



HAL
open science

Pascal et la résistance à l'algèbre

Catherine Goldstein

► **To cite this version:**

Catherine Goldstein. Pascal et la résistance à l'algèbre. Courrier Blaise Pascal, 2024, 46, pp.175-195. <hal-04670544>

HAL Id: hal-04670544

<https://hal.science/hal-04670544v1>

Submitted on 12 Aug 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Pascal et la résistance à l'algèbre

Catherine Goldstein, CNRS, IMJ-PRG,
Sorbonne Université, Université Paris-Cité

L'essor de l'algèbre, en particulier symbolique, est en général perçu comme un des grands moteurs du développement des mathématiques au XVII^e siècle, où elle rénove de nombreux domaines, de la théorie des nombres à la mécanique ou la géométrie. Dans ce développement, Blaise Pascal semble occuper une position paradoxale : il est décrit tout aussi souvent comme un des grands créateurs de cette époque que comme un mathématicien résistant à l'usage de l'algèbre.

Cette résistance est soulignée très tôt dans l'historiographie. Dans une des premières études approfondies sur Pascal mathématicien, en 1878, Adolphe Desboves écrit : « Pascal [au contraire de Descartes] a la passion de la Géométrie, et il semble dédaigner l'Algèbre, comme un instrument inutile¹. » La polarité de la géométrie et de l'algèbre, attirant chaque mathématicien vers un pôle au détriment de l'autre, prend même des accents psychologiques chez Alexandre Koyré :

Les historiens des mathématiques nous disent [...] qu'il y a grosso modo deux types d'esprit mathématique : à savoir les géomètres et les algébristes ; ceux d'une part qui ont le don de voir dans l'espace « en bandant fortement leur imagination », comme le dit Leibniz [...] et d'autre part, ceux qui, tel Descartes, trouvent cet effort d'imagination [...] fatigant et qui préfèrent la pureté diaphane des formules algébriques. Quant à Pascal, son géométrisme inné a certainement été renforcé par l'éducation mathématique qu'il a reçue, et son anti-algèbrisme, par son hostilité constante envers Descartes².

Cette objection à l'algèbre devient alors une explication pour certains caractères à la fois textuels et épistémologiques des mathématiques pascaliennes. Ainsi, Jean-Louis Gardies explique :

Pascal refuse l'usage de tout appareil algébrique, à ce point qu'il préfère souvent raisonner sur l'*exemple* d'un nombre, que de raisonner sur un *nombre quelconque*, qu'il eût été naturellement amené à désigner par une lettre. Ce refus le conduit à donner des méthodes, là où le lecteur moderne, par ses habitudes intellectuelles, attendrait des *formules*³.

Cette représentation n'a d'ailleurs pas commencé avec les historiens. Pierre Fermat, qu'on ne peut accuser d'hostilité à Pascal, regrette ainsi de ne pas être « du sentiment de M. Pascal touchant l'Analyse spécieuse, de laquelle je fais plus grand cas que lui⁴ ». Les promoteurs convaincus de l'analyse algébrique cartésienne vont même plus loin. L'oratorien Jean Prestet, dont les *Elemens des mathématiques* se fondent entièrement sur un traitement unifié des nombres ordinaires et des expressions algébriques, trouve dans Pascal une illustration de la complexité et des dangers de la géométrie, dont l'algèbre préserverait :

N'est-ce pas là [en Géométrie] ce qu'on pourroit justement appeler des rompemens de teste ? Nous en avons un exemple tout visible dans la personne de Monsieur Paschal. Car on croit qu'il n'est mort si jeune que pour n'avoir pas assez ménagé les forces et l'étendue de son imagination. Les grands efforts qu'il était nécessairement obligé de faire pour imaginer et pour démêler ce nombre prodigieux de lignes et de figures embarrassées et pour les embrasser d'une seule vue luy attira cet épuisement général du cerveau qui l'enleva dans la fleur de son âge.

¹ Adolphe Desboves, *Étude sur Pascal et les géomètres contemporains*, Paris, Delagrave, 1878, p. 66.

² Alexandre Koyré, « Pascal savant », in *Blaise Pascal : L'homme et l'œuvre*, Paris, Éditions de Minuit, « Cahiers de Royaumont », 1956, p. 273-278.

³ Jean-Louis Gardies, *Pascal entre Eudoxe et Cantor*, Paris, Vrin, 1984, p. 101.

⁴ Lettre de Pierre Fermat à Pierre de Carcavi, c. 1656, in *Œuvres de Fermat*, éd. par Paul Tannery et Charles Henry, tome 2 : *Correspondance*, Paris, Gauthier-Villars, 1894, p. 315-216.

On ne doit pas craindre le même danger des sciences [l'Analyse et l'Algèbre] qu'on explique ici. Car quoi qu'elles conduisent plus loin, & qu'elles découvrent beaucoup plus de vérités, & en moins de temps que la Géométrie, cependant elles fatiguent d'autant moins l'esprit qu'on les pénètre davantage⁵.

Cette résistance, qu'on pourrait être tenté de qualifier de conservatrice, a été remise en question plus récemment dans les analyses profondes de Dominique Descotes, depuis l'intérieur du corpus pascalien. Réfutant à la fois toute polarisation tranchée et toute ignorance volontaire de la part de Pascal, déplaçant la question d'une opposition tranchée à une autre organisation disciplinaire, Descotes conclut par exemple :

Il ne faut cependant pas durcir les contrastes, ni surtout considérer le symbolisme algébrique cartésien comme la norme de l'époque. [...] Pascal n'ignore pas l'utilité du symbolisme algébrique [...] Mais plutôt qu'un domaine mathématique autonome, il voit dans l'algèbre un *organon*, au sens aristotélicien, un art auxiliaire qui apporte des *canonica praecepta*, des règles de transformations utiles, dont il ne refuse pas de se servir quand il le trouve profitable⁶.

La suggestion de porter attention aux différents niveaux d'organisation du savoir résonne d'ailleurs avec des remarques analogues d'Ernest Coumet, à propos d'autres auteurs du XVII^e siècle :

[Mersenne] ne donne pas non plus que Frenicle de formules. Ce qui en tient lieu, [c'est] la juxtaposition de certaines Tables de nombres accompagnées de leur loi de construction, et des règles qui permettent de passer de l'une à l'autre⁷.

I - Qu'est-ce que l'algèbre à Paris au milieu du XVII^e siècle à quoi sert-elle ?

Nous voudrions donc ici rouvrir le dossier des relations entre Pascal et l'algèbre depuis l'extérieur, c'est-à-dire en revenant sur les échelles d'intervention et les fonctions multiples de l'algèbre dans les cercles mathématiques où Pascal évolue, et plus généralement dans la France du XVII^e siècle. Pour Pierre Hérigone, dont le cours de mathématiques bilingue synthétise en particulier les connaissances algébriques de son temps et étend même le symbolisme jusqu'aux relations logiques des démonstrations,

la doctrine analytique ou. l'algèbre est l'art de trouver la grandeur incognuë, en la prenant comme si elle estoit cognuë et trouvant l'égalité entre icelle et les grandeurs données. [...] L'Algebre specieuse est celle qui exerce sa logique par les especes ou formes des choses designées par lettres de l'alphabet [...Elle] n'est pas limitée par aucun genre de probleme, et n'est pas moins utile à inventer toutes sortes de theorems, qu'à trouver les solutions et demonstrations des problemes⁸.

Promoteur de l'algèbre de Viète, Jacques Hume explique à peu près au même moment :

L'Algèbre est une arithmétique plus relevee que la commune, par laquelle on peut respondre à toutes sortes de questions proposées⁹.

Quant à Jean Prestet, grand admirateur de Descartes évoqué plus haut, il définit ainsi l'algèbre dans la première édition de ses *Elements*, en 1675 :

⁵ Jean Prestet, *Nouveaux elemens des mathématiques, ou principes généraux de toutes les sciences qui ont les grandeurs pour objets*, seconde édition, Paris, Pralard, 1689, vol. 1, preface.

⁶ Dominique Descotes, *Blaise Pascal : Littérature et Géométrie*, Clermont-Ferrand, Presses universitaires de Clermont-Ferrand, « CERHAC », 2001, p. 67.

⁷ Ernest Coumet, « Rapport au CNRS 1965-1966 », Carton CMT 326, Fonds Coumet, IMEC.

