



HAL
open science

REGARDS CROISES SUR QUELQUES ENJEUX DIDACTIQUES DE L'ENSEIGNEMENT DE LA SYMETRIE ORTHOGONALE A LA TRANSITION ECOLE-COLLEGE

Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Aurélie Chesnais, Viviane Durand-Guerrier

► **To cite this version:**

Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Aurélie Chesnais, Viviane Durand-Guerrier. REGARDS CROISES SUR QUELQUES ENJEUX DIDACTIQUES DE L'ENSEIGNEMENT DE LA SYMETRIE ORTHOGONALE A LA TRANSITION ECOLE-COLLEGE. Coppé Sylvie; Roditi Eric; Sabra Hussein; Kiwan-Zacka Michella; Celi Valentina; Chellougui Faïza; Tempier Frédérick; Allard Cécile; Corriveau Claudia; Haspekian Mariam; Masselot Pascale; Rousse Sophie. Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques, 2, La Pensée sauvage, pp.261-282, 2019, 9782859193355. hal-04671327

HAL Id: hal-04671327

<https://hal.science/hal-04671327v1>

Submitted on 14 Aug 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

REGARDS CROISES SUR QUELQUES ENJEUX DIDACTIQUES DE L'ENSEIGNEMENT DE LA SYMETRIE ORTHOGONALE A LA TRANSITION ECOLE-COLLEGE

Aurélie Chesnais*, Viviane Durand-Guerrier**, Marie-Jeanne Perrin-Glorian***

RESUME 10 LIGNES MAX

Nous revisitons ici le thème de la symétrie orthogonale à partir de plusieurs points de vue. L'enseignement de la symétrie orthogonale, à l'école primaire comme en 6ème, prend appui sur des manipulations d'objets matériels, pliage ou retournement d'un calque. Comment traiter dans l'enseignement les relations entre le milieu matériel des tracés avec des instruments, les actions physiques sur ces tracés et les concepts géométriques ? Comment cela peut-il se traduire dans le langage et dans les gestes des enseignants et des élèves ? Nous nous intéressons plus particulièrement à deux aspects : nous cherchons d'une part les possibles continuités entre une géométrie physique où les propriétés des figures sont produites et vérifiées à l'aide d'instruments outillant la perception et une géométrie théorique axiomatique où les propriétés des figures sont produites et validées par des énoncés alors que les mêmes mots et les mêmes énoncés peuvent relever soit de la géométrie physique soit de la géométrie axiomatique (Perrin-Glorian & Godin, à paraître) ; nous examinons d'autre part les enjeux de la prise en compte de la nature des relations logiques et des variations de significations dans la classe dans différents contextes éducatifs, en approfondissant le travail initié notamment dans Barrier et al. (2014).

Mots clefs : symétrie orthogonale (axiale) ; instruments de géométrie ; analyse logique ; complexité langagière ; vision des figures ; pratiques enseignantes.

ABSTRACT 10 LIGNES MAX

We revisit here the theme of orthogonal symmetry from several points of view. The teaching of orthogonal symmetry, in primary school as in 6th grade, is based on manipulations of material objects, folding or inversion of a tracing paper. How to deal at school with the relations between the material *milieu* of the drawings with instruments, the physical actions on these drawings and the geometrical concepts? How can this be seen into the language and gestures of teachers and students? We are particularly interested in two aspects: on the one hand, we are looking for possible continuities between a physical geometry where the properties of the figures are produced and verified using instruments that support perception and a theoretical axiomatic geometry where the properties of figures are produced and validated by statements while the same words and utterances can be related to either physical geometry or axiomatic geometry (Perrin-Glorian & Godin, to appear); on the other hand, we examine the issues related to taking into account the nature of logical relationships and variations of meanings in the classroom in different educational contexts, by deepening the work initiated in Barrier et al. (2014).

Key words: orthogonal symmetry; geometrical instruments; logical analysis; language complexity; perception of figures; teaching practices.

INTRODUCTION

Le présent texte ne se veut pas un compte-rendu des séances de travaux dirigés qui se sont déroulées dans une alternance entre phases d'apports d'information, de travail des participants sur des extraits de corpus de données et de discussion. Nous avons cherché à rendre compte du contenu présenté et travaillé dans les trois séances.

Notre intérêt pour la symétrie orthogonale s'inscrit dans une continuité de travaux menés par chacune des auteures, mais aussi une continuité de travaux menés dans la communauté de didactique des mathématiques française depuis plusieurs décennies, qui ont montré que ce thème mathématique permet d'aborder de nombreuses questions (pour une synthèse, voir

* LIRDEF, Université de Montpellier.

** IMAG UMR-CNRS-UM 5149, Université de Montpellier.

*** LDAR (EA4434), UA, UCP, UPD, UPEC, URN, Université d'Artois, Arras, France.

Artigue et *al.* (à paraître), section 2). En particulier, la symétrie orthogonale apparaît comme un exemple paradigmatique pour le travail sur les relations entre logique et langage, dans l'apprentissage des mathématiques (Vergnaud, 1991a).

En particulier, les questions que nous abordons plus particulièrement concernent la continuité de l'enseignement de la géométrie de l'école au collège, notamment les relations entre actions avec des instruments sur les figures matérielles¹ et concepts géométriques, les pratiques enseignantes au début du secondaire et le rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Pour aborder ces questions, nous avons choisi de nous centrer plus particulièrement sur les enjeux d'apprentissage liés aux aspects logiques du concept de symétrie, c'est-à-dire schématiquement le fait qu'il renvoie à la fois à une propriété d'un objet, une relation et une transformation géométrique, comme nous le détaillons dans la première partie du texte.

Ce texte est ainsi également l'occasion de discuter les apports de l'analyse logique du langage pour l'analyse de séances de classes (Durand-Guerrier, 2013 ; Barrier et *al.*, 2014). Le choix de se placer à la transition école-collège correspond au fait qu'il nous semble que, précisément en ce qui concerne les aspects logiques du concept, se pose une question à cette transition car en sixième (grade 6, début de l'enseignement secondaire), la caractérisation de ces enjeux logiques se pose de façon plus fine qu'au cours moyen (grades 4 et 5), où bien que certains aspects soient rencontrés, ceux-ci ne sont pas explicités. De plus, à la transition école-collège, se pose aussi de façon cruciale la question du lien entre les actions sur les figures matérielles tracées avec des instruments (y compris le papier calque dans le cas de la symétrie) et les énoncés à propos des objets géométriques que ces figures matérielles représentent.

L'ensemble des apports des trois séances de TD s'est appuyé sur une même situation d'enseignement, issue du travail du groupe IREM² Didactique de Montpellier (Chesnaï et *al.*, 2014). Dans les deux premières parties, nous abordons les enjeux d'apprentissage liés aux aspects logiques du concept ainsi que le lien entre les concepts géométriques et l'utilisation des instruments, en particulier l'usage du papier calque dans cette situation. La troisième partie présente une analyse de séances de classe portant sur la même situation, afin de questionner la prise en charge des aspects logiques de la symétrie orthogonale dans l'enseignement en sixième, essentiellement du point de vue langagier (verbal).

ANALYSE LOGIQUE ET COMPLEXITE LANGAGIERE

Dans cette partie, nous proposons des éléments d'analyse logique du concept de symétrie ainsi que les actions et formulations associées.

1. Préliminaire

Les participants ont travaillé sur les figures de l'activité proposée aux élèves (annexe 1). Lorsqu'il leur a été demandé de produire des réponses possibles d'élèves de sixième à la consigne, voici quelques-unes des réponses envisagées :

1. La figure (double) se superpose avec sa retournée
2. Les deux figures se superposent après retournement
3. Les deux figures se superposent après pliage le long d'un axe

¹ Nous entendons par figures matérielles des tracés sur papier ou écran d'ordinateur avec des artefacts matériels ou numériques. Suivant les connaissances de celui qui les produit ou les utilise, les figures matérielles peuvent être interprétées ou non comme des représentations de figures géométriques théoriques. Dans la littérature, on trouve plus souvent le terme de « dessin » que celui de « figure matérielle ».

² IREM : Institut de recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. C'est un lieu de collaboration entre chercheurs et enseignants, avec des objectifs corrélés de recherche et de formation continue.

4. Elles sont symétriques
5. Elles se superposent quand on retourne le calque
6. Elles viennent l'une sur l'autre, elles sont à l'envers
7. Il y a une symétrie

Dans la réponse 1, il s'agit de la définition de *la propriété* « être symétrique » pour une figure donnée. Dans la réponse 3, on a affaire à *une relation ternaire* dont les arguments sont deux figures et un axe de symétrie. Dans les réponses 2, 5 et 6, on a affaire à *une relation binaire*, dont les arguments sont deux figures, ce qui peut se formaliser par l'énoncé « Il existe un axe tel que les deux figures soient symétriques l'une de l'autre par rapport à cet axe ». Nous présentons plus loin au paragraphe 3 une modélisation plus formelle des différents types de relations en jeu.

Dans la réponse 4, il y a une ambiguïté : est-ce que l'auteur veut dire que chacune des deux figures prises séparément est une figure symétrique (au sens de 1.), ou veut-il dire que ces figures sont symétriques l'une de l'autre (au sens de 2., 4. ou 5.) ? Dans la réponse 7, on voit un phénomène de nominalisation dans la mesure où ici « symétrie » est le nom de la relation ternaire générique « être symétrique par rapport à » ; le nouvel objet ainsi désigné peut se voir attribuer des propriétés (ex. la symétrie est une isométrie). Comme le souligne Vergnaud (1991b, p. 145), la nominalisation est une opération linguistique essentielle dans la transformation des concepts-outils en concepts-objets.

