



HAL
open science

Problèmes de contact frottant en grandes transformations: du continu au discret

Hachmi Ben Dhia, Isabelle Vautier, Malek Zarroug

► **To cite this version:**

Hachmi Ben Dhia, Isabelle Vautier, Malek Zarroug. Problèmes de contact frottant en grandes transformations: du continu au discret. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 2012, 9 (1-3), pp.243-261. 10.1080/12506559.2000.10511439 . hal-04672151

HAL Id: hal-04672151

<https://hal.science/hal-04672151v1>

Submitted on 22 Aug 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

Problèmes de contact frottant en grandes transformations : du continu au discret

Hachmi Ben Dhia * — Isabelle Vautier** — Malek Zarroug *

* *Ecole Centrale de Paris*

Laboratoire MSS-Mat CNRS UMR 8579, Grande Voie des Vignes

F- 92295 Chatenay, Malabry cedex

{bendhia,zarroug}@mss.ecp.fr

** *Electricité de France DER-MMN*

F- 92141 Clamart cedex

Isabelle.Vautier@edf.fr

RÉSUMÉ. On propose une formulation continue, faible et hybride pour le problème de contact frottant entre deux solides tridimensionnels, en grandes transformations. Les champs inconnus sont un champ de déplacement, un multiplicateur scalaire de contact et un semi-multiplicateur vectoriel d'adhérence. Cette formulation permet la dérivation "naturelle" d'éléments de contact.

ABSTRACT. We suggest a weak, continuous hybrid formulation for problems of frictional contact between three dimensional solids in large transformations. Unknown fields are the displacement, a scalar multiplier of contact and a semi-multiplier friction vector. This new formulation allows us a "natural" derivation of contact elements.

MOTS-CLÉS : contact, frottement, formulation hybride, éléments de contact.

KEYWORDS: contact, friction, hybrid formulation, contact elements.

1. Introduction

Les formulations continues des problèmes de mécanique du contact frottant, en grandes transformations, ont connu un regain d'intérêt significatif, ces dernières années [KLA 95], [SIM 92]. Au-delà de l'intérêt pratique des problèmes de contact, la raison majeure à cela réside dans le fait suivant [KLA 95] : il existe un " gap " important entre les formulations discrètes de ces problèmes et celles continues. Les implémentations dans des codes de calcul sont (souvent) fondées sur des modèles discrets tels ceux développés par [HAL 85], [SIM 85], [ALA 91] ou, plus récemment, [CHR 98]. Mais ces derniers sont sans liens clairs avec une modélisation continue. Or, l'établissement de tels liens est suffisamment important pour que l'on s'en préoccupe. Citons, par exemple, le rôle joué par les estimateurs-quantificateurs d'erreurs *a priori* et surtout *a posteriori* en calculs avancés des problèmes de la mécanique. Rajoutons également le fait que l'établissement d'un lien "naturel" (au sens de l'approximation numérique) entre une formulation continue, d'une part, et une discrète, d'autre part, permet souvent d'élaborer des stratégies de résolution pertinentes des problèmes associés à cette dernière.

L'objet essentiel de ce papier est celui qui vient d'être défini : une formulation hybride continue d'un problème de contact entre des solides 3-D, déformables, subissant des grandes transformations et ses discrétisations. Celle en espace donne lieu à des *éléments de contact*.

Plus précisément, en dehors de la présente section d'introduction, le papier comporte trois sections. La section 2, consacrée à la formulation hybride, continue, est partagée en six paragraphes. Dans le paragraphe 2.1, nous rappelons un formalisme lagrangien du principe des travaux virtuels pour deux solides déformables qui peuvent rentrer en contact. Grâce au principe de l'action et de la réaction et à une application d'appariement détaillés dans les paragraphes 2.3 et 2.2, respectivement, nous donnons une expression simplifiée des travaux virtuels des forces de contact. Le paragraphe 2.4 est consacré à des écritures équivalentes des lois de contact et de frottement qui se prêtent "naturellement" à des formulations faibles, sous formes d'équations variationnelles. La formulation hybride continue du problème est précisée dans le paragraphe 2.5. Une variante dont on souligne l'intérêt pratique, est proposée au paragraphe 2.6. Celle-ci utilise le cadre de modélisation Arlequin [BEN 98]. Afin de mieux dégager le problème à discrétiser, nous précisons la stratégie de résolution dans la section 3. Cette dernière est fondée sur des algorithmes de point fixe et de module tangent. Dans la section 4, nous discrétisons, par la méthode des éléments finis, la formulation hybride continue proposée au paragraphe 2.5 et nous discutons les difficultés dues à l'incompatibilité des modèles discrets d'interfaces. Des éléments de contact, dont un (original, à notre connaissance) dérive de la formulation avancée du paragraphe 2.6, sont donnés. Quelques conclusions clôturent ce papier.

2. Une formulation continue hybride du problème de contact

Nous nous intéressons à l'étude de deux solides B^i ($i = 1, 2$) déformables, supposés élastiques, en contact frottant. Ces deux solides occupent dans leur configuration initiale l'adhérence de deux domaines Ω^1 et Ω^2 de \mathbb{R}^3 et dans leur configuration courante (à l'instant t) l'adhérence de Ω_t^1 et Ω_t^2 , respectivement. Nous supposons que, dans leur configuration initiale, ces deux solides, sont dans un état naturel et sont non contactants (de sorte à s'affranchir des difficultés liées aux efforts résiduels). Au cours de leur mouvement, ils peuvent rentrer en contact, comme indiqué sur la figure 1.

Par ailleurs, nous supposons que les deux frontières $\partial\Omega_t^i$ sont aussi régulières que nécessaires. La frontière de chaque solide B^i est décomposée en Γ_0^i , Γ_g^i et Γ_c^i , dans sa configuration initiale, et en γ_0^i , γ_g^i et γ_c^i , déformées des précédentes, dans sa configuration courante. Le solide B^i est encasté sur Γ_0^i et soumis à une densité nominale de forces surfaciques notée \mathbf{g}^i sur la partie Γ_g^i . Par ailleurs, nous notons \mathbf{f}^i le champ de densité volumique d'efforts appliqué sur le solide B^i ($i = 1, 2$). Les parties des surfaces $\partial\Omega^i$, susceptibles de rentrer en contact lors de la déformation de deux solides, sont notées Γ_c^i . Nous supposons l'existence de cartes régulières notées Φ^i décrivant les surfaces Γ_c^i . Ces cartes sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi^i : \omega &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\xi_1, \xi_2) &\longrightarrow \Phi^i(\xi_1, \xi_2) \end{aligned} \quad [1]$$

où ω est le carré de référence unité, soit $\omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Par ailleurs, nous désignons par φ^i la transformation du solide B^i , définie par :

$$\begin{aligned} \varphi^i : \bar{\Omega}^i &\longrightarrow \bar{\Omega}_t^i \\ p^i &\longrightarrow x^i \end{aligned} \quad [2]$$