⁸ Pierre Hérigone, *Tome Second du Cours mathématique*, Paris, Henri Le Gras, 1634, Algèbre, Cap. I, p. 1-2.

⁹ Jacques Hume, *L'Algèbre de Viète d'une méthode nouvelle, claire et facile*, Paris, Louis Boulenger, 1636, p. 1.

Mais quoy que l'Arithmétique soit une science dont toutes les autres dépendent, cependant nous en expliquons une autre plus universelle, en nous servant des lettres de l'alphabet. Cette science qu'on appelle Algebre sert à éclaircir, à étendre, et à perfectionner autant qu'on le peut faire l'Arithmétique, et généralement toutes les sciences qui se rapportent aux mathématiques. Elle est si générale qu'elle considere toutes les grandeurs... Mais ce qu'il y a de plus considérable dans cette science n'est pas son étendue et son universalité, [...] c'est la facilité qu'elle donne à l'esprit pour decouvrir les vérites les plus cachées et dont il seroit absolument impossible de s'éclaircir par l'arithmétique & par la géométrie ordinaire, ny par le secours d'aucune science. Comme on ne peut donner à l'esprit plus d'étendue, et plus de capacité qu'il n'en a, cette science apprend seulement à le ménager. Elle lui represente sous des expressions tres courtes un assemblage de plusieurs idées¹⁰.

Membre de l'Académie royale des sciences, Michel Rolle définit l'algèbre comme « la science des grandeurs en général » et poursuit :

L'Algèbre est une science par laquelle on peut connaître les opérations qu'il faut faire, les quantitez sur lesquelles il faut opérer, & l'ordre qu'on doit suivre dans la resolution des question [...] Les Algébristes [...] donnent à chaque quantité inconnue le nom d'une lettre de l'Alphabet, en observant toujours de nommer les quantitez inegales par des caracteres differens.¹¹

Au tournant du siècle, Jacques Ozanam, par ailleurs plus critique sur l'étendue et la puissance de l'algèbre et sur son usage dans les démonstrations, reprend aussi certaines de ses caractéristiques :

L'Algèbre [...] est une sorte de calcul, par le moyen duquel on cherche une vérité cachée sur un sujet de mathématique, & la résolution d'un problème possible dans les mathématiques ; de sorte que par ce calcul, on peut decouvrir les propriétés les plus cachées de la quantité, & en résoudre les questions les plus difficiles. L'Algèbre qui est à present en usage parmi nous [...] se pratique par les especes ou caracteres de l'Alphabet. [dots] Ces caractères ou lettres de l'Alphabet soulagent extrêmement la mémoire et l'imagination de ceux qui s'apliquent à cette belle Science¹².

Autrement dit, l'algèbre (sous différents avatars) remplit alors plusieurs fonctions : elle est un symbolisme, devenant associé, en France en particulier, avec une représentation par des lettres ; elle est un traitement universel, ou général, des quantités, sans distinction des genres de quantités impliquées ; elle est une panoplie de règles de transformation des équations (ou des égalités entre quantités) ; elle est une méthode d'invention, parfois identifiée comme la méthode analytique par excellence ou, au moins, elle est directement associée à une méthode ; enfin, elle est un ensemble, plus ou moins étendu selon les auteurs, de problèmes et de leurs résolutions. Il convient donc examiner, du point de vue de Pascal et de son environnement, comment sont négociées ces différentes fonctions.

II- Des lettres et de leur calcul

S'il faut le souligner encore, après D. Descotes, l'usage de symboles littéraux n'est pas propre aux algébristes proclamés et Pascal s'en sert à l'occasion, avec un discernement qu'il est instructif d'examiner de plus près. Dans son petit traité *De numeris multiplicibus ...*, Pascal cherche par exemple à « reconnaître par l'addition seule des chiffres d'un nombre donné s'il est multiple d'un autre nombre donné » (un résultat de ce type bien connu, alors et maintenant, étant qu'un nombre est divisible par 9 lorsque la somme de ses chiffres en base 10 l'est). Il commence alors :

¹⁰ Jean Prestet, *Elemens des mathématiques ou principes generaux de toutes les sciences qui ont les grandeurs pour objet*, Paris, André Pralard, 1675, préface.

¹¹ Michel Rolle, *Traité d'algebre, ou principes généraux pour resoudre les questions de mathématique*, Paris, Estienne Michallet, 1690, p. 2-3.

¹² Jacques Ozanam, *Nouveaux Elemens d'Algebre*, Amsterdam, Georges Gallet, 1702, t. 1, p. 1-2.

Ut haec solution fiat generalis, litteris utemur vice numerorum. Si ergo divisor, numerus quilibet expressus per litteram A : dividendus autem, numerus expressus per litteram TVNM, quarum ultima M exprimit numerum quemlibet in unitatum columna collocatum ; N, vero, numerum quemlibet in denariorum columna ; V, numerum quemlibet in columna centenariorum ; T, autem numerum quemlibet in columna millenariorum, & sic deinceps in infinitum [...] ¹³.

L'écriture littérale est associée à la généralité, mais elle se décline ici de deux manières : une seule lettre désigne le diviseur, mais pour le dividende, chaque chiffre utilise une lettre différente, qui sert de coefficient à la puissance de 10 correspondant à la place du chiffre dans l'écriture du nombre. Ce double usage est bien sûr nécessaire pour la procédure de Pascal, qui établit la divisibilité d'un nombre dividende par A à partir de celles des puissances de 10, combinée aux coefficients littéraux (M, N, V, T, \dots).

Ceci n'est qu'un exemple de ce que l'usage des lettres en mathématiques à cette époque est plus courant et plus large que son association répétée avec l'algèbre ne le laisse supposer : outre les lettres apparaissant bien sûr déjà dans les textes euclidiens (qui repèrent des grandeurs, mais de manière disjointe, sans que le symbolisme ne prenne en compte leurs relations), s'est développé un usage de faire des mathématiques (combinatoires, en particulier) sur les mots, en fait sur leurs lettres, qui les rend interchangeable avec d'autres signes, mais du même coup incitent réciproquement à les y substituer dans d'autres situations¹⁴.

Marin Mersenne, par exemple, retrouvant les mêmes calculs dans sa recherche du plus beau des chants, d'une langue universelle ou des anagrammes, commente que la nature des objets importe peu et qu'on pourrait aussi bien prendre des fleurs, des atomes, des soldats, ou, du même coup, des lettres systématiquement¹⁵.

¹³ Blaise Pascal, « De numeris multiplicibus es sola characterum numericorum additione agnoscendis », in *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traités sur la mesme matiere*, Paris, Guillaume Desprez, 1665, p. 42-48, citation p. 42-43 [Pour que cette solution devienne générale, nous nous servirons de lettres au lieu de chiffres. Soit donc le diviseur un nombre quelconque exprimé par la lettre A, et le dividende un nombre exprimé par les lettres TVNM, dont la dernière M exprime un nombre quelconque placé dans la colonne des unités ; mais N un nombre quelconque dans la colonne des dizaines, V un nombre quelconque dans la colonne des centaines ; et T un nombre quelconque dans la colonne des milliers et ainsi ensuite à l'infini ...].

¹⁴ L'usage des lettres dans le triangle arithmétique de Pascal a fait l'objet d'une étude approfondie : Dominique Descotes, « Les lettres du *Triangle arithmétique* », *Courrier Blaise Pascal*, 2022, vol. 44, p. 121-140. Mentionnons aussi par exemple que Claude Merker a mis en évidence un autre emploi pascalien important du symbolisme littéral en géométrie, voir Claude Merker, « L'art de la disposition dans les écrits de Calcul infinitésimal de Pascal », exposé à la journée d'études *Descotes, lecteur de Pascal : les sciences en toutes lettres*, 8 février 2024.

¹⁵ Ernest Coumet, *Mersenne, Frenicle et l'élaboration de l'analyse combinatoire dans la première moitié du xvii^e siècle*, thèse, 1968 ; repr. in Ernest Coumet, *Œuvres*, t. II, éd. par Catherine Goldstein, Besançon, PUFC, 2019, ch. 3, en particulier p. 137.