2. Motivations pour étudier les relations entre logique et langage dans le cas de la symétrie

Comme l'indique Vergnaud (2002), pour penser les questions d'apprentissage, il est essentiel de prendre en compte la dialectique entre *formes opératoires* et *formes prédicatives de la connaissance* :

« La suite naturelle du questionnement théorique concerne les relations entre la forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance, notamment entre une règle, un théorème en acte et un théorème tout court. La complexité n'est pas que dans le faire, elle est aussi dans le dire. L'énonciation des objets et de leurs propriétés est essentielle dans les processus de conceptualisation. Parmi les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage des mathématiques, on peut mettre presque à égalité d'une part la complexité des classes de problèmes à résoudre et des opérations de pensée nécessaires pour les traiter, et d'autre part la complexité de certains énoncés et de certains symbolismes mathématiques. » (op.cit., p. 9)

Vergnaud (*ib.*) illustre ceci sur le cas de la symétrie en montrant que, comme c'est le cas pour les connaissances opératoires, les connaissances prédicatives peuvent être sujettes à des ruptures importantes qui ne sont pas nécessairement reconnues par les enseignants. Il attire l'attention sur les quatre énoncés ci-dessous qui font écho à ceux présentés dans le préliminaire à cette partie (les commentaires entre parenthèses sont ceux des auteurs du présent texte) :

1. la forteresse est symétrique (propriété d'un objet matériel, prédicat unaire)
2. le triangle A'B'C' est symétrique du triangle ABC par rapport à la droite d (relation ternaire entre deux figures et une droite)
3. la symétrie conserve les longueurs et les angles (relation binaire entre une transformation géométrique et une grandeur)
4. la symétrie est une isométrie (propriété d'une transformation géométrique) (op.cit., p. 10)

Nous revenons ci-dessous, plus en détail, sur les différents aspects mentionnés ci-dessus.

3. Différentes relations liées à la symétrie

Propriété mathématique : « être symétrique »

La propriété mathématique : « être symétrique » se modélise en logique classique du premier ordre³ par un prédicat unaire $S(X)$. Étant donné l'ensemble des figures du plan (2D, 1D, 0D), par définition, une figure est dite symétrique *si et seulement si* elle se superpose avec sa propre retournée. On peut ainsi noter que : tout segment de droite est symétrique ; toute paire de points est symétrique ; tout polygone régulier (équilatère et équiangle) est symétrique ; tout cercle est symétrique ; il existe des polygones non réguliers qui sont symétriques : par exemple, tout triangle isocèle est symétrique et de même tout trapèze isocèle est symétrique ; un parallélogramme non rectangle et non losange n'est pas symétrique.

Relation ternaire : « être symétrique de ... par rapport à ... »

La relation « être symétrique de ... par rapport à ... » est une relation ternaire entre deux figures du plan et une droite du plan. Elle se modélise par un prédicat triadique $\Sigma(X, Y, Z)$. Les domaines d'objets sur lesquels on peut considérer cette relation sont les sous-ensembles de l'ensemble des figures du plan (2D, 1D, 0D). Les variables X et Y peuvent être instanciées par n'importe quelle figure ; néanmoins, d'un point de vue pragmatique, on ne considérera que des couples de figures de même type (2D, 1D ou 0D). La variable Z prend ses valeurs dans le sous-ensemble des droites du plan. Par définition, une figure donnée F du plan est symétrique d'une figure G du plan par rapport à un axe *si et seulement si* F se superpose à G par pliage le long de cet axe.

Dès lors que l'on considère une seule figure, on peut faire le lien avec la propriété « être symétrique ». Pour une figure du plan donnée F , on a en effet l'équivalence entre F satisfait la propriété « être symétrique » et « il existe une droite telle que F est symétrique d'elle-même par rapport à cette droite ». Autrement dit les deux propriétés « $\exists Z \Sigma(X, X, Z)$ » et « $S(x)$ » sont mathématiquement équivalentes (elles sont vraies des mêmes objets et en vertu du tiers exclu appliqué aux propriétés, elles sont également fausses des mêmes objets). Notons que, bien que les deux points de vue soient mathématiquement équivalents, ils ne le sont pas du point de vue cognitif : il est plus simple de vérifier la première propriété que la seconde, à condition d'avoir la possibilité de retourner les figures. Néanmoins, dans le cas où le retournement matériel n'est pas possible, c'est la première caractérisation qui devra être utilisée pour décider si une figure du plan est symétrique ou non.

Ceci a également un impact sur le type de tâche associé : lorsque l'on a établi qu'une figure est symétrique à partir de la définition mettant en jeu le retournement, on peut chercher à déterminer un axe de symétrie de cette figure. Néanmoins, on peut également prouver qu'une figure donnée du plan est symétrique en déterminant un axe de symétrie (identification d'un candidat et vérification pragmatique ou théorique).

Relation binaire : « être symétrique de » - « être symétrique l'une de l'autre »

A partir de la relation ternaire ci-dessus, on peut définir une relation binaire en quantifiant existentiellement sur la variable qui correspond à l'axe. On dira qu'une figure F est symétrique d'une figure G *si et seulement si* il existe une droite telle que F est symétrique de

³ Il s'agit d'une extension du calcul des propositions comportant des lettres de variables, des lettres de prédicats et les deux quantificateurs universels et existentiels, dans laquelle on ne s'autorise des quantifications que sur des éléments de l'univers du discours. En particulier, on ne quantifie pas sur les propriétés et relations, sauf à les considérer comme des objets dans un certain univers du discours.

G par rapport à cette droite. En notant S la relation « être symétrique de » appliquée aux figures du plan, on a : $S(X, Y) \Leftrightarrow \exists Z \Sigma(X, Y, Z)$.

Les domaines d'objets sur lesquels on peut considérer cette relation sont les sous-ensembles de l'ensemble des figures du plan (2D, 1D, OD).

Cette relation, considérée sur l'ensemble des figures du plan, n'est pas réflexive. En effet, $S(X, X) \Leftrightarrow \exists Z \Sigma(X, X, Z) \Leftrightarrow S(X)$. Or de nombreuses figures ne satisfont pas la propriété « être symétrique ».

La relation S , considérée sur l'ensemble des figures du plan, n'est pas transitive. Elle peut l'être sur certains sous-ensembles.

La relation S est symétrique. On le prouve en utilisant le fait que « être superposable » est une relation symétrique sur l'ensemble des figures du plan. En notant E un sous ensemble non vide de l'ensemble des figures du plan, ceci se traduit formellement par le fait que l'énoncé « $\forall X \forall Y [S(X, Y) \Leftrightarrow S(Y, X)]$ » est vrai.

Notons que l'on voit apparaître ici un nouvel effet de la polysémie du terme « *symétrique* » qui conduit à écrire que la relation « être symétrique l'une de l'autre » appliquée aux figures du plan est une relation symétrique (qui satisfait la propriété « être symétrique » appliquée aux relations).

Compte tenu de ce que la relation S est une relation symétrique, on peut considérer cette relation binaire comme s'appliquant à des paires de figures plutôt qu'à des couples. On parlera alors de *figures symétriques l'une de l'autre*.

Il est important de noter que la phrase « Les figures sont symétriques » est ambiguë. En effet, elle peut recevoir indifféremment les deux interprétations ci-dessous :

1. Chacune des deux figures considérées possède la propriété de symétrie.
2. La paire de figures considérée satisfait la relation « être symétrique l'une de l'autre ».

Or suivant l'interprétation 1, une paire de figures formée d'un cercle et d'un carré rend la phrase ci-dessus vraie, tandis que suivant l'interprétation 2, aucune paire de figures formée d'un cercle et d'un carré ne peut rendre cette phrase vraie.

Relation binaire « être axe de symétrie de »

La relation « être axe de symétrie de » est une relation binaire entre une droite d et une figure F . Une droite d est axe de symétrie pour une figure F si et seulement si F est symétrique d'elle-même par rapport à d . Cette relation se modélise par un prédicat diadique $\Gamma(Z, X)$ qui est équivalent au prédicat $\Sigma(X, X, Z)$. Les domaines d'objets sur lesquels on peut considérer cette relation sont les sous-ensembles de l'ensemble des figures du plan (2D, 1D, OD). La variable X peut être instanciée par n'importe quelle figure. La variable Z prend ses valeurs dans le sous-ensemble des droites du plan. Par définition, une droite d est axe de symétrie pour une figure donnée F du plan si et seulement si F se superpose à elle-même par pliage le long de cette droite.

4. De la relation vers la transformation géométrique

L'évolution de la relation vers la transformation géométrique entre figures s'appuie sur le résultat ci-dessous :

Résultat 1. Etant donné une figure et une droite, il existe une et une seule figure symétrique de la figure initiale par rapport à la droite donnée.

Autrement dit, étant donnée une droite d , la relation binaire $\Sigma(X, Y, d)$ obtenue en assignant d à la variable Z dans la relation ternaire $\Sigma(X, Y, Z)$ est une relation fonctionnelle. Ceci permet de définir une application de l'ensemble des figures du plan dans lui-même qui à toute figure F

associe l'unique figure G symétrique de F par rapport à la droite d , appelée *symétrie orthogonale d'axe d* . On dit que d est l'axe de la symétrie.

On voit apparaître ici un nouvel objet mathématique, la *symétrie orthogonale*, avec de nouvelles formes langagières. En ce qui concerne l'axe de symétrie, va apparaître une différence de signification entre : « l'axe de la symétrie » qui est posé dès que l'on considère une symétrie orthogonale d'axe donné ; et, s'il existe, l'axe de symétrie d'une paire de figures qui peut être identique ou non à l'axe de la symétrie orthogonale considérée.

Plus précisément : étant données deux figures du plan F et G , et un axe d , F est l'image de G dans la symétrie orthogonale d'axe d si et seulement si G est symétrique de F par rapport à d .

De plus, la symétrie orthogonale considérée comme transformation géométrique entre figures d'un plan est en fait la restriction au plan d'une transformation de l'espace, la rotation d'un demi-tour autour de l'axe de la symétrie.

En considérant les figures comme des ensembles de points du plan, on peut considérer la restriction de la transformation géométrique entre figures à l'ensemble des points du plan et étudier ses propriétés théoriques, avec les deux résultats ci-dessous :

Résultat 2. Soit d une droite : l'image d'un point M dans la symétrie orthogonale d'axe d est le point M' tel que d soit la médiatrice du segment $[MM']$.

Résultat 3. Etant donnés deux points distincts M et M' , il existe une et une seule symétrie orthogonale transformant M en M' ; il s'agit de la symétrie orthogonale dont l'axe est la médiatrice du segment $[MM']$.

Dans l'enseignement du cycle 3⁴ (grades 4 à 6, élèves de 9 à 12 ans), on travaille sur les figures avant de travailler sur les points et on introduit les notions géométriques à partir d'actions sur les figures matérielles tracées avec des instruments sur du papier ou un écran d'ordinateur. Pour produire l'image d'une figure matérielle (représentant une figure géométrique F) par la symétrie rapport à la droite d , on peut utiliser un calque et plier suivant l'axe d (ou du moins sa représentation matérielle). Dans la deuxième partie, nous nous intéressons aux rapports entre figures matérielles tracées avec des instruments et concepts géométriques.

