



La symétrie des structures combinatoires énumératives

Pemha Binyam Gabriel Cédric, Moïse Ikollo Ndoumbé

► To cite this version:

Pemha Binyam Gabriel Cédric, Moïse Ikollo Ndoumbé. La symétrie des structures combinatoires énumératives. 2024. <hal-04674689>

HAL Id: hal-04674689

<https://hal.science/hal-04674689v1>

Preprint submitted on 21 Aug 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

La symétrie des structures combinatoires énumératives

par

PEMHA BINYAM Gabriel Cédric ,
Laboratoire de Mathématiques, Université de Douala, Cameroun.
Email : gpemha@yahoo.fr

Moïse IKOLLO NDOUMBE,
Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique, Université du
Québec, Montréal, Canada.
Email : janeaikollo3@yahoo.fr

Résumé : Soit une espèce de structures F au sens d'André Joyal [7].
Le but du présent article est d'étudier les trois séries associées à l'espèce de
structures F à savoir :

1. La série génératrice exponentielle [8]

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^n}{n!}$$

où $f_n = |F[n]|$ est le nombre de F -structures construites sur un en-
semble de n éléments.

2. La série génératrice des types (d'isomorphie) d'une espèce de struc-
tures

$$\tilde{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n x^n$$

où $\tilde{f}_n = |T(F_n)|$ est le nombre de types d'isomorphie de F -structures
d'ordre n .

3. Enfin la série indicatrice des cycles d'une espèce F est la série formelle (à une infinité de variables x_1, x_2, x_3, \dots)

$$Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{fix} F[\sigma] x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots \right)$$

où \mathfrak{S}_n désigne le groupe des permutations de $[n]$ ($\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}[n]$); $\text{fix} F[\sigma] = (F[\sigma])_1$ est le nombre de F -structures sur $[n]$ laissés fixes par $F[\sigma]$, c'est à dire le nombre de F -structures sur $[n]$ dont σ est un automorphisme et $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots)$ est le type cyclique de σ , pour $k \geq 1$.

Nous verrons qu'une spécialisation dans la série $Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots)$ permet d'obtenir les séries $F(x)$ et $\tilde{F}(x)$.

Abstract : Let a species of structures F according to André Joyal [7]. The main object of this project is to study the three series of species of structures F which are :

1. The exponential generating series of F ,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^n}{n!},$$

where $f_n = |F[n]|$ denotes the number of F -structures on any n -element set.

2. The types generating series of F ,

$$\tilde{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n x^n;$$

where $\tilde{f}_n = |T(F_n)|$ denotes the number of type of F -structures on any n -element set, or the number of orbits of the action $\mathfrak{S} \times F[n] \longrightarrow F[n]$.

3. At last, the cycle index series, Z_F , this series is an infinite number of variables x_1, x_2, x_3, \dots

$$Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{fix} F[\sigma] x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots \right),$$

where \mathfrak{S}_n denotes the permutation group of $[n]$ and $\text{fix} F[\sigma]$ is the number of F -structures on $[n]$ left fix by $F[\sigma]$ and $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots)$ is the cyclic type of σ , for $k \geq 1$.

The main counting series $F(x)$, $\tilde{F}(x)$ can be computed from Z_F by making use of the formulas (involving specializations of variables).

Mots-clés : Espèces de structures, structures combinatoires, symétrie combinatoire, séries génératrices, séries indicatrice de cycles.

1. Introduction

Au cours des trois dernières décennies, les fondements de la combinatoire énumérative se sont clarifiés et de nombreuses théories expliquant l'utilisation des techniques algébriques, comme les fonctions génératrices, ont vu le jour. Mentionnons entre autre, le composé partitionnel (Foata [1, 2]), les pre-fab (Bender-Goldman [3]), les fonctions de Möbius (Rota [4]), les algèbres d'incidence réduites (Doubilet-Rota-Stanley [5]), les binomial posets (Stanley [6]) et les espèces de structures de Joyal [7]). L'intérêt particulier de la théorie des espèces de structures est de traiter de façon unifiée l'analyse des structures combinatoires étiquetées et non étiquetées.

Parallèlement, les chercheurs en informatique théorique ont montré que plusieurs problèmes d'algorithmique et de structuration de données font intervenir de multiples façons les concepts et les résultats de la combinatoire énumérative. A ce propos soulignons l'impact fondamental du livre *The Art of Computer Programming* de D.E Knuth [9]. Depuis lors, une bonne connaissance des diverses techniques classiques et modernes de la combinatoire est devenue indispensable au chercheur informaticien. A cet égard, la théorie des espèces fournit les outils appropriés pour l'étude de structures de données caractérisées par des équations fonctionnelles.

Depuis son introduction vers 1980, la théorie des espèces de structures a fait l'objet de nombreux développements par les membres de l'école mont-réalaise de combinatoire ainsi que par d'autres chercheurs, principalement américains et européens. Le but du présent article est d'élucider les séries génératrices exponentielles, génératrices de types et indicatrices des cycles associées à une espèce de structures F .

La section 2 débute avec une introduction sur un exemple isolé d'identité combinatoire connue sous le nom de triangle de Pascal, suivi ensuite de la définition d'une espèce de structures via le transport le long d'une bijection σ ,

et après vient une liste d'espèces classiques. Ce chapitre contient également d'autres notions comme l'isomorphisme (égalité) d'espèces, l'isomorphisme de structures, et l'équipotence d'espèces.

La troisième section est consacrée à l'étude des séries associées aux espèces de structures, nous en étudions trois sortes à savoir les séries génératrices exponentielles, les séries génératrices ordinaires, et les séries indicatrices de cycles. On y trouve les opérations de bases : Addition, multiplication, composition partitionnelle. Et dans la dernière sous-section figure le calcul des séries génératrices ordinaires, et des séries indicatrices de cycles de certaines espèces.

La série indicatrice des cycles est une généralisation, à des familles d'actions, des polynômes indicateurs de cycles de la théorie de Pólya-Redfield. Les problèmes en combinatoire qui concerne l'énumération des types de structures sont, en général, résolus à l'aide de cette théorie [10, 11, 12]. La démonstration du théorème fondamental de Pólya-Redfield repose sur celui de Cauchy-Frobenius, plutôt connu sous le nom de Burnside, où l'inventaire des types c'est-à-dire d'orbites de l'action du groupe, sur la F -structure de l'espèce F , est obtenu en ne considérant que les éléments fixés par l'action.

2. Espèces de structures

On exploite judicieusement (c'est là que réside l'aspect un peu mystérieux) les opérations entre séries pour obtenir des identités de la combinatoire énumérative. Une illustration classique de cette efficacité est dans une dérivation simple de l'identité

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \quad (1)$$

Rappelons que les *coefficients binomiaux* ($\binom{n}{k} = C_n^k$) apparaissent (par définition) comme coefficients du polynôme

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

On constate alors que 1 découle simplement de la comparaison du coefficient de x^k dans chaque membre de l'égalité évidente : $(x+1)^n = (x+1)(x+1)^{n-1}$.

2.1. Espèce de structures : Via le transport de structures

2.1.1. Notion de structures d'une espèce F

Le concept de structures est fondamental et se trouve dans toutes les branches des mathématiques ainsi qu'en informatique théorique.

Définition 0.1. *une structure s est une construction γ que l'on effectue sur un ensemble U (de données). Il s'agit donc fondamentalement de la donnée d'un couple*

$$s = (\gamma, U).$$

Il est d'usage de dire que U est l'ensemble sous-jacent à la structure s , ou encore que s est une structure construite sur (ou étiquetée par) l'ensemble U .

La figure 1 décrit que l'arborescence en question peut se décrire comme $s = (\gamma, U)$ où

$$U = \{a, b, c, d, e, f\},$$

et

$$\gamma = (\{d\}; \{\{d, a\}; \{d, c\}; \{c, b\}; \{c, f\}; \{c, e\}\}).$$

Le singleton $\{d\}$ qui apparaît comme première composante de γ spécifie qu'elle est la racine de cette arborescence.

Quant au cycle orienté, présenté à la figure 2, il peut être mis sous la forme $s = (\gamma, U)$ où

$$U = \{x, 4, y, a, 7, 8\},$$

et

$$\gamma = \{(4, y), (y, a), (a, x), (x, 7), (7, 8), (8, 4)\}.$$

L'abus de notation, $s = \gamma$, qui consiste à identifier une structure $s = (\gamma, U)$ à la construction γ , pourra être utilisé s'il ne cause pas d'ambiguïté quant à la nature de l'ensemble U sous-jacent. Voici un exemple qui peut donner lieu à une telle ambiguïté :

$$s = (\gamma, U) \quad \text{où} \quad U = \{c, x, g, h, m, p, q\}, \quad \gamma = \{x, m, p\}.$$

Il s'agit d'une structure de sous-ensemble d'un ensemble U et la simple donnée de γ ne permet évidemment pas de récupérer l'ensemble U .

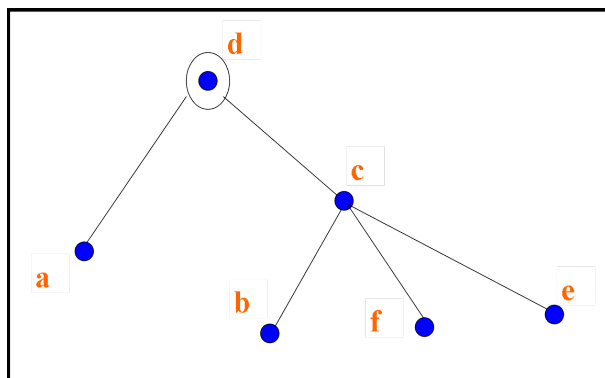
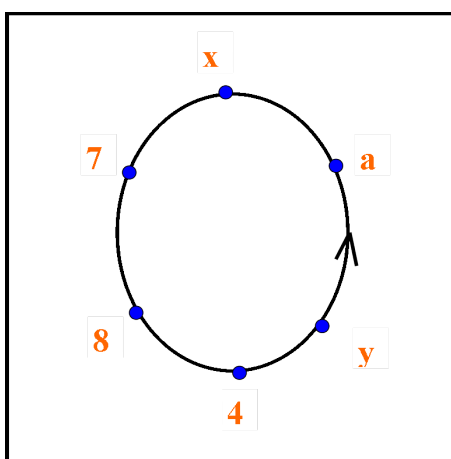
FIGURE 1 – Arborescence \mathcal{A} sur 6 points.

FIGURE 2 – Cycle orienté sur 6 points.

2.1.2. Transport de structures le long des bijections

Traditionnellement, on définit le concept de structure en généralisant les exemples précédents à l'aide de la théorie axiomatique des ensembles. Dans le présent mémoire, nous adoptons plutôt une approche fonctorielle, qui met l'emphasis sur le transport des structures le long des bijections. Voici un exemple qui illustre le concept de transport de structures.

Exemple 0.1. *Considérons l'arborescence $s = (\gamma, U)$ de la figure 1 dont l'ensemble sous-jacent est $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ remplaçons chaque élément de U par ceux d'un autre ensemble $V = \{x, 3, u, v, 5, 4\}$ via la bijection $\sigma : U \rightarrow V$ qui sera décrite par la figure 3. Cette figure montre clairement*

que la bijection σ permet de transporter l'arborescence s sur une arborescence correspondante $t = (\tau, V)$, construite sur l'ensemble V . Il suffit simplement de remplacer partout chaque sommet $u \in U$ par le sommet correspondant $\sigma(u) \in V$. Nous dirons que l'arborescence t a été obtenue par transport de l'arborescence s le long de la bijection σ et nous écrirons

$$t = \sigma \cdot s.$$

D'un point de vue purement ensembliste, cela revient à remplacer chaque élément $u \in U$ dans γ par l'élément correspondant $\sigma(u) \in V$ dans l'expression de γ . On dit alors que les arborescences s et t sont isomorphes, et que σ est un isomorphisme de s vers t .

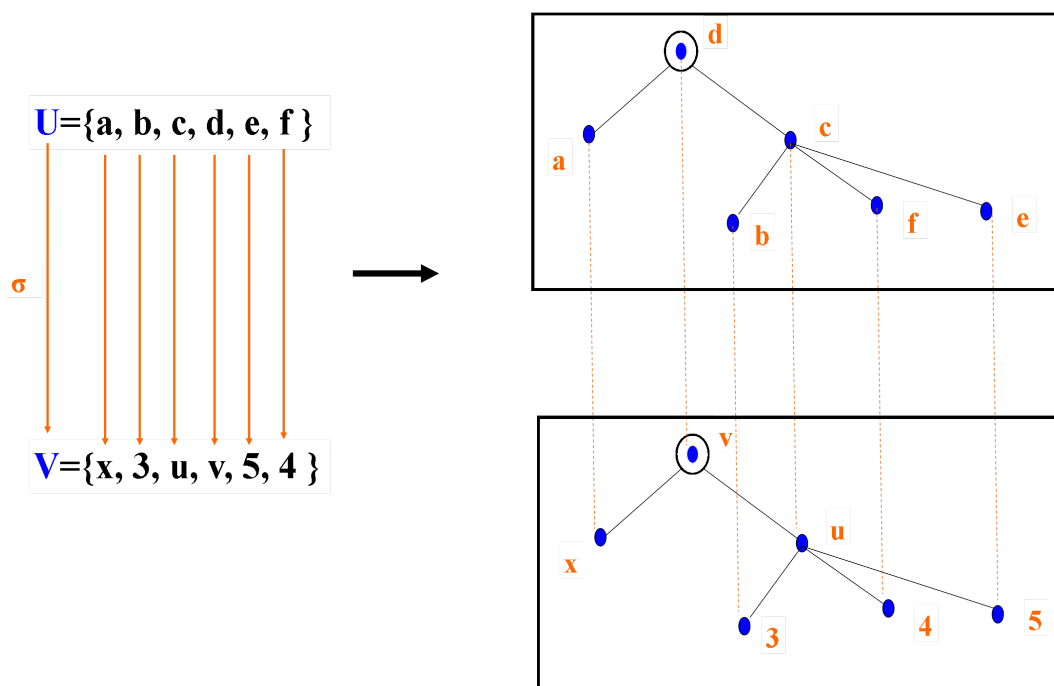
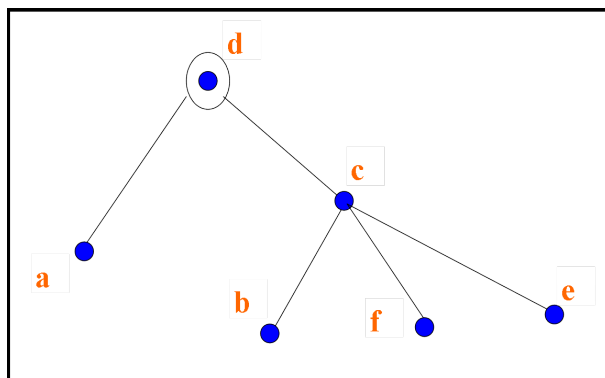
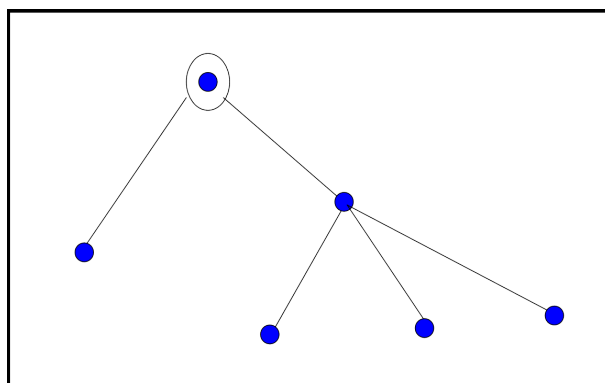
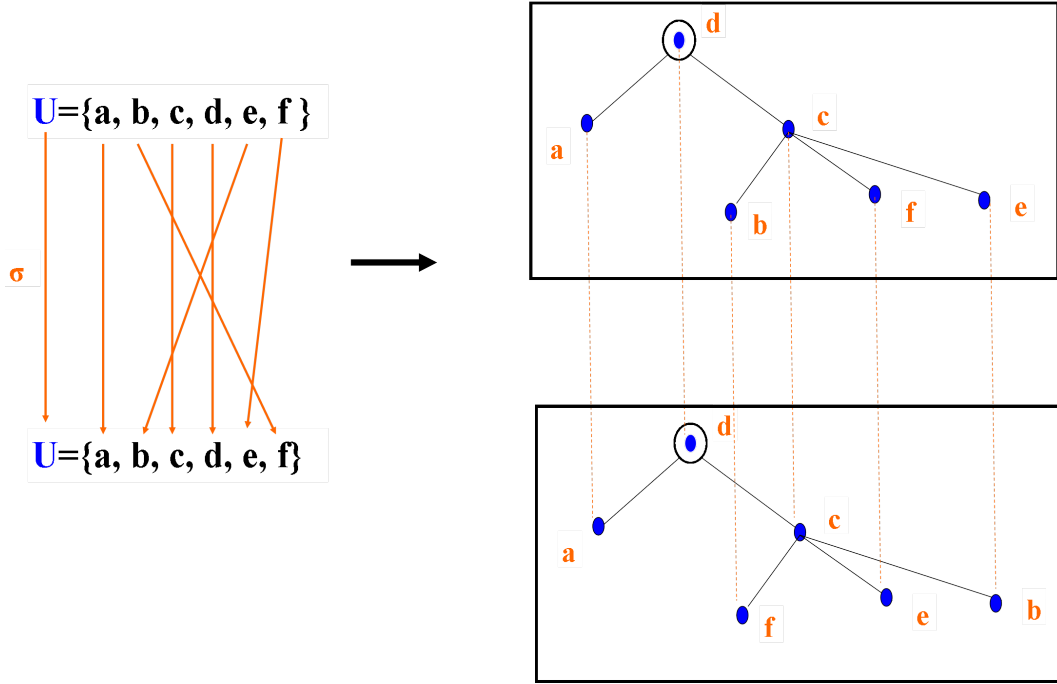