Proche de Mersenne et futur membre fondateur de l'Académie des sciences, Bernard Frenicle de Bessy, connu lui aussi pour ne pas utiliser l'algèbre¹⁶, se sert néanmoins de lettres, plus précisément d'une notation inspirée de Viète, pour remplacer des nombres à l'occasion. Cherchant par exemple à combien de triangles rectangles en nombres un nombre entier peut servir d'hypoténuse, il constate que le résultat ne dépend pas de la valeur des facteurs premiers dont le nombre entier est composé, mais seulement de certaines de leurs caractéristiques, de leur nombre et de leurs multiplicités¹⁷. « On prendra seulement les puissances, puisque la diversité des nombres premiers n'y fait rien. Je pose donc que le nombre soit A. par B.q par C.cub [...]. Les parties sont premièrement en grosses lettres. », écrit alors Frenicle, accompagnant de listes et de tables son raisonnement qui opère directement sur les lettres¹⁸.

De même, l'usage d'identités remarquables et des manipulations simples sur les lettres ne sont pas rares. Dans son *Traité des triangles rectangles en nombres*, Frenicle donne parfois des preuves euclidiennes (les lettres y représentant un nombre et son carré étant alors choisies indépendamment), parfois des preuves algébriques, parfois les deux. Ayant par exemple désigné deux nombres quelconques par A et B, et baptisé dans sa première preuve E, G, F la somme de leurs carrés, la différence de leurs carrés et le double de leur produit (comme on le ferait dans une preuve euclidienne), il indique dans une preuve alternative, dite « algébrique » que $A^2 + B^2$, $A^2 - B^2$, $2AB$ sont les trois nombres E, G, F et il vérifie alors par un calcul algébrique la relation de Pythagore

$$(A^2 + B^2)^2 = (A^2 - B^2)^2 + (2AB)^2,$$

qui montre que les trois nombres ainsi construits forment les trois côtés d'un triangle rectangle en nombres (en termes modernes, un triplet pythagoricien)¹⁹. Cette utilisation des transformations algébriques, valant preuve, est autorisée par l'insertion d'une « Supposition XII » :

On suppose aussi que ce qu'on fait voir par le Calcul de l'algèbre, n'a pas besoin d'autre preuve ; et on l'emploie dans ce traité lorsque les propositions sont faciles, ou que leurs démonstrations sont trop obscures²⁰.

L'ajout d'une autorisation explicite (sous forme de « supposition ») pour utiliser librement les identités algébriques est suggestif de la place ambiguë que l'algèbre occupe dans les cercles parisiens du milieu du XVII^e siècle. Un écho s'en fait entendre dans la demande d'un avis adressée par Pascal à Pierre Fermat le 29 juillet 1654 :

Soient deux racines R, S, différant d'une unité; je dis que $R^3 - S^3 - 1$ est égal à la somme des nombres contenus dans S, prise six fois. Et en effet que S soit appelé A ; donc R est A+1. Donc le cube de la racine R, ou A+1, est $A^3 + 3A^2 + 3A + 1^3$. Le cube de S, ou A est A^3 , et leur différence est $3A^2 + 3A + 1$, c'est-à-dire $R^3 - S^3$. Donc, si on ôte l'unité, $3A^2 + 3A = R^3 - S^3 - 1$.

Mais le double de la somme des nombres contenus dans A ou S est [par un lemme connu] égal à $A \times (A + 1)$, c'est-à-dire $A^2 + A$. Donc le sextuple de la somme des nombres contenus dans A est égal à $3A^2 + 3A$. Mais $3A^2 + 3A = R^3 - S^3 - 1$. Par conséquent, $R^3 - S^3 - 1$ est égal au sextuple de la somme des nombres contenus dans A ou S. Ce qu'il fallait démontrer.

¹⁶ René Descartes lui écrit par exemple en janvier 1639: « Vous y savez plus [sur les nombres] que je n'aurois crû qu'il fust possible d'y scavoir, sans le secours de l'algèbre, de laquelle on m'a dit que vous n'usez point », René Descartes, *Œuvres*, éditées par Charles Adam et Paul Tannery, Paris, Vrin, 1996, t. II, lettre CLIII, p. 471.

¹⁷ Le résultat sera par exemple le même pour $5915 = 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 13$ et $9775 = 5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 23$ qui ont tous deux deux diviseurs premiers de la forme $4n+1$ (5 et 13, resp. 5 et 17 resp.), dont un de multiplicité 2 (13, resp. 5), et un diviseur premier de la forme $4n+3$ (7, resp. 23).

¹⁸ Bernard de Frenicle, *Méthode pour trouver la solution des Problemes par les exclusions*, in *Divers ouvrages de mathématique et de physique, par Messieurs de l'Academie royale des sciences*, Paris, Imprimerie royale, 1693, p. 1-44, citation p. 19.

¹⁹ Bernard Frenicle, *Traité des triangles rectangles en nombres*, Paris, Michallet, 1676, p. 25.

²⁰ *Ibidem*, p. 8.

On ne m'a pas fait de difficulté là-dessus, mais on m'a dit qu'on ne m'en faisait pas par cette raison que tout le monde est accoutumé aujourd'hui à cette méthode ; et moi je prétends que, sans m'en faire grâce, on doit admettre cette démonstration comme d'un genre excellent²¹.

On remarque que les deux nombres quelconques, désignés par des lettres R et S en quelque sorte indépendantes, comme dans la tradition euclidienne, sont d'abord ramenées à une même lettre A (valant en fait exactement S , comme cela est rappelé plusieurs fois dans le texte) qui, elle, porte alors les relations exprimées par les hypothèses du problème, c'est-à-dire le fait que la différence entre les deux nombres est l'unité, soit $R = A+1$. Un simple calcul algébrique donne alors $R^3 - S^3 - 1 = 3A^2 + 3A = 3A(A + 1)$. Or, selon un lemme connu, comme dit Pascal, la somme des entiers de 1 à A (ce que Pascal appelle la « somme des nombres contenus dans A ») est la moitié du produit de A par $A+1$. Le résultat cherché s'en déduit immédiatement.

Dans son petit traité sur la sommes des puissances²², où il explique comment trouver la somme des puissances (quelconques) de nombres entiers en progression arithmétique, de premier terme et de raison quelconques, Pascal commence par affirmer que sa méthode « unique et très générale » est en outre simple au point de pouvoir se passer de l'aide des lettres dont auraient besoin les énoncés plus difficiles. Mais il pose immédiatement sous la forme $A+3$ l'exemple d'un binôme dont il calcule par développement algébrique la puissance quatrième $A^4 + 12A^3 + 54A^2 + 108A + 81$. Il l'utilise ensuite pour calculer la somme des cubes $5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3$: en appliquant cette identité successivement à $A=5$, puis $A=8$, $A=11$, $A=14$, il obtient en effet l'expression des puissances quatrièmes de 8, 11, 14 et 17 en fonction de celles de 5, 8, 11 et 14, respectivement et de puissances inférieures.

$$\begin{aligned} 8^4 &= (5 + 3)^4 = 5^4 + 12 \cdot 5^3 + 54 \cdot 5^2 + 108 \cdot 5 + 81 \\ 11^4 &= (8 + 3)^4 = 8^4 + 12 \cdot 8^3 + 54 \cdot 8^2 + 108 \cdot 8 + 81 \\ 14^4 &= (11 + 3)^4 = (11)^4 + 12 \cdot (11)^3 + 54 \cdot (11)^2 + 108 \cdot 11 + 81 \\ 17^4 &= (14 + 3)^4 = (14)^4 + 12 \cdot (14)^3 + 54 \cdot (14)^2 + 108 \cdot 14 + 81. \end{aligned}$$

En additionnant et simplifiant, il obtient (*)

$$17^4 - 5^4 = 12(5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3) + 54(5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2) + 108(5 + 8 + 11 + 14) + 324.$$

La somme des cubes cherchée s'en déduit donc dès qu'on connaît la somme des nombres de la même progression et la somme de leurs carrés, ainsi que deux puissances quatrièmes (celles de 17 et de 5). Autrement dit, la somme des puissances d'une progression arithmétique (de n'importe quelle longueur) s'obtient à partir de la somme des puissances plus petites de la même progression et d'un calcul de puissances supérieures, mais de deux nombres seulement.

