindo que os parâmetros não são disponíveis online para realimentação, considera-se uma lei de controle robusta baseada nos estados amostrados, cujos valores estão disponíveis nos instantes $t_k, t_{k+1} > t_k$, de modo que $\cup_{k \in \mathbb{N}} [t_k, t_{k+1}) = [0, +\infty)$. Nesses instantes o vetor de estado é transmitido ao controlador. A diferença entre dois instantes de amostragem sucessivos é dada por $\eta_k = t_{k+1} - t_k$. Tal diferença é variável e limitada por dois escalares positivos $\eta_1 \leq \eta_2$, tais que $0 < \eta_1 \leq \eta_k \leq \eta_2$. Assim, tem-se uma lei de controle definida por:

$$u(t) = Kx(t_k), \quad (5)$$

com $t \in [t_k, t_{k+1})$, sendo $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ o ganho robusto. O sistema em malha fechada resultante é representado por:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))Kx(t_k). \quad (6)$$

Visando a mínima ocupação do canal de transmissão, é desejável um valor de η_2 o maior possível. Assim, define-se o problema a ser investigado como:

Problema 1. Dado o sistema representado por (1), e a lei de controle de realimentação de estados amostrados (5), projete o ganho robusto K de forma que o intervalo de amostragem máximo permitido seja maximizado e o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável para todo $\eta_k \in [\eta_1, \eta_2]$.

3. PRELIMINARES

Utilizando a abordagem *input-delay* (em português, atraso de entrada) proposta por Fridman (2010), o sistema (6)

pode ser reescrito como:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))Kx(t - \tau(t)), \quad (7)$$

em que $\tau(t)$ é uma função de atraso variável no tempo linear por partes definida por $t - t_k = \tau(t) \in [0, \eta_k]$, com $\dot{\tau}(t) = 1, \forall t \in [t_k, t_{k+1})$. Deste modo, as ferramentas de estabilidade e estabilização para sistemas com atraso são aplicáveis em sistemas controlados por dados amostrados.

Para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada (7), considera-se o seguinte lema:

Lema 1. (Gomes da Silva Jr. et al. (2015)). Considere μ_1, μ_2 e μ_3 escalares positivos, uma função dependente de parâmetros $V : \mathbb{K} \times \Lambda_N \rightarrow \mathbb{R}_+$ que satisfaz

$$\mu_1 \|x\|^2 \leq V(x, \alpha) \leq \mu_2 \|x\|^2, \quad (8)$$

e uma função contínua e diferenciável dependente de parâmetros $\mathcal{V}_0 : \mathbb{K} \times \Lambda_N \times [0, \eta_k] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\mathcal{V}_0(x, \alpha, 0) = \mathcal{V}_0(x, \alpha, \eta_k), \quad (9)$$

para todo $x \in \mathbb{K}, \alpha \in \Lambda_N$ e $\eta_k \in [\eta_1, \eta_2]$. Sendo $\mathcal{W}(x, \alpha, \tau) = V(x, \alpha) + \mathcal{V}_0(x, \alpha, \tau)$, se a desigualdade

$$\dot{\mathcal{W}}(x, \alpha, \tau) = \frac{d}{dt}[V(x, \alpha) + \mathcal{V}_0(x, \alpha, \tau)] < -\mu_3 \|x\|^2 \quad (10)$$

é válida, então:

- (1) o incremento da função de Lyapunov $V(x(t), \alpha(t))$ entre dois instantes de amostragem consecutivos é estritamente negativo, ou seja, satisfaz $\Delta V(x(t_k), \alpha(t_k)) = V(x(t_{k+1}), \alpha(t_{k+1})) - V(x(t_k), \alpha(t_k)) < 0$;
- (2) o sistema amostrado em malha fechada (6) com $\eta_k \in [\eta_1, \eta_2]$ é assintoticamente estável $\forall (k, \alpha(t), \eta_k, \tau(t)) \in \mathbb{N} \times \Lambda_N \times [\eta_1, \eta_2] \times [0, \eta_k]$.

Note que, sendo $\mathcal{W}(x(t), \alpha(t), \tau(t))$ monotonicamente decrescente, a função $V(x(t), \alpha(t))$ pode aumentar entre cada instante de amostragem, uma vez que $\mathcal{V}_0(x(t), \alpha(t), 0) = \mathcal{V}_0(x(t), \alpha(t), \eta_k)$ (Seuret, 2012). Para simplificação da notação, a dependência em α e τ no tempo t é utilizada apenas quando necessária e $\dot{\mathcal{W}}(x(t), \alpha(t), \tau(t)) = \dot{\mathcal{W}}$.