INSTRUMENTS DE TRACE ET CONCEPTS GEOMETRIQUES

1. Contexte général de réflexion, questions de recherche et hypothèses théoriques

Cette deuxième partie s'inscrit dans une réflexion plus générale sur les moyens d'améliorer la cohérence et la continuité de l'enseignement de la géométrie au long de la scolarité obligatoire et en particulier sur les relations à établir entre une géométrie matérielle portant sur des objets matériels ou des figures tracées avec des instruments et une géométrie théorique définie par une axiomatique (explicite ou non). Nous nous intéressons donc non seulement au langage mais aussi aux instruments et aux gestes et actions accomplis avec ces instruments.

Dans l'enseignement usuel, on peut repérer une évolution des objets étudiés ainsi que des enjeux et des moyens de production et de validation de ces objets et des énoncés les concernant. Au CP (grade 1, 6-7 ans), et même avant, un premier vocabulaire géométrique peut être introduit en appui sur la perception. Des instruments matériels ou logiciels sont introduits progressivement aux cycles 2 et 3 pour outiller la perception. Ils amènent à

⁴ Depuis septembre 2016, cycle 2 : grades 1 à 3 (6-9 ans) ; cycle 3 : grades 4 à 6 (9-12 ans). La dernière année du cycle 3 fait partie du collège ; l'enseignement est dispensé par des professeurs de mathématiques alors que les années précédentes relèvent de l'école primaire avec des enseignants polyvalents.

s'intéresser à des caractéristiques précises des figures (alignements, longueurs, angles...). Au cycle 4, on se réfère à des objets théoriques définis dans le langage. Les réflexions proposées dans cette partie s'inscrivent dans la recherche d'une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie sur toute la scolarité obligatoire, compatible avec le développement des élèves (construction des connaissances géométriques en appui et contre les connaissances spatiales) et soutenue par une axiomatique connue des professeurs (au moins des professeurs de collège).

Les recherches qui se sont intéressées à la transition entre l'école et le collège (par exemple, Salin, 2008 ; Houdement et Kuzniak, 2006) ont pointé la rupture entre une géométrie des tracés matériels et la géométrie théorique des énoncés et démonstrations. Cette rupture tient au mode de validation des énoncés. Comment la gérer dans l'enseignement ? Nous faisons l'hypothèse que, pour répondre à cette question, on ne peut pas se limiter à la seule transition école-collège ni même au nouveau cycle 3. Il faut penser la continuité dans l'enseignement de la géométrie sur tout l'enseignement obligatoire, et en particulier dans les modes de validation des énoncés : la validation par les instruments de géométrie (règle, équerre, compas), valorisée en primaire, peut-elle jouer un rôle positif dans l'accès à la validation par la démonstration ?

Trois espaces pour penser l'enseignement de la géométrie plane

Pour analyser les rapports entre géométrie matérielle et géométrie théorique, nous distinguons trois espaces pour les objets et les actions sur ces objets :

- L'espace sensible à trois dimensions où on peut manipuler des objets matériels, effectuer des déplacements.
- L'espace géométrique des objets théoriques et des énoncés sur ces objets.
- L'espace graphique à deux dimensions des représentations (figures⁵ ou schémas) sur papier ou sur un écran d'ordinateur. Les moyens d'action (production, vérification de propriétés, de relations) sont, dans le cas du papier, des instruments matériels (ou la main levée pour la production), et un logiciel pour l'écran d'ordinateur.

Nous faisons l'hypothèse que l'espace graphique peut servir d'interface entre l'espace sensible et l'espace géométrique par le jeu qu'on peut y établir entre des représentations d'objets matériels de l'espace et des représentations d'objets géométriques. La même représentation peut jouer alternativement les deux rôles (Perrin-Glorian et *al.*, 2013 ; Perrin-Glorian & Godin, à paraître).

Différentes visions des figures

En lien avec la notion de déconstruction dimensionnelle des figures, (Duval, 2005 ; Duval et Godin, 2005), nous avons distingué différents niveaux dans la vision des figures :

- vision « surfaces » ou D2 (vision naturelle) : une figure est composée de surfaces juxtaposées, à la rigueur superposées ; des lignes et des points peuvent apparaître mais les lignes sont seulement des bords de surfaces, les points sont des sommets de surfaces ou, en cas de superposition, des intersections de bords. On n'est pas capable de créer de nouvelles lignes (ex. diagonales d'un polygone).

- vision « lignes » (ou D1) : la figure est constituée de lignes (trame de la figure) qui peuvent se tracer avec des instruments. On est capable d'envisager les droites comme supports des segments. Les points sont des extrémités de lignes ou des intersections de lignes qu'on a déjà. On est capable de tracer des segments (voire des demi-droites ou des droites) qui relient des points qu'on a déjà. On peut obtenir de nouveaux points par intersection de lignes qu'on a prolongées mais non créer des points pour obtenir de nouvelles lignes.

⁵ Nous utilisons le terme figure, y compris pour les figures matérielles qui représentent des objets géométriques. Pour plus de détails sur les raisons de ce choix, voir Perrin-Glorian et Godin (à paraître).

- vision « points » (ou D0) : on peut créer des points par intersection de deux lignes et les points peuvent définir des lignes. On sait qu'il faut deux points (ou un point et une direction) pour déterminer une droite, une demi-droite ; qu'il faut deux points ou un point et une longueur sur une demi-droite déjà tracée pour définir un segment ; qu'il faut deux points (le centre et un point du cercle) ou un point et une longueur pour déterminer un cercle.

La vision naturelle spontanée des figures est la vision surfaces ; la vision nécessaire en géométrie est celle d'un réseau de lignes (droites ou cercles) et points. Un des enjeux de l'enseignement du primaire et du début du collège est de développer ces visions des figures et de rendre les élèves capables de mobilité entre ces différentes visions des figures.

2. *Instruments matériels et concepts géométriques*

Nous faisons l'hypothèse que les instruments de tracé – règle, équerre, compas – jouent un rôle essentiel dans le passage du contrôle des figures par la seule perception au contrôle par les énoncés. Pour comprendre ce rôle, nous considérons des instruments⁶ théoriques définis par une seule fonction liée à la conceptualisation d'une notion géométrique précise. Ainsi la *règle* est liée à la notion de droite ; elle est non graduée et ne sert qu'à produire ou contrôler l'alignement. Pour reporter des longueurs, il faut un *reporteur de longueur* qui ne passe pas par la mesure : cela peut être un compas à pointes sèches (les deux branches sont identiques : on peut marquer un point mais on ne peut pas tracer) ou un morceau de carton rigide avec un bord droit sur lequel on peut écrire. Pour prendre le milieu d'un segment il faut un *médiateur de longueur* qui peut être une bande de papier avec un bord droit qu'on peut plier et sur lequel on peut écrire. Pour reporter des angles, il faut un *reporteur d'angle* qui peut être un morceau de papier qu'on peut plier pour former un secteur angulaire, *gabarit de l'angle* qu'on veut reporter ; dans le cas particulier de l'angle droit, on a un gabarit d'angle droit ou *équerre* non graduée. Le *compas* est un traceur de cercles ; il a une pointe qui repère le centre et une mine pour tracer. Nous parlons d'instruments théoriques car nous ne considérons pas leurs limitations⁷ : les instruments matériels sont limités, les instruments théoriques non.

D'autres instruments doivent être considérés pour analyser toute l'activité de géométrie plane en primaire et ses possibilités d'évolution : des instruments qui permettent de reporter ou contrôler de l'information D2, notamment les gabarits et pochoirs qui contiennent toute l'information sur une figure simple. Nous considérons le papier calque comme un instrument : il permet de reporter ou contrôler toute l'information sur une figure simple ou composée⁸.

Les gabarits ou pochoirs déchirés peuvent jouer un rôle important au début du primaire pour aider les élèves à passer d'une vision des figures comme assemblage de surfaces à une vision en termes de réseau de lignes et de points : ils permettent de reporter seulement une partie de l'information D2 sur une figure simple et nécessitent d'identifier de l'information D1 comme l'alignement à reporter avec les instruments liés aux concepts géométriques identifiés ci-dessus.

Usage géométrique des instruments de tracé

Prenons d'abord un exemple : supposons qu'on veuille construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse est déjà tracée et dont on donne la longueur d'un des côtés de l'angle droit. Une

⁶ Il faudrait ici dire « artefact » en faisant la différence entre artefact et instrument (Rabardel, 1995). L'instrument matériel est un artefact. C'est le processus d'instrumentation qui permettra d'en faire pour celui qui s'en sert un instrument remplissant la fonction définie pour l'instrument théorique. La relation entre l'instrument matériel et sa fonction de représentation d'un concept géométrique est justement un des enjeux majeurs de l'apprentissage en primaire.

⁷ Par exemple la règle est finie ; le compas a un écartement maximum et minimum.

⁸ Une figure simple est le contour d'un gabarit. Une figure composée est un assemblage de figures simples.

procédure pratique souvent observée, y compris chez de futurs professeurs des écoles, consiste à ajuster les instruments. Par exemple, avec un gabarit d'angle droit (voire une équerre) suffisamment grand et sur lequel on peut écrire (Figure 1) :

On repère la longueur b sur un côté de l'angle droit du gabarit, on place le gabarit de façon à maintenir le repère sur une extrémité de l'hypoténuse et on ajuste la position du sommet et de l'autre côté de l'angle droit en faisant tourner le gabarit jusqu'à ce que le deuxième côté de l'angle droit passe par l'autre extrémité de l'hypoténuse. Nous considérons cet usage du gabarit d'angle droit ou de l'équerre comme non géométrique. L'usage géométrique de l'équerre consisterait à placer un des côtés de l'angle droit sur une droite déjà tracée.

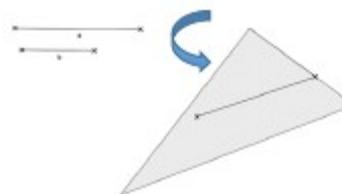


Figure 1

L'usage géométrique des instruments correspond à des fonctions de ces instruments nécessaires pour le tracé des figures matérielles représentant des figures géométriques qui respectent les axiomes ou théorèmes de la géométrie euclidienne. Ainsi l'équerre permet de tracer une unique perpendiculaire à une droite donnée en un point donné. Nous définissons un usage géométrique pour tous les instruments théoriques mentionnés plus haut.