FIGURE 3 – Transport de structure via un isomorphisme σ .

Intuitivement, on peut se représenter deux structures isomorphes comme étant identiques si l'on ignore la nature des éléments de leurs ensembles sous-jacents. Cette forme générale que des structures isomorphes ont en commun est leur *type d'isomorphie*. Elle peut souvent être représentée par un dessin (voir les figures 4 et 5) dans lequel les points des ensembles sous-jacents sont *indistinguishables*. On dit alors que la structure est non étiquetée.

FIGURE 4 – Arborescence \mathcal{A} étiquetée.FIGURE 5 – Arborescence \mathcal{A} non étiquetée.

La figure 6 illustre un automorphisme d'arborescence. Dans ce cas, les ensembles U et V coïncident. La bijection $\sigma : U \rightarrow U$ est une permutation de U et l'arborescence transformée $\sigma \cdot s$ est identique à l'arborescence s c'est-à-dire $s = \sigma \cdot s$. Les exemples précédents montrent que le concept de transport de structures est primordial puisqu'il permet de définir les notions d'isomorphisme, de type (d'isomorphisme) et d'automorphisme. En fait, le transport de structures se situe à la base même du concept général d'espèce de structures.

FIGURE 6 – Transport de structure via un automorphisme σ .

Exemple 0.2. Comme introduction à la définition formelle d'espèce de structures, voici une description détaillée de l'espèce \mathcal{G} de tous graphes simples (c'est-à-dire non orientés, sans boucles ni arêtes multiples). Pour chaque ensemble fini U , convenons de désigner par $\mathcal{G}[U]$ l'ensemble de toutes les structures de graphes simples sur U . Ainsi,

$$\mathcal{G}[U] = \{g / g = (\gamma, U); \gamma \subset \mathcal{P}^2[U]\},$$

où $\mathcal{P}^2[U]$ dénote l'ensemble des paires d'éléments de U . Dans le graphe simple $g = (\gamma, U)$, les éléments de U sont les sommets, et ceux de γ , les arêtes. Notons que $\mathcal{G}[U]$ est un ensemble fini. Les trois expressions suivantes sont considérées comme équivalentes :

- g est un graphe simple sur U ;
- $g \in \mathcal{G}[U]$;
- g est une \mathcal{G} -structure sur U .

De plus, chaque bijection $\sigma : U \longrightarrow V$ induit, par transport de structures (voir figure 7), une fonction

$$\mathcal{G}[\sigma] : \mathcal{G}[U] \longrightarrow \mathcal{G}[V], \quad g \longmapsto \sigma \cdot g,$$

appelée le transport des graphes le long de σ . Formellement, si $g = (\gamma, U) \in \mathcal{G}[U]$, alors $\mathcal{G}[\sigma](g) = \sigma \cdot g = (\sigma \cdot \gamma, V)$ où $\sigma \cdot \gamma$ est l'ensemble des paires $\{x, y\} \in \gamma$. Ainsi chaque arête $\{x, y\}$ de g se voit réétiquetée $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ dans $\sigma \cdot \gamma$. Puisque ce transport des graphes le long de σ n'est qu'un réétiquetage des arêtes à l'aide de σ , il est évident que pour des bijections $\sigma : U \longrightarrow V$ et $\tau : V \longrightarrow W$, on a

$$\mathcal{G}[\tau \circ \sigma] = \mathcal{G}[\tau] \circ \mathcal{G}[\sigma],$$

et que, pour la bijection identité $Id_U : U \longrightarrow U$, on a :

$$\mathcal{G}[Id_U] = Id_{\mathcal{G}[U]}.$$

Ces deux égalités expriment la fonctorialité des transports de structures $\mathcal{G}[\sigma]$ et c'est cette propriété qui est abstraite pour définir le concept d'espèces de structures.

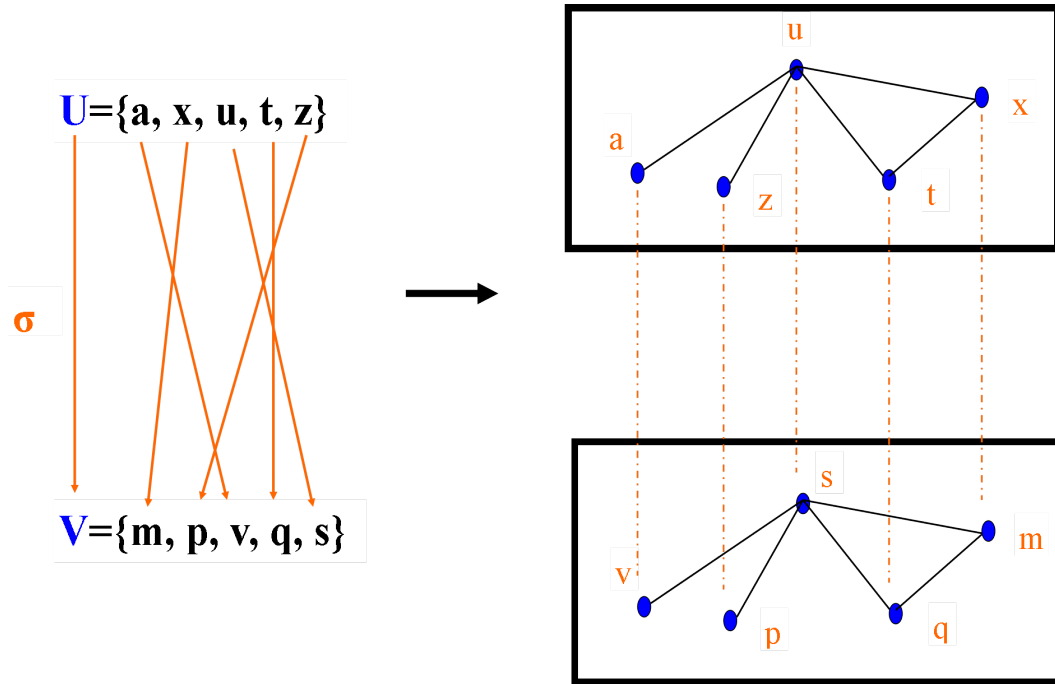


FIGURE 7 – Transport de structure via un isomorphisme σ .

2.1.3. Définition du concept d'espèce de structures

Définition 0.2. Une espèce de structures est une règle F qui permet de

1. produire, pour chaque ensemble fini U , un ensemble fini $F[U]$,
2. produire, pour chaque bijection $\sigma : U \longrightarrow V$, une fonction

$$F[\sigma] : F[U] \longrightarrow F[V]$$

les fonctions $F[\sigma]$ doivent satisfaire aux propriétés de fonctorialité suivantes :

a) Pour toutes bijections $\sigma : U \longrightarrow V$ et $\tau : V \longrightarrow W$, on a :

$$F[\tau \circ \sigma] = F[\tau] \circ F[\sigma]$$

b) pour la bijection identité $Id_U : U \longrightarrow U$, on a

$$F[Id_U] = Id_{F[U]}.$$

Un élément $s \in F[U]$ est appelé une F -structure sur U (ou encore une structure d'espèce F sur U). La fonction $F[\sigma]$ est appelée le transport des F -structures le long de σ .

Tout comme dans le cas des graphes, les trois expressions suivantes sont considérées comme équivalentes :

- s est une structure d'espèce F sur U ;
- $s \in F[U]$;
- s est une F -structure sur U .

Pour représenter une F -structure générique, nous utiliserons souvent des diagrammes comme ceux de la figure 8 et 9. Les points bleus dans ces figures représentent les éléments (distincts) de l'ensemble sous-jacent non structuré. La F -structure elle-même est représentée dans la figure 8 par un arc de cercle étiqueté F et en 9, par la superposition du symbole F .

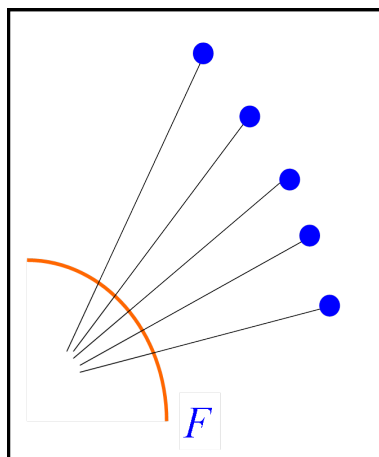


FIGURE 8 – Représentation d’une F -structure par un arc de cercle étiqueté F .

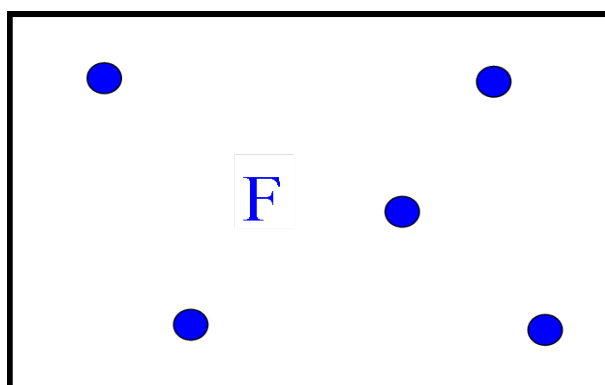


FIGURE 9 – Représentation d’une F -structure par des points.

Il découle immédiatement des propriétés de fonctorialité que chaque fonction de transport $F[\sigma]$ est nécessairement une bijection. Lorsque le contexte sera clair, nous utiliserons la notation $\sigma \cdot s$ pour désigner $F[\sigma](s)$. Les notions d'isomorphisme, de type d'isomorphisme de F -structures sont implicitement contenues dans la donnée de l'espèce F .

Exemple 0.3. (*Exemple d'utilisation d'axiomes ensemblistes*).

On peut décrire une espèce F au moyen d'un système \mathfrak{A} d'axiomes bien choisis en posant

$s = (\gamma, U) \in F[U]$ si et seulement si $s = (\gamma, U)$ est un modèle de \mathfrak{A} .

Les transports $F[\sigma]$ s'effectuent alors de la même façon illustrée plus haut. Il est clair que l'on peut ainsi parler d'une multitude d'espèces, dont les suivantes :

- \mathcal{X} : l'espèce de tous les singletons ;
- 1 : l'espèce de l'ensemble vide ;
- 0 : l'espèce vide ; et donc aucune structure ;
- \mathcal{E} : l'espèce de tous les ensembles ;
- \mathfrak{a} désigne l'espèce de tous les arbres ;
Un arbre étant un graphe simple connexe, sans cycle et sans boucle.
- \mathcal{B} désigne l'espèce de toutes les partitions ensemblistes ;
- \mathcal{P}^{bic} désigne l'espèce de tous les polygones bicolorés ;
- \mathcal{A} : l'espèce des arborescences ;
Une arborescence est un arbre pointé.
- \mathcal{G} : l'espèce des graphes simples ;
- \mathcal{G}^c désigne l'espèces des graphes simples connexes ;
- \mathcal{G}_o désigne l'espèce des graphes orientés ;
- \mathcal{P} désigne l'espèce des parties d'ensembles, c'est-à-dire

$$\mathcal{P}[U] = \{S \mid S \subset U\};$$

- $\mathcal{E}nd$ désigne l'espèce des endofonctions, c'est-à-dire

$$\mathcal{E}nd[U] = \{\psi \mid \psi : U \longrightarrow U\};$$

- $\mathcal{I}nv$ désigne l'espèce des involutions, c'est-à-dire des endofonctions ψ telles que $\psi \circ \psi = Id$;
- \mathcal{S} désigne l'espèce des permutations (ou endofonctions bijectives) ;
- \mathcal{C} désigne l'espèce des permutations circulaires (ou cycles orientés) ;
- \mathcal{L} désigne l'espèce des ordres linéaires (ou totaux).

Nous reviendrons amplement sur ces espèces de structures à titre d'exemple.

Par exemple, en identifiant chaque endofonction ψ à son graphe sagittal (γ, U) , on peut décrire comme suit l'espèce $\mathcal{E}nd$ de toutes les endofonctions $\psi : (\gamma, U) \in \mathcal{E}nd[U]$, si et seulement si

$$\gamma \subset U \times U \text{ et } (\forall x)[(x \in U) \implies (\exists! y)[(y \in U) \text{ et } ((x, y) \in \gamma)]].$$

Les transports $\mathcal{E}nd[\sigma] : \mathcal{E}nd[U] \longrightarrow \mathcal{E}nd[V]$ le long des bijections $\sigma : U \longrightarrow V$ sont donnés par la formule

$$\mathcal{E}nd[\sigma](\psi) = \sigma \circ \psi \circ \sigma^{-1},$$

pour chaque $\psi \in \mathcal{E}nd[U]$. En effet, posons $\mathcal{E}nd[\sigma](\psi) = \theta \in \mathcal{E}nd[V]$. Alors le couple $(u, \psi(u))$ parcourt le graphe sagittal de ψ si et seulement si le couple $(\sigma(u), \sigma(\psi(u)))$ parcourt le graphe sagittal de θ . Or la relation $v = \sigma(u)$ équivaut à la relation $u = \sigma^{-1}(v)$. On en déduit donc que le graphe sagittal de θ est donné par les couples de la forme $(v, \sigma \circ \psi \circ \sigma^{-1}(v))$ où $v \in V$.

