



**HAL**  
open science

# Estimation de la durée de vie en fatigue vibratoire dans le domaine fréquentiel

Véronique Kehr-Candille, Nicolas Piet-Lahanier, Emmanuel Corratge

► **To cite this version:**

Véronique Kehr-Candille, Nicolas Piet-Lahanier, Emmanuel Corratge. Estimation de la durée de vie en fatigue vibratoire dans le domaine fréquentiel. CSMA 2024 - 16<sup>ème</sup> Colloque National en Calcul des Structures, May 2024, Giens, France. hal-04669028

**HAL Id: hal-04669028**

**<https://hal.science/hal-04669028v1>**

Submitted on 7 Aug 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Estimation de la durée de vie en fatigue vibratoire dans le domaine fréquentiel

V. Kehr-Candille<sup>1</sup>, N. Piet-Lahanier<sup>1</sup>, E. Corratge<sup>2</sup>,

<sup>1</sup> DMAS, ONERA, Université Paris Saclay, F-92322 Châtillon - France, {veronique.kehr-candille,nicolas.piet}@onera.fr

<sup>2</sup> AIRBUS, Airbus Operations, Toulouse – France, emmanuel.corratge@airbus.com

---

**Résumé** — La fatigue vibratoire (ou fatigue à nombre de cycles élevé) est une cause importante de défaillance et de rupture. On présente ici la méthodologie utilisée pour prédire le dommage généré en fatigue vibratoire, basée sur une approche fréquentielle avec des excitations aléatoires. On présente également les calculs de durées de vie estimées sur un cas test (plaque en inconel), ainsi que les comparaisons avec les résultats expérimentaux.

**Mots clefs** — fatigue vibratoire, excitation aléatoire, endommagement.

---

## 1. Introduction

Nombre de structures, et notamment les structures aéronautiques, sont plongées durant leur cycle de vie dans un environnement vibratoire qui peut conduire à un endommagement puis à une rupture par fatigue. Ce type de fatigue, couramment dénommé fatigue vibratoire ou fatigue HCF (High Cycle Fatigue), se caractérise par un endommagement progressif de la structure à des niveaux de contraintes faibles, où le comportement du matériau reste a priori élastique, et diffère de la fatigue oligocyclique ou fatigue LCF (Low Cycle Fatigue), qui se produit à des niveaux de contraintes élevés, et où la structure travaille dans le régime plastique.

La plupart des méthodes les plus récentes pour estimer les durées de vie en fatigue vibratoire sont appliquées dans le domaine fréquentiel, à partir de réponses dynamiques (DSP : densité spectrale de puissance) des contraintes calculées pour une excitation aléatoire [7][9][15]. Ce type d'approche permet de bénéficier de la puissance des méthodes de résolution fréquentielle pour la dynamique des structures, notamment en utilisant la projection sur une base modale tronquée. Ces méthodes, intrinsèquement linéaires, ont cependant leurs limites, notamment dans le cas où le système présente des non-linéarités.

Dans ce document, on ne s'intéresse pas aux méthodes temporelles. Des détails sur ces méthodes peuvent être trouvés dans [8].

La prévision de durée de vie en fatigue est basée sur l'utilisation de la courbe de Wöhler du matériau, qui traduit le nombre de cycles à rupture en fonction du niveau de contraintes, pour une sollicitation cyclique alternée. Le dommage cumulé pour une superposition de cycles élémentaires est estimé en utilisant la règle de Palmgren-Miner.

Dans ce document, on présente tout d'abord succinctement la méthode de prévision utilisée. Cette méthode est ensuite utilisée pour réaliser des estimations de durées de vie sur un cas-test simple, permettant une comparaison avec des résultats expérimentaux. On conclut enfin en dégageant les pistes d'amélioration de la méthode.

## 2. Méthode théorique

### 2.1 Préambule

Les méthodes fréquentielles pour simuler la fatigue vibratoire utilisent des excitations aléatoires. On détaille donc ce point dans le paragraphe suivant.