Il est instructif de comparer cette solution à la manière dont l'algébriste Jean Prestet résout le même problème. Dans le livre VII du premier volume de la deuxième édition de son ouvrage, en 1689, Prestet énonce après plusieurs cas particuliers ce qu'il appelle le « Theoreme VI et general » :

Et généralement en toute progression arithmétique $a, a+d, a+2d, a+3d$, telle puissance qu'on voudra du terme $a+4d$, qui suit le dernier de plus près, comme la quatrième $a^4 + 16a^3d + 96a^2dd + 256ad^3 + 256d^4$, moins une semblable a^4 du premier terme a , & et moins encore une semblable d^4 de la différence d prise 4 fois [...] et moins encore un produit $16ad^3 + 24d^4$ de la somme des termes par $4d^3$ [...] moins aussi un autre produit $22a^2dd + 72ad^3 + 84d^4$ de la somme entière des quarez par $6dd$ [...] doit enfin avoir pour juste valeur un produit $16a^3d + 72a^2dd + 168ad^3 + 144d^4$ de la somme entière des cubes par $4d$ [...] Et c'est toujours la même chose des autres puissances de telle progression arithmétique qu'on voudra proposer²³.

²¹ *Œuvres de Fermat*, éd. par Paul Tannery et Charles Henry, tome 2 : *Correspondance*, Paris, Gauthier-Villars, 1894, p. 297. Le début (jusqu'à : « On ne m'a pas fait ») est en latin, ici ma traduction.

²² Blaise Pascal, « Potestatum Numericarum Summa », in *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matiere*, Paris, Guillaume Desprez, 1665, p. 34-41.

²³ Jean Prestet, *Nouveaux elemens de mathematiques*, Paris, Pralard, 1689, t. I, p. 177.

On reconnaît ici l'exemple (*) mis en avant par Pascal du calcul de la somme des cubes d'une progression arithmétique à 4 termes : Prestet note simplement par des lettres le premier terme a (qui est 5 pour Pascal) et la raison d de la progression (3 pour Pascal). Le reste suit *mutatis mutandis* la procédure de Pascal : Prestet élève $a+4d$ ($5+4.3=17$ dans l'exemple de Pascal) à la puissance 4 (une de plus que la puissance cubique cherchée), soustrait la puissance quatrième du premier terme a^4 (5^4 chez Pascal), puis les termes issus du développement : le terme d^4 (81 chez Pascal) pris 4 fois, soit 324, les termes correspondants à la somme des nombres de la progression et à la somme de leurs carrés, avec les coefficients appropriés. Ces coefficients 12, 54, 108, ... (pour Pascal) ou $4d$, $6dd$, $4d^3$, ... (pour Prestet) sont en fait issus pour tous deux des calculs d'un binôme pour les différentes puissances, et pour tous deux inscrits à partir de la lecture de tableaux, triangle arithmétique pour Pascal et table des puissances construite auparavant par Prestet.

La procédure est donc identique, appuyée chez les deux mathématiciens par les calculs binomiaux. Elle est expliquée sur le même exemple (la somme des cubes) chez les deux auteurs, à ceci près que deux données de base, le premier terme (a ou 5) et la raison (d ou 3) de la progression considérée sont repérées par des lettres chez Prestet. Le calcul des puissances du binôme apparaît ici comme une plaque tournante, puisqu'il repose à la fois sur le développement algébrique des puissances et sur la détermination de coefficients binomiaux qui pour les deux auteurs proviennent de lecture de tables dont les usages sont aussi combinatoires.

La comparaison est encore plus frappante dans la première édition des *Elemens* de Prestet, où celui-ci, juste avant de proposer ses problèmes sur les progressions arithmétiques, commence par souligner l'importance de

trouver des moyens généraux pour découvrir en peu de temps ces veritez. Or le plus general, le plus facile et peut-être l'unique de tous les moyens que l'on puisse inventer à cet effet, c'est de trouver des égalitez qui representent la dependance que les veritez inconnuës que l'on cherche à connoître ont avec d'autres veritez que l'on connoît déjà²⁴.

Compte tenu de la profession de foi algébriste, et même cartésienne, de Prestet dans la préface de son ouvrage, il serait cohérent d'interpréter comme algébrique la démarche de « trouver des égalitez ». Or, comme on vient de le voir, elle s'applique tout aussi parfaitement à celle de Pascal, dont la procédure fait apparaître la « dépendance que les veritez inconnuës » (ici la somme des cubes des termes d'une progression arithmétique) « ont avec d'autres veritez que l'on connaît déjà » (ici la somme des termes de la progression et la somme de leurs carrés). Prestet manifeste d'ailleurs dans sa première édition que sa version algébrique est conçue au plus près de celle Pascal, en choisissant comme exemple la progression 5, 8, 11, 14 elle-même dans l'énoncé du problème ; il ne la remplace par a , $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ que dans ce qu'il appelle la démonstration²⁵ et attribue explicitement à Pascal « l'invention du probleme et des corollaires²⁶ ».

III- Sur l'universalité de l'algèbre

Comme le montre l'exemple de la transcription de Prestet, la généralité ne dépend donc que très indirectement de l'usage d'un symbolisme littéral. L'argument selon lequel l'algèbre est universelle est un peu plus délicat, car il a deux versants.

²⁴ Jen Prestet, *Elemens de mathématiques*, op. cit., p. 176.

²⁵ *Ibidem*, p. 179-180. Seule cette démonstration est reproduite dans la deuxième édition, sans exemple numérique, comme expliqué ci-dessus.

²⁶ *Ibidem*, p. 181.

Le premier est celui d'une universalité quasi-ontologique : l'algèbre serait universelle, car elle traite indifféremment toutes sortes de quantités, en particulier les nombres et les grandeurs continues de la géométrie, en les désignant toutes par des lettres sur lesquelles s'appliquent les mêmes règles de transformation.

De fait, cette universalité est un point de contestation, car les arithméticiens reprochent justement aux algébristes de ne pouvoir prendre en compte les particularités des solutions requises dans certains problèmes, typiquement ceux où des entiers (ou parfois des nombres rationnels) sont exigés²⁷.

Mais en l'occurrence, Pascal est tout à fait capable, dans les conditions requises, d'effacer la barrière entre les problèmes sur les nombres et sur les grandeurs continues. À la fin de sa procédure pour calculer les sommes de puissances d'entiers en progression arithmétique, il commente :

Quantum haec notitia ad spatiorum curvilinearum dimensiones conferat, satis norunt qui in indivisibilium doctrina tantisper versatis sunt. Omnes enim omnium generum Parabolae illico quadrantur, & alia innumera facillime mensurantur.
Si ergo illa, quae hac methodo in numeris reperimus, ad quantitatem continuam applicare libet, hi possunt institui canones²⁸.

Ce transfert (pour lequel Pascal adapte simplement ses calculs en expliquant qu'il faut négliger les sommes de puissances inférieures à celle considérée) est d'ailleurs aussi mentionné par Prestet. Par-delà la séparation traditionnelle entre continu et discret, il exprime pour Pascal l'unité qu'aime la nature.

IV- De la méthode

Comme il s'agit d'une transposition de procédure, plus que d'une identité stricte, c'est aussi au second versant de l'universalité que répond la démarche de Pascal. Ce versant, épistémologique, s'exprime d'ordinaire par une méthode d'invention destinée à résoudre une gamme aussi étendue que possible de problèmes. Même si le changement de rôle de la méthode, du contexte pédagogique à celui de *l'inventio*, est connu depuis longtemps, et bien plus largement qu'en mathématiques, il a surtout été examiné pour ce domaine dans le cas de Viète, de Descartes, de Fermat, c'est-à-dire, sous de multiples formes, en association à une méthode algébrique²⁹. Or, d'autres auteurs promeuvent d'autres approches, qui organisent néanmoins tout ou partie du savoir mathématique avec efficacité.

²⁷ Sur ces controverses et leurs enjeux, voir Catherine Goldstein, « Routine Controversies : Mathematical Challenges in Mersenne's Correspondence », *Revue d'histoire des sciences*, 2013, vol. 66-2, p. 249-273.

²⁸ Blaise Pascal, « Potestatum Numericarum Summa », *op.cit.*, p. 40 [Combien cette connaissance se transporte aux dimensions des espaces curvilinéaires, le sauront assez ceux qui sont un tant soit peu versés dans la théorie des indivisibles. En effet, toutes les paraboles de tous les genres sont carrées sur le champ et d'innombrables autres choses sont mesurées très facilement. Si donc il est permis d'appliquer à la quantité continue ce que par cette méthode nous avons trouvé en nombres, on peut établir ces règles].