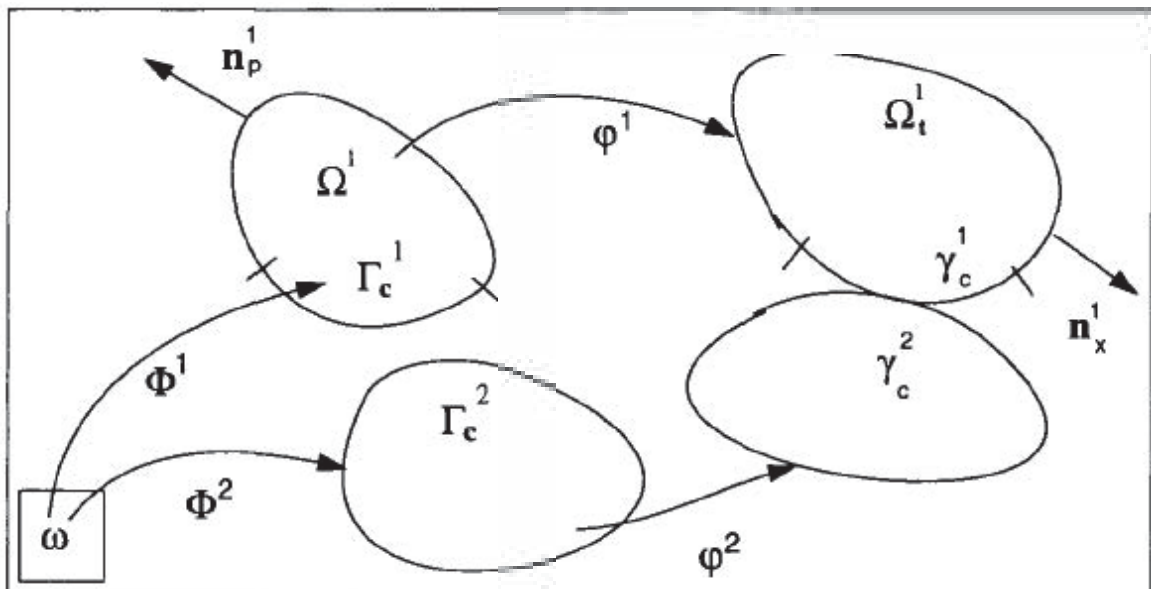


Figure 1. Description du problème mécanique

Nous notons \mathbf{n}_p^i la normale unitaire à Γ_c^i , extérieure à Ω^i et nous notons \mathbf{n}_x^i son vis-à-vis dans la configuration courante (cf. figure 1). Nous désignons par \mathbf{u}^i le champ de déplacements du solide B^i et par F^i le tenseur gradient de déformation, défini par :

$$F^i = \nabla_p \varphi^i(p^i, t) = \nabla_p \mathbf{u}^i + Id \quad [3]$$

REMARQUE. — Notons que l'hypothèse de la régularité des surfaces n'est pas vérifiée en pratique, du moins celle de l'approximation par la méthode des éléments finis. Chaque surface de contact est décrite par plusieurs cartes régulières. Mais l'ensemble est irrégulier. Aux points irréguliers nous n'avons plus une seule normale mais des cônes de normales. Ce fait formera l'un des écueils dans l'élaboration d'éléments de contact.

2.1. Principe des travaux virtuels

En utilisant les notations que nous venons d'introduire ainsi que des notations classiques, les équations locales d'équilibre, les conditions initiales et les conditions aux limites du problème considéré s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \text{Div } \Pi^i + \mathbf{f}^i &= \rho_p^i \frac{\partial^2 \mathbf{u}^i}{\partial t^2} && \text{dans } \Omega^i \\ \Pi^i \mathbf{n}_p^i &= \mathbf{g}^i && \text{sur } \Gamma_g^i \\ \mathbf{u}^i &= \mathbf{0} && \text{sur } \Gamma_0^i \\ \Pi^i \mathbf{n}_p^i &= \mathbf{r}^i && \text{sur } \Gamma_c^i \\ \mathbf{u}^i(p, 0) = \mathbf{u}_0^i(p) \text{ et } \partial_t \mathbf{u}^i(p, 0) = \mathbf{v}_0^i(p) &&& p.p \text{ dans } \Omega^i \end{aligned} \quad [4]$$

où Π^i désigne le premier tenseur des contraintes de Piola Kirchoff, ρ_p^i est la masse volumique sur la configuration initiale et \mathbf{r}^i est la densité des efforts dus aux interactions de contact frottant éventuelles entre les deux solides et qui est une inconnue du problème. En outre, sauf mention explicite contraire, l'exposant i prend, ici et dans toute la suite, la valeur 1 ou 2 et nous supposons, désormais, pour focaliser sur le problème de contact, que la densité des forces volumiques ainsi que celle des efforts surfaciques appliquées sur les deux solides sont nulles, i.e., $\mathbf{f}^i = \mathbf{0}$ et $\mathbf{g}^i = \mathbf{0}$.

Nous désignons par $(CA)^i$ l'espace des champs des déplacements admissibles pour le solide B^i . Ainsi, en multipliant la première équation de [4] par un déplacement virtuel \mathbf{w}^i , en intégrant sur tout le domaine Ω^i et en appliquant la formule de Green, nous obtenons le principe des travaux virtuels classique :

Pour tout $\mathbf{w}^i \in (CA)^i$,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega^i} \rho_p^i \frac{\partial^2 \mathbf{u}^i}{\partial t^2} \cdot \mathbf{w}^i d\Omega &= \int_{\Omega^i} \text{Tr}(F^i S^i (\nabla_p(\mathbf{w}^i))^T) d\Omega \\ &- \int_{\Gamma_c^i} \mathbf{r}^i(p, t) \cdot \mathbf{w}^i d\Gamma \end{aligned} \quad [5]$$

Dans [5], le point en gras (\cdot) représente le produit scalaire euclidien dans \mathbb{R}^3 et $(*)^T$ est la transposée de $(*)$. La trace d'un tenseur d'ordre 2 est notée Tr et S^i désigne le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, lié au premier par la relation suivante :

$$S^i = (F^i)^{-1} \Pi^i \quad [6]$$

Au *PTV*, il convient de rajouter les relations de comportement des matériaux constituants et les lois de contact. Sans restreindre la généralité de nos propos, concernant la mécanique de contact (objet du présent travail), nous pouvons supposer que les matériaux constituants les deux solides sont hyperélastiques, *i.e.*,

$$\Pi^i = \rho_p^i \frac{\partial W^i(F^i)}{\partial F^i} \quad [7]$$

où W^i est la densité massique d'énergie interne locale définie sur le solide B^i .