A fim de obter condições menos conservadoras, diferentes funcionais *looped* de L-K podem ser considerados. Neste trabalho, assume-se $\mathcal{V}_0(x(t), \alpha(t), \tau(t))$ tal que (10) é quadrático em $\tau(t)$. Dessa forma é necessário assegurar a negatividade desse polinômio. Para isto, são utilizados lemas de negatividade para funções quadráticas para garantir condições definidas negativas. Este trabalho propõe o uso do Teorema de Pólya para satisfazer tais condições em sistemas LPV. Assim, considere o seguinte lema:

Lema 2. Seja $\theta \in \Lambda_r$ e $f(y) = a_2 y^2 + a_1 y + a_0$ uma função quadrática, em que $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Para um $d \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $f(y) < 0 \forall y \in [\underline{h}, \bar{h}]$, se e somente se todos os coeficientes de

$$(\theta_1^2 f(\bar{h}) + \theta_1 \theta_2 \mathcal{T}(\underline{h}, \bar{h}) + \theta_2^2 f(\underline{h})) (\theta_1 + \theta_2)^d, \quad (11)$$

com $\mathcal{T}(\underline{h}, \bar{h}) = (2\underline{h}\bar{h}a_2 + (\underline{h} + \bar{h})a_1 + 2a_0)$, são estritamente negativos.

Prova. Assumindo $y = \theta_1 \bar{h} + \theta_2 \underline{h}$ em que $\theta_1 = \frac{y - \underline{h}}{\bar{h} - \underline{h}} \in [0, 1]$ e $\theta_2 = \frac{\bar{h} - y}{\bar{h} - \underline{h}} \in [0, 1]$ e $\theta_1 + \theta_2 = 1$, função $f(y) < 0$ pode ser reescrita como:

$$(\theta_1 \bar{h} + \theta_2 \underline{h})^2 a_2 + (\theta_1 \bar{h} + \theta_2 \underline{h}) a_1 + a_0 < 0. \quad (12)$$

Multiplicando-se os termos em a_i por $(\theta_1 + \theta_2)^{2-i}$ e reorganizando os termos, obtém-se o polinômio homogêneo:

$$\theta_1^2 (\bar{h}^2 a_2 + \bar{h} a_1 + a_0) + \theta_1 \theta_2 (2\bar{h}\underline{h}a_2 + (\bar{h} + \underline{h})a_1 + 2a_0) + \theta_2^2 (\underline{h}^2 a_2 + \underline{h} a_1 + a_0) < 0, \quad (13)$$

cuja negatividade pode ser atestada via Teorema de Pólya resolvendo-se (11) para um d suficientemente grande; portanto, assegurando a negatividade de $f(y), \forall y \in [\underline{h}, \bar{h}]$. \square

Para demonstrar a efetividade do método proposto, o lema de negatividade necessário e suficiente para o caso precisamente conhecido baseado no Procedimento-S proposto por Park e Park (2020) é utilizado para fins de comparação:

Lema 3. (Park e Park (2020); Rouamel et al. (2023)). Seja $f(y) = a_2 y^2 + a_1 y + a_0$ uma função quadrática, em que $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Se existe uma matriz $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$ com $M + M^\top \geq \mathbf{0}$ tal que

$$\begin{bmatrix} f(\underline{h}) & \frac{1}{2} a_1 + \underline{h} a_2 + (\bar{h} - \underline{h}) M \\ \star & a_2 - M - M^\top \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (14)$$

então $f(y) < 0, \forall y \in [\underline{h}, \bar{h}]$.

Os Lemas 2 e 3 são necessários e suficientes para os casos em que os coeficientes do polinômio a_2, a_1 e a_0 são independentes de parâmetros. No entanto, este trabalho objetiva investigar o uso de tais lemas em sistemas LPV, ou seja, com dependência paramétrica nos coeficientes. O Lema 3 apresenta menos desigualdades a serem verificadas que o Lema 2, no entanto, com a inclusão de variáveis de decisão. Ainda, o Lema 2 permite a relaxação de Pólya aumentando o grau d , com o custo do aumento do número de LMIs.

4. RESULTADOS PRINCIPAIS

Nesta seção, um funcional *looped* de L-K cuja derivada resulta em um polinômio de segundo grau em $\tau(t)$ é construído, e então, critérios de estabilização baseados na negatividade de um polinômio de segundo grau são propostos utilizando os Lemas 2 e 3.