Exemple 0.4. (Exemples de constructions explicites)

Lorsque les structures d'une espèce F sont particulièrement simples ou peu nombreuses, on a souvent avantage à définir l'espèce en décrivant explicitement les ensembles $F[U]$ (et les transports $F[\sigma]$). Les espèces suivantes peuvent être classées dans cette catégorie. Dans chaque cas, le transport de structures $F[\sigma]$ est évident.

- L'espèce \mathcal{E} , des ensembles, définie par

$$\mathcal{E}[U] = \{U\}.$$

Il existe donc une unique \mathcal{E} -structure sur tout ensemble fini U , à savoir U lui même.

- *L'espèce \in , des éléments, définie par $\in[U] = \{U\}$, dont la structure sur U sont les éléments de U .*

- *L'espèce \mathcal{X} , caractéristique des singletons, définie par*

$$\mathcal{X}[U] = \begin{cases} \{U\}, & \text{si } |U|=1; \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici \emptyset dénote l'ensemble vide. Par conséquent, il n'existe pas de \mathcal{X} -structure sur un ensemble U lorsque $|U| \neq 1$.

- *L'espèce 1 , caractéristique de l'ensemble vide, définie par :*

$$1[U] = \begin{cases} \{U\}, & \text{si } U = \emptyset; \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- *L'espèce vide, notée 0 , définie par $0[U] = \emptyset$, pour tout U .*

- *L'espèce \mathcal{E}_2 , caractéristique des ensembles de cardinalité 2 définie par*

$$\mathcal{E}_2[U] = \begin{cases} \{U\}, & \text{si } |U|=2; \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.2. Exemples de transports d'espèces de structures

Voici maintenant une liste d'exemples d'espèces.

Espèces de parties.

On a par exemple, l'espèce \mathcal{P} des parties obtenue en posant

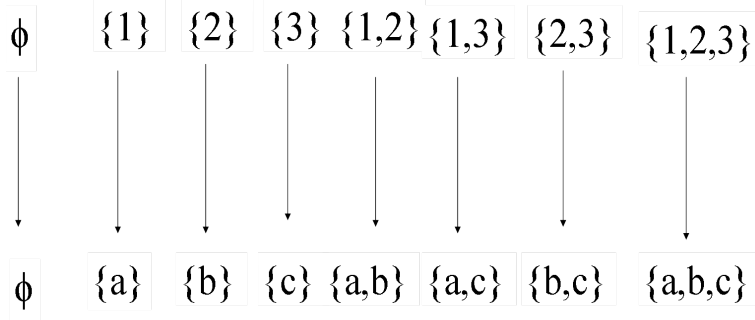
$$\mathcal{P}[U] = \{A \mid A \subset U\},$$

$$\mathcal{P}[\sigma] : \mathcal{P}[U] \longrightarrow \mathcal{P}[V], \quad \mathcal{P}[\sigma](U) := \{\sigma(x), x \in U\}.$$

Le transport d'une partie A de U , le long d'une bijection $\sigma : U \longrightarrow V$, est donc l'image de A par σ . On dénote parfois $\sigma(A)$ cette image. On a aussi défini l'espèce des parties à k éléments, en posant

$$\mathcal{P}_k[U] := \{A \mid A \subset U, |A| = k\},$$

avec le transport de structures analogue. Pour la bijection $\sigma(1) = a$, $\sigma(2) = b$, $\sigma(3) = c$ de $\{1, 2, 3\}$ vers $\{a, b, c\}$, on a le transport de \mathcal{P} -structures :

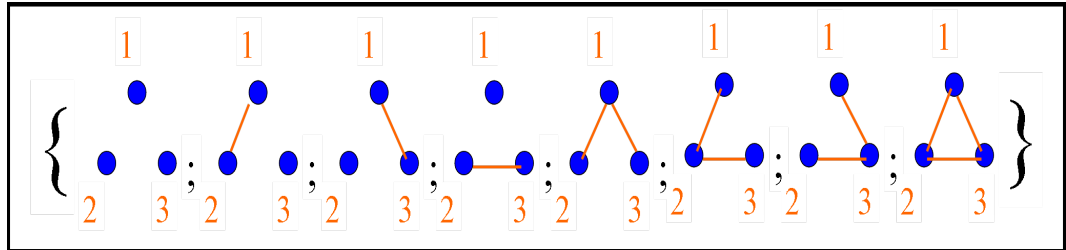


Nous verrons dans le chapitre suivant comment trouver à partir de ce transport de structures le nombre de telles structures.

Espèces de graphes.

Considérons l'ensemble $\mathcal{G}[U]$ des graphes simples sur U . C'est là la première partie de la description de l'espèce des graphes simples. On dit des éléments de $\mathcal{G}[U]$ que ce sont les structures d'espèce graphe sur U . Ainsi la figure suivante présente sur $U = \{1, 2, 3\}$.

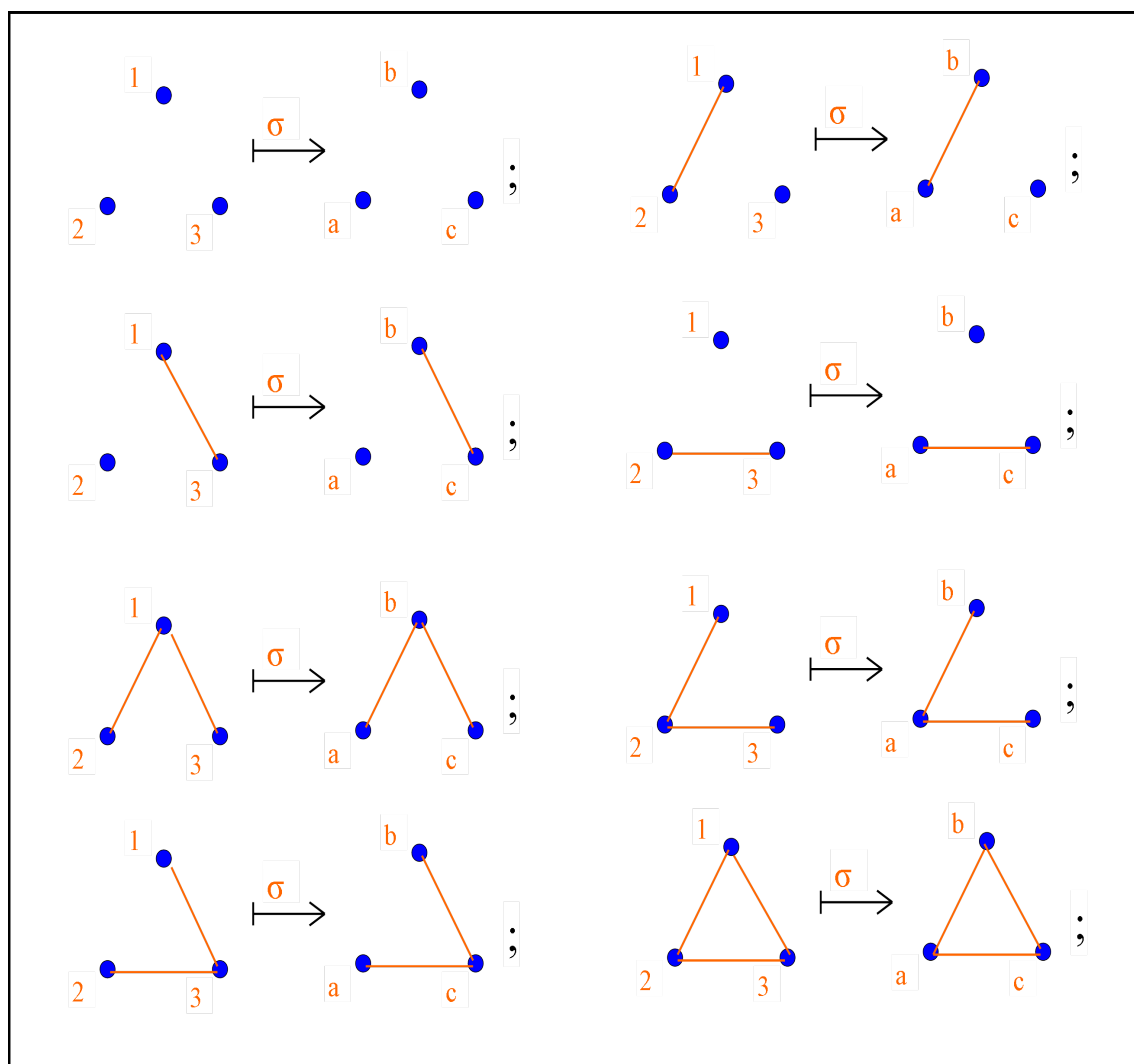
$$\mathcal{G}[U] := \mathcal{P}[\mathcal{P}_2[U]].$$



Reste maintenant à décrire le transport de structures, qui est dans ce cas un réétiquetage. Pour une bijection $\sigma : U \xrightarrow{\sim} V$, le transport $\mathcal{G}[\sigma]$ d'un graphe G dans $\mathcal{G}[U]$ s'obtient en posant :

$$\mathcal{G}[\sigma](G) := \{ \{ \sigma(a), \sigma(a') \} \mid \{a, a'\} \in G \}.$$

Ceci correspond à changer les étiquettes des sommets, en remplaçant a par $\sigma(a)$. Ainsi, lorsqu'on transporte les graphes sur $\{1, 2, 3\}$ le long de la bijection $\sigma : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{a, b, c\}$, pour laquelle $\sigma(1) = b$, $\sigma(2) = a$ et $\sigma(3) = c$, on obtient le transport.



De même, nous avons l'espèce \mathcal{G}_o des graphes orientés simples qui est ainsi définie :

1. pour tout ensemble fini U , on définit formellement

$$\mathcal{G}_o[U] := \{(U, E) \mid E \subset \{(a, b) \mid a \neq b \text{ et } a, b \in U\}\};$$

2. si σ est une bijection de $U \longrightarrow V$ on définit

$$\mathcal{G}_o[\sigma](U, E) := (\sigma(U), \{(\sigma(a), \sigma(b)) \mid a, b \in E\}).$$

Dit autrement, $\mathcal{G}_o[U]$ est constitué des couples (U, E) , où E lui-même contient des couples d'éléments (distincts) de U . Pour chaque ensemble U , les \mathcal{G}_o -structures sur U sont constituées par les graphes orientés dont les sommets sont étiquetés par U . Quant aux transports de structures $\mathcal{G}_o[\sigma]$, ce sont les réétiquetages. Chaque arc (a, b) est remplacé par $(\sigma(a), \sigma(b))$.

Espèce des endofonctions.

On définit l'espèce \mathcal{S} des permutations, en posant

$$\mathcal{S}[U] := \{\tau \mid \tau : U \xrightarrow{\sim} U\}.$$

Le transport de structures correspondant à une bijection $\sigma : U \longrightarrow V$, se définit en posant $\mathcal{S}[\sigma](\tau) := \sigma\tau\sigma^{-1}$, pour τ dans $\mathcal{S}[U]$. Autrement dit, le transport de la permutation $\tau : U \longrightarrow U$ le long de $\sigma : U \longrightarrow V$ donne une permutation $\theta := \mathcal{S}[\sigma](\tau)$ de V

$$\theta(\sigma(a)) = \sigma(b) \text{ si et seulement si } \tau(a) = b.$$

Plus généralement, pour une endofonction $f : U \longrightarrow U$, on a la conjugaison :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ V & \xrightarrow{\sigma f \sigma^{-1}} & V \end{array}$$

et l'espèce $\mathcal{E}nd$ des endofonctions se définit comme suit :

$$\mathcal{E}nd[U] := \{f \mid f : U \longrightarrow U\}.$$

Cette conjugaison par σ donne le transport pour certaines espèces de fonctions.

L'espèce des cycles

L'espèce \mathcal{C} des cycles (ou des permutations cycliques), définie comme

$$\mathcal{C}[U] := \{\sigma \mid \sigma : U \xrightarrow{\sim} U, \sigma \text{ cyclique}\}.$$

L'espèce des involutions

L'espèce \mathcal{Inv} des involutions, définie comme

$$\mathcal{Inv}[U] := \{\sigma \mid \sigma : U \xrightarrow{\sim} U, \sigma^2 = Id_U\}.$$

L'espèce des dérangements

L'espèce \mathcal{Der} des dérangements

$$\mathcal{Der}[U] := \{\sigma \mid \sigma : U \xrightarrow{\sim} U, \forall a, \sigma(a) \neq a\}.$$

L'espèce des listes.

On définit encore l'espèce \mathcal{L} des listes (ou ordres linéaires) :

$$\mathcal{L}[U] := \{l \mid l : [n] \xrightarrow{\sim} U\}.$$

Autrement dit, une liste des éléments de U s'identifie à une fonction

$$l = \{(1, x_1), (2, x_2), (3, x_3), \dots, (n, x_n)\}.$$

On peut alors définir le transport de structures le long de σ tout simplement comme

$$\mathcal{L}[\sigma](l) := \sigma \circ l.$$

L'espèce des partitions.

Rappelons qu'une partition d'un ensemble U est un ensemble P de parties non vides de U , deux-à-deux disjointes, dont la réunion est U . On a l'espèce \mathcal{B} des partitions en prenant

$$\mathcal{B}[U] := \{P \mid P \text{ est une partition de } U\},$$

en considérant de par le transport de structures défini par

$$\mathcal{B}[\sigma](P) := \{\sigma(B) \mid B \in P\}$$

pour P dans $\mathcal{B}[U]$.

Nous verrons plus tard que les coefficients de la série génératrice de cette espèce s'identifient aux nombres de Bell.

Pour toute espèce F , on peut considérer l'espèce F^+ qui est sa restriction aux ensembles non-vides :

$$F^+[U] = \begin{cases} F[U], & \text{si } |U| \neq 0; \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.3. Les actions de groupes et les espèces de structures

Cette section est une introduction élémentaire aux actions structurelles des groupes finis.

Considérons une espèce F quelconque. Pour tout ensemble fini U , le groupe des permutations de U , noté \mathfrak{S}_U , agit par transport de structures sur l'ensemble $F[U]$ des F -structures sur U

$$\mathfrak{S}_U \times F[U] \longrightarrow F[U] \quad (\sigma, s) \longmapsto \sigma \cdot s = F[\sigma](s). \quad (2)$$

En général, la structure $\sigma \cdot s$ est obtenue de la structure s en remplaçant chaque élément u de son ensemble sous-jacent U , par l'élément correspondant $\sigma(u)$ (ce transport est dit usuel). La préservation de la fonctorialité du transport nous assurent que l'application définie plus haut 2 est bien une action de groupe sur un ensemble au sens de la théorie des groupes.