Avant de traiter les lois de contact et de frottement, nous établissons certains préliminaires géométriques et cinématiques.

2.2. Appariement et condition cinématique de non-interpénétration

Pour traduire mathématiquement l'hypothèse de non-interpénétration, en grandes transformations, l'approche la plus utilisée suit le schéma suivant :

- 1) coupler les points des deux surfaces de contact : c'est l'appariement,
- 2) imposer entre les deux points d'un couple de points appariés la non-pénétration suivant une direction donnée.

La première étape est classiquement modélisée en recherchant, pour tout point $x^1(t) = \varphi^1(p^1, t)$ de la frontière γ_c^1 , le point de γ_c^2 qui est le plus proche de lui. Ceci revient, plus précisément, à résoudre les problèmes d'optimisation, sous contraintes, suivants :

Pour tout $p^1 \in \Gamma_c^1$ (donc $p^1 = \Phi^1(\zeta)$, $\zeta \in \omega$) et tout $t \geq 0$,

trouver $\bar{\xi}(p^1, t) = \bar{\xi}(\zeta, t) = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \in \omega$ tel que :

$$\bar{\xi}(\zeta, t) = ArgMin \left\{ \frac{1}{2} (\| \varphi^1(\Phi^1(\zeta), t) - \varphi^2(\Phi^2(\xi), t) \|^2), \xi \in \omega \right\} [8]$$

La solution de ce problème permet formellement de définir, à tout instant t , une application d'appariement,

$$\begin{array}{lcl} A_t : & \omega & \longrightarrow \omega \\ & \zeta & \longrightarrow \bar{\xi}(\zeta, t) \end{array} \quad [9]$$

Nous supposons dans la suite que \mathcal{A}_t permet de définir de ω dans son image, un changement de variable. Cette application définit, également, le point $p^2(p^1, t) = \Phi^2(\bar{\xi}(p^1, t))$, noté désormais \bar{p}^1 , apparié à p^1 , à l'instant t . Elle définit aussi le point \bar{x}^1 , apparié au point x^1 .

La condition de non-interpénétration entre x^1 de γ_c^1 et \bar{x}^1 de γ_c^2 est écrite généralement dans la direction de $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_x^2(\bar{x}^1)$, la normale unitaire à γ_c^2 , en \bar{x}^1 , intérieure à Ω_x^2 , sous la forme :

$$d_n = (\mathbf{x}^1 - \bar{\mathbf{x}}^1) \cdot \mathbf{n} \leq 0 \quad [10]$$

Cette approche classique d'appariement n'a pas de "justification" physique. Toutefois, elle permet de résoudre (de manière itérative en pratique) la difficulté liée à l'écriture de la condition de non-interpénétration. Elle a l'avantage d'une certaine "universalité". Mais, elle force l'introduction d'une notion délicate de proximité [KLA 95]. De plus, en pratique, ce ne sont pas, en général, les problèmes de type [8] qui sont considérés mais plutôt ceux consistant à rechercher, implicitement, pour un point x^1 de γ_c^1 un candidat cible, \bar{x}^1 , sur γ_c^2 , dans la direction de la normale au point cible, ces derniers étant obtenus en "oubliant" que le problème [8] est contraint !

Cette observation nous a conduit [BEN 95b] à introduire une notion de direction de recherche admissible. Une de ces directions qui semble intéressante, en pratique, et qui redonne un certain aspect physique à l'appariement, est celle donnée par la vitesse normalisée \mathbf{V} (voir figure 2).

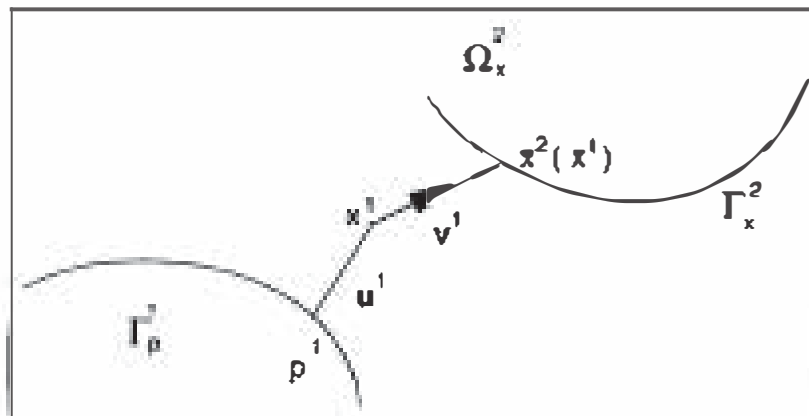


Figure 2. Appariement : recherche dans le sens du mouvement

Nous proposons cependant de continuer à imposer la non pénétration comme précédemment. L'influence, en pratique, du choix de la stratégie d'appariement sur la résolution des problèmes de contact est en cours d'étude numérique.

Nous rappelons que sous l'hypothèse des petites perturbations, l'appariement n'est fait qu'une seule fois. En grandes transformations, l'appariement dépend de la déformation et introduit la non-linéarité géométrique de contact qui sera discutée dans la stratégie de résolution.

En outre, bien que l'appariement semble introduire une dissymétrie de traitement entre les deux surfaces constituant l'interface de contact, l'approche reste "démocratique", en continu. La dissymétrie est en fait due à la discrétisation (par la méthode des éléments finis) et a inspiré à certains auteurs [HAL 85] le concept maître/esclave ou de surfaces géométrique/cinématique [BEN 99].

Notons enfin qu'avec l'approche classique d'appariement, un point de la surface de contact Γ_c^1 peut avoir plus qu'un vis-à-vis dans Γ_c^2 . Ce problème n'est plus posé dans l'approche par la vitesse. En outre, il nous semble important (en pratique) de considérer que le problème, défini par [8], est contraint.