4.1 Condições looped L-K de segundo grau

A fim obter condições de estabilização para o sistema (6), propõe-se o seguinte funcional *looped* de L-K que satisfaz (8) e (9), $\forall k \in \mathbb{N}, \eta_k \in [\eta_1, \eta_2]$ e $\tau(t) \in [0, \eta_k]$:

$$V(x(t), \alpha) = x^\top(t) P(\alpha) x(t), \quad (15)$$

$$\mathcal{V}_0(x(t), \alpha, \tau) = (\eta_k - \tau) \left[(x(t) - x(t_k))^\top \left(S(\alpha) (x(t) - x(t_k)) + 2Q(\alpha) x(t_k) \right) + \tau \zeta^\top U \zeta + \int_{t-\tau}^t \dot{x}^\top(s) R \dot{x}(s) ds \right], \quad (16)$$

em que $\zeta = [x^\top(t) \ x^\top(t_k)]^\top$, matrizes definidas positivas $< P(\alpha), R \in \mathbb{S}^n, U \in \mathbb{S}^{2n} S(\alpha) \in \mathbb{S}^n$ e $Q(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, possuindo estrutura politópica as matrizes $[P(\alpha(t)) \ S(\alpha(t)) \ Q(\alpha(t))] = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) [P_i \ S_i \ Q_i]$, em que $\alpha(t) \in \Lambda_N$. O funcional $\mathcal{W}(x(t), \alpha, \tau) = V(x(t), \alpha) + \mathcal{V}_0(x(t), \alpha, \tau)$ proposto é baseado no originalmente apresentado por Seuret (2012) e estendido com matrizes dependentes de parâmetros em Gomes da Silva Jr. et al. (2015). O terceiro termo de (16) é modificado com a introdução de $x(t)$ em ζ , resultando a respectiva derivada em um polinômio de segundo grau em $\tau(t)$, cuja negatividade é o principal interesse deste artigo. O uso de um funcional de

L-K dependente de parâmetro resulta em matrizes $\dot{P}(\alpha)$, $\dot{S}(\alpha)$ e $\dot{L}(\alpha)$ que podem ser descritas como (3). Portanto, tais matrizes podem ser calculadas pela representação politópica como $\dot{Y}(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^M \beta_\ell h_{\ell(i)} Y_i$, $\beta \in \Lambda_M$.

4.2 Critérios de estabilização robusta

Nesta seção, o lema de estabilidade através dos funcionais *looped* de L-K é utilizado para desenvolver duas condições de projeto de controladores de realimentação de estados amostrados. O funcional proposto neste trabalho resulta em uma equação de segundo grau em $\tau(t)$, necessitando o uso de abordagens de negatividade de funções quadráticas. Portanto, um Teorema é proposto utilizando o Lema 2, e um Corolário é obtido com o Lema 3 para ilustrar a eficácia do método proposto neste trabalho.

Teorema 1. Considere o sistema amostrado (1)-(5) e $d \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Suponha que existam matrizes $\mathbf{0} < \tilde{P}(\alpha) \in \mathbb{S}^n$, $\tilde{S}(\alpha) \in \mathbb{S}^n$, $\tilde{Q}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{L}(\alpha) \in \mathbb{R}^{3n \times n}$, $\tilde{Z}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, $\mathbf{0} < \tilde{R} \in \mathbb{S}^n$, $\tilde{U} \in \mathbb{S}^{2n}$, $\tilde{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um escalar $\epsilon > 0$ em que todos os coeficientes dos monômios do polinômio homogêneo em θ_1, θ_2

$$(\theta_1^2 \Pi_2 + \theta_1 \theta_2 \Pi_1 + \theta_2^2 \Pi_0)(\theta_1 + \theta_2)^d \quad (17)$$

sejam estritamente negativos em $\eta_k \in [\eta_1, \eta_2]$, com $E_1 = [\mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}]$, $E_2 = [\mathbf{0} \ \mathbf{I} \ \mathbf{0}]$, $E_3 = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{I}]$, $E_{12} = E_1 - E_2$, $\tilde{E}_1 = [E_1 \ E_2]^\top$, $\tilde{E}_2 = [E_3 \ \mathbf{0}]^\top$, $\Pi_2 = \eta_k^2 \tilde{\Psi}_{2z} + \eta_k \tilde{\Psi}_{1z} + \tilde{\Psi}_{0z}$, $\Pi_1 = \eta_k \tilde{\Psi}_{1z} + 2\tilde{\Psi}_{0z}$, $\Pi_0 = \tilde{\Psi}_0$, $\tilde{\Psi}_{2z} = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_2 & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\tilde{\Psi}_{1z} = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_1 & \tilde{L}(\alpha) \\ \star & -\tilde{R} \end{bmatrix}$, $\tilde{\Psi}_{0z} = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_0 & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\tilde{\Psi}_2 = -\text{He}\{\tilde{E}_1^\top \tilde{U} \tilde{E}_2\}$, $\tilde{\Psi}_1 = \text{He}\{-E_3^\top (\tilde{Q}(\alpha)E_2 + \tilde{S}(\alpha)E_{12}) - E_{12}^\top \dot{\tilde{Q}}(\alpha)E_2 + \eta_k \tilde{E}_1^\top \tilde{U} \tilde{E}_2\} - 2\tilde{E}_1^\top \tilde{U} \tilde{E}_1 - E_3^\top \tilde{R}E_3 - E_{12}^\top \dot{\tilde{S}}(\alpha)E_{12}$,