Pour placer *la règle*, il faut deux points ou un segment déjà tracé. Le *reporteur de longueur* se place sur une droite déjà tracée, à partir d'un point qu'on connaît déjà. Pour obtenir le milieu d'un segment, on reporte un segment de même longueur sur le *médiateur de longueur* (une bande de papier avec un bord droit) qu'on plie en faisant coïncider les deux extrémités puis on reporte sur le segment la longueur moitié obtenue, vers l'intérieur, à partir d'une des extrémités. Pour poser *l'équerre*, il faut une droite sur laquelle on pose un côté de l'angle droit, on peut la faire glisser sur cette droite si l'on veut que l'autre côté de l'angle droit passe par un point donné. Le *compas* a deux branches différentes : la pointe se pose sur le centre du cercle, la mine décrit un arc de cercle quand on tourne. Pour reporter un cercle, il faut repérer le centre et prendre l'écartement jusqu'à un point du bord. On pose le *gabarit d'angle* sur une demi-droite déjà tracée, son sommet sur le point origine de la demi-droite et on reporte l'autre côté du gabarit de part ou d'autre de cette demi-droite. Pour prendre l'information, c'est-à-dire fabriquer le gabarit avec le *reporteur d'angle* (morceau de papier), on plie le papier sur chacun des côtés du secteur angulaire dont on veut reproduire l'angle, le sommet se trouve à l'intersection ; si le sommet n'apparaît pas, les côtés pliés permettent néanmoins de reproduire l'angle sur un papier plus grand.

3. Usage du papier calque et symétrie axiale

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons plus spécifiquement au papier calque, à la possibilité de le définir comme un instrument de géométrie, en particulier dans le cas de la symétrie axiale.

Le papier calque comme instrument

Pour définir le papier calque comme instrument, il nous faut d'abord définir sa fonction en relation avec une notion géométrique. Il s'agit de la relation entre deux figures qu'on peut appeler *superposabilité* ou isométrie (mais sans dire de quelle isométrie il s'agit). C'est un moyen de validation dans le cas d'une reproduction « à l'identique » (mêmes formes, même taille). Le papier calque permet de préciser en quel sens deux figures sont « identiques » (pour le vérifier ou le produire), en particulier le fait qu'on ait ou non le droit de retourner le calque

correspond au signe de l'isométrie (positive ou négative) : passe-t-on d'une figure à l'autre par un déplacement ou par une symétrie (éventuellement combinée à un déplacement) ?

Le but de la première séance du T.D. était de définir un usage géométrique du papier calque à partir de questions posées sur des exemples : Comment réaliser la superposition ? Quels moyens de contrôle exercer ? Répondre à ces questions met en jeu la décomposition des figures et la déconstruction dimensionnelle. En effet, l'usage géométrique du papier calque suppose l'identification de parties (D2, D1, D0) de la figure à superposer.

Le cas de la symétrie axiale : différents sens du mot « symétrie »

Le travail sur les figures dans le cas de la symétrie axiale réfère à deux grands types de problèmes : reconnaître une symétrie (et éventuellement trouver l'axe) / produire une symétrie par rapport à un axe donné. Cependant, dès l'école primaire, le terme « symétrie » renvoie à plusieurs types de relations au sens de la première partie qui se traduisent dans l'usage du papier calque et permettent de définir « symétrique » et « axe de symétrie » à ce niveau. Nous allons le montrer dans le cas de la reconnaissance d'une symétrie.

Cas 1 : prédicat unaire (propriété d'une figure et axe non identifié). Avec le papier calque, on peut dire qu'une figure est symétrique sans parler d'axe de symétrie : si on décalque la figure et qu'on retourne le calque, la figure retournée se superpose exactement à la figure initiale. Cela permet une première définition⁹ de la symétrie dès le cycle 2 : une figure symétrique est égale à sa retournée.

Cas 2 : prédicat binaire (relation entre une figure et un axe identifié) ; la figure est ou non symétrique par rapport à l'axe donné. On a dans ce cas deux utilisations possibles du papier calque pour le vérifier.

- *Méthode 1* : on décalque la figure et l'axe, on retourne le calque et on cherche à faire coïncider la figure retournée avec la figure initiale. L'axe doit coïncider avec lui-même dans le retournement.

- *Méthode 2* : on identifie dans la figure deux parties qui pourraient se superposer après un pliage du calque. La ligne de pliage définit l'axe de symétrie. Cela permet une deuxième définition : une figure est symétrique par rapport à un axe si elle se décompose en deux parties telles qu'en pliant selon cet axe, les deux parties se superposent. Remarquons que ce qu'on entend ici par parties peut référer à différentes visions des figures : assemblages de surfaces, réseaux de lignes ou de points.

Cas 3 : prédicat ternaire (relation entre deux figures et un axe identifié).

Là encore deux méthodes sont possibles :

- *Méthode 1* : on décalque la première figure et l'axe et on retourne le calque. Pour savoir comment le reposer, il faut avoir identifié au moins un point invariant, par exemple un point de l'axe. On peut ne pas décalquer l'axe, il faut alors identifier deux points invariants pour reposer le calque (voir Figure 2).

- *Méthode 2* : on décalque une des figures et l'axe ; on plie le calque suivant l'axe, on regarde si la figure qui apparaît sur l'envers du calque coïncide avec la deuxième figure.

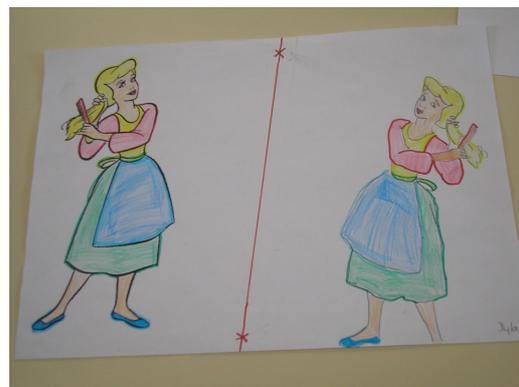


Figure 2

⁹ Voir Perrin-Glorian (2012) pour des pistes sur une possible progression sur la symétrie axiale du CP à la 6^{ème}.

Cas 4 : prédicat binaire (relation entre deux figures : existence ou non d'un axe tel que la symétrie par rapport à cet axe amène l'une sur l'autre). Prenons l'exemple des figures 3 et 4, dans le cas où on les considère comme formées de deux triangles. Avec le calque, il s'agit ici de trouver un pliage qui amène un triangle sur l'autre. Décalquer un des triangles et faire coïncider son retourné avec l'autre triangle ne permet pas de conclure à la symétrie : on pourrait avoir une symétrie glissée.

Si on retourne le calque sans le plier, il est nécessaire de décalquer les deux triangles ou au moins deux points du deuxième triangle qui correspondent à des points identifiés dans le premier triangle (par exemple, en marquant les deux points d'intersection des deux triangles) pour vérifier non seulement la coïncidence du retourné du premier triangle avec le second mais aussi la correspondance des points identifiés.

Si on retourne le calque et qu'on fait coïncider les points d'intersection, on a aussi superposition des triangles dans le cas de la figure 3. Mais, dans le cas de la figure 4, si les triangles coïncident, les points d'intersection ne coïncident pas et, si on fait coïncider les points d'intersection, on ne peut plus faire coïncider les triangles.

Dans chaque cas, chacun des triangles coïncide avec le retourné de l'autre puisque ce sont des triangles équilatéraux mais les triangles ne sont symétriques que dans le cas de la figure 3.

Remarquons que, dans le cas de la recherche d'une symétrie (axe non fourni), on peut toujours considérer qu'il s'agit d'une seule figure dont on recherche un axe de symétrie, ce qui nous ramène au cas 2. Remarquons aussi que le papier calque est un objet de l'espace avec deux faces qui jouent des rôles différents. Pour le retournement du calque, il faut différencier les deux faces. On peut le faire en écrivant son nom sur le papier calque avant de l'utiliser. Dans le pliage, on peut ne pas prendre conscience du fait que le calque a deux faces et qu'on n'utilise pas toujours la même.

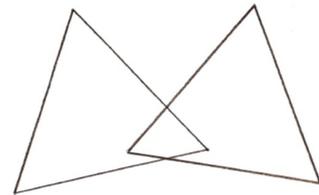


Figure 3

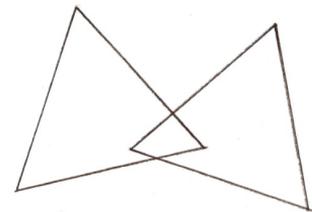


Figure 4

Etude des situations de l'IREM de Montpellier

Il a été proposé aux participants de contribuer à une analyse *a priori* de situations travaillées par l'IREM de Montpellier (texte en annexe) en réfléchissant l'usage qui pourrait être fait par des élèves de 6^{ème} du papier calque pour répondre aux questions suivantes (qui ne sont pas celles qui ont été posées aux élèves) :

- 1) Vérifier que toutes les figures peuvent se décomposer en deux parties superposables.
- 2) Dans quels cas peut-on réaliser la superposition sans sortir le calque du plan de la feuille ? Comment peut-on le faire dans les autres cas ?

Question 1 : décomposition en deux figures superposables

Perceptivement la décomposition en deux sous-figures est évidente sauf éventuellement dans la situation n°5 où il y a plusieurs décompositions possibles. L'enjeu est dans le déplacement et le repositionnement du calque une fois qu'on a décalqué une des sous-figures. Peut-on le faire glisser et/ou tourner ou faut-il le retourner ? Que faut-il faire coïncider ? Pour répondre à cette question, il faut identifier dans les figures des points remarquables, des segments de même longueur, des angles... Cela renvoie à la vision des figures évoquée plus haut.

On peut aussi essayer de faire coïncider les sous-figures par pliage surtout quand le pliage est assez évident perceptivement, c'est-à-dire que l'on perçoit facilement des segments qui peuvent se superposer (cas 1, 2, 5, 6 où il y a symétrie). Dans les cas 3 et 4, on peut repérer

des segments de même longueur sans qu'on puisse les superposer par pliage : la superposition de deux sommets qui doivent coïncider détermine le pli et les segments ne se superposent pas. La recherche de points qui se correspondent et doivent se superposer dans le pliage ou le retournement permet de conclure non seulement qu'on n'a pas trouvé de pliage qui convienne mais qu'il n'en existe pas.