2.3. Principe de l'action et de la réaction

Nous pouvons à présent, en utilisant la procédure d'appariement, décrite au paragraphe 2.2, écrire le Principe de l'Action et de la Réaction (PAR) sous la forme locale suivante :

$$\mathbf{r}^1(p^1, t) d\Gamma_c^1 + \mathbf{r}^2(\bar{p}^1, t) d\Gamma_c^2 = 0 \quad [11]$$

En sommant sur i , dans [5], et en tenant compte du PAR [11] et de l'hypothèse faite sur l'appariement, nous pouvons réécrire l'équilibre faible des efforts comme suit :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2) \in (CA)^1 \times (CA)^2 \\ \sum_{i=1}^2 - \int_{\Omega^i} \rho_p^i \frac{\partial^2 \mathbf{u}^i}{(\partial t)^2} \cdot \mathbf{w}^i d\Omega = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega^i} \text{Tr}(F^i S^i (\nabla_p(\mathbf{w}^i))^T) d\Omega \\ - \int_{\Gamma_c} \mathbf{r}(p, t) \cdot [[\mathbf{w}]] d\Gamma \end{aligned} \quad [12]$$

Dans [12], nous avons désigné par $[[*]]$ le "saut" du champ (*), considéré en deux points appariés. Plus précisément, nous avons :

$$[[*]](p^1) = (*)^1(p^1) - (*)^2(\bar{p}^1) \quad [13]$$

En outre, afin d'alléger les notations, nous avons posé $\Gamma_c = \Gamma_c^1$ et $\mathbf{r} = \mathbf{r}^1$. Signalons, enfin, que la densité \mathbf{r}^2 a été prolongée par zéro aux points de Γ_c^2 sans vis-à-vis sur Γ_c^1 .

Nous nous intéressons, désormais, au dernier terme du *PTV* pour lequel nous introduisons les lois de contact et de frottement.

REMARQUE. — Le Principe de l'Action et de la Réaction peut également être traité de manière faible comme dans [PAP 98].

2.4. Lois de contact

Pour distinguer le terme de contact unilatéral de celui de frottement, il est classique de décomposer la densité d'effort de contact \mathbf{r} , introduite dans [12], en une partie normale λ qui désigne la pression normale de contact et une autre tangentielle \mathbf{r}_τ . Ainsi l'effort de contact \mathbf{r} s'écrit :

$$\mathbf{r} = \lambda \mathbf{n} + \mathbf{r}_\tau \quad [14]$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire, définie dans le paragraphe 2.2.

Les lois classiques de contact unilatéral, à savoir celles de Signorini [SIG 33], s'écrivent sous la forme suivante :

$$\lambda \geq 0, \quad d_n \leq 0, \quad \lambda d_n = 0 \quad [15]$$

où d_n est la distance orientée, définie par [10]. Notons que ces inéquations locales, traduisent le caractère compressif de l'effort normal de contact, la non pénétration et l'exculsion, respectivement.

En introduisant la fonction indicatrice de \mathbb{R}^- , notée χ :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0 \\ 0, & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad [16]$$

et le multiplicateur (dit de contact augmenté [ALA 91]), noté g_n , défini par :

$$g_n = \lambda - \rho_n d_n \quad [17]$$

où ρ_n est un réel strictement positif, on sait que les lois de contact [15] admettent l'écriture équivalente qui suit :

$$\lambda - \chi(g_n)g_n = 0 \quad [18]$$

Cette écriture sous forme d'"équation" des lois locales de contact unilatéral se prête "naturellement" à une formulation faible.

Pour tenir compte des phénomènes de frottement, nous utilisons les lois isotropes de Coulomb qui s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{r}_\tau(p,t)\| \leq \mu |\lambda(p,t)| \\ & \text{Si } \|\mathbf{r}_\tau(p,t)\| < \mu |\lambda(p,t)| \quad \text{alors} \quad \mathbf{v}_\tau(p,t) = 0 \\ & \text{Si } \|\mathbf{r}_\tau(p,t)\| = \mu |\lambda(p,t)| \quad \text{alors } \exists \alpha \geq 0; \quad \mathbf{v}_\tau(p,t) = -\alpha \mathbf{r}_\tau(p,t) \end{aligned} \quad [19]$$

où μ est le coefficient de frottement de Coulomb et \mathbf{v}_τ est la vitesse relative tangente.

Nous définissons cette vitesse \mathbf{v}_τ , en un point donné de la surface de contact, par :

$$\mathbf{v}_\tau(p^1, t) = (\text{Id} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \left\{ \frac{\partial \varphi^1(p^1, t)}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^2(\bar{p}^1, t)}{\partial t} \right\} \quad [20]$$

REMARQUE. — Certains auteurs définissent une vitesse tangentielle relative, entre points appariés, même s'ils ne sont pas en contact (cf. *e.g.* [KLA 95]). Dans ce cas, l'expression [20] n'est pas objective (cf. [HE 93]), il faut la corriger par un terme tenant compte de la variation de la normale. Une telle précaution s'impose si la non-interpénétration n'est traitée que de manière approchée (par les méthodes de pénalisation, par exemple).

Telles qu'elles sont formulées, les lois [19] ne se prêtent pas directement à une formulation faible sous forme d'équation variationnelles. Pour cela, nous en donnons la formulation équivalente suivante [BEN 90] :

$$\mathbf{r}_\tau = \mu \lambda \Lambda \quad [21]$$

$$\Lambda - P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_\tau) = 0 \quad [22]$$

$$\mathbf{g}_\tau = \Lambda(p, t) + \rho_\tau \mathbf{v}_\tau(p, t) \quad [23]$$

Dans ces quantités, définies sur Γ_c , ρ_τ est un paramètre strictement positif et Λ est un semi-multiplicateur (vectoriel) de frottement. Par ailleurs, au même titre que g_n a été appelé multiplicateur de contact augmenté [ALA 91], on appellera \mathbf{g}_τ le semi-multiplicateur (vectoriel) de frottement augmenté. Nous avons noté aussi $P_{B(0,1)}$ la projection sur la boule unité.

Il est à noter que les lois de frottement doivent être complétées par l'équation (de type exclusion) suivante :

$$d_n \Lambda = 0 \quad [24]$$

Elle traduit le fait que l'effort tangentiel est nul en l'absence de contact effectif.

2.5. Formulation hybride quasi statique

Dans ce paragraphe, et dans toute la suite, nous adoptons l'hypothèse de quasi-staticité du mouvement. Nous négligeons donc les termes d'inertie. A une étape de chargement donnée (\mathbf{k}), correspondant à l'instant fictif t_k , nous supposons connus les champs à l'instant t_{k-1} , notés \mathbf{u}_{k-1}^i , λ_{k-1} et Λ_{k-1} , et nous cherchons les nouveaux champs à l'instant t_k .