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_0 = & \text{He}\{E_1^\top \tilde{P}(\alpha)E_3 - E_{12}^\top \tilde{Q}(\alpha)E_2 - \tilde{L}(\alpha)E_{12} \\ & + (\epsilon E_1^\top + E_3^\top)(-A(\alpha)\tilde{X}E_1 - B(\alpha)\tilde{Z}E_2 + \tilde{X}E_3) \\ & + \eta_k E_3^\top (\tilde{Q}(\alpha)E_2 + \tilde{S}(\alpha)E_{12}) + \eta_k E_{12}^\top \dot{\tilde{Q}}(\alpha)E_2\} \\ & + \eta_k (E_3^\top \tilde{R}E_3 + \tilde{E}_1^\top \tilde{U} \tilde{E}_1 + E_{12}^\top \dot{\tilde{S}}(\alpha)E_{12}) - E_{12}^\top \tilde{S}(\alpha)E_{12} \\ & + E_1^\top \dot{\tilde{P}}(\alpha)E_1. \end{aligned}$$

Então o sistema (1) é assintoticamente estável com o controlador de dados amostrados (5) cuja matriz de ganho robusto é dada por $K = \tilde{Z}\tilde{X}^{-1}$, para quaisquer sequências de amostragem que satisfaçam $0 < \eta_1 \leq \eta_k \leq \eta_2$.

Prova. Considerando o funcional *looped* de L-K $\mathcal{W} = V(x(t), \alpha) + \mathcal{V}_0(x(t), \alpha, \tau)$ dados por (15) e (16), e assumindo $\dot{\zeta} = [\dot{x}^\top(t) \ \mathbf{0}^\top]^\top$, a respectiva derivada temporal resulta em: $\dot{\mathcal{W}} = 2\dot{x}^\top(t)P(\alpha)x(t) + x^\top(t)\dot{P}(\alpha)x(t) - (x(t) - x(t_k))^\top S(\alpha)(x(t) - x(t_k)) + (\eta_k - \tau)2\dot{x}^\top(t)S(\alpha)(x(t) - x(t_k)) + (\eta_k - \tau)(x(t) - x(t_k))^\top \dot{S}(\alpha)(x(t) - x(t_k)) - 2(x(t) - x(t_k))^\top Q(\alpha)x(t_k) + (\eta_k - \tau)(2\dot{x}^\top(t)Q(\alpha)x(t_k) + 2(x(t) - x(t_k))^\top \dot{Q}(\alpha)x(t_k)) - \tau\zeta^\top U\zeta + (\eta_k - \tau)\zeta^\top U\zeta + (\eta_k - \tau)\tau 2\dot{\zeta}^\top U\zeta + (\eta_k - \tau)\dot{x}^\top(t)R\dot{x}(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}^\top(s)R\dot{x}(s)ds$, Observe que o

último termo de $\dot{\mathcal{W}}$ pode ser majorado através da desigualdade (Briat, 2011)[Eq. (9)] como $-\int_{t-\tau}^t \dot{x}^\top(s)R\dot{x}(s)ds \leq -2\zeta^\top(t)L(\alpha)(x(t) - x(t_k)) + \tau\zeta^\top L(\alpha)R^{-1}L(\alpha)^\top \zeta$, em que $\mathbf{0} < R \in \mathbb{S}^n$, $L(\alpha) \in \mathbb{R}^{3n \times n}$ e considerando o vetor de estados aumentado $\xi = [x^\top(t) \ x^\top(t_k) \ \dot{x}^\top(t)]^\top$. Assim, tem-se que

$$\dot{\mathcal{W}} \leq \xi^\top (\tau^2 \Psi_2 + \tau(\Psi_1 + L(\alpha)R^{-1}L(\alpha)^\top) + \hat{\Psi}_0) \xi \quad (18)$$

com $\Psi_2 = -\text{He}\{\tilde{E}_1^\top U \tilde{E}_2\}$,

$$\Psi_1 = -2\tilde{E}_1^\top U \tilde{E}_1 - E_3^\top R E_3 - E_{12}^\top \dot{S}(\alpha)E_{12} + \text{He}\{-E_3^\top (Q(\alpha)E_2 + S(\alpha)E_{12}) - E_{12}^\top \dot{Q}(\alpha)E_2 + \eta_k \tilde{E}_1^\top U \tilde{E}_2\},$$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_0 = & \text{He}\{E_1^\top P(\alpha)E_3 - E_{12}^\top Q(\alpha)E_2 - L(\alpha)E_{12} \\ & + \eta_k E_3^\top (Q(\alpha)E_2 + S(\alpha)E_{12}) + \eta_k E_{12}^\top \dot{Q}(\alpha)E_2\} \\ & + \eta_k (E_3^\top R E_3 + \tilde{E}_1^\top U \tilde{E}_1 + E_{12}^\top \dot{S}(\alpha)E_{12}) \\ & - E_{12}^\top S(\alpha)E_{12} + E_1^\top \dot{P}(\alpha)E_1. \end{aligned}$$