Remarque 0.1. *A toute espèce F correspond une famille d'actions : pour toute bijection $\beta : U \xrightarrow{\sim} V$ entre ensembles finis, les actions $\gamma_1 : \mathfrak{S}_U \times F[U] \longrightarrow F[U]$ et $\gamma_2 : \mathfrak{S}_V \times F[V] \longrightarrow F[V]$ induites par transport de structures sont équivalentes et le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_U \times F[U] & \xrightarrow{\gamma_1} & F[U] \\ (\phi, F(\beta)) \downarrow & & \downarrow F[\beta] \\ \mathfrak{S}_V \times F[V] & \xrightarrow{\gamma_2} & F[V] \end{array}$$

Où $\phi : \mathfrak{S}_U \longrightarrow \mathfrak{S}_V$ est l'isomorphisme défini par $\phi(\sigma) = \beta\sigma\beta^{-1}$, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_U$. Lorsque U parcourt la classe des ensembles finis, la famille d'actions 2 peut être représentée de façon canonique par la famille d'actions particulières $(\gamma_{F_n})_{n \geq 0}$

$$\gamma_{F_n} : \mathfrak{S}_n \times F[[n]] \longrightarrow F[[n]] \quad (\sigma, s) \longmapsto \sigma \cdot s = F[\sigma](s). \quad (3)$$

$\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}_{[n]}$, $n \geq 0$ et $|U| = n$.

Associés à la famille d'action définie précédemment 3, on y trouve les concepts et résultats de base de la théorie utilisée dans l'étude des séries liées aux espèces de structures.

2.3.1. Trois ensembles importants relatifs à l'action d'un groupe

Définition 0.3. L'orbite de $s \in F[U]$ sous l'action de \mathfrak{S}_U est l'ensemble des éléments de $F[U]$ obtenus par transport d'un élément σ de \mathfrak{S}_U

$$\text{Orb}_{\mathfrak{S}_U}(s) := \{\sigma \cdot s = F[\sigma](s) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_U\}$$

et l'ensemble des orbites de l'action

$$\text{Orb}(F[U]) := \{\text{Orb}(s) \mid s \in F[U]\}.$$

Définition 0.4. Le stabilisateur de $s \in F[U]$ sous l'action de \mathfrak{S}_U est l'ensemble des éléments de \mathfrak{S}_U qui fixe s ie

$$\text{Stab}(s) = H_s := \{\sigma \in \mathfrak{S}_U \mid \sigma \cdot s = s\}.$$

C'est-à-dire l'ensemble des éléments du groupe qui ne déplace pas s .

Définition 0.5. L'ensemble d'éléments fixés par $\sigma \in \mathfrak{S}_U$,

$$\text{Fix}F[\sigma] := \{s \mid \sigma \cdot s = s\}.$$

C'est-à-dire l'ensemble des éléments de $F[U]$ qui ne sont pas transportés par \mathfrak{S}_U .

Remarque 0.2. Les ensembles $\text{Orb}(F[U])$ et $\text{Fix}F[\sigma]$ sont tous deux contenus dans $F[U]$.

Il en existe une identité numérique importante qui montre que le cardinal $\text{Orb}_{\mathfrak{S}_U}(s)$ et H_s se détermine mutuellement une fois que le cardinal de \mathfrak{S}_U est connu : C'est le lemme du stabilisateur.

Lemme 0.1. (Lemme du stabilisateur)

$$|H_s| |\text{Orb}_{\mathfrak{S}_U}(s)| = |\mathfrak{S}_U| \quad \forall s \in F[U].$$

Preuve : Notons que $Stab(s)$ le stabilisateur d'une F -structure s fixée vivant sur U est telle que $Stab(s) \leq \mathfrak{S}_U$.

Montrons que l'application ψ suivante est une bijection

$$\begin{aligned}\psi : Orb_{\mathfrak{S}_U}(s) &\longrightarrow \mathfrak{S}_U/H_s \\ \sigma \cdot s &\longmapsto \sigma H_s\end{aligned}$$

$$\sigma H_s = \{\sigma h \mid h \in H_s\}.$$

De plus $|\sigma H_s| = |H_s|$ car

$$H_s \longrightarrow \sigma H_s$$

$$h \longmapsto \sigma h$$

est une bijection.

L'application ψ est surjective par définition. Soit $\sigma \cdot s$ et $\sigma' \cdot s$; $s \in F[U]$; $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_U$

$$\psi(\sigma s) = \psi(\sigma' s) \iff \sigma H_s = \sigma' H_s \iff H_s = \sigma^{-1} \sigma' H_s \iff \sigma^{-1} \sigma' \in H_s \iff \sigma^{-1} \sigma'(s) = s \iff \sigma'(s) = \sigma \cdot s \text{ D'où l'injection.}$$

Donc ψ est une bijection entre $Orb_{\mathfrak{S}_U}(s)$ et \mathfrak{S}_U/H_s des classes latérales gauches de H_s dans \mathfrak{S}_U .

D'où l'égalité $|Orb_{\mathfrak{S}_U}(s)| = |\mathfrak{S}_U/H_s|$ ■

Remarque 0.3. *Le sous-groupe H_s n'est pas nécessairement normal dans \mathfrak{S}_U , il n'y a donc pas de structure naturelle de groupe sur $Orb_{\mathfrak{S}_U}(s)$ et l'application ψ n'est en général qu'une bijection entre deux ensembles.*

Autre précision est que l'application ψ est une bijection même en permutant le but et la source, c'est-à-dire $\psi : \mathfrak{S}_U/H_s \longrightarrow Orb_{\mathfrak{S}_U}(s)$ à la seule condition que \mathfrak{S}_U/H_s soit bien définie.

Lemme 0.2. (Lemme de cauchy-Frobenius (de Burnside))

L'inventaire des types de F -structures, ie d'orbites du groupe \mathfrak{S}_U agissant sur $F[U]$ est donné par :

$$\frac{1}{|\mathfrak{S}_U|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_U} |Fix F[\sigma]|.$$

Preuve : L'ensemble sous-jacent U , étant fini, il en résulte que $F[U]$ est fini.

Soient $F[U]_1, F[U]_2, \dots, F[U]_n$ les orbites de \mathfrak{S}_U agissant alors clairement, nous avons

$$F[U] = \biguplus_{i=1}^n F[U]_i.$$

Ainsi $FixF[\sigma] = FixF[\sigma]_1 \uplus FixF[\sigma]_2 \uplus \cdots \uplus FixF[\sigma]_n$. Tous les $FixF[\sigma]_i$ étant disjoints $\forall i \in [n]$, on en conclut que

$$|FixF[\sigma]| = \sum_{i=1}^n |FixF[\sigma]_i| \implies \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_U} |FixF[\sigma]| = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_U} \sum_{i=1}^n |FixF[\sigma]_i|.$$

Cette expression compte le nombre des paires suivantes

$$\begin{aligned} X &= \{(s, \sigma) \mid s \in F[U], \sigma \in \mathfrak{S}_U, \sigma.s = F[\sigma](s) = s\} \\ &= \{(s, \sigma) \mid s \in F[U], \sigma \in \mathfrak{S}_U, s \in FixF[\sigma]\} \\ &= \{(s, \sigma) \mid s \in F[U], \sigma \in \mathfrak{S}_U, \sigma \in H_s\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_U} |FixF[\sigma]| &= \sum_{i=1}^n \sum_{s \in FixF[\sigma]_i} |H_s| = \sum_{i=1}^n \sum_{s \in FixF[\sigma]_i} \frac{|\mathfrak{S}_U|}{|Orb_{\mathfrak{S}_U}(s)|} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{s \in FixF[\sigma]_i} \frac{|\mathfrak{S}_U|}{|FixF[\sigma]_i|} = \sum_{i=1}^n |FixF[\sigma]_i| \frac{|\mathfrak{S}_U|}{|FixF[\sigma]_i|} = n|\mathfrak{S}_U|. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } n|\mathfrak{S}_U| = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_U} |FixF[\sigma]| \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$n = \frac{1}{|\mathfrak{S}_U|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_U} |FixF[\sigma]|.$$

■

Remarque 0.4. En particulier pour $|U| = n$ le lemme de Burnside s'écrit

$$|OrbF[n]| = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |FixF[\sigma]|.$$

2.3.2. Isomorphisme de structures et égalité d'espèces

Isomorphisme de structures

Définition 0.6. *Considérons deux F -structures $s_1 \in F[U]$ et $s_2 \in F[V]$. Une bijection $\sigma : U \longrightarrow V$ est appelée un isomorphisme de s_1 vers s_2 si $s_2 = F[\sigma](s_1)$. On dit que ces structures ont même type d'isomorphisme.*

Un isomorphisme de s vers s est appelé un automorphisme de s . Ainsi, dire que deux structures $s_1, s_2 \in F[U]$ sont isomorphes c'est dire qu'elles ont la même orbite ou encore qu'elles sont de même type.

Notation 0.1. *Deux structures s_1 et $s_2 \in F[U]$ sont isomorphes et on note $s_1 \sim_F s_2$, ou tout simplement $s_1 \sim s_2$ lorsqu'il existe une unique espèce.*

Le bon concept d'égalité entre espèces de structures se situe en fait à mi-chemin entre l'identité et l'équipotence. Il s'agit du concept d'isomorphisme d'espèces. Il requiert que les bijections

$$\alpha_U : F[U] \xrightarrow{\sim} G[U]$$

satisfassent à une condition supplémentaire relative aux transports de structures, appelée *condition de naturalité*.

Définition 0.7. *Soit F et G , deux espèces de structures. Un isomorphisme de F à G est la donnée d'une famille de bijections*

$$\alpha_U : F[U] \xrightarrow{\sim} G[U]$$

qui satisfait à la condition de neutralité suivante : pour toute bijection $\sigma : U \longrightarrow V$ entre ensembles finis, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} F[U] & \xrightarrow{\alpha_u} & G[U] \\ F[\sigma] \downarrow & & \downarrow G[\sigma] \\ F[V] & \xrightarrow{\alpha_v} & G[V] \end{array}$$

En d'autres termes, pour toute F -structure $s \in F[U]$, on doit avoir $\sigma \cdot \alpha_U(s) = \alpha_V(\sigma \cdot s)$.

Les deux espèces F et G sont alors dites isomorphes et on écrit $F \simeq G$.

3. Les séries associées aux espèces de structures

Les séries génératrices servent à coder toutes les informations concernant le dénombrement des structures étiquetées et non étiquetées. Et après nous introduirons la notion d'algèbre des espèces de structures. Il s'agira de définir diverses opérations combinatoires sur les espèces de structures pour en produire de nouvelles, en général plus complexes.

3.1. Séries associées aux espèces de structures

Nous allons maintenant associer trois séries formelles à chaque espèce de structures F . Il s'agit de

- la série génératrice de F , notée $F(x)$,
- la série génératrice des types de F , notée $\tilde{F}(x)$,
- la série indicatrice des cycles de F , notée $Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots)$.

Ces séries servent à encoder les informations concernant le dénombrement des F -structures étiquetées ou non étiquetées (c'est-à-dire à isomorphisme près). Notons tout d'abord que pour tout ensemble fini U , le nombre de F -structures sur U ne dépend que du nombre d'éléments de U (et non des éléments de U). En d'autres termes,

$$|F[U]| \text{ ne dépend que de } |U|.$$

Cette propriété découle immédiatement du fait, déjà observé précédemment, que les transports $F[\sigma]$ sont toujours des bijections. Ainsi, les cardinaux $|F[U]|$ sont complètement caractérisés par la suite des nombres

$$f_n = |F[\{1, 2, \dots, n\}]| = |F[n]|, \quad n \geq 0.$$

Pour alléger les notations nous écrirons

- $[n]$ pour désigner l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$,
- $F[n]$ pour désigner l'ensemble $F[\{1, 2, \dots, n\}]$, plutôt que $F[[n]]$.

3.2. Série génératrice exponentielle

Définition 0.8. *La série génératrice de l'espèce de structures F est la série formelle*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^n}{n!} \quad (4)$$

où $f_n = |F[n]|$ est le nombre de F -structures construites sur un ensemble de n éléments.

Notons que cette série est de type exponentiel en une indéterminée x au sens où $n!$ apparaît en dénominateur du terme de degré n . La série $F(x)$ est

aussi appelée le cardinal de l'espèce F et on écrit alors $\text{card } F$.

Les notations suivantes sont utilisées pour désigner les coefficients des séries formelles. Pour une série formelle ordinaire

$$G(x) = \sum_{n \geq 0} g_n x^n$$

on pose

$$[x^n]G(x) = g_n.$$

Pour une série formelle de type exponentiel, de la forme (4), on a alors

$$n![x^n]F(x) = f_n.$$

Utilisant le développement de Taylor (à l'origine) de $F(x)$, on remarque que

$$n![x^n]F(x) = \frac{d^n F(x)}{dx^n} \quad \text{à } x = 0.$$

Plus généralement, pour une série formelle en un nombre quelconque de variables exprimée sous la forme

$$H(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots} h_{n_1, n_2, n_3, \dots} \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots}{c_{n_1, n_2, n_3, \dots}}$$

où $c_{n_1, n_2, n_3, \dots}$ est une famille donnée de scalaires non nuls, on pose

$$c_{n_1, n_2, n_3, \dots} [x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots] H(x_1, x_2, x_3, \dots) = h_{n_1, n_2, n_3, \dots}$$

La problématique de la combinatoire énumérative, consiste à calculer la suite de nombres pour une espèce F

$$|F[0]|, |F[1]|, |F[2]|, |F[3]|, \dots, |F[n]|, \dots$$

Un des aspects fascinant de l'approche par séries génératrices est qu'il y'a souvent une fonction classique bien connue dont le développement en série à l'origine correspond précisément à une série génératrice apparaissant ainsi dans un contexte d'énumération. Par calcul direct, on trouve facilement certaines séries.

Exemple 0.5. *Dans la plupart de ces exemples le calcul des séries est direct, cependant certaines séries s'obtiennent par des techniques présentées plus loin.*

Espèces de parties

$$\mathcal{P}[U] := \{A \mid A \subset U\}.$$

Représentons-nous à l'esprit une partie de trois éléments $\{1, 2, 3\}$ et donnons-nous une permutation σ telle que $\sigma(1) = a$, $\sigma(2) = b$, et $\sigma(3) = c$, de $\{1, 2, 3\}$ vers $\{a, b, c\}$. On a 2^3 structures d'espèce \mathcal{P} pour ces 3 éléments. Ainsi pour n éléments, on aura 2^n structures d'espèce \mathcal{P} . On a la série

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) &= 1 + 2x + 4\frac{x^2}{2} + 8\frac{x^3}{6} + 16\frac{x^4}{24} + \cdots + 2^n\frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} \\ &= \exp(2x). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{P}(x) = \exp(2x).$$

D'autre part, rappelons que

$$\mathcal{P}_k[U] := \{A \mid A \subset U, |A| = k\}.$$

Et qu'il y'a $\binom{n}{k}$ structures d'espèce \mathcal{P}_k sur un ensemble à n éléments, on calcule

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k(x) &= \sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k x^{(n-k)} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Pour $i = n - k$, la somme précédente n'a de sens que si $n - k$ est

positif. Ainsi

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_k(x) &= \sum_{i \geq 0} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{x^i}{i!} \\
 &= \frac{x^k}{k!} \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!} \\
 &= \frac{x^k}{k!} \exp x. \\
 \implies \mathcal{P}_k(x) &= \frac{x^k}{k!} \exp x.
 \end{aligned}$$

L'espèce des graphes.