En utilisant [12], [18] et [21]-[23], on peut montrer qu'une formulation faible, hybride (à trois champs) et quasi statique du problème de contact est la suivante :

Trouver $(\mathbf{u}_k^1, \mathbf{u}_k^2, \lambda_k, \Lambda_k) \in (CA)^1 \times (CA)^2 \times H \times \mathbf{H}$;

$\forall (\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \lambda, \Lambda^*) \in (CA)^1 \times (CA)^2 \times H \times \mathbf{H}$

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_p^i} \text{Tr}(F^i S^i (\nabla_p(\mathbf{w}^i))^T) d\Omega - \int_{\Gamma_c} \chi(g_{kn}) g_{kn} [[\mathbf{w}]]_n d\Gamma_c - \int_{\Gamma_c} \mu \chi(g_{kn}) \lambda_k P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_{k\tau}) \cdot [[\mathbf{w}]]_\tau d\Gamma = 0 \quad [25]$$

$$\int_{\Gamma_c} \frac{-1}{\rho_n} \left\{ \lambda^k - \chi(g_{kn}) g_{kn} \right\} \lambda^* d\gamma = 0 \quad [26]$$

$$\int_{\Gamma_p} \frac{-\mu \chi(g_{kn}) \lambda^k}{\underline{\rho}_\tau} \left\{ \Lambda^k - P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_{k\tau}) \right\} \cdot \Lambda^* d\gamma = 0, \quad [27]$$

$$g_{kn} = \lambda_k - \rho_n d_{kn} \quad [28]$$

$$\mathbf{g}_{k\tau} = \Lambda_k + \underline{\rho}_\tau (Id - \mathbf{n}_{k-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{n}_{k-\frac{1}{2}}) \Delta_k([\mathbf{x}_\alpha]) \quad [29]$$

où $\mathbf{n}_{k-\frac{1}{2}}$ est la normale unitaire moyennée entre t_k et t_{k-1} et $\Delta_k(*)$ est l'incrément de $(*)$, à l'instant t_k (cf. e.g. [ARM 98] et [ARM 99]). Notons que [26] et [27] sont les formulations faibles des lois de contact unilatéral et de frottement (incrémental) et qu'un schéma d'Euler a été utilisé pour discrétiser en temps le champ des vitesses.

Bien qu'ayant une certaine parenté avec les formulations lagrangiennes augmentées des problèmes de contact [ALA 91] (en discret), [SIM 92] (en continu), la formulation [25]-[29] nous semble originale. C'est celle que nous considérons dans la suite comme formulation de référence.

2.6. Formulation avancée

Nous proposons, dans ce paragraphe, une seconde formulation hybride continue, utilisant le cadre Arlequin [BEN 98]. L'intérêt de cette formulation (comparée à la précédente) est qu'elle se prête à des approximations symétriques et compatibles par la méthode des éléments finis, comme précisé dans la section 4.

Afin de clarifier, nous nous restreignons au cas de contact sans frottement.

Dans cette nouvelle formulation, nous dédoublons les champs sur l'interface de contact. Ainsi nous introduisons des nouveaux champs $(\mathbf{u}_f^1, \lambda_f)$ et \mathbf{u}_f^2 définis sur Γ_c^1 et Γ_c^2 , respectivement. Les travaux virtuels des forces de contact sont alors répartis entre λ et λ_f par une fonction de pondération donnée β ($0 \leq \beta \leq 1$). Les lois de contact couplant \mathbf{u}_f^1 , λ_f et \mathbf{u}_f^2 sont écrites comme dans [26] et les champs \mathbf{u}_f^1 et \mathbf{u}_f^2 sont faiblement liés à \mathbf{u}^1 et \mathbf{u}^2 , respectivement. En suivant la démarche de [BEN 98], nous donnons la nouvelle formulation hybride suivante :

$$\text{Trouver } (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{u}_f^1, \mathbf{u}_f^2, \lambda, \lambda_f) \in (CA)^1 \times (CA)^2 \times (CA)_{f_1}^1 \times (CA)_{f_2}^2 \times H \times H_f;$$

$$\forall (\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \mathbf{w}_f^1, \mathbf{w}_f^2, \lambda^*, \lambda_f^*) \in (CA)^1 \times (CA)^2 \times (CA)_{f_1}^1 \times (CA)_{f_2}^2 \times H \times H_f$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 G(\mathbf{u}^i, \mathbf{w}^i) - \int_{\Gamma_c} \beta \chi(g_n) g_n [[\mathbf{w}]]_n d\Gamma \\ & \quad - \int_{\Gamma_c} (1 - \beta) \chi(g_{fn}) g_{fn} [[\mathbf{w}_f]]_n d\Gamma \\ & \quad + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_c^i} \kappa (\mathbf{u}^i - P^i(\mathbf{u}_f^i)) (\mathbf{w}^i - P^i(\mathbf{w}_f^i)) d\Gamma = 0 \quad [30] \end{aligned}$$

$$- \int_{\Gamma_c} \frac{\beta}{\rho_n} \chi(g_n) (\lambda - \chi(g_n) g_n) \lambda^* = 0 \quad [31]$$

$$- \int_{\Gamma_c} \frac{(1 - \beta)}{\rho_{fn}} \chi(g_{fn}) (\lambda_f - \chi(g_{fn}) g_{fn}) \lambda_f^* = 0 \quad [32]$$

où :

$$G(\mathbf{u}^i, \mathbf{w}^i) = \int_{\Omega_p^i} \text{Tr}(F^i S^i (\nabla_p(\mathbf{w}^i))^T) d\Omega_p \quad [33]$$

$$g_n(p) = \lambda_k - \rho_n (\mathbf{x}^1(p) - \mathbf{x}^2(\bar{p})) \cdot \mathbf{n} \quad [34]$$

$$g_{fn}(p) = \lambda_k - \rho_{fn} (\mathbf{x}_f^1(p) - \mathbf{x}_f^2(\bar{p})) \cdot \mathbf{n} \quad [35]$$

$$\mathbf{x}_f^i = \mathbf{p}^i + \mathbf{u}_f^i \quad [36]$$

avec κ, ρ_{fn} deux réels strictement positifs et P^i l'opérateur de projection orthogonale (au sens du produit scalaire L^2) sur l'espace des traces de champs de $(CA)^i$ sur Γ_c . Cette formulation permet des choix compatibles des espaces de discrétisation des champs \mathbf{u}_f^1 et \mathbf{u}_f^2 . Nous notons qu'en choisissant $\beta = 0$, le problème revient à traiter le contact seulement avec les champs \mathbf{u}_f^1 et \mathbf{u}_f^2 et en choisissant $\beta = 1$, on recouvre la formulation [25]-[29] précédente. Cette formulation avec l'approximation des élé-

ments finis donne lieu à une nouvelle classe d'éléments de contact dont nous donnons un aperçu dans la section 4.

REMARQUE. — Comme précisé dans [BEN 98], l'opérateur P^i vaut l'identité dans le cadre continu. Mais il n'en est pas de même dans le cadre discret.

3. Stratégie de résolution

Le problème décrit par la formulation [25]-[29] est fortement non linéaire. En effet, outre la non-linéarité "classique" due au cadre des grandes déformations, nous distinguons plusieurs niveaux de non-linéarités non classiques inhérentes aux phénomènes de contact frottant qui sont:

– La non-linéarité due à la méconnaissance de la surface effective de contact. Nous résolvons cette non-linéarité par une stratégie itérative apparentée à la méthode des contraintes actives implémentée dans le *Code_Aster*¹ (cf. [DUM 95](cadre linéaire), [VAU 97] (cadre non linéaire)).