De (6), tem-se $\mathcal{B}\xi(t) = 0$ com $\mathcal{B} = [-A(\alpha) \ -B(\alpha)K \ \mathbf{I}]$ e $\mathcal{X} = [\epsilon X \ \mathbf{0} \ X]^\top$, com $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Utilizando o Lema de Finsler (de Oliveira e Skelton, 2001), e uma transformação de similaridade $\tilde{\xi} = \Theta\xi$, com $\Theta = \text{diag}\{X, X, X\}$ a equação (18) pode ser reescrita como $\dot{\mathcal{W}} \leq \tilde{\xi}^\top \tilde{\Psi}(\tau)\tilde{\xi}$, com

$$\tilde{\Psi}(\tau) = \Theta^{-\top}(\tau^2 \Psi_2 + \tau(\Psi_1 + L(\alpha)R^{-1}L(\alpha)^\top) + \Psi_0) \Theta^{-1},$$

sendo $\Psi_0 = \hat{\Psi}_0 + \text{He}\{\mathcal{X}\mathcal{B}\}$. Com as mudanças de variáveis $\tilde{X} = X^{-1}$, $\tilde{P}(\alpha) = \tilde{X}^\top P(\alpha)\tilde{X}$, $\tilde{S}(\alpha) = \tilde{X}^\top S(\alpha)\tilde{X}$, $\tilde{Q}(\alpha) = \tilde{X}^\top Q(\alpha)\tilde{X}$, $\tilde{U} = \text{diag}\{\tilde{X}, \tilde{X}\}^\top U \tilde{X}$, $\tilde{L}(\alpha) = \Theta^{-\top} L(\alpha)\tilde{X}$, $\tilde{R} = \tilde{X}^\top R \tilde{X}$, e $\tilde{Z} = K\tilde{X}$, a condição (10), pode ser verificada satisfazendo:

$$\tau^2 \tilde{\Psi}_2 + \tau (\tilde{\Psi}_1 + \tilde{L}(\alpha)\tilde{R}^{-1}\tilde{L}(\alpha)^\top) + \tilde{\Psi}_0 < \mathbf{0}, \quad (19)$$

com $\tau \in [0, \eta_k]$. Aplicando o Lema 2 em (19) e utilizando o complemento de Schur no termo $\tilde{L}(\alpha)\tilde{R}^{-1}\tilde{L}(\alpha)^\top$, obtém-se (17) satisfazendo as condições de estabilidade do Lema 1 para $\eta_k \in [\eta_1, \eta_2]$ com $\mu_1 = \min_{i=1, \dots, N} \text{real}(\lambda(P_i))$, $\mu_2 = \max_{i=1, \dots, N} \text{real}(\lambda(P_i))$ e algum $\mu_3 > 0$ suficientemente

pequeno. Note que no bloco (3,3) de $\tilde{\Psi}_0$ tem-se que $\tilde{X} + \tilde{X}^\top + \eta_k \tilde{R} < \mathbf{0}$. Como $\eta_k \tilde{R} > \mathbf{0}$, isso implica que $\tilde{X} + \tilde{X}^\top < \mathbf{0}$. Portanto, \tilde{X} é não singular. \square

Corolário 1. Se existirem as matrizes dadas no Teorema 1 e matrizes $\tilde{M}_k \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_0 & \frac{1}{2}\tilde{\Psi}_1 + \eta_k \tilde{M}_k & \mathbf{0} \\ \star & \tilde{\Psi}_2 - \tilde{M}_k - \tilde{M}_k^\top & \tilde{L}(\alpha) \\ \star & \star & -\eta_k \tilde{R} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_k + \tilde{M}_k^\top & \tilde{L}(\alpha) \\ \star & \eta_k \tilde{R} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad (21)$$

para $\eta_k \in [\eta_1, \eta_2]$, então o sistema (1) é assintoticamente estável com o controlador de dados amostrados (5) cuja matriz de ganho robusto é dada por $K = \tilde{Z}\tilde{X}^{-1}$, para quaisquer sequências de amostragem que satisfaça $0 < \eta_1 \leq \eta_k \leq \eta_2$.