²⁹ Pour quelques repères significatifs, voir par exemple Michael Mahoney, *The Royal Road: the development of algebraic analysis from 1550 to 1650, with special reference to the work of Pierre de Fermat*, PhD, Princeton University, 1967 ; Giovanna Cifoletti, *La Méthode de Fermat, son statut et sa diffusion*, Paris, Société française d'histoire des sciences et des techniques, 1990 ; Henk Bos « Tradition and modernity in early modern mathematics: Viète, Descartes and Fermat », in Catherine Goldstein, Jeremy Gray & Jim Ritter (dir.), *L'Europe mathématique, histoires, mythes, identités: Mathematical Europe, history, myth, identity*, Paris, Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 1996, p. 183-204 ; Sébastien Maronne, « Une autre Géométrie de Descartes : le problème des trois bâtons ou 'comment bien démêler les équations' », in Thibault Gress (dir.), *Cheminer avec Descartes. Concevoir, raisonner, comprendre, admirer et sentir*, Paris, Classiques Garnier, 2018, p. 313-341 ; Marco Panza, *Modes de l'analyse et formes de la géométrie*, Paris, Vrin, 2022.

Frenicle, par exemple, applique sa *Méthode pour trouver la solution des problèmes par les exclusions* à une gamme de sujets relatifs aux nombres entiers (et parfois rationnels) : l'étude des diviseurs (les « parties aliquotes »), les triangles rectangles en nombres, les combinaisons, les carrés magiques, les nombres figurés³⁰. La méthode de Frenicle est de nature expérimentale : elle est fondée sur la construction de tables numériques, et sur leur examen systématisé, à partir d'observations contrôlées, de comparaisons d'instances, d'élimination (« exclusion ») d'instances négatives et de tests³¹. Théorisée en dix règles dans le traité sur de *Méthode*, elle est explicitée sur divers exemples, et peut être détectée au fil des problèmes dans les autres traités de Frenicle, imprimés ou manuscrits, dont nous disposons,.

De ce point de vue, le *Traité du triangle arithmétique* de Pascal occupe une place tout à fait analogue à la *Méthode des exclusions* : il conditionne un dispositif qui permet à Pascal d'aborder divers types de questions sur les entiers, les combinaisons, les puissances des binômes et les probabilités. Le triangle est bien sûr d'abord une table de nombres, à la construction réfléchie et soigneuse. À cet égard, il est éclairant de le comparer aux autres versions (contemporaines ou non) souvent confondues avec ce triangle arithmétique (et baptisées du même nom), que ce soit celle, courante, où le triangle présenté repose sur sa base ou d'autres variantes, comme la « table très belle et très utile » de Marin Mersenne pour le calcul des combinaisons, où des colonnes verticales hébergent les nombres des rangées du triangle pascalien. Dans celle de Mersenne, comme l'a remarqué Ernest Coumet, la taille des colonnes s'adaptant à celle des nombres, il n'est pas possible de saisir confortablement les multiples symétries et sens de lecture que tire Pascal de son triangle : « du fait de cette disposition matérielle, des propriétés fondamentales de symétrie se trouvaient masquées à la vue³² » (Fig. 1).

Tabella pulcherrima & utilissima Combinationis duodecim Cantilenarum.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1	1											
2	1	1										
3	1	3	1									
4	1	6	10	1								
5	1	10	35	35	1							
6	1	15	63	126	126	1						
7	1	21	105	378	630	378	1					
8	1	28	175	672	1764	1764	175	1				
9	1	36	252	1260	3528	6720	3528	252	1			
10	1	45	336	1980	5940	15120	15120	5940	1980	1		
11	1	55	429	2730	7920	19440	35280	35280	19440	7920	1	
12	1	66	528	3528	9828	24024	47520	79200	79200	47520	24024	9828
13	1	78	636	4368	11978	29634	57156	90096	119780	119780	57156	29634
14	1	91	756	5292	14349	35271	68544	104160	143490	143490	68544	35271
15	1	105	888	6354	17054	42240	83775	125472	170540	170540	83775	42240
16	1	120	1035	7794	19125	47628	93312	139824	191250	191250	93312	47628
17	1	136	1200	9240	21618	54264	106272	158112	216180	216180	106272	54264
18	1	153	1386	10890	24450	62160	121644	177120	244500	244500	121644	62160
19	1	171	1596	12768	27660	71400	141120	207360	276600	276600	141120	71400
20	1	190	1830	14850	31200	80760	162240	234240	312000	312000	162240	80760
21	1	210	2100	17160	35100	92400	187008	266880	351000	351000	187008	92400
22	1	231	2431	19740	39380	104400	211200	296640	393800	393800	211200	104400
23	1	253	2835	22680	44100	117600	236160	330240	441000	441000	236160	117600
24	1	276	3312	26000	49380	132000	262080	369600	493800	493800	262080	132000
25	1	300	3870	29940	55110	148500	290880	414720	551100	551100	290880	148500
26	1	325	4515	34380	61440	167040	322560	453120	614400	614400	322560	167040
27	1	351	5250	39480	68400	187680	368640	510720	684000	684000	368640	187680
28	1	378	6084	45240	76020	210840	419520	571200	760200	760200	419520	210840
29	1	406	7020	51660	84420	236640	476160	637440	844200	844200	476160	236640
30	1	435	8064	58680	93540	265200	538560	718080	935400	935400	538560	265200
31	1	465	9225	66420	103410	296640	606240	806400	1034100	1034100	606240	296640
32	1	496	10500	74940	114120	330240	680640	900960	1141200	1141200	680640	330240
33	1	528	11880	84240	125700	367040	762240	1008000	1257000	1257000	762240	367040
34	1	561	13368	94680	138120	407280	841440	1119360	1381200	1381200	841440	407280
35	1	596	14970	106260	151380	451040	929280	1246080	1513800	1513800	929280	451040
36	1	633	16695	119100	165540	500040	1025280	1380480	1655400	1655400	1025280	500040
37	1	672	18540	133200	180660	548640	1129920	1524480	1806600	1806600	1129920	548640
38	1	713	20520	148680	197700	606240	1244160	1670400	1977000	1977000	1244160	606240
39	1	756	22640	165600	216720	672840	1369440	1828800	2167200	2167200	1369440	672840
40	1	801	24900	184080	237780	748640	1506240	2003200	2377800	2377800	1506240	748640
41	1	848	27300	204180	260940	834000	1656000	2207040	2609400	2609400	1656000	834000
42	1	897	29840	226620	286260	929280	1819200	2432640	2862600	2862600	1819200	929280
43	1	948	32520	251400	313800	1034400	2006400	2680320	3138000	3138000	2006400	1034400
44	1	1001	35340	279540	343620	1148640	2219040	2952000	3436200	3436200	2219040	1148640
45	1	1056	38400	311100	375780	1282080	2456640	3258240	3757800	3757800	2456640	1282080
46	1	1113	41610	345480	410340	1436640	2721600	3599040	4103400	4103400	2721600	1436640
47	1	1172	45000	382680	448440	1612320	2915040	3975360	4484400	4484400	2915040	1612320
48	1	1233	48570	423540	490200	1810080	3138240	4288320	4902000	4902000	3138240	1810080
49	1	1296	52320	468000	535620	2031360	3397440	4640640	5356200	5356200	3397440	2031360
50	1	1361	56250	516180	584820	2276640	3697920	5036160	5848200	5848200	3697920	2276640
51	1	1428	60360	568200	637860	2546080	4033200	5468160	6378600	6378600	4033200	2546080
52	1	1497	64650	629280	695820	2840320	4408800	5946240	6958200	6958200	4408800	2840320
53	1	1568	69120	690420	758760	3160320	4827840	6464640	7587600	7587600	4827840	3160320
54	1	1641	73770	752640	826680	3506400	5293760	7072320	8266800	8266800	5293760	3506400
55	1	1716	79680	816180	899640	3879360	5800640	7768800	8996400	8996400	5800640	3879360
56	1	1793	85800	882240	977700	4281120	6348480	8511360	9777000	9777000	6348480	4281120
57	1	1872	92130	951780	1060860	4813440	6933600	9288960	10608600	10608600	6933600	4813440
58	1	1953	98680	1024020	1149180	5377440	7560000	10064640	11491800	11491800	7560000	5377440
59	1	2036	105360	1100220	1242720	6074400	8232320	10998720	12427200	12427200	8232320	6074400
60	1	2121	112260	1180380	1342620	6907200	8955840	12096000	13426200	13426200	8955840	6907200
61	1	2208	119380	1264620	1448880	7879200	9734400	13363200	14488800	14488800	9734400	7879200
62	1	2297	126720	1353240	1562520	8992800	10673280	14803200	15625200	15625200	10673280	8992800
63	1	2388	134280	1445460	1683660	10248000	11782080	16422400	16836600	16836600	11782080	10248000
64	1	2481	142060	1541280	1812300	11544000	12966400	18228000	18123000	18123000	12966400	11544000
65	1	2576	150060	1640700	1948560	12912000	14332800	19996800	19485600	19485600	14332800	12912000
66	1	2673	158280	1743720	2093460	14452800	15883200	21945600	20934600	20934600	15883200	14452800
67	1	2772	166720	1850340	2247000	16147200	17624000	24086400	22470000	22470000	17624000	16147200
68	1	2873	175380	1960560	2409180	17988000	19560000	26438400	24091800	24091800	19560000	17988000
69	1	2976	184260	2074380	2579940	19992000	21708800	29008000	25799400	25799400	21708800	19992000
70	1	3081	193360	2191800	2759340	22176000	24038400	31804800	27593400	27593400	24038400	22176000
71	1	3188	202680	2312940	2947420	24640800	26587200	34963200	29474200	29474200	26587200	24640800
72	1	3297	212220	2437740	3144180	27344000	29443200	38496000	31441800	31441800	29443200	27344000
73	1	3408	221980	2566200	3349620	30288000	32592000	42422400	33496200	33496200	32592000	30288000
74	1	3521	231960	2698340	3563760	33422400	36048000	46752000	35637600	35637600	36048000	33422400
75	1	3636	242160	2834100	3786600	36840000	40003200	51494400	37866000	37866000	40003200	36840000
76	1	3753	252580	2973540	4018140	41443200	44361600	56688000	40181400	40181400	44361600	41443200
77	1	3872	263220	3116680	4258380	47232000	49142400	62342400	42583800	42583800	49142400	47232000
78	1	3993	274080	3264420	4507320	53270400	54273600	68486400	45073200	45073200	54273600	53270400
79	1	4116	285160	3416680	4765080	59664000	59774400	75144000	47650800	47650800	59774400	59664000
80	1	4241	296460	3572580	5031780	66422400	65664000	82536000	50317800	50317800	65664000	66422400
81	1	4368	307980	3732120	5306540	73560000	72000000	90684000	53065400	53065400	72000000	73560000
82	1	4497	319720	3895340	5599560	81086400	78806400	99624000	55995600	55995600	78806400	81086400
83	1	4628	331680	4062360	5911020	89006400	86083200	109488000	59110200	59110200	86083200	89006400
84	1	4761	343860	4233180	6241140	97425600	93820800	120312000	62411400	62411400	93820800	97425600
85	1	4896	356260	4407720	6589140	106350000	102064000	132144000	65891400	65891400	102064000	106350000
86	1	5033	368880	4585980	7055220	115896000	110832000	145032000	70552200	70552200	110832000	115896000
87	1	5172	3817									