– La non-linéarité *géométrique* de contact qui est due à l'hypothèse des grandes transformations mentionnée au paragraphe 2.2. Nous résolvons cette non-linéarité par un algorithme de point fixe sur la géométrie.

– La non-linéarité liée au seuil de frottement, qui dépend du champ de densité de l'effort normal de contact λ , inconnu. Cette non-linéarité est également résolue par la méthode du point fixe.

Les autres non-linéarités sont traitées par un algorithme de type module tangent. Le schéma général de l'algorithme est donc le suivant :

I. Boucle sur les étapes de temps :

champs \mathbf{u} , λ et Λ connus à l'étape précédente

II. Boucle sur la géométrie :

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_d, \tau = \tau_d \text{ et } \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_d$$

III. Boucle sur la surface des contact avec la méthode des contraintes actives :

$$\chi = \chi_d$$

IV. Boucle sur les seuils pour le frottement :

$$\lambda = \lambda_s \text{ (seulement pour les termes de frottement)}$$

V. Boucle de module tangent :

VI. Fin de la boucle de module tangent

1. Code de calcul thermo-mécanique des structures par éléments finis développé par la Division R&D d'EDF [VAU 98]

VII. Fin de la boucle sur les seuils

VIII. Fin de la boucle de la méthode des contraintes actives

IX. Fin de la boucle sur la non-linéarité géométrique.

X. Fin de la boucle sur les étapes de temps

Le problème résolu par l'algorithme du module tangent est de type élasticité non linéaire avec un terme de frottement de Tresca. Il s'écrit:

$$\text{Trouver } (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \lambda, \Lambda) \in (CA)^1 \times (CA)^2 \times H \times \mathbf{H};$$

$$\forall (\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \lambda, \Lambda^*) \in (CA)^1 \times (CA)^2 \times H \times \mathbf{H}$$

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u}^1, \mathbf{w}^1) - \int_{\Gamma_c} \chi_d g_{n_d} (\mathbf{w}^1(\gamma))_{n_d} d\gamma \\ - \int_{\Gamma_c} \chi_d \mu \lambda_s P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_{\tau_d}) \cdot (\mathbf{w}^1(\gamma))_{\tau_d} d\gamma = 0 \end{aligned} \quad [37]$$

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u}^2, \mathbf{w}^2) + \int_{\Gamma_c} \chi_d g_{n_d} (\mathbf{w}^2(\mathcal{A}_d(\gamma)))_{n_d} d\gamma \\ + \int_{\Gamma_c} \chi_d \mu \lambda_s P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_{\tau_d}) \cdot (\mathbf{w}^2(\mathcal{A}_d(\gamma)))_{\tau_d} d\gamma = 0 \end{aligned} \quad [38]$$

$$\int_{\Gamma_c} \frac{-1}{\rho_n} (\lambda - \chi_d g_{n_d}) \lambda^* d\gamma = 0 \quad [39]$$

$$\int_{\Gamma_c} \frac{-\chi_d \mu \lambda_s}{\rho_\tau} \left(\Lambda + P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_{\tau_d}) \right) \cdot \Lambda^* d\gamma = 0 \quad [40]$$

où:

$$g_{n_d} = \lambda - \rho_n [[\mathbf{x}]]_{n_d} \quad [41]$$

$$\mathbf{g}_{\tau_d} = \Lambda + \rho_\tau \Delta [[\mathbf{u}]]_{\tau_d} \quad [42]$$

Notons que nous avons omis de préciser la référence au temps " t_k " pour alléger l'écriture.

4. Eléments de contact

Nous discutons dans cette section la discrétisation spatiale de la formulation continue hybride [37]-[42] par la méthode des éléments finis et nous proposons une nouvelle classe d'éléments de contact. Pour alléger les calculs, nous ne détaillons que les termes matriciels de contact.

Nous approchons les domaines Ω^i par des domaines Ω_h^i polygonaux et donc les surfaces de contact Γ_c par Γ_{c_h} . La frontière Γ_{c_h} est composée de N_c éléments :

$$\Gamma_{c_h} = \bigcup_{j=1}^{N_c} e_j$$

Cette frontière est, en général, irrégulière, décrite par un ensemble de cartes régulières, comme mentionné précédemment. En outre, elle forme une approximation de Γ_c . Cette approximation introduit une erreur de consistance qui joue un rôle important, en pratique [BEN 95a]. Cette question n'est pas abordée ici.

Par ailleurs, nous introduisons, de manière classique, les espaces approchés suivants :

– $(CA)_h^i$: espace approché de $(CA)^i$ de dimension m_i . Nous désignons par $\mathbf{w}^{i,j}$ pour $j = 1, m_i$, les fonctions de base. Ainsi le champ approché des déplacements, noté \mathbf{u}_h^i , s'écrit comme suit :

$$\mathbf{u}_h^i = \sum_{j=1}^{m_i} u_j^i \mathbf{w}^{i,j} \quad [43]$$

où u_j^i sont les composantes du vecteur des déplacements sur la base.

– H_h : espace approché de H de dimension N_c . Nous notons ψ^j les fonctions de base. Ainsi, la densité d'effort normal de contact approchée, notée λ_h , se décompose sous la forme suivante :

$$\lambda_h = \sum_{j=1}^{N_c} \lambda_j \psi^j \quad [44]$$

les λ_j étant les composantes de λ_h sur la base.

– \mathbf{H}_h : espace approché de \mathbf{H} , de dimension N_m . Nous notons Ψ^j les fonctions de base. Ainsi le semi-multiplicateur de frottement approché Λ_h , s'écrit :

$$\Lambda_h = \sum_{j=1}^{N_m} \Lambda_j \Psi^j \quad [45]$$

les Λ_j sont les composantes de Λ_h sur la base.