Prova. A prova segue os passos do Teorema 1 até a equação (19). Então, pode-se aplicar o Lema 3 com $M = M_k = -\frac{1}{2}\tilde{L}(\alpha)\tilde{R}^{-1}\tilde{L}(\alpha)^\top + \tilde{M}_k$, para $\tau \in [0, \eta_k]$ com $k = 1, 2$. \square

As LMIs de estabilização no Teorema 1 e Corolário 1 são dependentes de parâmetros e podem ser numericamente resolvidas pela avaliação das condições em cada um dos vértices da formulação convexa. Portanto, uma LMI dependente de parâmetro $\Gamma(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))$ pode ser definida como $\Gamma(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)\Gamma_i + \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M \beta_\ell h_{\ell(j)}\Gamma_j$, $\forall(\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) \in \Lambda_N \times \Lambda_M$. Neste trabalho, as condições dependentes de parâmetros foram convertidas em condições politópicas convexas automaticamente com o auxílio do *parser* Rolmip (Agulhari et al., 2019). Ainda, a dependência de η_k também é resolvida utilizando a convexidade através dos respectivos limites mínimos e máximos.

5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Os exemplos numéricos são implementados com o *parser* Rolmip (Agulhari et al., 2019) e o solver Mosek (Andersen e Andersen, 2000). As LMIs do Teorema 1 e Corolário 1 são resolvidas iterativamente testando a factibilidade para valores crescentes de η_2 até a obtenção do valor máximo factível em uma busca linear no parâmetro escalar $\epsilon \in [0, 1]$, com um passo de 0,01.

Exemplo 1: Considere o sistema LPV retirado de Gomes da Silva Jr. et al. (2015) em que $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,1 & 0,4+0,6\rho(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$ com $\rho(t) \in [-1; 1]$ e $\dot{\rho}(t) \in [-b, b]$. A Tabela 5 apresenta os máximos valores de η_2 , em segundos, obtidos com $\eta_1 = 0,001$ s, para diferentes limites de $\dot{\rho}(t)$, utilizando o Corolário 1 e Teorema 1 em comparação com alguns resultados da literatura. Note que mesmo utilizando um

Tabela 1. Valor máximo de η_2 (Ex. 1).

Condição	$b = 0,2$	$b = 0,6$	$b = 1$
Hooshmandi et al. (2020)	0,806	0,795	0,781
Hooshmandi et al. (2018)	0,838	0,812	0,773
Gomes da Silva Jr. et al. (2015)	1,264	1,002	0,800
Corolário 1	1,382	1,227	1,157
Teorema 1, $d = 0$	1,383	1,233	1,166
Teorema 1, $d = 1$	1,384	1,233	1,167
Teorema 1, $d = 5$	1,384	1,234	1,168

ganho robusto, Corolário 1 e Teorema 1 apresentam um maior tempo de amostragem permitido em comparação aos trabalhos mencionados que utilizam controladores dependentes de parâmetros. Do mesmo modo, os resultados aqui propostos são os únicos, dentre os listados, que utilizam um funcional cuja derivada resulta em um polinômio de segunda ordem. Portanto, observa-se que o uso de funcionais deste tipo podem proporcionar condições de síntese menos conservadoras. Além disso, veja que quanto maior o grau da relaxação de Pólya, d , maior o tempo máximo de amostragem admitido com o uso do Teorema 1 que requer 62 variáveis escalares de decisão. O Corolário 1 requer 134 variáveis escalares de decisão, evidenciando a superioridade do Lema 2, que obtém resultados menos conservadores com menor custo computacional.

Exemplo 2: Considere o modelo de um helicóptero em voo vertical sujeito a mudanças na velocidade do ar representadas por parâmetros variantes no tempo retirado

de (Narendra e Tripathi, 1973). As variáveis de estado são as velocidades horizontal ($x_1(t)$) e vertical ($x_2(t)$), a taxa ($x_3(t)$) e o ângulo de *pitch* ($x_4(t)$). As variáveis de controle são dadas pelo comando de passo coletivo ($u_1(t)$) e o comando cíclico ($u_2(t)$). As matrizes do sistema (1) são dadas por $A(\rho_1(t), \rho_2(t))$ e $B(\rho_3(t))$, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} -0,0366 & 0,0271 & 0,0188 & -0,4555 \\ 0,0482 & -1,0100 & 0,0024 & -4,0208 \\ 0,1002 & \rho_1(t) & -0,7070 & \rho_2(t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 0,4422 & 0,1761 \\ \rho_3(t) & -7,5922 \\ -5,5200 & 4,9900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com $\rho_1(t) \in [-0,0664; 0,5047]$, $\rho_2(t) \in [0,1198; 2,526]$ e $\rho_3(t) \in [0,9775; 5,112]$ e as respectivas taxas de variação satisfazendo $\dot{\rho}_1(t) \in [-0,15; 0,15]$, $\dot{\rho}_2(t) \in [-0,8; 0,8]$ e $\dot{\rho}_3(t) \in [-1,7; 1,7]$. Uma vez que o sistema possui 3 parâmetros variantes no tempo, então um politopo com $N = 8$ é considerado em Λ_8 .