Vu plus haut dans les exemples d'espèces de structures, nous avons $2^{\binom{n}{2}}$ structures d'espèce \mathcal{G} sur un ensemble à n éléments, ainsi on a la série suivante

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(x) &= 1 + x + 2\frac{x^2}{2} + 8\frac{x^3}{6} + 64\frac{x^4}{24} + 1024\frac{x^5}{120} + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

L'espèce des graphes orientés \mathcal{G}_o , il y'a $2^{(n^2)}$ structures sur un ensemble à n éléments, on a donc la série

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_o(x) &= 1 + 2x + 16\frac{x^2}{2} + 512\frac{x^3}{6} + 65536\frac{x^4}{24} + 33554432\frac{x^5}{120} + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{(n^2)} \frac{x^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

L'espèce des permutations

L'espèce \mathcal{S} des permutations sur un ensemble à n éléments possède $n!$ structures et on a la série

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(x) &= 1 + x + 2\frac{x^2}{2} + 6\frac{x^3}{6} + 24\frac{x^4}{24} + \dots + n!\frac{x^n}{n!} + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{x^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
 &= \frac{1}{1-x}.
 \end{aligned}$$

L'espèce des cycles

Pour l'espèce de cycles \mathcal{C} (ou des permutations cycliques) définie plus haut a $(n-1)!$ permutations cycliques sur un ensemble à n éléments. On a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x) &= 0 + x + 1\frac{x^2}{2} + 2\frac{x^3}{6} + 6\frac{x^4}{24} + \cdots + (n-1)!\frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= -\ln(1-x) \\ &= \ln \frac{1}{1-x}.\end{aligned}$$

Nous verrons plus loin que la série génératrice des involutions est

$$\begin{aligned}\mathcal{Inv}(x) &= 1 + x + 2\frac{x^2}{2} + 4\frac{x^3}{6} + 10\frac{x^4}{24} + 26\frac{x^5}{120} + \cdots \\ &= \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Et celle des dérangements est

$$\begin{aligned}\mathcal{Der}(x) &= 1 + 0x + \frac{x^2}{2} + 2\frac{x^3}{6} + 9\frac{x^4}{24} + 44\frac{x^5}{120} + \cdots \\ &= \frac{\exp(-x)}{1-x}.\end{aligned}$$

L'espèce des endofonctions ($\mathcal{E}nd$)

Comme il y a n^n endofonctions sur un ensemble à n éléments, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{E}nd(x) &= 1 + x + 4\frac{x^2}{2} + 27\frac{x^3}{6} + 256\frac{x^4}{24} + 3125\frac{x^5}{120} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n^n \frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

L'espèce des listes (ou ordres linéaires) \mathcal{L}

Puisqu'il y a $n!$ structures d'espèce \mathcal{L} sur un ensemble à n éléments, on a la série

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= 1 + x + 2\frac{x^2}{2} + 6\frac{x^3}{6} + 24\frac{x^4}{24} + \cdots + n!\frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= \frac{1}{1-x}.\end{aligned}$$

D'autres espèces auxiliaires simples.

L'espèce vide 0

Comme il n'y a aucune structure d'espèce 0 sur un ensemble de cardinal n , la série génératrice associée est

$$\begin{aligned} 0(x) &= 0 + 0x + 0\frac{x^2}{2} + 0\frac{x^3}{6} + 0\frac{x^4}{24} + \cdots + 0\frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'espèce des ensembles

L'espèce des ensembles (avec une seule structure sur tout ensemble fini). Il y a exactement une structure d'espèce \mathcal{E} sur chaque ensemble de cardinal n , on a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= \exp(x). \end{aligned}$$

Remarque 0.5. Attention ici à la différence entre l'ensemble A , qui peut contenir plusieurs éléments, et l'ensemble $\{A\}$ qui ne contient qu'un seul élément, à savoir l'ensemble A .

L'espèce ensemble vide

$$1[A] = \begin{cases} \{A\}, & |A| = 0; \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est l'espèce caractéristique de l'ensemble vide. Le seul ensemble qui admet une structure d'espèce 1 est l'ensemble vide, on a donc

$$\begin{aligned} 1(x) &= 1 + 0x + 0\frac{x^2}{2} + 0\frac{x^3}{6} + 0\frac{x^4}{24} + \cdots + 0\frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= 1. \end{aligned}$$

L'espèce des singletons

$$\mathcal{X}[A] = \begin{cases} \{A\}, & |A| = 1; \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est l'espèce caractéristique des singletons. Les seuls ensembles qui admettent des structures d'espèce \mathcal{X} sont les singletons, et il y a alors une seule telle structure. On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(x) &= 0 + x + 0\frac{x^2}{2} + 0\frac{x^3}{6} + 0\frac{x^4}{24} + \cdots + 0\frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= x. \end{aligned}$$

3.3. La série génératrice des types d'isomorphie

Venons-en maintenant au dénombrement des types d'isomorphie des F -structures. Une fois encore, nous pouvons nous restreindre aux structures construites sur les ensembles de la forme $U = \{1, 2, 3, \dots, n\} = [n]$. On définit une relation d'équivalence \sim sur l'ensemble $F[n]$ en posant pour $s, t \in F[n]$,

$s \sim t$ si et seulement si s et t ont même type d'isomorphie c'est-à-dire sont dans une même orbite.

Donc $s \sim t$ si et seulement s'il existe une permutation $\sigma : [n] \longrightarrow [n]$ telle que $\sigma \cdot s = t$ ie $F[\sigma](s) = t$.

Par définition, un type de F -structures d'ordre n est une classe d'équivalence (modulo \sim) de F -structures sur $[n]$.

On dénote $T(F_n)$ l'ensemble quotient $F[n]/\sim$ des types de F -structures d'ordre n et on pose

$$T(F) = \sum_{n \geq 0} T(F_n).$$

Définition 0.9. La série génératrice des types (d'isomorphie) d'une espèce de structures F est la série formelle

$$\tilde{F}(x) = \sum_{n \geq 0} \tilde{f}_n x^n.$$

Où $\tilde{f}_n = |T(F_n)|$ est le nombre de type d'isomorphie de F -structures d'ordre n .

Autrement dit $s \sim t$ si et seulement si on peut obtenir t à partir de s en permutant judicieusement ses étiquettes. Dans ce cas, on peut décrire agréablement un type de F -structures en éliminant tout simplement les étiquettes des structures. Les divers structures d'un type donné s'obtiennent alors en remplaçant les étiquettes de toutes les façons possibles. Voilà pourquoi on dit dans ce cas qu'un type ou une forme correspond à une structure non étiquetée. On identifie donc les structures non étiquetées.

Dans certains cas, ces structures étiquetées peuvent être décrites plus simplement puisque le fait d'enlever les étiquettes rend la structure presque inutile : On dit qu'il n'en reste que la forme. La forme des partitions ainsi que des permutations peut être décrite en donnant simplement la liste en nombre décroissant des tailles de ses cycles.

Énumération des structures non étiquetées.

L'énumération des types de structures ou de formes de F -structures correspond donc à l'énumération des F -structures non étiquetées.

Le type adapté est la série

$$\tilde{F}(x) = \sum_{n \geq 0} \tilde{f}_n x^n \text{ où } \tilde{f}_n = |F[n]/\sim|.$$

Remarquons ici que nous avons une série génératrice ordinaire plutôt qu'exponentielle en générale, il est bien reconnu que le calcul des séries $\tilde{F}(x)$ est beaucoup plus ardu que les séries $F(x)$. C'est Pólya [12] qui a le premier proposé une approche systématique pour le faire.

Une des forces de la théorie des espèces est d'intégrer naturellement son approche bien que la discussion générale de l'approche de Pólya dans le cadre de la théorie des espèces dépasse le niveau de ce mémoire, un cas est cependant particulièrement facile et accessible : c'est celui des espèces rigides.

On dit qu'une espèce F est rigide si et seulement si chaque F -structure n'admet qu'un et un seul automorphisme.

Il en découle que chaque classe d'équivalence de $F[n]$ selon la relation \sim contient exactement $n!$ F -structures et on trouve

$$\tilde{f}_n = \frac{f_n}{n!} \quad (\text{ici } |A| = n).$$

Exemple 0.6. (*Exemple de série génératrice des types d'isomorphie*)

Comme nous le savons le calcul des séries génératrices des types d'isomorphie se révèle beaucoup plus ardu et nous reviendrons amplement dessus après avoir mis sur pied les différents calculs de base associés aux espèces de structures et après énoncer un certain nombre de théorèmes parmi lesquels le théorème 0.1 de spécialisation de variables :

$$\tilde{\mathcal{L}}(x) = \frac{1}{1-x}; \quad \tilde{\mathcal{S}}(x) = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x^k}; \quad \tilde{\mathcal{C}}(x) = \frac{x}{1-x}; \quad \tilde{\mathcal{E}}(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Remarque 0.6. Il est à noter que malgré l'égalité des séries génératrices des espèces \mathcal{L} et \mathcal{S} , $\mathcal{L}(x) = \mathcal{S}(x) = \frac{1}{1-x}$. On n'a pas l'égalité des séries génératrices des types :

$$\tilde{\mathcal{L}}(x) \neq \tilde{\mathcal{S}}(x).$$

Ceci provient du fait que les ordres totaux et les permutations ne se transportent pas de la même façon le long des bijections. En particulier, un ordre total n'admet qu'un seul automorphisme tandis qu'une permutation en admet

en général plusieurs. Il y'a donc une différence essentielle entre les permutations σ d'un ensemble U de cardinal n et les listes sans répétition $\sigma_1\sigma_2\sigma_3...\sigma_n$ des éléments de U . Bien entendu, si l'ensemble U vient muni d'un ordre fixé, on peut établir une bijection (qui dépend de cet ordre) entre permutations et listes.

3.4. La série indicatrice des cycles

En général, le calcul explicite ou récursif de la série génératrice des types d'isomorphie est plus difficile. Il nécessite l'aide d'opérations combinatoires sur les espèces ainsi qu'un troisième genre de séries, la série indicatrice des cycles de F , notée Z_F , associée à chaque espèce F . C'est une série formelle contenant, cette fois, une infinité de variables x_1, x_2, x_3, \dots . Elle renferme beaucoup plus d'informations énumératives que les deux autres séries $F(x)$ et $\tilde{F}(x)$.

Définissons d'abord ce que l'on entend par type cyclique d'une permutation.

Définition 0.10. Soit U un ensemble fini et σ une permutation de U . Le type cyclique de la permutation σ est la suite $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots)$ où, pour $k \geq 1$, σ_k est le nombre de cycles de longueur k de la décomposition de σ en cycles disjoints.

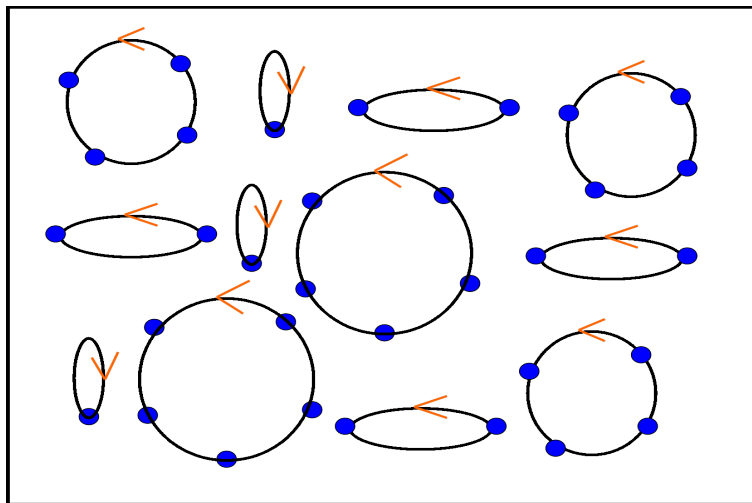
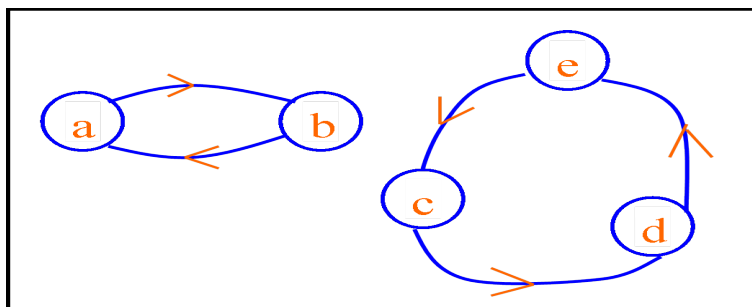
Il est à remarquer que σ_1 est le nombre de points fixes de σ . De plus, si $|U| = n$ alors $\sigma_k = 0$ si $k > n$ et le type cyclique de σ peut donc s'écrire sous la forme du vecteur à n composantes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n)$. Les notations suivantes seront utilisées

$$Fix\sigma = \{u \in U \mid \sigma(u) = u\},$$

$$fix\sigma = |Fix\sigma|.$$

Ainsi, $Fix\sigma$ désigne l'ensemble des points fixes de σ tandis que $fix\sigma = \sigma_1$ désigne le nombre de points fixes de σ . La figure 10 suivante montre une permutation de type $(3, 4, 0, 3, 2)$. Soit maintenant une espèce F quelconque. Toute permutation σ de U induit, par transport de structures, une permutation $F[\sigma]$ de l'ensemble $F[U]$ des F -structures sur U .

Considérons, à titre d'illustration, l'espèce Inv des involutions (c'est-à-dire les endofonctions ψ telles que $\psi \circ \psi = Id$) et considérons la permutation σ de l'ensemble $U = \{a, b, c, d, e\}$ donnée par la figure 11 suivante. Cette permutation σ induit la permutation $Inv[\sigma]$ de $Inv[U]$ donnée par la figure 11

FIGURE 10 – Une permutation de type $(3, 4, 0, 3, 2)$ FIGURE 11 – Une permutation de type $(0, 1, 1)$

dans laquelle les involutions sont représentées par des graphes simples dont chaque sommet est de degré ≤ 1 .

Définition 0.11. La série indicatrice des cycles d'une espèce F est la série formelle (à une infinité de variables x_1, x_2, x_3, \dots)

$$Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{fix} F[\sigma] x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots \right). \quad (5)$$

Où \mathfrak{S}_n désigne le groupe des permutations de $[n]$ (c'est-à-dire $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_{[n]}$) et $\text{fix} F[\sigma] = (F[\sigma])_1$ est le nombre de F -structures sur $[n]$ laissées fixes par $F[\sigma]$, c'est-à-dire le nombre de F -structures sur $[n]$ dont σ est un automor-

phisme.

La notion de série indicatrice Z_F constitue une généralisation simultanée des séries $F(x)$ et $\tilde{F}(x)$. En effet, on a le théorème fondamental suivant :

Théorème 0.1. *Pour toute espèce de structures F , on a :*

$$1) F(x) = Z_F(x, 0, 0, \dots),$$

$$2) \tilde{F}(x) = Z_F(x, x^2, x^3, \dots).$$

Preuve : Pour établir 1), on procède comme suit : en substituant $x_1 = x$ et $x_i = 0$, pour tout $i \geq 2$, dans la formule 5, on obtient

$$Z_F(x, 0, 0, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{fix} F[\sigma] x^{\sigma_1} 0^{\sigma_2} 0^{\sigma_3} \dots \right).$$

Or pour chaque valeur fixée de $n \geq 0$, $x^{\sigma_1} 0^{\sigma_2} 0^{\sigma_3} \dots = 0$, sauf si $\sigma_1 = n$ et $\sigma_i = 0$ pour $i \geq 2$. En d'autres termes, seules les permutations identités, $\sigma = Id_n$, sont susceptibles de contribuer à la somme. Ainsi,

$$\begin{aligned} Z_F(x, 0, 0, \dots) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \text{fix} F[Id_n] x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f_n x^n \\ &= F(x). \end{aligned}$$

Puisque toutes les F -structures sont laissées fixes par transport le long de l'identité.