Poser le triangle sur sa base pour le construire, par ailleurs, bloquerait l'écriture de son extension, au cas où elle serait nécessaire. C'est une caractéristique des tables construites de manière à être propices à la recherche, comme Frenicle le met en valeur explicitement dans sa propre *Méthode* : la troisième de ses règles demande de fixer un bon ordre pour construire les tables et la construction pascalienne semble faite pour respecter cette consigne³³ : à partir d'un seul nombre, le générateur, posé dans la cellule en haut et à gauche du tableau, celui-ci se remplit uniformément, de gauche à droite et de haut en bas, « par cette seule règle » : le nombre à poser dans une des cellules de sa table s'obtient en ajoutant le nombre contenu dans la cellule au-dessus d'elle et le nombre contenu dans la cellule à sa gauche. Qu'on ne s'y trompe pourtant : Pascal appelle bien « base » les cellules, maintenant placées en diagonale dans cette disposition du triangle, qui correspondraient aux bases successives de triangles de plus en plus grands qui s'y poseraient. Le problème principal, résolu dans l'exposé de la construction, est le calcul direct du nombre à placer dans une cellule, sans passer par la construction récurrente originelle.

Ceci fait, le triangle arithmétique devient alors le centre méthodologique d'où peuvent se déployer plusieurs procédures, grâce à ses multiples interprétations : « c'est une chose étrange combien il est fertile en propriétés³⁴ ». Les rangs (horizontaux) contiennent les entiers naturels, puis les nombres triangulaires, puis les nombres pyramidaux, etc. La cellule (r, e) du rang r et d'exposant (c'est-à-dire de rangée verticale) e (donc de base $r+e-1$) contient le nombre de choix de $r-1$ choses parmi $r+e-2$ (c'est-à-dire les nombres de combinaisons). Les cellules le long d'une même base donnent les coefficients binomiaux pour l'élévation à la puissance correspondante (d'où les calculs de sommes de puissances évoqués plus haut). Peuvent se lire aussi les solutions de problèmes de partis (c'est-à-dire des questions de probabilités), la divisibilité lue à partir de la somme des chiffres d'un nombre, et l'étude des nombres produits (nous dirions des factorielles).

Le triangle apparaît alors à la fois comme une table-ressource numérique où piocher des informations dans la résolution de problèmes spécifiques, comme un objet mathématique à part entière et comme le support d'une méthode mathématique. Nous avons vu précédemment comment il est mobilisé pour déterminer les coefficients (binomiaux) à utiliser pour calculer les sommes de puissances d'une progression et, en même temps, la méthode de consultation et d'usage dans ce cas. Les autres petits traités qui accompagnent la publication de 1665 font de même, décrivant dans chaque situation comment se référer au triangle et s'en servir. Il s'agit bien ici de méthode d'invention pour résoudre des problèmes, au sens de l'époque, c'est-à-dire une procédure générale qui se décline spécifiquement, avec des modifications appropriées à chaque situation³⁵.

³³ On remarquera au passage que Frenicle cite les ordres numériques de Pascal quand il applique sa méthode aux nombres figurés, voir *ibidem*, p. 259-263.

³⁴ Blaise Pascal, « Divers usages du triangle arithmétique dont le generateur est l'unité », in *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitezz sur la mesme matiere*, Paris, Guillaume Desprez, 1665, p. « I ».

³⁵ Sur cette conception des méthodes, voir Giovanna Cifoletti, *op. cit.* Il est essentiel de se souvenir qu'une méthode n'est alors pas synonyme d'une règle unique, encore moins d'une formule prête à l'emploi, mais d'une manière de procéder qui doit être adaptée à chaque situation (et peut l'être, ce qui en fait justement la valeur heuristique).

Qu'il soit aussi un objet mathématique à part entière, et pas seulement le réceptacle confortable de données, est manifesté par la célèbre preuve reliant aux valeurs des cellules les nombres de combinaisons : « Proposition 1 : En tout triangle arithmétique, la somme des cellules d'un rang parallèle quelconque, égale la multitude des combinaisons, de l'exposant du rang, dans l'exposant du triangle³⁶. » Cette preuve est fondée sur un argument de récurrence tout à fait explicite (d'où la célébrité de la preuve, parfois présentée comme la plus ancienne connue à mettre en lumière le fondement précis et complet de ce type d'argument),

par le moyen de ces deux lemmes : Le I [...] que dans le premier triangle, cette égalité se trouve [...]. Le 2. que s'il se trouve un Triangle Arithmétique dans lequel cette proportion se rencontre, [...] le Triangle suivant aura la mesme propriété³⁷.

Les triangles mentionnés ici sont ceux successivement obtenus en rajoutant récursivement des bases à partir de la cellule d'origine. Ce n'est donc pas sur les nombres entiers contenus dans les cellules, mais bien sur les triangles mêmes, perçus comme des objets mathématiques à part entière que la récurrence joue ici.

Le triangle arithmétique (ou les triangles intermédiaires qu'il contient), outre qu'il fonctionne comme ressource de nombres, suggère aussi de nouvelles questions, soit par les symétries et relations mises en évidence, soit en attirant l'attention sur des types de nombres peu ou pas du tout étudiés : on peut signaler la suite des nombres figurés que le triangle pascalien associe à une suite différente de la suite classique des nombres triangulaires, carrés, pentagonaux, hexagonaux, etc. Mais aussi les nombres issus de produits d'entiers *consécutifs*, comme $3024=6.7.8.9$ (qui donneront lieu aux bases factorielles de numération au XIX^e siècle), qui s'ajoutent aux études usuelles des nombres carrés, cubes, etc., obtenus par multiplication répétée du *même* nombre entier.