Question 2 : Les deux faces du papier calque

Dans les situations 3 et 4, on peut réaliser la superposition sans sortir du plan de la feuille : on reste sur la même face du calque. Dans les quatre autres situations, qu'on retourne le calque ou qu'on réalise un pliage, la superposition se fait avec la figure qu'on voit par transparence sur l'autre face du calque, ce qui peut passer inaperçu dans le cas du pliage.

Le fait qu'il y ait superposition après retournement n'implique pas que le pliage soit possible (cas de la symétrie glissée). Il n'y a pas d'exemple dans les 6 situations proposées, ce qui laisse penser qu'il n'est pas prévu d'aborder ce problème dans la séance. Ici, la recherche d'un axe de pliage dans les quatre cas où il y a retournement est assez facile.

4. Peut-on définir un usage « géométrique » du papier calque ?

La discussion a porté sur la définition d'un usage géométrique du papier calque. Il en ressort que la notion géométrique qui modélise la superposabilité avec le papier calque est celle d'isométrie : positive (translation, rotation) si on superpose sans retourner le calque, négative (symétrie, symétrie glissée) s'il y a retournement du calque avant de superposer. Pour réaliser la superposition des figures, on est amené à identifier des éléments D1 et D2 (voire D0) des figures et à mettre en œuvre des conditions sur la superposition. Les conditions sur la superposition pour un usage géométrique du papier calque correspondent à des propriétés fondamentales de la symétrie axiale :

- Si on fait coïncider deux segments qui se correspondent, les figures doivent se superposer entièrement (deux points extrémités d'un segment et leurs images, extrémités d'un segment de même longueur, déterminent exactement une isométrie positive et une isométrie négative).
- S'il y a symétrie axiale (prédicat unaire ou relation entre deux figures), si on plie en faisant coïncider deux points qui se correspondent, tout le reste doit se superposer. En effet, un point et son image déterminent l'axe (qui est la médiatrice du segment qui les joint).
- Si on a pu superposer une figure sur elle-même en retournant le calque, il y a symétrie axiale ; si on a seulement décalqué la moitié de la figure, il faut avoir repéré deux points fixes ou deux couples de points qui se correspondent pour reposer le calque, ce qui est réalisé dans le cas du pliage du calque.

ANALYSE LOGIQUE ET COMPLEXITE LANGAGIERE EN CLASSE

1. Analyse logique et complexité langagière

Comme mentionné plus haut dans la partie sur l'analyse logique de la notion de symétrie, la complexité logique du concept a des conséquences sur la complexité des formes verbales associées, en particulier sur les usages du mot « symétrique ». Au-delà des différents usages liés à des aspects logiques différents, existent également des variations dans les formes verbales, notamment orales, qui relèvent de variations dans les usages, dont nous faisons l'hypothèse qu'elles ne sont pas neutres dans l'apprentissage.

Ainsi, certaines variations dans les formulations permettant de désigner la relation, qui pourraient sembler à première vue peu significatives, peuvent s'avérer plus ou moins explicites quant à la nature logique de ce qu'elles évoquent. Par exemple, la formulation « F

et G sont symétriques par rapport à d » est plus économique que la forme « F est symétrique de G par rapport à d » et correspond davantage aux usages experts, mais rend moins explicite le fait qu'elle traduit une relation ; cela s'ajoute au fait que cette première formulation est sujette à deux interprétations mathématiquement aussi valides l'une de l'autre, comme le montre l'exemple du carré et du cercle, évoqué dans la première partie. Si l'on peut penser qu'un expert (c'est-à-dire quelqu'un disposant d'un certain degré de conceptualisation de la symétrie orthogonale, ce qui inclut une certaine familiarité avec les signifiants langagiers associés) sait interpréter correctement cette formulation selon le contexte, il nous semble raisonnable d'affirmer que ce n'est pas si simple pour un élève en cours d'apprentissage.

En outre, notons que le mot symétrique peut également être employé comme nom commun, masculin ou féminin, dans des expressions comme « La figure F est le (ou la) symétrique de G par rapport à d ». Là encore, si ces variations sont anodines et probablement transparentes pour l'expert, on peut s'interroger sur les conséquences que cela peut avoir pour les élèves.

Enfin, la différenciation entre « symétrie » et « symétrique », indispensable et usuelle pour l'expert (cf. le processus de nominalisation mentionné dans la première partie) s'avère, elle aussi, potentiellement problématique à un stade précoce de l'apprentissage. Nous avons même pu observer qu'elle n'est pas évidente pour des professeurs des écoles (qui évoquent parfois « la symétrie d'une figure » pour signifier *l'image* d'une figure par symétrie).

Du point de vue des formulations langagières associées à l'usage de l'adjectif *symétrique* notons que, dans le cas où il traduit une relation, il est nécessaire d'utiliser une préposition pour signifier le deuxième élément de la relation. Il est d'usage d'utiliser « de », mais on a pu observer là encore que, parfois, notamment lorsqu'il est question de la relation binaire, certains élèves ou enseignants peuvent parler d'une figure symétrique *par rapport à* une autre ou symétrique *à* une autre.

Enfin, la manipulation de la symétrie comme relation ternaire suppose aussi de disposer d'éléments langagiers permettant de mentionner l'axe. Là encore, on observe une grande variété des usages de référence : « deux figures symétriques par rapport à d », « dans la symétrie d'axe d » ... Notons que la locution « par rapport à », qui sert parfois (dans un usage moins expert) à désigner le deuxième objet dans la relation binaire, sert ici à désigner le *troisième* objet de la relation, à savoir l'axe.

La conceptualisation de la notion de symétrie orthogonale inclut les différents aspects logiques, à la fois dans leurs spécificités et leur articulation. Faisant l'hypothèse qu'en plus du rôle des manipulations et instruments (cf. supra), le rôle du langage verbal est primordial – suivant en cela notamment Vergnaud (2002) –, nous nous proposons dans cette partie de questionner les usages faits par les enseignants de différents éléments langagiers dans une situation portant des enjeux d'apprentissage de la symétrie en sixième.

2. Problématisation et cadre théorique de l'analyse des séances de classes

Nous nous intéressons au langage (verbal) des enseignants à plusieurs titres. Notre cadre théorique est ancré en théorie de l'activité spécifiée à l'enseignement des mathématiques en milieu scolaire (Robert, 2008 ; Robert et Rogalski, 2002). En accord avec Robert (2008), nous définissons les *activités* des élèves comme tout ce qu'ils disent, font, pensent. Similairement, nous définissons les pratiques des enseignants comme ensemble de leurs activités, soit comme l'ensemble de ce qu'ils disent, font, pensent en lien avec leur enseignement.

Par ailleurs, nous référons l'apprentissage à un degré de conceptualisation, dans une acception qui « opérationnalise » en quelque sorte la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1991b) pour étudier les apprentissages des élèves : un degré de conceptualisation est ainsi défini par la disponibilité des dimensions objet et outil (au sens de Douady, 1987) de la notion concernée dans un ensemble de tâches, et comprend l'organisation des

connaissances (articulation des nouvelles et des anciennes) ainsi que la maîtrise d'un certain nombre de signifiants, notamment langagiers.

L'hypothèse principale que nous faisons est que les apprentissages résultent des activités que les élèves développent sur les tâches que les enseignants leur proposent.

Nos hypothèses sur les apprentissages sont constituées par des apports articulés des théories de Piaget et de Vygotsky, auxquels nous associons également des éléments issus de la théorie de l'échafaudage de Bruner (1983) adaptés au cadre scolaire, croisés avec des éléments issus de la théorie des champs conceptuels et de la théorie des situations didactiques. Ce qui nous intéresse particulièrement ici est le fait que le processus de conceptualisation inclut et est porté par le développement du langage : schématiquement, cela signifie que le développement de la capacité à résoudre des problèmes ne peut pas être dissociée de celui de la capacité à produire du langage accompagnant ou soutenant cette résolution (ce qui ne signifie pas pour autant que résoudre un problème est équivalent à savoir verbaliser sa procédure). En l'occurrence, cela se traduit par le fait que la conceptualisation des différents aspects logiques de la symétrie et de leur distinction doit s'accompagner de la maîtrise progressive d'éléments langagiers permettant de nommer les propriétés, les relations et les objets en jeu et de les distinguer. Nous nous intéressons donc aux interventions des élèves dans ce qu'elles révèlent de leur maîtrise de tels éléments langagiers à la fois parce que cette maîtrise fait partie des objectifs d'apprentissage et parce que nous faisons l'hypothèse que, sans éléments langagiers permettant de prendre en charge les aspects logiques et leur différenciation, la conceptualisation de ces différents aspects semble difficile.

Par ailleurs, les échanges langagiers (éventuellement en lien avec des manipulations d'instruments) ont entre autres pour fonction l'échafaudage de l'activité des élèves sur les tâches proposées et, au-delà, la « transformation des activités en apprentissages » (dans l'idée d'aide constructive, cf. Robert, 2008). Il s'agit notamment, pour l'enseignant, d'établir des proximités (Robert et Vandebrouck, 2014) entre ce que produisent les élèves et le savoir visé, entre le savoir ancien et le savoir nouveau. Cependant, nous faisons l'hypothèse que ces interventions ne peuvent être efficaces que si elles se situent dans la *Zone Proximale de Développement* des élèves (au sens de Vygotsky, 1934/1997). Concrètement, cela signifie que les interventions des enseignants ne sont pas étudiées isolément, mais en lien avec les activités (du moins les traces que nous en avons).

Nos recherches précédentes nous ont permis de montrer que ces enjeux langagiers constituent des enjeux d'apprentissage importants en sixième¹⁰. Ainsi, des tests passés par 125 élèves en fin de sixième ont montré que la difficulté à détecter des axes dans les cas de « figures doubles » persiste et, du point de vue langagier, une grande difficulté à distinguer les aspects « propriété » et « relation » dans l'usage de l'adjectif *symétrique* (près de la moitié des élèves répondent sur la propriété ou par une formulation ambiguë à une question portant sur la relation) ainsi qu'à produire des énoncés mentionnant les trois objets de la relation (Chesnais et al., 2013). Par ailleurs, une étude de manuels de sixième a montré une prise en charge très variable et rarement explicite de ces enjeux (Chesnais, 2012). Enfin, la comparaison de deux séances dans deux classes différentes sur une tâche commune a montré que la prise en charge de l'aspect ternaire de la relation est difficile pour les élèves et que le discours des enseignants, par certains implicites, ne permet pas toujours de lever les difficultés ; il s'est également avéré qu'il pouvait y avoir des écarts entre l'oral et l'écrit dans les formulations des professeurs, l'écrit permettant parfois de lever certains de ces implicites (Barrier et al., 2014).