L'utilisation d'excitations aléatoires dans un processus a priori déterministe peut s'interpréter de la façon suivante : en fatigue vibratoire, le signal d'entrée  $\sigma(t)$  peut être considéré comme la superposition de plusieurs cycles sinusoïdaux (mono-fréquentiel). On estime un dommage partiel pour chacun de ces cycles élémentaires, et le dommage total est alors la somme des dommages partiels, en utilisant la règle de Palmgren-Miner. La probabilité d'apparition de chaque cycle unitaire va se traduire par une excitation aléatoire (via la densité spectrale de puissance de l'entrée). La sommation des dommages partiels de la règle de Palmgren-Miner va se traduire par une intégration (numérique ou analytique).

### 2.2 Réponse fréquentielle sous excitation aléatoire

#### 2.2.1 Chargement déterministe

Le calcul de la réponse fréquentielle déterministe d'une structure modélisée par éléments finis consiste à résoudre le système matriciel (1). Classiquement, on résout ce système en le projetant sur une base modale tronquée, ce qui permet de réduire fortement les temps de calcul.

$$(\mathbf{K} + i\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{F}(\omega) \Rightarrow \mathbf{U}(\omega) \quad (1)$$

Plus généralement, la résolution du système déterministe permet d'accéder à la fonction de transfert  $\mathbf{H}_{XE}(\omega)$ , qui relie la variable de sortie  $X$  (déplacement  $U$ , accélération, contrainte mécanique, ...) à la source d'excitation  $E$  (force  $F$ , déplacement imposé, accélération imposée, ...) via la formule :

$$X(\omega) = H_{XE}(\omega) E(\omega) \quad (2)$$

Pour étudier les phénomènes de fatigue, la variable de sortie  $X$  pertinente est une contrainte : composante  $\sigma_{ij}$  du tenseur de contrainte, contrainte de Von Mises, contrainte principale maximale, pour les points ou éléments de la structure où les contraintes sont les plus importantes.

#### 2.2.2 Chargement aléatoire

Dans le cas d'un chargement aléatoire, on utilise la notion de densité de spectrale de puissance (DSP), usuellement notée  $S(\omega)$ , qui traduit la répartition fréquentielle de l'énergie du signal aléatoire considéré.

À partir de la DSP de la source d'excitation  $S_E(\omega)$  et de la fonction de transfert  $H_{XE}(\omega)$  obtenue par un calcul déterministe, on calcule la DSP de la sortie  $X$  :

$$S_X(\omega) = |H_{XE}(\omega)|^2 S_E(\omega) \quad (3)$$

S'il y a plusieurs sources d'excitation, alors  $S_X(\omega) = \sum_i S_{X E_i}(\omega) = \sum_i |H_{X E_i}(\omega)|^2 S_{E_i}(\omega)$  dans le cas de sources décorréélées, et  $S_X(\omega) = \sum_{i,j} H_{X E_i}^*(\omega) H_{X E_j}(\omega) S_{E_i E_j}(\omega)$  dans le cas de sources corrélées

On utilise également la notion de valeur moyenne quadratique (RMS Root Mean Square) :

$$\bar{X}_{RMS} = \sqrt{\int_0^\infty S_X(\omega) d\omega} \quad (4)$$

Pour la fatigue vibratoire, la DSP de la source  $S_E(\omega)$  traduit la probabilité d'apparition de chaque cycle unitaire (cf. 2.1).

### 2.3 Estimation des durées de vie

Le calcul des durées de vie s'effectue à partir de la densité de probabilité des cycles (PDF Probability Density Function) [8] [9][12][15]

Dans un premier temps, à partir de la DSP  $S_\sigma(\omega)$  (relative à une composante de contrainte dans un élément ou à un nœud donné), on détermine la densité de probabilité associée  $P(s)$ . La littérature propose un certain nombre de modèles pour déterminer cette PDF [2][3][4][13][14][15], qui diffèrent essentiellement par l'amplitude de l'intervalle fréquentiel considéré (bande étroite, bande large). Ces approches utilisent les moments de  $S_\sigma(\omega)$  :

$$m_n = \int_0^\infty f^n S_\sigma(f) df \quad (5)$$

La plupart des modèles utilisent les moments  $m_0, m_1, m_2$  et  $m_4$ . Par exemple, pour le modèle de Bendat,  $P(s) = \frac{s}{4 m_0} e^{-s^2/8 m_0}$ . L'un des modèles le plus utilisé est celui de Dirlik [7]