Même si le motto de Viète était de ne laisser aucun problème non résolu, les développements de l'algèbre ont largement contribué à poser des limites à la gamme de problèmes accessibles par ses méthodes et celles qui en dérivent. Les courbes traitées dans la Géométrie de Descartes sont seulement les courbes algébriques, définies par des polynômes. Frenicle écrit à Pierre Fermat le 2 août 1641 : « Je sais que l'algèbre de ce pays n'est point propre à soudre ces problèmes [sur les nombres], ou pour le moins on n'a pas encore ici trouvé la manière de l'y appliquer³⁸. » Il est d'ailleurs capable, sur les problèmes de nombres entiers de river son clou à Descartes³⁹. Autrement dit, chaque méthode d'invention délimite une gamme de questions qu'elle est capable de traiter, l'objectif de chaque mathématicien étant tour à tour de pouvoir résoudre les questions soulevées par d'autres ou de les convaincre de s'intéresser à celles que sa méthode atteint.

³⁶ Blaise Pascal, « Usage du Triangle arithmétique pour les combinaisons », in *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matiere*, Paris, Guillaume Desprez, 1665, p. 7.

³⁷ *Idem*. Sur la question de la récurrence, voir le classique Kokiti Hara, « Pascal et l'induction mathématique », *Revue d'histoire des sciences*, 1962, vol. 15, p. 287-302.

³⁸ Pierre Fermat, *op. cit.*, p. 227.

³⁹ Voir un exemple détaillé dans Catherine Goldstein, « L'expérience des nombres de Bernard Frenicle de Bessy », *Revue de synthèse*, 2001, 4^e s., vol. 2-3-4, p. 425-454.

Fermat, on le sait, a été déçu des réticences de Pascal face à l'algèbre, qu'il manie avec souplesse dans la plupart des domaines des mathématiques, y compris en étendant son usage à des questions de nombres, en particulier diophantiennes⁴⁰. Mais il faut souligner que, même sur ce terrain, sa méthode algébrique a des rivales de valeur. Requis par des mathématiciens du cercle de Mersenne « de trouver trois triangles rectangles desquels les aires fassent les trois côtés d'un triangle rectangle », il construit algébriquement les triangles (2405, 2397, 196) ; (2213, 2205, 188) ; 2305, 2303, 96), d'aires respectives 234906, 207270, 110544, qui sont les plus petits obtenus par ses formules. Mais la méthode de Frenicle lui fournit pour le même problème les triangles (12, 35, 37) ; (16, 63, 65) ; (13, 84, 85) d'aires respectives 210, 504, 546, autrement une solution plus petite, qui échappe, comme d'autres, aux formules de Fermat.

L'algèbre, comme le dit Frenicle, n'est donc pas le seul moyen ou le plus efficace, pour la résolution de tous les problèmes mathématiques. Comme sur d'autres sujets, la méthode de Pascal basée sur le triangle arithmétique donne la clé d'une gamme étendue de questions. Gottfried Wilhelm Leibniz, tout en vantant son propre point de vue, souligne d'ailleurs les possibilités de cette alternative, voire de cette substitution, à l'algèbre cartésienne :

Mons. Pascal dit dans son Triangle Arithmétique qu'il veut varier les énonciations d'une même proposition par de différents rapports ; ce conseil revient (quoiqu'on ne se l'imagine pas) à celui de M. Des Cartes de poser plusieurs lettres pour inconnues, et au mien des caractères, qui est plus général⁴¹.

V- Sur l'histoire de l'algèbre

Reste l'évaluation des approches pascaliennes, à plus long terme, dans l'histoire des mathématiques. Beaucoup d'auteurs, en effet, se contentent d'identifier une seule ligne principale de développement possible, qui sert alors de canon ou au moins d'unité de mesure à tous les travaux contemporains. L'algèbre, en particulier cartésienne, bientôt remplacée par le calcul différentiel, a souvent occupé cette place. Stephen Bold, dans son étude de Pascal, écrit d'ailleurs :

In the eyes of most mathematicians of the time — indeed of practically all of the leading geometers of the seventeenth and eighteenth century, Descartes' analytic approach constituted the direction for serious research⁴².

⁴⁰ Sur la position unique de Fermat sur ce terrain, voir Catherine Goldstein, « L'arithmétique de Pierre Fermat dans le contexte de la correspondance de Mersenne: une approche microsociale », *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, 2009, vol. 18, p. 25-57.

⁴¹ Lié à un échange de G. Leibniz avec Edme Mariotte, c. 1676, ce commentaire a été publié par Pierre Costabel, « Notes relatives à l'influence de Pascal sur Leibniz », *Revue d'histoire des sciences*, 1962, vol.15, n° 3-4, p. 369-374, citation p. 372.

⁴² Stephen Bold, *Pascal Geometer : Discovery and Invention in Seventeenth-Century France*, Genève, Droz, 1996, p. 56.

Sans prétendre ici tracer une autre histoire de l'évolution des mathématiques, il semble important de la dépoussiérer, en particulier en ce qui concerne l'algèbre elle-même. Leibniz a indiqué à maintes reprises que le champ d'études de ce que nous appelons maintenant combinatoire devait être pris en compte pour tout développement significatif des mathématiques⁴³. Malgré ses nombreuses références cartésiennes (qui ont provoqué à leur tour des critiques lorsque les méthodes différentielles sont apparues sur le devant de la scène), cette réflexion combinatoire est d'ailleurs une caractéristique détectable dans les aspects les plus originaux des *Eléments* de Prestet⁴⁴. Plus ou moins marginalement, selon les lieux et les moments, elle se retrouve tout au long du XIX^e siècle. Arthur Cayley, un des créateurs de la notion de groupe fini abstrait, et aussi de la théorie algébrique des invariants, pour les calculs de laquelle il s'intéresse à l'étude combinatoire des partitions, commente ainsi :

Algebra is an Art and a science; *quà* Art, it defines and prescribes operations which are either tactical or logistical; viz. a tactical operation is one relating to the arrangement in any manner of a set of things; a logistical operation [. . .] is the actual performance of any operations. And *qua* science Algebra affirms a priori, or predicts, the result of any such tactical or logistical (or tactical and logistical) operations. [...] Every algebraical theorem rests ultimately on a tactical foundation⁴⁵.

Dans la terminologie de Cayley et d'autres auteurs britanniques, en particulier, la tactique est ce qui traite de l'arrangement, de la disposition des choses, indépendamment de leur nature et de leur grandeur même. Cette mathématisation des relations et dispositions est promue au même moment par de nombreux auteurs sous divers noms, tactique ou, en France, théorie de l'ordre⁴⁶.

Cet intérêt remet d'ailleurs le triangle arithmétique de Pascal au goût du jour dans certains cercles mathématiques. Henri Delannoy, polytechnicien et mathématicien amateur, mais bien intégré dans le milieu de l'Association française pour l'avancement des sciences et membre de la Société mathématique de France, s'intéresse ainsi aux marches d'une tour ou d'une reine (se déplaçant seulement vers la droite ou le bas) sur un échiquier dont il varie les formes selon le problème à résoudre. Il cherche en particulier à calculer le nombre de manières d'atteindre une case donnée : pour une tour, une case peut être atteinte d'une seule façon à partir de la case au-dessus ou, là encore d'une seule façon, à partir de la case à sa gauche. Autrement dit, le nombre de manières d'atteindre une case (nombre que Delannoy place dans la case correspondante) s'obtient en ajoutant les nombres de manières d'atteindre celle au-dessus et celle à gauche, donc les nombres de la case au-dessus et de la case à gauche (Fig. 2). Comme le dit Delannoy, cette construction récursive

⁴³ Sur une réappréciation du rôle de l'art combinatoire dans les modes d'invention de Leibniz, voir Arilès Remaki, « L'art combinatoire en tant qu'art d'inventer chez Leibniz, sur la période 1672-1680 », Thèse de doctorat, Université Paris-Cité, 2021.