Utilizando o Teorema 1 com $d = 5$ e considerando um tempo mínimo de amostragem $\eta_1 = 0,1$ s, o sistema é estável para tempos de amostragem de até $\eta_2 = 0,864$ s. Para fins de simulação, projeta-se através do Teorema 1, $d = 5$ e $\epsilon = 1,2$ um controlador (5) que mantém a estabilidade do sistema (6) para instantes de amostragem $\eta_k \in [0,200; 0,518]$ segundos. A matriz de ganho robusto obtida é $K = \begin{bmatrix} -0,0926 & 0,0382 & 0,4354 & 0,3619 \\ -0,0509 & 0,0250 & 0,1062 & -0,3433 \end{bmatrix}$. Considerando as funções de parâmetros variantes como $\rho_1(t) = 0,066 + |0,42\text{sen}0,35t|$, $\rho_2(t) = 0,11 + |2,25\text{sen}0,35t|$ e $\rho_3(t) = 0,97 + |4,1\text{sen}0,35t|$, e condições iniciais $x(0) = [2 \ 1 \ -2 \ 1,5]^\top$, a realimentação de estados é implementada com tempos de amostragem η_k gerados aleatoriamente no intervalo determinado, $[0,1, 0,864]$. A Figura 1 apresenta os estados $x(t)$ do sistema e os tempos de amostragem $\eta_k = t_{k+1} - t_k$ gerados na simulação. Conforme o objetivo do Teorema 1, os estados do sistema convergem assintoticamente para a origem com a amostragem dentro dos limites especificados, ilustrando a estabilização do sistema para amostragens aperiódicas. A Figura 2 apresenta os parâmetros variantes contidos no simplex Λ_8 ao longo da simulação e os sinais de controle $u(t)$ provenientes do controlador robusto implementado.

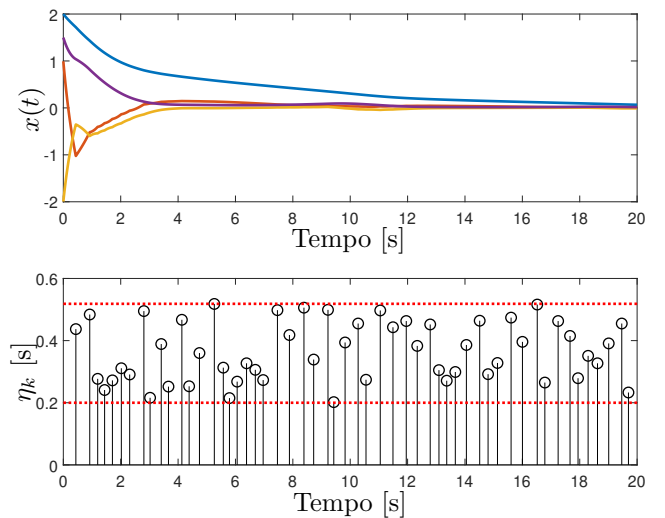


Figura 1. Acima: os estados do sistema, $x(t)$. Abaixo: intervalos de amostragem aleatórios $\eta_k \in [0,200; 0,528]$ s.

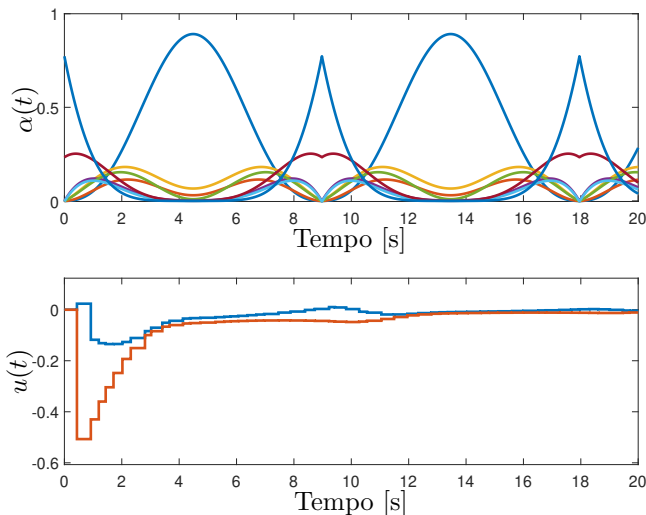


Figura 2. Acima: parâmetros variantes $\alpha(t) \in \Lambda_S$. Abaixo: sinais de controle.