La discrétisation du problème, défini par les équations [37]-[42], donne le système non linéaire suivant :

Trouver \mathbf{u}_h^1 , \mathbf{u}_h^2 , λ_h et Λ_h ;

pour tout $1 \leq j \leq m_1$, $1 \leq k \leq m_2$, $1 \leq l \leq N_c$ et $1 \leq m \leq N_m$:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u}_h^1, \mathbf{w}^{1,j}) - \int_{\Gamma_{c_h}} \chi_d g_{n_d} (\mathbf{w}^{1,j}(\cdot, \gamma))_{n_d} d\gamma \\ - \int_{\Gamma_{c_h}} \chi_d \mu \lambda_s P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_{\tau_d}) \cdot (\mathbf{w}^{1,j}(\cdot, \gamma))_{\tau_d} d\gamma = 0 \end{aligned} \quad [46]$$

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u}_h^2, \mathbf{w}^{2,k}) + \int_{\Gamma_{c_h}} \chi_d g_{n_d} (\mathbf{w}^{2,k}(\mathcal{A}_d(\cdot, \gamma)))_{n_d} d\gamma \\ + \int_{\Gamma_{c_h}} \chi_d \mu \lambda_s P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_{\tau_d}) \cdot (\mathbf{w}^{2,k}(\mathcal{A}_d(\cdot, \gamma)))_{\tau_d} d\gamma = 0 \end{aligned} \quad [47]$$

$$\int_{\Gamma_{c_h}} \frac{-1}{\rho_n} (\lambda_h - \chi_d g_{n_d}) \psi^l d\gamma = 0 \quad [48]$$

$$\int_{\Gamma_{c_h}} \frac{-\chi_d \mu \lambda_s}{\underline{\rho}_\tau} \left(\Lambda_h - P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_{\tau_d}) \right) \cdot \Psi^m d\gamma = 0 \quad [49]$$

où :

$$g_{n_d} = \lambda - \rho_n [[\mathbf{x}_h]]_{n_d} \quad [50]$$

$$\mathbf{g}_{\tau_d} = \Lambda + \underline{\rho}_\tau \Delta [[\mathbf{u}_h]]_{\tau_d} \quad [51]$$

L'utilisation de l'algorithme classique du module tangent pour la résolution du problème non linéaire ci-dessus donne lieu, à chaque itération $n + 1$, à la résolution du système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} K^n + A_u + B_u^n & A^T & (B^n)^T \\ A & C & 0 \\ B^n & 0 & F^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_h^{n+1} \\ \lambda_h^{n+1} \\ \Lambda_h^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^n \\ L_2^n \\ L_3^n \end{pmatrix} \quad [52]$$

où K^n désigne la matrice de rigidité tangente classique des deux solides à l'état n . Les quantités U_h^{n+1} , λ_h^{n+1} et Λ_h^{n+1} correspondent aux vecteurs composantes des champs des déplacements approchés, du champ de densité d'effort normal approché et du champ semi-multiplicateur de frottement approché à l'itération $n + 1$. Par ailleurs, nous avons noté $[A]$, $[A_u]$ et $[C]$ les matrices assemblées de contact et $[B^n]$, $[B_u^n]$ et

$[F^n]$ les matrices assemblées de frottement. Les seconds membres du système [52], notés L_1^n , L_2^n et L_3^n sont calculés de manière classique.

A titre d'illustration, les matrices élémentaires de contact unilatéral sont données ci-dessous : (où, pour la clarté, nous avons renuméroté les fonctions de bases des espaces $(CA)_h^1$ et $(CA)_h^2$ de 1 à $m_1 + m_2$ et nous les avons notés \mathbf{w}^i).

Pour $i = 1, N_c, 1 \leq j \leq m_1$ et $m_1 < k \leq m_1 + m_2$

$$\begin{cases} (A^e)_{i,j} &= \int_e \chi_d \psi^i(\gamma) (\mathbf{w}^j(\gamma))_{n_d} d\gamma \\ (A^e)_{i,k} &= - \int_e \chi_d \psi^i(\gamma) (\mathbf{w}^k(\mathcal{A}_d^e(\gamma)))_{n_d} d\gamma \end{cases} \quad [53]$$

où l'exposant e , rajouté à l'application d'appariement \mathcal{A}_d , renvoie au fait qu'en discret, on travaille avec plusieurs cartes et que l'appariement doit en tenir compte. La matrice élémentaire de contact $[A_u^e]$ de type "pénalisation", s'écrit, pour $1 < i, j \leq m_1 + m_2$, comme suit :

$$(A_u^e)_{i,j} = \int_e \chi_d ([[\mathbf{w}^i(\gamma)]])_{n_d} ([[\mathbf{w}^j(\gamma)]])_{n_d} d\gamma \quad [54]$$

avec la convention suivante :

$$[[\mathbf{w}^i(\gamma)]])_{n_d} = \begin{cases} \mathbf{w}^i(\gamma) \cdot \mathbf{n}_d & \text{si } 1 \leq i \leq m_1 \\ -\mathbf{w}^i(\mathcal{A}_d^e(\gamma)) \cdot \mathbf{n}_d & \text{si } m_1 < i \leq m_1 + m_2 \end{cases}$$

La matrice élémentaire de contact, notée C^e , s'écrit :

$$(C^e)_{i,j} = \int_e \chi_d \psi^i(\gamma) \psi^j(\gamma) d\gamma \quad 1 \leq i, j \leq N_c \quad [55]$$

Le calcul des matrices de frottement est plus technique. Il n'est pas développé ici.

Le calcul effectif des solutions des systèmes [46]-[51] nécessite :

- la définition des fonctions de base \mathbf{w}^i , ψ^i et Ψ^i .
- la formule d'intégration numérique utilisée pour les termes de contact.

Un choix de telles fonctions de bases et d'une formule d'intégration numérique (joint à la formulation globale du problème de contact) définit un *élément de contact*. Toutefois, ce choix n'est pas évident *a priori*. En effet, la formulation étant de type mixte, il convient de faire attention à des considérations de compatibilité (condition Inf-Sup de Babuska-Brezzi).

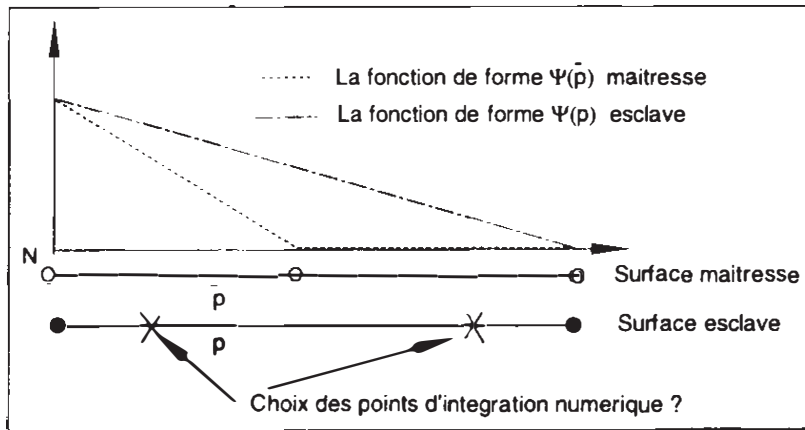


Figure 3. *Problème d'intégration numérique sur les surfaces de contact*

Par ailleurs, même en utilisant des fonctions de base linéaires, le calcul des termes des matrices ci-dessus, et de celles dérivées des termes de frottement n'est pas possible pratiquement. Les quantités que nous aurions à intégrer sont, de par l'appariement, la fonction indicatrice et la projection, non régulières (cf. figure 3). On peut toutefois en donner une "approximation" par des méthodes d'intégration numérique. Observons alors que plusieurs types de formules d'intégration numérique peuvent être utilisées (points de Gauss, etc.). Une technique classique consiste à intégrer aux sommets et donne lieu à des éléments de contact basiques.