Nous nous proposons ici d'approfondir la question de la prise en charge des enjeux langagiers concernant la distinction entre propriété et relation par les enseignants, en comparant deux classes. Nous cherchons donc à repérer, lors de la résolution d'une tâche

¹⁰ Notons à ce propos que, s'ils étaient relativement explicites dans les programmes à une époque, ils le sont beaucoup moins aujourd'hui (Chesnais, 2009).

susceptible de porter des enjeux d'apprentissage liés aux aspects logiques de la symétrie (identification de la propriété *vs* relation, de la nature, du nombre et des différents éléments des relations etc.) comment les enseignants étayent, par leur interventions, l'identification de ces différentes formes par les élèves, notamment en repérant les formes langagières qu'ils proposent aux élèves, la façon dont ils reformulent éventuellement les expressions des élèves etc.

3. Présentation de la tâche proposée dans les deux classes

Nous avons choisi de comparer deux séances de classe, portant sur le même exercice. Cette tâche a été élaborée au sein du groupe Didactique de l'IREM de Montpellier, portant sur la transition entre l'école et le collège et comportant des enseignants de CM et de sixième (grades 4 à 6). Le travail du groupe¹¹ a notamment consisté à réfléchir à une progression concernant la symétrie orthogonale sur le CM2 (grade 5) et la sixième (grade 6). Ce travail s'est déroulé sur deux années scolaires consécutives et l'exercice a été légèrement modifié la deuxième année. Précisons qu'il ne s'agissait pas d'élaborer une situation ayant les caractéristiques d'une « situation fondamentale » : les enjeux de cette élaboration incluaient des enjeux de formation des membres du groupe, pour la plupart novices en didactique et, pour ce qui concerne les professeurs des écoles, pas nécessairement très à l'aise avec les mathématiques. La situation a été élaborée à partir de propositions des membres du groupe (issues de leur expérience d'enseignant), pour « partir des pratiques » (Robert et Vivier, 2013).

L'exercice concerné dans les séances observées est celui élaboré par le groupe comme première situation du chapitre sur la symétrie orthogonale en sixième. Il s'agit de faire « ré-émerger » la symétrie pour faire remobiliser par les élèves certaines des connaissances qu'ils en ont, et, plus précisément, de (ré-)établir la « définition » qui est en principe celle qui a été travaillée (au moins implicitement) au CM : « Une figure F est symétrique d'une figure G par rapport à une droite d si F et G se superposent par pliage le long de la droite d . » L'enjeu est donc clairement de réintroduire la symétrie comme relation entre trois objets (deux figures et un axe), caractérisée par la superposition par pliage, c'est-à-dire par le fait que les deux figures se superposent (isométrie) mais d'une manière particulière (isométrie *négative*).

L'usage du calque étant prévu, le lien entre le pliage et le retournement du calque peut être en jeu (ce dernier étant plus favorable pour, plus tard, considérer la symétrie comme transformation du plan et pour relier les aspects *propriété* et *relation*). Il s'agit, comme mentionné dans la partie précédente de ce texte, d'identifier la propriété de retournement, c'est-à-dire le fait que l'isométrie est négative, en la caractérisant par le pliage ou par le retournement du calque¹². Notons, comme déjà mentionné dans Chesnais et Mathé (2014), que cette propriété est difficile à formuler langagièrément, compte tenu de l'ambiguïté du mot « tourner » qui renvoie *a priori* plutôt à la symétrie centrale, mais qui est employé dans le quotidien pour « tourner une page » et du mot « retourner » qui peut tout aussi bien être appliqué, dans son sens quotidien, à la symétrie centrale. L'appui sur la manipulation d'instruments (pliage ou retournement d'un calque) et/ou l'utilisation de gestes en complément des formulations langagières est donc, de ce point de vue, essentiel pour caractériser la propriété.

Pour une première séance sur la symétrie orthogonale en sixième, il s'agit également d'introduire ou réintroduire les formulations langagières associées que les élèves ont dû déjà rencontrer : le mot « symétrique », la forme « est symétrique de », la locution « par rapport

¹¹ Ce travail a fait l'objet d'une présentation à la COPIRELEM en 2013 (Chesnais et al., 2014).

¹² Moyennant le fait de prendre des repères pour savoir où reposer le calque (cf. supra).

à » pour désigner l'axe, l'usage du mot « superposer », voire l'expression « pliage le long de ».

Par ailleurs, quelques autres enjeux d'apprentissage concernant la symétrie orthogonale (essentiels en sixième, cf. Chesnais, 2009) sont aussi potentiellement en jeu dans la tâche : la reconnaissance d'axes obliques (et non pas seulement verticaux ou horizontaux), la caractérisation de la symétrie par rapport à d'autres transformations (comme la rotation ou la translation, notamment en l'identifiant comme une isométrie négative, cf. la partie précédente) et le fait que la symétrie n'est pas une transformation d'un demi-plan dans un autre (en jeu par exemple quand il s'agit de construire le symétrique d'une figure coupée par l'axe).

Notons que ces enjeux d'apprentissage concernant la symétrie orthogonale s'inscrivent en outre, plus globalement, dans celui de l'initiation en sixième du passage d'une géométrie perceptive et instrumentée à une géométrie théorique (axiomatique), fondée sur des définitions et des propriétés. Les contenus déjà abordés au cycle 3 sont ainsi davantage formalisés, dans une visée d'axiomatisation.

4. Analyse des séances

Les données ont été recueillies dans les classes de sixième de deux enseignants membres du groupe IREM : Antoine et Fabien. Tous deux sont des professeurs expérimentés (ils enseignent chacun depuis une dizaine d'années). Le public des deux établissements est plutôt défavorisé : l'établissement de Fabien est encore un établissement ordinaire à l'époque du recueil de données mais a été catégorisé en éducation prioritaire l'année suivante. L'établissement d'Antoine est un « internat d'excellence » regroupant des élèves de milieu défavorisé et ayant des difficultés scolaires – et souvent, de comportement – importantes.

On s'intéresse à la potentialité des échanges pour permettre l'identification de la symétrie comme relation entre deux figures (éventuellement même comme relation ternaire). Cela inclut la distinction d'avec une propriété et l'appropriation d'éléments langagiers pour le signifier. Notamment, on peut penser que le rôle de l'adjectif « symétrique », et des différentes formes langagières associées (cf. ci-dessus) devraient jouer un rôle fondamental, d'autant plus que celui-ci a déjà été rencontré au cours moyen par les élèves. L'intérêt pour cet adjectif (et le nom « symétrie » ainsi que les formes langagières associées) sont également liées au fait que leur maîtrise constitue un objectif d'apprentissage en sixième.

Dans les discours, nous cherchons donc à repérer si les formes langagières employées réfèrent explicitement ou non à une relation, au nombre et à la nature de ses arguments et aux relations entre ces arguments. Nous nous intéressons de plus à l'écart éventuel entre les formulations orales et écrites et, enfin, au lien entre le verbal et l'usage des instruments.

Faute de place, nous ne pouvons intégrer à cet article l'ensemble des extraits de transcription qui ont été proposés pour être analysés durant l'atelier. Dans un premier temps, nous proposons l'analyse détaillée d'un extrait de la classe d'Antoine, figurant en annexe 1, puis nous présenterons les résultats de l'analyse et la comparaison des deux séances de façon globale, en citant le plus souvent possible les extraits de transcription représentatifs des résultats.

Un premier extrait qui met en évidence l'importance et la complexité de la prise en charge de ces aspects

Dans la classe d'Antoine, les élèves ont travaillé de manière individuelle durant une quinzaine de minutes, l'enseignant circulant notamment pour inciter les élèves à écrire leur réponse. Nous nous focalisons ici sur la phase de mise en commun des procédures qui suit cette phase de travail individuel. Celle-ci débute par une discussion sur l'invalidation de « propriétés »

des situations portant sur la présence d'angles droits, de parallèles, des égalités de longueurs etc. L'extrait 1 reproduit en annexe 2 correspond à la discussion collective autour de la première proposition d'élève mentionnant la symétrie.

Présentons les principaux résultats.

Le mot « symétrique » est introduit par un élève dès la première proposition, comme adjectif, et repris par d'autres. Le mot « symétrie » est également introduit. L'enseignant ne fait que reprendre les formulations des élèves, sans les modifier.

Le résultat qui nous semble le plus important est l'ambiguïté des formes employées. En effet, dès la première formulation par Nadia « elles sont symétriques », l'ambiguïté de la référence du pronom « elles » ne permet pas de savoir si l'adjectif est employé pour faire référence à une propriété (des « situations ») ou à une relation (entre les deux figures de chaque situation). En effet, même si la phrase de Nadia commençant par « dans » peut faire penser que le pronom « elles » pourrait renvoyer aux deux figures de chaque situation, la reprise qu'en fait Antoine, « 1, 2, 4, 6, Nadia prétend qu'elles sont symétriques » pousse à penser que ce sont les situations elles-mêmes qui sont qualifiées (chacune) de « symétrique ». Cet usage est d'ailleurs repris immédiatement par Emir – « elle est pas symétrique la 4 » – où cette fois, c'est clairement la situation qui est qualifiée. L'ambiguïté n'est pas levée par l'enseignant et l'attribution du qualificatif aux situations est maintenue jusqu'à la fin de l'extrait (cf. l'intervention d'Eli). Notons que le pronom « elle » dans la proposition de Kevin semble se référer, cette fois, à l'une des figures d'une des situations, évoquant (mais là encore de façon très elliptique) une possible relation : on pourrait y entendre que l'une des figures est retournée (mais au sens de la symétrie centrale), ou simplement qu'elle est renversée (le bas et le haut sont inversés) *par rapport à l'autre*. Dans la dernière intervention de l'épisode, Eli mentionne de manière plus explicite une relation entre figures par « les deux sont du même sens » à propos de la situation 3, mais l'usage du qualificatif symétrique reste associé à la situation : il semble donc traduire une propriété d'une configuration. À strictement parler du point de vue logique, cela peut correspondre à un usage expert (la figure globale est symétrique au sens de 'elle admet un axe de symétrie'), mais l'alternance entre le pluriel et le singulier ne permet pas de distinguer cet usage de l'usage de « symétrique » pour désigner la relation entre les deux figures (ou les deux parties de la figure globale¹³).