L'égalité 2) est fondée sur le lemme de Cauchy-Frobenius (alias Burnside). En effet, on a :

$$\begin{aligned} Z_F(x, x^2, x^3, \dots) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{fix} F[\sigma] x^{\sigma_1} x^{2\sigma_2} x^{3\sigma_3} \dots \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{fix} F[\sigma] x^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} |F[n]| / n! \sim |x^n| \\ &= \tilde{F}(x). \end{aligned}$$

■

Remarque 0.7. En examinant les figures 10 et 11, on se convainc facilement que le type cyclique de $\text{Inv}[\sigma]$ est indépendant de la nature des points de U et ne dépend que du type de σ . Il s'agit là d'un phénomène tout à fait général. En effet, pour toute espèce F et toute permutation σ de U , le type cyclique $((F[\sigma])_1, (F[\sigma])_2, \dots)$ de $F[\sigma]$ ne dépend que du type cyclique $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ de σ . En particulier, le nombre de points fixes de la permutation $F[\sigma]$ donnée par

$$\text{fix}F[\sigma] = |\text{Fix}F[\sigma]| = (F[\sigma])_1$$

ne dépend que des nombres $\sigma_1, \sigma_2, \dots$. Ainsi, dans la définition de série indicatrice 5, les permutations ayant le même type cyclique $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ contribuent au même monôme en les variables x_1, x_2, x_3, \dots . Pour éliminer cette redondance, il est possible de regrouper les monômes de la série indicatrice qui correspondent à chacun de ces types. On sait que le nombre de permutations σ de n éléments, de type (n_1, n_2, n_3, \dots) est donné par

$$\frac{n!}{1^{n_1}n_1!2^{n_2}n_2!3^{n_3}n_3!\dots}.$$

On obtient alors, après simplification des $n!$, la variante suivante pour la définition de la série indicatrice d'une espèce F quelconque :

$$Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n_1+2n_2+3n_3+\dots < \infty} \text{fix}F[n_1, n_2, n_3, \dots] \frac{x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}\dots}{1^{n_1}n_1!2^{n_2}n_2!3^{n_3}n_3!\dots}. \quad (6)$$

Où $F[n_1, n_2, n_3, \dots]$ désigne le nombre de F -structures sur un ensemble de $n = \sum_{i \geq 1} in_i$ éléments qui sont fixées sous l'action d'une permutation (donnée quelconque) de type (n_1, n_2, n_3, \dots) . Pour simplifier la présentation, introduisons la notation vectorielle $n = (n_1, n_2, n_3, \dots)$ et $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, on écrit alors $\text{aut}(n)$ pour le dénominateur de la fraction

$$\frac{n!}{1^{n_1}n_1!2^{n_2}n_2!3^{n_3}n_3!\dots}.$$

Et x^n pour $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}\dots$. Avec ces conventions, la formule 6 prend la forme

$$Z_F(x) = \sum_{n_1+2n_2+3n_3+\dots < \infty} \text{fix}F[n] \frac{x^n}{\text{aut}(n)}.$$

Il est aussi utile d'introduire l'écriture simplifiée Coeff_n pour le coefficient de $\frac{x^n}{\text{aut}(n)}$ de l'égalité précédente, ce qui donne

$$\text{fix}F[n] = \text{Coeff}_n Z_F = \text{aut}(n)[x^n]Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots).$$

3.5. Opérations de bases sur les espèces de structures

Nous allons voir diverses opérations permettant de combiner entre elles des espèces de structures pour en produire d'autres, en général plus complexes. Il en résultera une algèbre combinatoire permettant d'engendrer et d'analyser une multitude d'espèces et de calculer les séries (génératrices et indicatrices) qui leur sont associées. Ces opérations entre espèces constituent un relèvement combinatoire des opérations usuelles d'addition (+), de multiplication (.), de substitution (\circ), de dérivation (') et le pointage (\bullet) sur les séries génératrices de type exponentiel. Plaçons-nous donc d'abord dans le contexte purement algébrique des séries formelles en une variable x .

3.5.1. La somme d'espèces de structures

A titre d'exemple, considérons l'espèce \mathcal{G}^c des graphes simples connexes et l'espèce \mathcal{G}^d des graphes simples disconnexes (c'est-à-dire vides ou ayant au moins deux composantes connexes). Comme tout graphe est soit connexe, soit disconnexe, on a évidemment l'égalité suivante pour tout ensemble fini U :

$$\mathcal{G}[U] = \mathcal{G}^c[U] \uplus \mathcal{G}^d[U].$$

Où \mathcal{G} désigne l'espèce de tous les graphes simples et \uplus indique la réunion disjointe. On dit alors que \mathcal{G} est la somme des espèces \mathcal{G}^c et \mathcal{G}^d et on écrit :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^c + \mathcal{G}^d.$$

Cet exemple sert de prototype pour la définition générale de somme d'espèces.

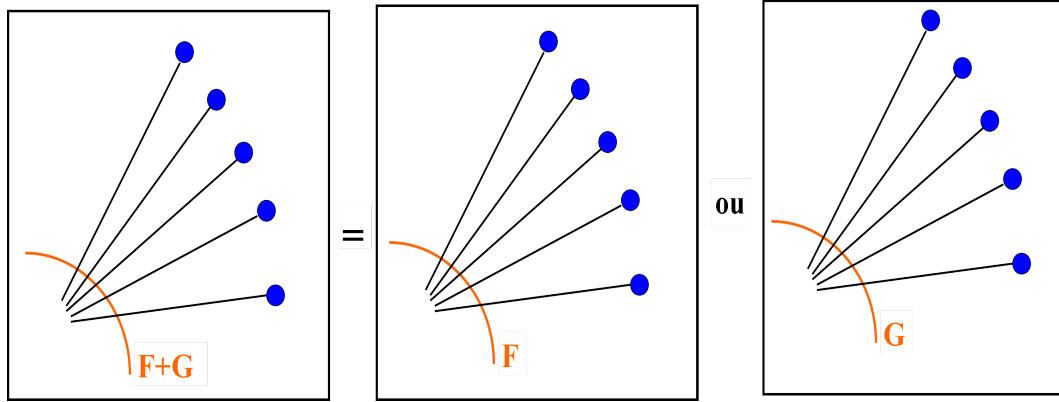
Définition 0.12. Soit F et G , deux espèces de structures. L'espèce $F + G$, appelée la somme de F et G , est définie comme suit : une $(F + G)$ -structure sur U est une F -structure sur U ou (exclusif) une G -structure sur U .

En d'autres termes, pour tout ensemble fini U , on a :

$$(F + G)[U] = F[U] \uplus G[U] \quad (\text{réunion disjointe ensembliste}).$$

Le transport le long d'une bijection $\sigma : U \rightarrow V$ s'effectue en posant, pour toute $(F + G)$ -structure s sur U .

$$(F + G)[\sigma](s) = \begin{cases} F[\sigma](s), & s \in F[U]; \\ G[\sigma](s), & s \in G[U]. \end{cases}$$

FIGURE 12 – Somme de deux espèces F et G

De façon imagée, une $(F + G)$ -structure quelconque peut être représentée par la figure 12 suivante.

L'opération d'addition est associative et commutative, à isomorphisme près. De plus, l'espèce vide 0 (n'ayant aucune structure : $0[U] = \emptyset$) est évidemment l'élément neutre par l'addition :

$$F + 0 = 0 + F = F$$

pour tout espèce F .

Exemple 0.7. — Soit $\mathcal{E}_{\text{pair}}$ (resp. \mathcal{E}_{imp}), l'espèce des ensembles contenant un nombre pair (resp. impair) d'éléments. Alors $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{pair}} + \mathcal{E}_{\text{imp}}$ et la proposition 0.1 suivante prend la forme $\mathcal{E}(x) = \exp x$ or $\exp x = \cosh x + \sinh x$
Donc $\mathcal{E}_{\text{pair}}(x) = \cosh x$ et $\mathcal{E}_{\text{imp}}(x) = \sinh x$.

— L'espèce \mathcal{E}^+ des ensembles non vides est définie par
$$\mathcal{E}^+ = \mathcal{E} - 1.$$

Proposition 0.1. Soit F et G , deux espèces de structures, alors les séries associées à l'espèce $F + G$, satisfont aux égalités.

$$1. (F + G)(x) = F(x) + G(x),$$

$$2. \widetilde{(F + G)}(x) = \tilde{F}(x) + \tilde{G}(x),$$

$$3. Z_{F+G} = Z_F + Z_G.$$

Preuve : Soit F et G , deux espèces de structures, les séries de types exponentiel sont

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{x^n}{n!}.$$

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= F(x) + G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (f_n + g_n) \frac{x^n}{n!} \\ &= (F + G)(x). \end{aligned}$$

D'où $(F + G)(x) = F(x) + G(x)$

Le point **2)** se fait de la même façon que **1)**.

Quant à **3)**, Nous savons que

$$Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n_1+2n_2+3n_3+\dots<\infty} \text{fix} F[n] \frac{x^n}{\text{aut}(n)}$$

pour une espèce F donnée. Montrons que $Z_{F+G} = Z_F + Z_G$.

On a

$$Z_{F+G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n_1+2n_2+3n_3+\dots<\infty} \text{fix}(F + G)[n] \frac{x^n}{\text{aut}(n)}.$$

Montrer que $Z_{F+G} = Z_F + Z_G$ revient à identifier le coefficient de Z_{F+G} à celui de $Z_F + Z_G$ de leur série génératrice respective, c'est-à-dire montrer que

$$\text{fix}(F + G)[n] = \text{fix} F[n] + \text{fix} G[n] \quad \text{car } |U| = n.$$

On sait que $\text{fix} F[n] = |\text{Fix} F[n]|$, ainsi on a : $\text{Fix} F[n] = \{s \in F[n] \mid F[\sigma](s) = s\}$.

$$\begin{aligned} \text{Fix}(F + G)[n] &= \{s \in (F + G)[n] \mid (F + G)[\sigma](s) = s\} \\ &= \{s \in F[n] \biguplus G[n] \mid (F + G)[\sigma](s) = s\}. \end{aligned}$$

$$\text{Or!} \quad (F + G)[\sigma](s) = \begin{cases} F[\sigma](s), & \text{si } s \in F[n]; \\ G[\sigma](s), & \text{si } s \in G[n]. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Fix}(F + G)[n] &= \{s \in F[n] \mid F[\sigma](s) = s\} \biguplus \{s \in G[n] \mid G[\sigma](s) = s\} \\ &= \text{Fix} F[n] \biguplus \text{Fix} G[n] \end{aligned}$$

$\implies \text{fix}(F + G)[n] = \text{fix} F[n] + \text{fix} G[n]$ car les ensembles $\text{Fix} F[n]$ et $\text{Fix} G[n]$ sont disjoints. D'où le résultat. ■

3.5.2. Le produit d'espèces de structures

Examinons la permutation décrite par la figure 13 suivante. Il s'y dégage deux structures disjointes :

1. Un ensemble de points fixes (ceux ayant une boucle) ;
2. Un dérangement sur les éléments restants (c'est-à-dire la permutation sans point fixe formée par les cycles non triviaux).

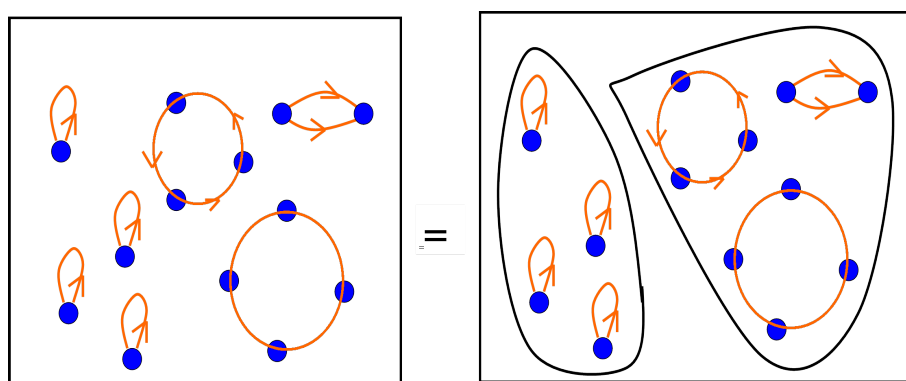


FIGURE 13 – Prototype d'un produit

Cette figure illustre cette dichotomie. Une décomposition analogue a évidemment lieu pour toute permutation. Nous dirons que l'espèce \mathcal{S} des permutations est le produit de l'espèce \mathcal{E} des ensembles par l'espèce \mathcal{Der} des dérangements et nous écrirons

$$\mathcal{S} = \mathcal{E} \cdot \mathcal{Der}.$$

Il s'agit d'un exemple typique de produit d'espèces de structures. Cette opération de multiplication est définie dans le cas général, de la façon suivante :

Définition 0.13. Soit F et G deux espèces de structures. L'espèce $F \cdot G$ (on écrit aussi FG), appelée le produit de F et de G , est définie comme suit : une $(F \cdot G)$ -structure sur U est un couple $s = (f, g)$ où

1. f est une F -structure sur une partie $U_1 \subset U$,
2. g est une G -structure sur une partie $U_2 \subset U$,

3. (U_1, U_2) est une décomposition de U , ie $U_1 \uplus U_2 = U$.

En d'autres termes, pour tout ensemble fini U ,

$$(F \cdot G)[U] = \sum_{(U_1, U_2)} F[U_1] \times G[U_2].$$

La somme disjointe étant étendue à tous les couples (U_1, U_2) formant une décomposition de U .

Le transport le long d'une bijection $\sigma : U \rightarrow V$ s'effectue en posant, pour toute $(F \cdot G)$ -structure $s = (f, g)$ sur U , $(F \cdot G)[\sigma](s) = (F[\sigma_1](f), G[\sigma_2](g))$, où σ_i est la restriction de σ à U_i , $i = 1, 2$.

De façon plus informelle, une $(F \cdot G)$ -structure est un couple ordonné formé d'une F -structure et d'une G -structure disjointe. Une $(F \cdot G)$ -structure générale peut être représentée par l'une des deux figures 14 ou 15 suivantes.