6. CONCLUSÃO

Neste trabalho, a síntese de controladores robustos por realimentação de estados amostrados aperiódicamente para sistemas LPV foi investigada. Um funcional *looped* de L-K, cuja derivada temporal resulta em um polinômio de segundo grau, foi proposto. Um lema baseado no Teorema de Pólya foi apresentado para garantir a negatividade de funções de segundo grau, sendo adequado ao tratamento da derivada do funcional L-K usado. Foram obtidas condições convexas na forma de LMIs para a síntese de controladores robustos utilizando o lema proposto e um lema da literatura. Foram apresentados dois exemplos numéricos que demonstram as vantagens do funcional e das condições propostas para testar a negatividade de funções quadráticas. Os resultados sugerem que mesmo sem acrescentar variáveis de decisão, as condições podem ser menos conservadoras que os lemas encontrados na literatura no caso de sistemas LPV. Por fim, propõe-se como continuidade deste trabalho o projeto de controladores LPV e mecanismos geradores de eventos no contexto do lema proposto.

REFERÊNCIAS

- Agulhari, C.M., Felipe, A., Oliveira, R.C.L.F., e Peres, P.L.D. (2019). Algorithm 998: The Robust LMI Parser - A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 45(3), 36:1–36:25.
- Andersen, E.D. e Andersen, K.D. (2000). The MOSEK interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm. Em H. Frenk, K. Roos, T. Terlaky, e S. Zhang (eds.), *High Performance Optimization*, volume 33 de *Applied Optimization*, 197–232. Springer US.
- Briat, C. (2011). Convergence and equivalence results for the Jensen’s inequality—application to time-delay and sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(7), 1660–1665.
- Briat, C. (2015). *Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems — Analysis, Observation, Filtering and Control*, volume 3 de *Advances in Delays and Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- de Oliveira, M.C. e Skelton, R.E. (2001). Stability tests for constrained linear systems. Em S.O. Reza Moheimani (ed.), *Perspectives in Robust Control*, volume 268 de *Lecture Notes in Control and Information Science*, 241–257. Springer-Verlag, New York, NY.
- Fridman, E. (2010). A refined input delay approach to sampled-data control. *Automatica*, 46(2), 421–427.
- Gomes da Silva Jr., J.M., Moraes, V.M., Flores, J.V., e Palmeira, A.H.K. (2015). Sampled-data LPV control: a looped functional approach. *IFAC-PapersOnLine*, 48(26), 19–24. 1st IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems LPVs 2015.
- Hachem, M., Borrell, A.M., Sename, O., Atoui, H., e Morato, M. (2023). ROS implementation of planning and robust control strategies for autonomous vehicles. *Electronics (Switzerland)*, 12(17).
- Hooshmandi, K.H., Bayat, F., Jahed-Motlagh, M.R., e Jalali, A. (2018). Robust sampled-data control of nonlinear LPV systems: time-dependent functional approach. *IET Control Theory & Applications*, 12(9), 1318–1331.
- Hooshmandi, K.H., Bayat, F., Jahed-Motlagh, M.R., e Jalali, A.A. (2020). Polynomial LPV approach to robust \mathcal{H}_∞ control of nonlinear sampled-data systems. *International Journal of Control*, 93(9), 2145–2160.
- Liu, F., Liu, H., Li, Y., e Sidorov, D. (2023). Two relaxed quadratic function negative-determination lemmas: Application to time-delay systems. *Automatica*, 147, 110697.
- Liu, K., Selivanov, A., e Fridman, E. (2019). Survey on time-delay approach to networked control. *Annual Reviews in Control*, 48, 57–79.
- Narendra, K.S. e Tripathi, S.S. (1973). Identification and optimization of aircraft dynamics. *Journal of Aircraft*, 10.
- Nešić, D., Teel, A., e Kokotović, P. (1999). Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations. *Systems & Control Letters*, 38(4), 259–270.
- Oliveira, R.C.L.F. e Peres, P.L.D. (2005). Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent Lyapunov functions: Asymptotically exact LMI conditions. *Linear Algebra and Its Applications*, 405, 209–228.
- Palmeira, A.H.K., Gomes da Silva Jr., J.M., e Flores, J.V. (2018). Aperiodic sampled-data control for LPV systems under input saturation. *IFAC-PapersOnLine*, 51(26), 130–136.
- Park, J. e Park, P. (2020). Finite-interval quadratic polynomial inequalities and their application to time-delay systems. *Journal of The Franklin Institute*, 357(7), 4316–4327.
- Rouamel, M., Oliveira, L.A.L., Bourahala, F., Guelton, K., e Motchon, K.M.D. (2023). Network control systems design under deception attacks with dynamic event-triggering mechanism. *IEEE Control Systems Letters*, 7, 3265–3270.
- Seuret, A. (2012). A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings. *Automatica*, 48(1), 177–182.
- Vinco, G.M., Theodoulis, S., Sename, O., e Strub, G. (2022). Quasi-LPV modeling of guided projectile pitch dynamics through state transformation technique. *IFAC-PapersOnLine*, 55(35), 43 – 48.