La formulation avancée, définie au paragraphe 2.6, permet d'élaborer des concepts nouveaux d'éléments de contact. En effet, le dédoublement des champs d'interface permet de les approcher différemment (par la méthode des éléments finis). Un choix judicieux consiste à approcher \mathbf{u}_f^i par \mathbf{u}_{fh}^i de sorte que \mathbf{u}_{fh}^1 et \mathbf{u}_f^2 soient compatibles et que l'espace de discrétisation $(CA)_{fh}^i$ soit plus fin que celui des traces de $(CA)_h^i$ sur Γ_c^i . Nous qualifions ces champs de champs accommodants d'interface (cf. figure 4). Ces champs discrets \mathbf{u}_{fh}^i sont alors couplés aux champs \mathbf{u}_h^i par le biais de l'opérateur P^i défini dans le paragraphe 2.6.

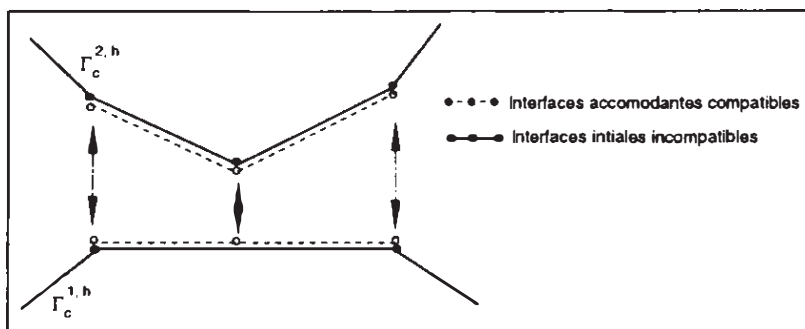


Figure 4. *Interfaces accommodantes de contact*

Nous détaillerons ultérieurement cette démarche qui nous semble prometteuse.

5. Conclusion et perspectives

Après avoir discuté des techniques classiques telle que l'appariement en mécanique des contacts, nous avons proposé une formulation hybride continue, originale. Cette formulation donne le cadre théorique pour l'élaboration d'éléments de contact. Nous avons, au passage, souligné les difficultés numériques multiples liées à cette élaboration (choix d'espaces compatibles, formules d'intégration numérique). Après avoir mentionné quelques éléments basiques (dont la pertinence reste à vérifier), nous avons brièvement exploité le cadre Arlequin pour introduire un nouveau concept d'éléments de contact. Notre objectif, à court terme, est la validation numérique de notre démarche. Ceci est en cours de réalisation dans le *Code_Aster*.

Remerciements

Ce travail a été élaboré dans le cadre d'un contrat de collaboration avec le département Mécanique et Modèles Numériques de la Division R&D d'EDF.

6. Bibliographie

- [ALA 91] ALART P., A. CURNIER, « A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods », *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 9, 1991, p. 353-375.
- [ARM 98] ARMERO F., PETÖCZ E., « Formulation and analysis of conserving algorithms for dynamic contact/impact problems. », *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 158, 1998, p. 269-300.
- [ARM 99] ARMERO F., PETÖCZ E., « A new dissipative time-stepping algorithm for frictional contact problems : formulation and analysis. », *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 179, 1999, p. 151-178.
- [BEN 90] BEN DHIA H., « Modelling and numerical approach of contact and dry friction in simulation of sheet metal forming », *WCCM2*, 1990, p. 779-782.
- [BEN 95a] BEN DHIA. H., *Numerical analysis of perturbed contact problems in Contact Mechanics*, edited by M. Raous et al., Plenum Press, New York, 1995.
- [BEN 95b] BEN DHIA H., DURVILLE D. , « Calembour: An implicit method based on enriched kinematical thin plate model for sheet metal forming simulation », *J. of Materials Processing Technology*, vol. 50, 1995, p. 70-80.
- [BEN 98] BEN DHIA H., « Problèmes multi-échelles : la méthode Arlequin », *C.R.Acad.Sc Série II*, vol. 326, 1998, p. 899-904.
- [BEN 99] BEN DHIA. H., VAUTIER I., *Une formulation pour traiter le contact frottement en 3D dans le Code_Aster*, Rapport EDF HI-75/99/007/A, 1999.
- [CHR 98] CHRISTENSEN P.W, KLARBRING A., PANG J.S., STRÖMBERG, « Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems », *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, vol. 42, 1998, p. 145-173.
- [DUM 95] DUMONT G., « Algorithme de contraintes actives et contact unilatéral sans frottement », *Revue européenne des éléments finis*, vol. 4, n° 1, 1995, p. 55-73.

- [HAL 85] HALLQUIST J.O., GOUDREAU G.L., BENSON D.J., « Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations. », *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 51, 1985, p. 107-137.
- [HE 93] HE Q.C., CURNIER A., « Anisotropic dry friction between two orthotropic surfaces undergoing large displacement. », *Eur.J.Mech., A/Solids*, vol. 12, n° 5, 1993, p. 631-666.
- [KLA 95] KLARBRING A., « Large displacement frictional contact : a continuum framework for finite element discretization », *Eur.J.Mech., A/Solids*, vol. 14, n° 2, 1995, p. 237-253.
- [PAP 98] PAPADOPOULOS.P, SOLBERG. J.M, « A Lagrange Multiplier Method for the Finite Element Solution of Frictionless Contact Problems », *Mathl.Comput. Modelling*, vol. 28, n° 4-8, 1998, p. 373-384.
- [SIG 33] SIGNORINI A. , « Sopra alcune questioni di elastostatica », *Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze*, , 1933.
- [SIM 85] SIMO J.C., WRIGGERS P., TAYLOR R.L., « A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems », *Comp. Meth. Appl. Mech. Engr.*, vol. 50, 1985.
- [SIM 92] SIMO J.C., LAURSEN T.A., « An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction », *Comp.& Struct*, vol. 42, 1992, p. 97-116.
- [VAU 97] VAUTIER I., *Contact unilatéral par des conditions cinématiques*, Rapport EDF, HI-75/97/033/A, 1997.
- [VAU 98] VAUTIER I., *Plaquette de la Version 4 du Code_Aster*, Rapport EDF, HI-75/98/020, 1998.