⁴⁴ Sur ce point, voir Catherine Goldstein, « On a Seventeenth-Century Version of the Fundamental Theorem of Arithmetic », *Historia Mathematica*, 1992, vol. 19, p. 177-187 et Katia Asselah, « Jean Prestet: Algèbre et combinatoire dans la résolution des équations », *Bollettino di storia delle scienze matematiche* 2011, vol. 31, p. 9-34.

⁴⁵ Arthur Cayley, « On the notion and boundaries of algebra », *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1864, vol. 6, p. 382-384. Sur la pratique algébrique de Cayley, voir Tony Crilly, *Arthur Cayley, Mathematician Laureate of the Victorian Age*, Baltimore, Johns Hopkins University Press, 2006.

⁴⁶ Sur l'histoire de la tactique, voir Caroline Ehrhardt, « Tactics : In search of a long-term mathematical project (1844-1896) », *Historia Mathematica*, 2015, vol. 42, n° 4, p. 436-467. Sur la théorie de l'ordre et ses nombreuses ramifications, voir en particulier Jenny Boucard, « Louis Poinsot et la théorie de l'ordre : un chaînon manquant entre Gauss et Galois ? », *Revue d'histoire des mathématiques*, 2011, vol. 17, n° 1, p. 41-138 et Jenny Boucard et Christophe Eckes (dir.), *Arranger disposer, combiner : Théories de l'ordre dans les sciences, les arts d'ornement et la philosophie (1770-1910)*, Paris, Hermann, « Intersciences », 2023. La théorie du XIX^e siècle affiche parfois des racines leibniziennes, mais sur la variante pascalienne, à notre avis pertinente, voir Dominique Descotes, « Le problème de l'ordre chez Pascal », *Studi francesi*, 2004, vol. 143 (XLVIII, II), p. 281-300.

« n'est autre chose que le triangle arithmétique de Pascal, mis sous une forme plus commode⁴⁷. » Plus commode, car Delannoy ne coupe pas son « échiquier » (ou tableau de nombres) diagonalement le long des bases ; il obtient une figure de forme carrée, telle cependant que « les nombres placés sur les parallèles à la diagonale sont ceux du triangle arithmétique de Pascal⁴⁸. » Traduisant par des formes particulières d'échiquier les restrictions issues du problème spécifique posé —par exemple en exprimant le fait qu'un nombre doit rester toujours entre deux bornes par un tableau confiné entre deux lignes diagonales—, Delannoy résout de nombreux problèmes arithmétiques ou de probabilité ; il calcule par exemple la probabilité qu'un jeu de pile ou face entre deux joueurs, également riches au début et où le perdant donne 1 franc au gagnant, s'arrête au bout d'un nombre fixé de parties⁴⁹. Dans l'entourage mathématique de Delannoy, ces échiquiers, et avec eux le triangle de Pascal, sont aussi considérés comme objets mathématiques à part entière. Édouard Lucas remarque par exemple que si la loi de construction est la même pour plusieurs échiquiers, on peut les ajouter, les multiplier par une constante, définissant ainsi des opérations sur ces tableaux mêmes⁵⁰.

<i>Fig. 2.</i>	<i>Fig. 3.</i>
1	1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1	1 2 3 4 5 6 7 8
1 2 2	1 3 6 10 15 21 28 36
1 3 5 5	1 4 10 20 35 56 84 120
1 4 9 14 14	1 5 15 35 70 126 210 330
1 5 14 28 42 42	1 6 21 56 126 252 462 792
1 6 20 48 90 132 132	1 7 28 84 210 462 924 1716
1 7 27 75 165 297 429 429	1 8 36 120 330 792 1716 3432

Figure 2 : Des échiquiers de Delannoy : à droite, le « carré arithmétique » de Delannoy (où on reconnaît un triangle de Pascal prolongé), chaque case contenant le nombre de chemins possibles (horizontaux vers la droite ou verticaux vers le bas seulement) pour arriver à cette case ; à gauche un échiquier triangulaire obtenu de la même façon, mais en interdisant les déplacements de la tour au-dessus de la diagonale.

⁴⁷ Henri Delannoy, « Emploi de l'échiquier pour la résolution de certains problèmes de probabilités », in *Compte-rendu de la 24e session (Bordeaux, 1895)*, Paris, Association française de l'avancement des sciences, 1896, p. 70-90, citation p. 71.

⁴⁸ Henri Delannoy, « Emploi de l'échiquier pour la solution de problèmes arithmétiques », in *Compte-rendu de la 15e session (Nancy, 1886)*, Paris, Association française de l'avancement des sciences, 1887, p. 183- 188, citation p. 186.

⁴⁹ Sur les résultats de Delannoy, voir Sylvaine R. Schwer et Jean-Michel Autebert, « Henri-Auguste Delannoy, une biographie (première partie) », *Mathématiques & Sciences humaines*, 2006, n° 174 (43^e année), p. 25–67 et Évelyne Barbin et al. (dir.), *Les travaux combinatoires en France (1870-1914) et leur actualité : un hommage à Henri Delannoy*, Limoges, PULIM, 2017. Charles-Ange Laisant, qui reprend et développe après Pascal l'étude des factorielles, fait aussi partie des proches de Delannoy, voir Jérôme Auvinet, *Charles-Ange Laisant : itinéraires et engagements d'un mathématicien de la Troisième République*, Paris, Hermann, 2013.

⁵⁰ Édouard Lucas, *Théorie des nombres*, Paris, Gauthier-Villars, 1891, p. 82-96.

VI - Retour sur une résistance

La résistance, nous dit le *Dictionnaire universel*, est « l'action par laquelle on se défend, on résiste à une puissance qui attaque⁵¹ ». Elle n'est donc pas nécessairement conservatrice, ni rétrograde. Comme nous l'avons vu, il y a d'ailleurs moins résistance de Pascal à l'algèbre en soi que développement d'alternatives fructueuses et originales à certaines des composantes de l'algèbre qui ont fait son succès, tout en adoptant celles qu'il jugeait utiles. Les méthodes pascaliennes remplissent toutes les cases de ce qui était attendu des méthodes algébriques par ses contemporains, même si son choix des problèmes importants à traiter pouvait être différent.

Nous avons aussi essayé a contrario de mettre en lumière les préjugés, tant mathématiques qu'historiographiques, qui conduisent à évaluer négativement cet aspect des recherches de Pascal. Dans une autre histoire, elles pourraient au contraire être perçues comme pionnières dans l'étude des dispositions mathématiques ou la conceptualisation d'objets théoriques nouveaux, au-delà des nombres ou des lignes et figures de la géométrie euclidienne, tout comme celles de Frenicle peuvent l'être pour la théorisation de l'expérimentation mathématique, récemment remise sur le devant de la scène.

Du point de vue même de l'histoire de l'algèbre, celle, linéaire et traditionnelle, qui passe du symbolisme cartésien et de l'usage des équations en géométrie à l'étude des polynômes et formes algébriques et enfin aux groupes de Galois et aux structures, rate de nombreux aspects pourtant décisifs de son évolution et des interférences décisives avec d'autres domaines.

Dans ses recherches sur les échiquiers, Delannoy déduit plusieurs formules combinatoires de l'observation du « carré arithmétique », dont :

$$\binom{x+y}{x} = \binom{x+y-1}{x-1} + \binom{x+y-2}{x-1} + \dots + \binom{x}{x-1} + \binom{x-1}{x-1}.$$

Il conclut : « Cette dernière formule, qui donne la somme des nombres figurés des divers ordres, se trouve dans tous les traités d'algèbre où il est question du triangle arithmétique de Pascal⁵². »

Cette association du triangle arithmétique à l'algèbre peut amuser ou paraître paradoxale. Mais elle est surtout un témoignage supplémentaire de la nécessité d'une histoire plus attentive aux dynamiques locales qui, tant au XVIIe qu'au XIXe siècle, intègrent l'étude qualitative des relations et celle des configurations.

C'est ainsi à une autre résistance, la résistance à une historiographie trop convenue et trop limitée sur le développement de l'algèbre, que nous incite Pascal.

⁵¹ *Dictionnaire universel*, ... recueilli et compilé par feu Messire Antoine Furetière, ... Seconde édition, revuë, corrigée & augmentée par Monsieur Basnage de Bauval, La Haye & Rotterdam, Arnould et Reinier Leers, 1702, t. II, p. 730.

⁵² Henri Delannoy, « Emploi de l'échiquier pour la solution de problèmes arithmétiques », *op. cit.*, p. 186.