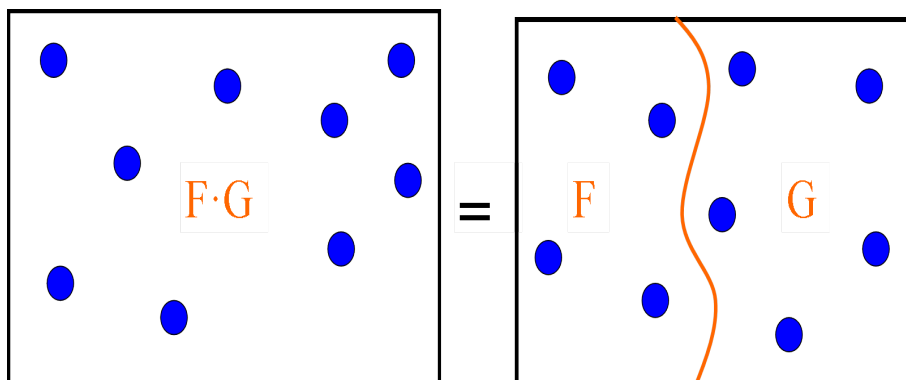


FIGURE 14 – Produit de deux espèces de structures

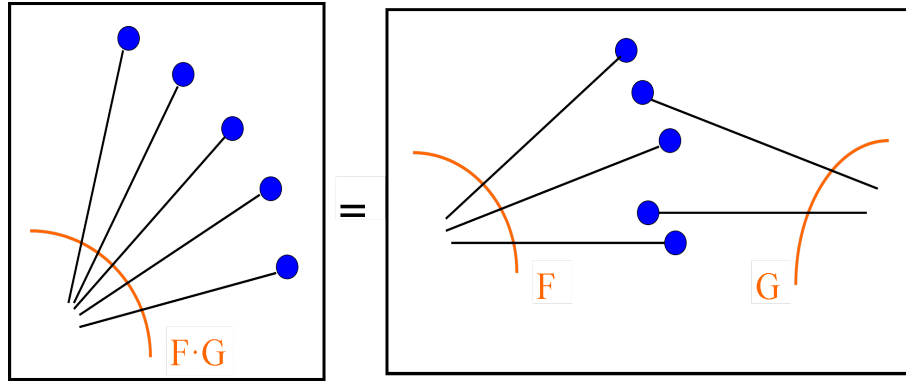


FIGURE 15 – Produit de deux espèces de structures

La multiplication d'espèce est associative et commutative à isomorphisme près, même si $F \cdot G$ et $G \cdot F$ ne sont pas identiques en général. Des isomorphismes (cohérents) permettent d'établir facilement ces propriétés. La multiplication admet l'espèce 1 comme élément neutre, et l'espèce 0 comme élément absorbant, ie

$$1 \cdot F = F \cdot 1 = F \text{ et } F \cdot 0 = 0 \cdot F = 0.$$

De plus la multiplication est distributive sur l'addition.

Proposition 0.2. *Soit F et G deux espèces de structures. Alors les séries associées à l'espèce $F \cdot G$ satisfont aux égalités*

1. $(F \cdot G)(x) = F(x)G(x)$
2. $\widetilde{(F \cdot G)}(x) = \tilde{F}(x)\tilde{G}(x)$
3. $Z_{F \cdot G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots)Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots)$

Preuve : 1. si l'on note

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad G(x) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}$$

alors

$$\begin{aligned}
 (F \cdot G)(x) &= F(x)G(x) \\
 &= \left(\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} \right) \\
 &= \sum_{n \geq 0} c_n \frac{x^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

Où $c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$ conformément au calcul du produit de deux séries.

La preuve du point **2.** se fait de la même façon que celui de **1.**

Quant à **3.** à savoir de prouver l'égalité

$$Z_{F \cdot G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Nous savons que

$$Z_{F \cdot G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n_1+2n_2+3n_3+\dots < \infty} \text{fix}(F \cdot G)[n] \frac{x^n}{\text{aut}(n)}$$

$\text{fix} F \cdot G[n] = |\text{Fix} F \cdot G[n]|$. Or $\text{Fix} F \cdot G[n] = \{s \in F \cdot G[U] \mid |U| = n, F \cdot G[\sigma](s) = s\} = \{s \in \sum_{U_1+U_2=U} F[U_1] \times G[U_2] \mid (F \cdot G)[\sigma](s) = s\}$, car

une structure d'espèce $F \cdot G$ sur U est une paire (s, t) telle que $s \in F[U_1]$, $t \in G[U_2]$, $U = U_1 + U_2$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \text{Fix}(F \cdot G)[n] &= \{(s, t) \in F[U_1] \times G[U_2] \mid U = U_1 + U_2 \mid F \cdot G[\sigma](s) = s\} \\
 &= \left\{ (s, t) \in F[U_1] \times G[U_2] \mid U = U_1 + U_2; \begin{cases} F[\sigma](s), & \text{sur } U_1; \\ G[\sigma](s), & \text{sur } U_2. \end{cases} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\implies |\text{Fix}(F \cdot G)[n]| = \sum_{\delta+\vartheta=n} \text{fix} F[\delta] \cdot \text{fix} G[\vartheta] \text{ où } |U_1| = \delta \text{ et } |U_2| = \vartheta.$$

U étant une réunion disjointe de deux ensembles, il va de soi que $\text{aut}(n) = \text{aut}(\delta) \cdot \text{aut}(\vartheta)$; et

$$\begin{aligned}
 Z_{F \cdot G}(x_1, x_2, x_3, \dots) &= \sum_{n_1+2n_2+3n_3+\dots < \infty} \text{fix}(F \cdot G)[n] \frac{x^n}{\text{aut}(n)} \\
 &= \sum_{n_1+2n_2+3n_3+\dots < \infty} \left(\sum_{\delta+\vartheta=n} \text{fix} F[\delta] \cdot \text{fix} G[\vartheta] \frac{x^{\delta+\vartheta}}{\text{aut}(\delta)\text{aut}(\vartheta)} \right)
 \end{aligned}$$

Si $[n = (n_1, n_2, \dots) \implies n = (\delta_1 + \vartheta_1, \delta_2 + \vartheta_2, \dots)]$ alors

$$\begin{aligned} Z_{F.G}(x_1, x_2, x_3, \dots) &= \sum_{(\delta_1 + \vartheta_1) + 2(\delta_2 + \vartheta_2) + \dots < \infty} \left(\text{fix}F[\delta] \cdot \text{fix}G[\vartheta] \frac{x^{\delta + \vartheta}}{\text{aut}(\delta) \cdot \text{aut}(\vartheta)} \right) \\ &= \left(\sum_{\delta_1 + 2\delta_2 + \dots < \infty} \text{fix}F[\delta] \frac{x^\delta}{\text{aut}(\delta)} \right) \left(\sum_{\vartheta_1 + 2\vartheta_2 + \dots < \infty} \text{fix}G[\vartheta] \frac{x^\vartheta}{\text{aut}(\vartheta)} \right) \\ &= Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) \cdot Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots) \end{aligned}$$

D'où le résultat **3.** ■

Remarque 0.8. Nous savons par ailleurs que $\mathcal{S} = \mathcal{E} \cdot \mathcal{D}er$ ainsi $\mathcal{S}(x) = \mathcal{E}(x) \cdot \mathcal{D}er(x) \implies \frac{1}{1-x} = \exp(x) \mathcal{D}er(x)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}er(x) &= \frac{\exp(-x)}{1-x} \\ &= \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} n! \frac{x^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)! \right) \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)! \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (-1)^k (n-k)! \\ &= n! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right). \end{aligned}$$

La formule classique $d_n = n! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$ est due à Dobinski donnant le nombre de dérangements sur un ensemble à n éléments.

Les nombres $\text{fix}\mathcal{D}er[n_1, n_2, \dots]$, sont les coefficients de la série indicatrice $Z_{\mathcal{D}er}$. Comme on le voit, la simple égalité combinatoire $\mathcal{S} = \mathcal{E} \cdot \mathcal{D}er$ contient une foule d'informations structurelles qui vont bien au delà du simple dénombrement des structures proprement dites.

Il est intéressant de remarquer que l'espèce $\underbrace{F + F + \cdots + F}_{n \text{ fois}}$ que nous avons dénotée nF est aussi le produit de l'espèce n par l'espèce F , c'est-à-dire

$$nF = n \cdot F.$$

Ceci justifie, une fois de plus, l'abus de notation qui consiste à identifier l'espèce n et l'entier n .

Soit \mathcal{P} , l'espèce des parties d'ensembles. On a l'égalité combinatoire

$$\mathcal{P} = \mathcal{E} \cdot \mathcal{E},$$

à partir de laquelle on trouve, par passage aux séries, les égalités

$$\mathcal{P}(x) = \exp x \cdot \exp x = \exp(2x), \quad \widetilde{\mathcal{P}}(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Pour la série indicatrice $Z_{\mathcal{P}}$, on obtient immédiatement

$$Z_{\mathcal{P}}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(\exp(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots) \right)^2.$$

D'où l'on tire l'expression

$$fix_{\mathcal{P}}[n_1, n_2, \dots] = 2^{n_1+n_2+\dots}$$

que l'on peut d'ailleurs obtenir par une argumentation combinatoire plus directe.

L'espèce \mathcal{P}_k des parties de cardinal k d'ensembles quelconques satisfait à l'égalité

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{E}_k \cdot \mathcal{E}$$

où \mathcal{E}_k est l'espèce des ensembles de cardinal k . Un simple passage aux séries associées fournit alors les égalités

$$1. \mathcal{P}_k(x) = \exp x \frac{x^k}{k!};$$

$$2. \widetilde{\mathcal{P}}_k(x) = \frac{x^k}{1-x};$$

$$3. Z_{\mathcal{P}_k}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \exp(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots) \sum_{n_1+n_2+n_3+\dots=k} \frac{x^n}{aut(n)}$$

où $n = (n_1, n_2, n_3, \dots)$ et $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$.

L'égalité $\mathcal{P}_k(x) = \exp x \frac{x^k}{k!}$ correspond à l'interpolation combinatoire bien connue des coefficients du binôme.

$$|\mathcal{P}_k[n]| = \binom{n}{k}.$$

Comme étant le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. De plus, la formule explicite pour les nombres $fix \mathcal{P}_k[n_1, n_2, \dots]$ constitue une généralisation de la notion de coefficient binomial. Bien entendu, on a aussi l'égalité combinatoire

$$\sum_{k \geq 0} \mathcal{P}_k = \mathcal{P} = \mathcal{E}^2$$

qui par passage aux séries génératrices, donne l'identité bien connue

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} = 2^n.$$

L'associativité de la multiplication des espèces de structures permet d'étendre cette opération à toute famille finie F_i d'espèces, $i = 1, 2, \dots, k$, en définissant le produit $F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_k$ par

$$(F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_k)[U] = \sum_{U_1 \uplus U_2 \uplus \dots \uplus U_k = U} F_1[U_1] \times F_2[U_2] \times \dots \times F_k[U_k].$$

Où la somme (disjointe) est étendue à toutes les familles $(U_i)_{1 \leq i \leq k}$ de parties de U deux à deux disjointes, pour la réunion est U . Les transports le long d'une bijection $\sigma : U \rightarrow V$ sont définis composante à composante de la façon suivante : pour $s_i \in F_i[U_i]$, $i = 1, \dots, k$, on pose

$$(F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_k)[\sigma]((s_i)_{1 \leq i \leq k}) = (F_i[\sigma_i](s_i))_{1 \leq i \leq k}.$$

Où $\sigma_i = \sigma|_{U_i}$ est la restriction de σ à U_i . On peut aussi définir le produit $\prod_{i \in I} F_i$ pour la famille infinie d'espèces $(F_i)_{i \in I}$ pourvu que cette dernière soit multipliable.

3.5.3. Substitution d'espèces de structures

Considérons une endofonction φ sur un ensemble U , comme la figure 16 suivante décrite par son graphe sagittal. On y distingue deux sortes de points (éléments de U) :

1. Les points récurrents, c'est-à-dire les $x \in U$ pour lesquels il existe $k \geq 0$ tel que $\varphi^k(x) = x$; ce sont les points situés sur les cycles.

2. Les points non récurrents, c'est-à-dire les $x \in U$ pour lesquels $\varphi^k(x) \neq x$

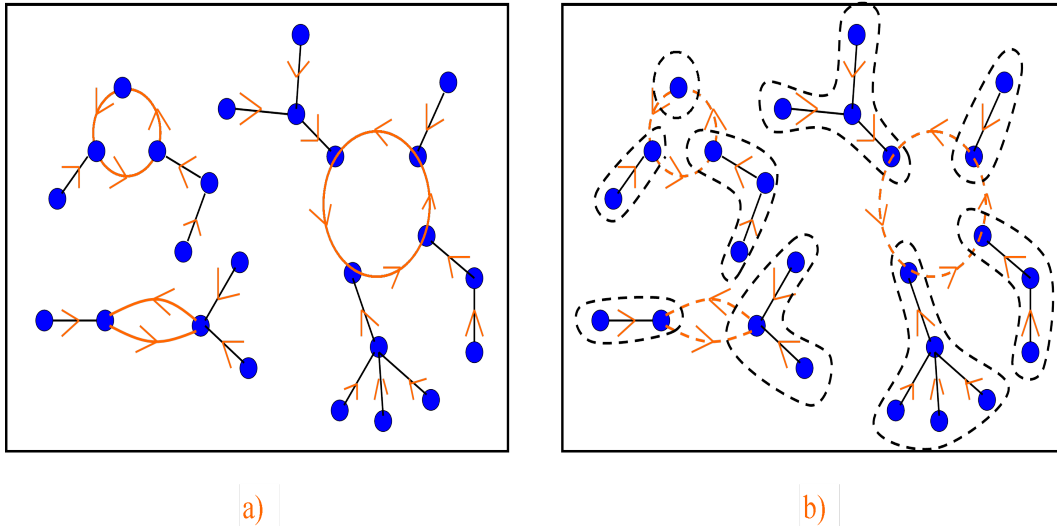


FIGURE 16 – Représentation typique d'une endofonction $\mathcal{E}nd$

La figure 16 montre comment l'endofonction φ peut être naturellement identifiée à une permutation d'arborescences disjointes. La naturalité provient du fait que nous n'avons pas eu à faire appel à la nature des points sous-jacents pour passer de la figure 16a) à la figure 16b). On peut évidemment effectuer une telle analyse à partir de n'importe quelle endofonction. On peut donc dire que toute $\mathcal{E}nd$ -structure s'identifie naturellement à une \mathcal{S} -structure placée sur un ensemble de \mathcal{A} -structures disjointes, où rappelons-le, $\mathcal{E}nd$ désigne l'espèce des endofonctions ; \mathcal{S} , l'espèce des permutations et \mathcal{A} l'espèce des arborescences. De façon plus concise, nous dirons que toute $\mathcal{E}nd$ -structure est une \mathcal{S} -assemblée de \mathcal{A} -structures.

Cette situation est résumée par l'équation combinatoire

$$\mathcal{E}nd = \mathcal{S} \circ \mathcal{A} \quad \text{ou encore} \quad \mathcal{E}nd = \mathcal{S}(\mathcal{A}).$$

Cette simple égalité exprime le fait que toute endofonction est essentiellement une permutation d'arborescences (disjointes). Il s'agit d'un exemple typique de substitution d'une espèce dans une autre.

Voici la définition générale de cette opération de substitution, également appelée la composition (partitionnelle) d'espèces.

Définition 0.14. Soit F et G , deux espèces de structures telles que $G[\emptyset] = \emptyset$ (c'est-à-dire il n'y a aucune G -structure sur l'ensemble vide) de G dans F , est définie comme suit : une $(F \circ G)$ -structure sur U est un couple $s = (\varphi, \gamma)$ où

1. φ est une F -structure sur l'ensemble des classes d'une partition arbitraire π de U ,
2. $\gamma = (\gamma_p)_{p \in \pi}$ où, pour chaque classe p de π , γ_p est une G -structure sur p .