Un autre élément apparaît, qui renforce selon nous l'ambiguïté : l'emploi de « c'est » dans les expressions « c'est pas bon » puis dans l'intervention d'Eli « c'est pas vraiment symétrique » qui rend encore plus opaque la référence aux arguments du prédicat « être symétrique ».

Cette analyse montre que, si la situation évoque la symétrie au moins pour certains élèves (avec éventuellement encore une confusion avec la symétrie centrale), les formes langagières employées à ce stade ne permettent pas d'en distinguer les différents aspects logiques, ni d'expliciter, à propos de la relation, le nombre et la nature des arguments donc, *a fortiori*, ne permettent pas de qualifier la nature de la relation. En particulier, même si l'idée de relation entre deux figures affleure parfois, elle reste très largement implicite voire cachée dans les formes langagières employées.

Par ailleurs, certains des enjeux pointés dans l'analyse *a priori* apparaissent, notamment la caractérisation de la relation de symétrie orthogonale parmi les isométries, via la propriété de retournement ; notons enfin que, à ce stade de la séance, le lien n'est pas fait avec l'utilisation d'instruments qui, rappelons-le, représente l'un des seuls moyens de clarifier cette caractéristique de la symétrie orthogonale.

¹³ Notons qu'une des difficultés langagières ici est également que le mot figure peut renvoyer à plusieurs choses : soit à la « figure globale » correspondant à une « situation », soit à un élément figural qui présente une unité de dessin (connexe).

Résultats de l'analyse et de la comparaison des deux transcriptions

Décrivons tout d'abord succinctement les déroulements dans chacune des classes.

Dans les deux classes, la phase collective suivant le temps de travail individuel commence par l'invalidation de « propriétés » des situations, comme la présence d'angles droits, de parallèles ou d'égalités de longueurs etc.

Fabien choisit ensuite d'interroger un élève dont la réponse mentionne le fait que deux figures sont superposables :

« Sophian : quand deux figures sont opposées l'une à l'autre et qu'elles sont sup- et que l'on les superpose l'une sur l'autre et qu'elles forment une seule euh figure, elles sont en effet miroir. »

L'essentiel des échanges dans la classe est ensuite consacré à l'identification du fait que, dans les six situations, il y a *deux* figures, qu'elles sont *superposables*, mais que dans quatre seulement, elles se superposent *par pliage*. L'introduction de la référence à la symétrie est alors provoquée par Fabien puis une phase est consacrée au dessin des axes de symétrie dans les quatre situations et, enfin, une trace écrite est produite :

« Dans les situations 1, 2, 5 et 6, les deux figures se superposent par pliage. On dit que les deux figures sont symétriques l'une de l'autre le long de ce pli. »

Dans la classe d'Antoine, la première réponse proposée (après celles portant sur les propriétés « classiques ») mentionne déjà la symétrie :

« Nadia : dans les situations 1, 2, 4 et 6, elles sont symétriques. »

Puis, l'enseignant lance un débat entre les élèves dont l'objet est le fait de savoir si la situation 4 puis la situation 3 sont « symétriques ». Sont évoqués le pliage, le fait d'être « à l'envers » et de devoir « tourner » (mais qui est associé à la fois aux situations 4 et 5, donc y compris à un cas de symétrie centrale) ainsi que le fait d'être « pareil ».

Cela amène Antoine à demander la clarification de ce que signifie « être symétrique(s)¹⁴ ». Suite à la réponse d'une élève qui indique que « c'est deux figures qui se superposent », les échanges visent à montrer qu'« il y a un problème sur le... derrière le mot symétrique qu'est-ce qu'on y met ? » qui se conclut par :

« la 3, là, tu me dis qu'elles sont pas symétriques mais pourtant elles sont superposables [et l'enseignant prend le calque d'une des figures de la situation 3 et le fait glisser sur l'autre] ».

Mais la signification du mot superposer n'est pas explicitement discutée, comme si elle faisait déjà l'objet d'un consensus. La discussion est ensuite déviée à partir d'une intervention d'élève qui amène à discuter l'idée de pliage et d'axe de symétrie. Une phase est ensuite consacrée à caractériser les manipulations du calque : décalquer une ou les deux figures, plier, tourner / retourner le calque (dans le cas 3). L'épisode se termine par un bilan qui amène à une trace écrite :

« Dans les situations 1, 2, 5 et 6, les figures se superposent par pliage le long d'une droite. On dit que les figures sont symétriques l'une de l'autre par rapport à cette droite. »

L'analyse détaillée dans chacune des deux classes montre des similitudes et des différences. Compte tenu des déroulements respectifs, il ne sera pas étonnant de constater que davantage d'échanges incluent des mots dont la racine est la même que *symétrique* dans la classe d'Antoine (symétrique(s) : 24 occurrences et symétrie : 19 dont 5 dans l'expression « axe de symétrie » et 1 qui désigne explicitement la transformation) que dans celle de Fabien (7 occurrences de « symétrique(s) » pour 7 occurrences de « symétrie » dont 4 dans l'expression « axe de symétrie » et 1 pour désigner la transformation). À l'inverse, les échanges sur l'aspect « relation » sont plutôt liés à l'usage de mots de la famille de *superposer* dans la classe de Fabien (superpose, superposé, superposer, superposable, superposition : 44 occurrences contre 15 dans celle d'Antoine).

¹⁴ Il est impossible de discriminer à l'oral entre singulier et pluriel.

En ce qui concerne le fait qu'il s'agit d'une relation et le nombre d'arguments, cela reste très implicite tout au long des échanges, sauf à quelques rares occasions. Notons que l'aspect *relation* est un peu plus explicite dans la classe de Fabien, lorsqu'il s'agit de discuter le fait que, dans les six situations, on a deux figures superposables (l'une sur l'autre). En effet, même si les formulations utilisant les mots de la famille de « superposable » restent très *factorisées* comme « elles se superposent », n'explicitant qu'une seule fois « l'une sur l'autre », (1 seule occurrence : « ça se superpose l'un sur l'autre »), l'association avec l'usage du calque pour matérialiser la relation met en évidence clairement l'aspect *relation*, comme dans l'extrait suivant :

« [...] je l'ai prise, [...] je la pose par-dessus [il positionne un calque sur lequel il a décalqué la première figure de la situation 3, le cas de translation, pour le faire coïncider avec la figure initiale], je la fais glisser et je la pose sur l'autre. Qu'est-ce qui se passe pour les deux figures ? ».

En dehors de cette phase dans la classe de Fabien, on note que les formulations sont très peu explicites dans les deux classes quant au fait qu'il s'agit d'une relation. Ainsi, la majeure partie des formulations employant des mots de la famille de 'superposer' ou de 'symétrique', sont *factorisées* (« elles se superposent »), incomplètes (ne mentionnant pas « l'une de l'autre »), voire encore moins explicites (comme : « ça se superpose », « c'est symétrique »). Ainsi, par exemple, dans les deux classes, un moment conséquent est consacré à dessiner les axes dans les 4 cas de symétrie orthogonale. Bien que les échanges précédents aient porté (de façon plus ou moins explicite) sur la relation entre les deux figures dans chaque cas, les formulations langagières employées à ce moment-là dans les deux classes entretiennent l'ambiguïté entre relation (entre les deux figures) et propriété (du couple de figures) ; on trouve ainsi des formulations telles que « il faut tracer au milieu des deux figures ». Un amalgame est ainsi fait entre la relation entre les deux figures et la propriété du couple, ce qui est cohérent du point de vue mathématique puisque les deux sont équivalents, mais qui ne nous semble pas favorable à l'identification et la distinction des différents aspects logiques de la symétrie.

Dans les deux classes, c'est au moment du passage à l'écrit (qui dure moins de deux minutes) que chacun des deux enseignants accole « l'une de l'autre » à l'adjectif *symétrique*.

CONCLUSION

Les analyses précédentes montrent que, dans les deux séances, les formes langagières employées rendent très peu explicite la nature logique des propriétés mathématiques (dans un sens large) considérées. On peut penser qu'elles ne permettent pas à tous les élèves d'identifier ici que l'on s'intéresse à une relation entre figures, ni le nombre d'arguments de cette relation. Notons que l'on retrouve des résultats similaires à ceux obtenus dans Barrier et *al.* (2014), ainsi que, dans une certaine mesure lors de l'analyse de manuels (Chesnais, 2012), à savoir que les formulations, notamment orales mais même parfois à l'écrit, ne mettent pas en évidence explicitement les aspects logiques sous-jacents. Les formes employées sont ainsi très elliptiques, ce qui est fréquent à l'oral (les formes employées n'empêcheraient certainement pas des individus ayant un niveau de conceptualisation de la symétrie suffisant de se comprendre), mais cela peut selon nous constituer un obstacle pour l'apprentissage (ne serait-ce que pour être capable ensuite d'employer et d'interpréter correctement notamment l'adjectif « symétrique »).

Nos analyses semblent également montrer que l'usage du calque demande un vocabulaire spécifique (superposer, faire coïncider, retourner...) qui permet de mettre en relation les manipulations sur la figure matérielle et les propriétés de la figure géométrique et ainsi de rendre plus explicite la nature logique des propriétés mathématiques en jeu. Ainsi, le papier calque apparaît comme un instrument de géométrie lié au concept d'isométrie, dont l'usage suppose, comme la règle, l'équerre ou le compas, la mise en place d'un langage technique

géométrique, au sens de Petitfour (2015), ainsi que l'explicitation de règles pour un usage aidant à conceptualiser les objets géométriques. En effet, ces règles correspondent à l'explicitation en langage technique géométrique des fonctions des instruments nécessaires pour le tracé ou la vérification des caractéristiques graphiques des figures matérielles représentant des propriétés des figures géométriques qui respectent les axiomes ou théorèmes de la géométrie euclidienne. Le langage technique géométrique pourrait ainsi faciliter l'émergence des enjeux géométriques, sans trop s'éloigner des actions des élèves dans les situations d'action et ainsi jouer un rôle intermédiaire dans l'acquisition du langage géométrique, en lien avec la conceptualisation des objets géométriques. (voir Petitfour et Barrier, dans cet ouvrage).

Les enjeux logiques et les enjeux langagiers associés n'étant pas explicitement pris en charge (ni dans les manuels, ni dans les séances en classe), pas plus que ceux concernant l'usage géométrique des instruments, restent ainsi potentiellement « invisibles » au moins pour certains élèves. Il semble donc s'agir d'enjeux « transparents » dans l'enseignement, ce phénomène étant potentiellement responsable de différenciation des apprentissages entre les élèves (Margolinas et Laparra, 2011 ; Coulange, 2011).