En d'autres termes, pour tout ensemble fini U , on a

$$(F \circ G)[U] = \sum_{\pi \text{ partition de } U} F[\pi] \times \prod_{p \in \pi} G[p].$$

La somme (disjointe) étant prise sur l'ensemble des partitions π de U , c'est-à-dire $\pi \in \mathcal{Par}[U]$.

Le transport le long d'une bijection $\sigma : U \longrightarrow V$ s'effectue en posant, pour toute $(F \circ G)$ -structure $s = (\varphi, (\gamma_p)_{p \in \pi})$ sur U ,

$$(F \circ G)[\sigma](s) = (\bar{\varphi}, (\bar{\gamma}_{\bar{p}})_{\bar{p} \in \bar{\pi}}).$$

Où

- $\bar{\pi}$ est la partition de V obtenue par transport de π le long de σ ;
- pour chaque $\bar{p} = \sigma(p) \in \bar{\pi}$, la structure $\bar{\gamma}_{\bar{p}}$ est obtenue de la structure γ_p par G -transport le long de σ ;
- la structure $\bar{\varphi}$ est obtenue de la structure φ par F -transport le long de la bijection $\bar{\sigma}$ induite sur π par σ .

De façon plus imagée, une $(F \circ G)$ -structure est une F -assemblée de G -structures disjointes. Les figures 17 et 18 illustrent graphiquement ce concept. C'est une démonstration que $F \circ G$ ainsi définie est bien une espèce de structures (ie que les transports satisfont bien aux propriétés de fonctorialités). Dans le cas où l'espèce F est l'espèce des ensembles, on dit d'une $(\mathcal{E} \circ G)$ -structure que c'est une assemblée de G -structures.

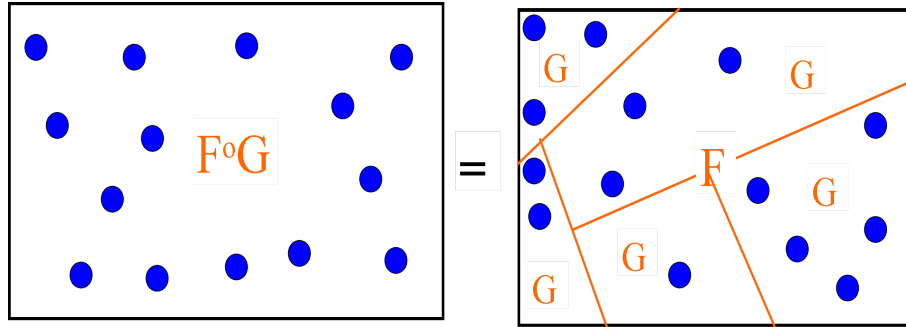


FIGURE 17 – Représentation de deux espèces substituées F et G par des points

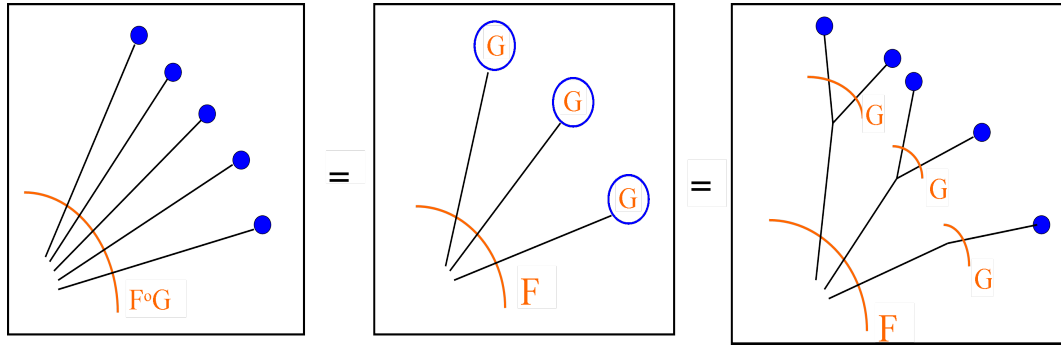


FIGURE 18 – Représentation de deux espèces substituées F et G

Le passage de $F \circ G$ aux séries génératrices et indicatrices est beaucoup plus délicat à analyser que dans le cas de la somme et du produit d'espèces. En effet, bien que la formule $(F \circ G)(x) = F(G(x))$ soit valable, on a, en général, le dénombrement des types

$$(\widetilde{F \circ G})(x) \neq \tilde{F}(\tilde{G}(x)).$$

C'est le cas de la série des types de l'espèce des permutations qui n'est pas obtenue comme composé de la série des types de l'espèce des ensembles avec celle des cycles (c'est-à-dire $\tilde{\mathcal{S}}(x) \neq \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{\mathcal{C}}(x))$) et donc l'opération de substitution n'est pas compatible avec le passage à la série des types.

C'est là une des raisons pour lesquelles il est nécessaire d'introduire les séries indicatrices comme le montre le résultat suivant, en guise de théorème.

Théorème 0.2. Soit F et G , deux espèces de structures et supposons que $G[\emptyset] = \emptyset$. Alors les séries associées à l'espèce $F \circ G$ satisfont aux égalités

1. $(F \circ G)(x) = F(G(x)),$

2. $\widetilde{(F \circ G)}(x) = Z_F(\tilde{G}(x), \tilde{G}(x^2), \tilde{G}(x^3), \dots),$

3. $Z_{F \circ G}(x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_F(Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots), Z_G(x_1, x_2, x_3, \dots), \dots).$

La série indicatrice donnée par la dernière formule est appelée la *substitution pléthystique* de Z_G dans Z_F et est notée $Z_F \circ Z_G$ (ou encore $Z_F(Z_G)$).

Preuve : La série ordinaire donnée par la première formule est esquissée de la manière suivante

$$\text{Notons } F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \text{ et } G(x) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} \text{ et } (F \circ G)(x) = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{x^n}{n!}.$$

L'égalité $(F \circ G)(x) = F(G(x))$ est équivalente à l'égalité

$$c_n = \sum_{0 \leq k \leq n; n_1 + \dots + n_k = n; n_1, \dots, n_k \geq 1} \frac{n!}{k! n_1! \dots n_k!} a_k b_{n_1} \dots b_{n_k}.$$

Le nombre de choix d'une partition de U en k parties $\{U_1, \dots, U_k\}$ de taille respective n_1, \dots, n_k est $\frac{1}{k!} \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$ ($n = |U|$). Le produit $a_k b_{n_1} \dots b_{n_k}$ est le nombre de choix de la G -structure et des F -structures définissant une $F \circ G$ -structure sur l'ensemble U . D'où le résultat **1**.

Par le théorème de spécialisation des variables 0.1

$$\widetilde{F(G)}(x) = Z_{F(G)}(x_1, x_2, \dots)_{|x_i := x^i} = Z_F((Z_G(x^1, x^2, \dots))_1, (Z_G(x^1, x^2, \dots))_2, \dots)$$

par anticipation à la substitution pléthystique. Or

$$\begin{aligned} (Z_G(x^1, x^2, \dots))_n &= Z_G(x^n, x^{2n}, \dots) \\ &= \tilde{G}(x^n). \end{aligned}$$

Donc

$$\widetilde{F(G)}(x) = Z_F(\tilde{G}(x), \tilde{G}(x^2), \tilde{G}(x^3), \dots).$$

D'où **2**.

Plusieurs approches sont possibles [25, 7, 28], nous conseillons au lecteur intéressé une version pondérée de la démonstration exposée par V. Strehl dans son cours de combinatoire [26, 27]. Celui-ci présente un raffinement de

l'analyse faite par A.Joyal dans son article d'introduction à la théorie [7], raffinement qui permet d'éviter le recours à un principe de prolongement des identités algébriques qui n'est pas clairement établi.

Nous n'allons donc pas faire une preuve de **3.**, mais plutôt souligner les grandes lignes.

A l'évidence, la compréhension de **3.** passe par une étude détaillée de $\widetilde{F(G)}$ -structures. Rappelons qu'une $\widetilde{F(G)}$ -structure sur un ensemble fini U est un couple $(h, \sigma) \in F(G)[U] \times \mathfrak{S}_U$ qui satisfait $\sigma \cdot h = h$. De façon plus explicite,

$$h = \left(U / \equiv, s, (l_C)_{C \in U / \equiv} \right).$$

Où

$$\begin{cases} \equiv \text{ est une relation d'équivalence sur } U, \\ s \in F[U / \equiv], \\ l_C \in G[C]. \end{cases}$$

Et la condition $\sigma \cdot h = h$ signifie que

1. σ et \equiv sont compatibles, donc σ est un automorphisme de \equiv ,
2. σ induit une permutation σ / \equiv de U / \equiv qui satisfait $\sigma / \equiv \cdot s = s$, donc $(s, \sigma / \equiv) \in \widetilde{F}[U / \equiv]$,
3. chaque classe $C \in U / \equiv$ est muni d'une permutation $\sigma_C \in \mathfrak{S}_C$, définie par $\sigma_C(a) = \sigma^k(a)$, où $k = \min\{j \geq 1 \mid \sigma^j(a) \in C\}$, qui satisfait $\sigma_C \cdot l_C = l_C$, donc $(l_C, \sigma_C) \in \widetilde{G}[C]$,
4. pour chaque $C \in U / \equiv$ le transport de structure le long de σ donne $\widetilde{G}[\sigma](l_C, \sigma_C) = (l_{\sigma_C}, \sigma_{\sigma_C})$

■

4. Conclusion

Rendu au terme de ce travail où il était question d'apporter des éclaircissements sur la notion classique qu'est une espèce de structures, notamment sur la symétrie de celles-ci et aussi des différentes séries associées à ces espèces. Il en résulte que le calcul des séries génératrices exponentielles, ordinaires et des séries indicatrices de cycles dont il est question dans ce mémoire requiert au préalable des connaissances bien entretenues sur le théorème de spécialisation des variables 0.1, sur l'énumération des types des espèces de structures,

sur les opérations de bases liées à ces espèces, sur la notion d'isomorphisme entre espèces car elle est compatible par passage aux séries génératrices, et surtout sur la notion de transport de structures dans une espèce. Par ailleurs, le calcul des séries nous a permis de mieux comprendre ce qui était sous le pan de voile levé par André Joyal dans [7, 13] (voir aussi [14, 15, 16]) sur la commutativité des espèces de structures.

Maintenant que ces trois sortes de séries ont été comprises, qu'advient-il de notre travail? Il serait, en guise d'attentes, souhaitable de passer par exemple à l'étude d'autres séries à l'instar de la série de types d'asymétrie \bar{F} , et de la série indicatrice d'asymétrie Γ_F d'une espèce F , en fait parler des séries asymétriques [18, 19] (voir aussi [20, 21, 22]).

Bibliographie

- [1] P. Cartier et D. Foata, *Problème combinatoires de commutation et de réarrangements*, Lecture Notes in Mathematics, 85, Springer-Verlag, 1969.
- [2] D. Foata, *la série génératrice exponentielle dans les problèmes d'énumération*, Université de Montréal, Canada, 1974.
- [3] E.A Bender et J.R Goldman, *Enumerative Uses of Generating Functions* Indiana University Mathematics Journal, 20, 1971, 753-765.
- [4] G.C.Rota, *On the Foundations of Combinatorial Theory* 1 : Theory of Möbius Functions, Z.Wahrsch. Verw. Gebiete, 2, 1964, 330-334.
- [5] P.Doubilet, G-C. Rota et R.P.Stanley, *The Idea of Generating Function*, dans : Finite Operator Calculus, éditeur : G-C.Rota, 83-134, Academic Press, 1975.
- [6] R.P.Stanley, *Binomial Posets, Möbius inversion, and Permutation Enumeration*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 20, 1976, 336-356.
- [7] A.Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Advances in Mathematics, 42, 1981, 1-82.
- [8] Bang Mbiang, *Utilisation des séries génératrices en combinatoire énumérative*, Mémoire de Master II, Université de Douala, 2012-2013.
- [9] D.E Knuth, *The Art of Computer Programming*, Addison-Wesley, 1981.
- [10] Harary, F. et E.Palmer, *Graphical Enumeration*, Academic Press, 1973.
- [11] Pólya, G. Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Mathematica 68, 1937, 145-254.
- [12] Pólya, G. et R.C.Read, *Combinatorial Enumeration of groups, graphs and chemical compounds*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [13] A. Joyal, *règle des signes en algèbre combinatoire*, Comptes Rendus Mathématiques de l'académie des sciences du Canada VII (1985) 285-290.
- [14] G. Labelle, *Some New Computational Methods in the Theory of species*, (in combinatoire énumérative), Proceedings (Montréal, Québec 1985)

- eds. G. Labelle and P. Leroux, *Lecture Notes in Mathematics* (Springer-Verlag, Berlin) No. 1234 (1986) 192-209.
- [15] J. Labelle, *Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures*, *Annales des sciences mathématiques du Québec* 7, no.1 (1983) 59-94.
 - [16] J. Labelle, *Quelques espèces sur les ensembles de petite cardinalité*, *Annales des sciences mathématiques du Québec* 9, no.1 (1985) 31-58.
 - [17] Y.N Yeh, *The Calculus of Virtual Species and K-species*, in *combinatoire énumérative*, *Proceedings* (Montréal, Québec 1985) eds. G. Labelle and P. Leroux, *Lecture Notes in Mathematics* (Springer-Verlag, Berlin) No. 124 (1986) 351-369.
 - [18] M. Ikollo NDOUMBE, *Espèces asymétriques et séries indicatrices d'asymétrie*, *Mémoire de Maîtrise*, Université du Québec à Montréal, 1992.
 - [19] F. Harary et R.Z Norman, *the Dissimilarity Characteristic of Husimi trees*, *Annals of Mathematics*, 58, 1953, 134-141.
 - [20] Yang, J.S (1991). *Symmetric functions, plethym and enumeration*, Ph.D Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.
 - [21] G. Labelle, *Sur la symétrie et l'asymétrie des structures combinatoires*, *Theoret. Comput. Sci* 117 (1993) 3-22.
 - [22] G. Labelle, *On asymmetric structures*, *Discrete Math.* 99 (1992) 141-164.
 - [23] H. Décoste, *Séries indicatrices d'espèces pondérés et q-analogues*, Ph.D. Thesis, Publ.no.2 LACIM Université de Montréal and UQAM, Québec, Canada, 1989.
 - [24] J.B. Levesque, *Sur la pondération en combinatoire énumérative*, *Mémoire de Maîtrise*, Université du Québec à Montréal, 1989.
 - [25] F.Bergeron, *Une combinatoire de pléthysme*, *J. of combin. Theory, Series A*, vol. 46, no.2, 1987, pp 291-305.
 - [26] V. Strehl, *Communication personnelle*, Notes de cours, 1986.
 - [27] V. Strehl, *Combinatorics of Jacobi-Configurations I : Complete oriented matchings*, *Combinatoire énumérative*, *Proceedings*, Montréal, Québec, 1985, G. Labelle et P.Leroux, ed. *Lecture Notes in Mathematics*, vol.1234, Springer-Verlag, 1986, pp 294-307.
 - [28] W.R. Unger, *Combinatorial species and Permutation Groups*, *Mémoire de Maîtrise*, Dept of Pure Math, University of Sydney, 1987.