L'analyse logique (Vergnaud, 1991b ; Durand-Guerrier, 2013 ; Barrier et al., 2014) s'avère être un bon outil pour appréhender certains aspects de la complexité du concept de symétrie orthogonale, y compris leur manifestation dans le langage, et mettre en évidence des phénomènes didactiques importants liés aux ruptures de significations (Vergnaud, 2002, p.16). Elle s'avère également utile pour étudier le rôle de la dimension langagière dans le processus de conceptualisation, en particulier en géométrie. Précisons qu'un projet de recherche en cours à Montpellier, financé par l'ESPE-Languedoc-Roussillon, associant des chercheurs de différentes disciplines autour du rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et sciences expérimentales, vise à poursuivre les recherches dans cette direction.

BIBLIOGRAPHIE

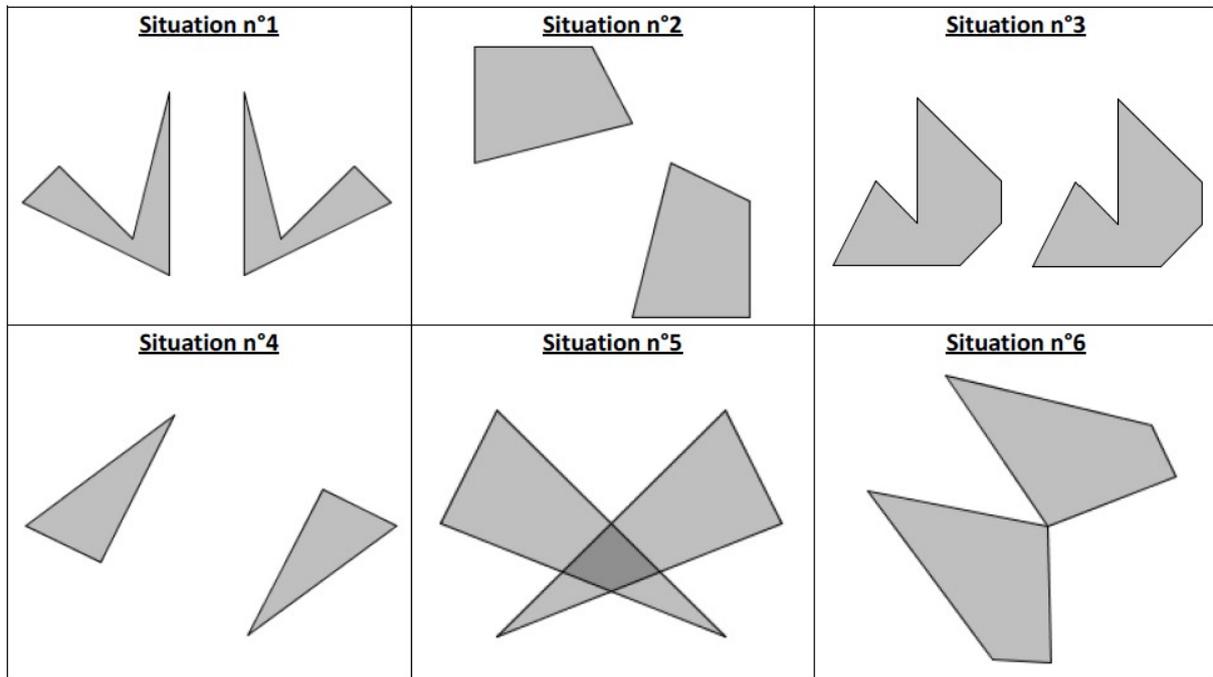
- ARTIGUE M., BOSCH M., CHAACHOUA H., CHELLOUGUI F., CHESNAIS A., DURAND-GUERRIER V., KNIPPING C., MASCHIETTO M., ROMO-VAZQUEZ A., & Trouche L.. (à paraître). The French didactic tradition in mathematics. In W. Blum, M. Artigue, M. van den Heuvel-Panhuizen, M. A. Mariotti & R. Straesser (Eds.), *European Tradition in Didactics of Mathematics*. Berlin: Springer.
- BARRIER T., CHESNAIS A., & HACHE, C. (2014). Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant. *Spirale – revue de recherches en éducation*, 54,175-193.
- BRUNER J. (1983). *Le Développement de l'enfant : savoir faire, savoir dire*. Paris : PUF, 292 p.
- CHESNAIS, A. (2009). *L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- CHESNAIS, A. (2012). Peut-on parler de différenciation entre ZEP et non ZEP ? Questions de langage. Journées d'étude « *la place du langage dans les modèles d'analyse du travail enseignant et de la co-activité dans des situations didactiques* », Montpellier, 14-15 décembre 2012.
- CHESNAIS A., BONICEL F., CARAYON L., DELORME D., DESTRIEATS A., FRANCIS M.-A., & MATHIEU C. (2014). L'enseignement de la symétrie orthogonale à la transition école-collège. In Commission Inter-IREM COPIRELEM. *Actes du XLème colloque COPIRELEM. Nantes 2013. Enseignement de la géométrie à l'école : enjeux et perspectives*. IREM des Pays de la Loire, Nantes, 116 p.
- CHESNAIS A., & MATHE A-C. (2014). Activités d'élèves, pratiques d'enseignants, interactions langagières et apprentissages : une étude de cas. In Butlen et al. (Eds) *Actes de la XVIIème école d'été de didactique des mathématiques (Nantes, août 2013)*.
- CHESNAIS A., MUNIER V., & MOLVINGER, K. (2013). Difficultés langagières spécifiques des élèves de milieu social défavorisé en mathématiques et en sciences à la transition école-collège en France (élèves de 10 à 12 ans). *Colloque de l'Association de Recherches en Éducation Française (AREF)*, Montpellier, 27-30 août 2013.
- COULANGE L. (2011). Quand les savoirs mathématiques à enseigner deviennent incidents. Étude des pratiques d'enseignement des mathématiques d'une enseignante de CM2. In J-Y. Rochex et J. Crinon (Eds.), *La construction des inégalités scolaires*. Rennes : PUR.
- DOUADY, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7/2, 5-32.
- DURAND-GUERRIER, V. (2013). Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques. In Alain Bronner et al. (Ed.) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage* (pp. 233-265). Grenoble : La Pensée Sauvage.

- DUVAL R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.
- DUVAL R., & GODIN M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N* n°76, 7-27.
- HOUEMENT C., & KUZNIAK A., (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 11. 175-195.
- MARGOLINAS, C. & LAPARRA, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In J. Y. Rochex et J. Crinon (Eds.), *La construction des inégalités scolaires*. Rennes : PUR.
- PERRIN-GLORIAN M.J. (2012). Vers une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie plane du CP à la fin du collège ? L'exemple de la symétrie axiale. *Bulletin de l'APMEP*, 499, 325-332. Disponible dans une version plus complète sur le site de l'APMEP : http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Perrin_Glorian_2.pdf
- PERRIN-GLORIAN M.J. & GODIN M. (à paraître). Géométrie plane: pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. In CORFEM *Ressources pour la formation des professeurs. Savoirs mathématiques à enseigner au collège et au lycée*. Une version préliminaire est en ligne <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837>.
- PERRIN-GLORIAN M.J., MATHE A.C., & LECLERCQ R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM*, 90, 5-41.
- PETITFOUR E. (2015). Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6^{ème}. Thèse de l'Université Paris Diderot.
- PETITFOUR E. et BARRIER T. (dans cet ouvrage) D'un cadre d'analyse de l'action instrumentée en géométrie à l'élaboration d'un dispositif de travail en dyade au cycle 3.
- RABARDEL, P. (1995) *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.
- ROBERT, A. (2008). Sur les apprentissages des élèves : une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement. In Vandebrouck F. (ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 33-44). Toulouse : Octarès.
- ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 2(4), 505-528.
- ROBERT, A. & VANDEBROUCK, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34 (2/3), 239-285.
- ROBERT, A. & VIVIER, L. (2013). Analyser des vidéos sur les pratiques des enseignants du second degré en mathématiques : des utilisations contrastées en recherche en didactique et en formation de formateurs – quelle transposition ? *Éducation et didactique*, 7-2, p. 115-144.
- SALIN M.H. (2008). Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège. Le facteur temps. *Bulletin de l'APMEP*, 478. p. 647-670.
- VERGNAUD G. (1991a). Langage et pensée dans l'apprentissage des maths. *Revue française de pédagogie* 96, 79-86.
- VERGNAUD G. (1991b) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques*, 10/2.3, 135-170
- VERGNAUD G. (2002) Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance, in Actes du Colloque GDM-2001 Jean Portugais (Ed) *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation*, pp. 6-27.
- VYGOTSKI, L. (1934/1997). *Pensée et langage*. Paris : La Dispute.

ANNEXE 1

Parmi les 6 situations ci-dessous, trouver une propriété qui est vérifiée par exactement 4 d'entre elles. Quelles sont ces 4 situations et quelle est cette propriété commune ? Expliquer de manière détaillée votre réponse.

Matériel disponible : Instruments de géométrie – Papier calque.



ANNEXE 2

Antoine – classe de sixième – 2012-2013

Première séance sur la symétrie orthogonale – extrait 1

Nadia dans les situations 1, 2, 4 et 6, elles sont symétriques.

P alors tu me dis elles / sont / symétriques. [écrit au tableau 2, 2, 4, 6]

P Euh, pardon tu m'as dit 1, 2, 4, 6, Nadia, 1, 2, 4, 6 ?

Nadia euh oui.

P 1, 2, 4, 6, Nadia prétend qu'elles sont symétriques, c'est sa propriété, là, donc voyez je marque le numéro des situations et les propriétés

E non

P alors il y a des objections là, Emir ?

Emir elle est pas symétrique la 4

P la 4 on me dit

E c'est pas bon.

P c'est pas bon.

Kevin elle est pas à l'endroit

P donc Kevin rajoute elle n'est pas à l'endroit.

P Eli qui va s'endormir, tu suis ?

Eli moi je dis c'est la 3 qui est pas pareil parce que la symétrie normalement ça doit faire comme un miroir et euh et comme et en vrai comme les deux sont du même sens, ben je dirais que c'est pas vraiment symétrique et je dirais que c'est la 6 la symétrique.