Dans un deuxième temps, on estime le nombre  $N_t$  de cycles à rupture (correspondant à un dommage  $d = 1$ ). La règle du dommage cumulatif de Miner (sommation des dommages partiels) se traduit par le calcul de l'intégrale :

$$\frac{1}{N_t} = \int_0^\infty \frac{P(s)}{N(s)} ds \quad (6)$$

Dans cette formule,  $N(s)$  est relatif à la courbe de Wöhler du matériau (nombre de cycles à rupture en fonction de l'amplitude de la contrainte alternée).

Cette intégrale peut se calculer analytiquement pour certains modèles de PDF, et si on connaît la courbe de Wöhler sous la forme d'une loi de Basquin :  $N^{1/b} \cdot s = C$ . Dans les autres cas, une intégration numérique est effectuée.

## 3. Simulation

### 3.1 Présentation du cas-test

Le cas test utilisé correspond à des essais réalisés par IMA GmbH Dresden pour le compte d'Airbus [16].

Il s'agit de plaques rectangulaires présentant des encoches semi-circulaires, de dimensions  $73 \times 35 \times 1.6 \text{ mm}$ . La Figure 1 montre 4 de ces plaques vissées sur un bâti, pour être testées simultanément sur un pot vibrant. L'instrumentation consiste en une jauge de déformation collée près de l'emplanture, et un capteur laser mesurant le déplacement de l'extrémité de la plaque.

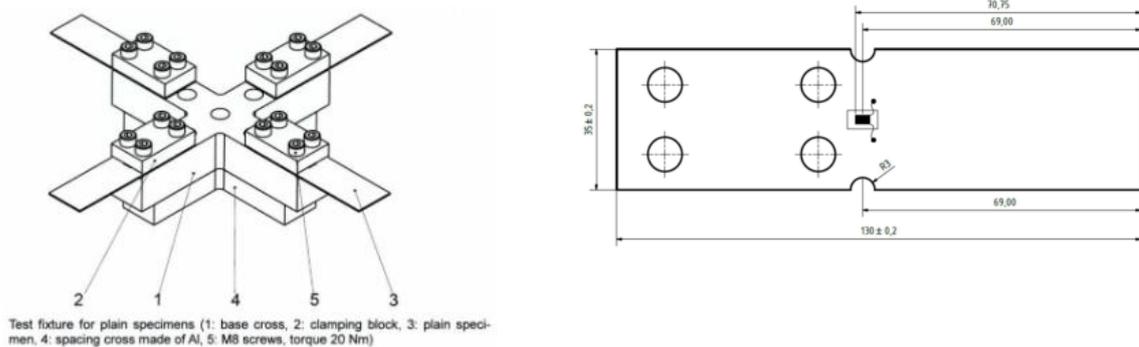


Figure 1 - Montage des 4 plaques (gauche) et schéma d'une plaque élémentaire (droite)

La plaque est en Inconel 625 : module d'élasticité  $E = 205 \text{ GPa}$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.28$ , masse volumique  $\rho = 8500 \text{ kg/m}^3$ .

On modélise la partie libre de la plaque, encastrée sur un côté. L'excitation est une accélération verticale imposée à l'encastrement. La densité spectrale de puissance (DSP) de cette excitation est constante sur une bande de fréquences de largeur 80 Hz, centrée sur la 1<sup>ère</sup> fréquence propre de flexion de la plaque ( $\approx 235 \text{ Hz}$ ). Plusieurs niveaux d'amplitude (10 niveaux RMS) ont été testés, et le système est excité jusqu'à ce que la fréquence de résonance de la plaque diminue de 2%, ce qui est le critère retenu pour indiquer la rupture de la plaque.

### 3.2 Calcul de réponse dynamique

Les calculs éléments finis ont été effectués avec le logiciel commercial Nastran<sup>®</sup>. L'analyse modale fait apparaître une 1<sup>ère</sup> fréquence propre à 235.8 Hz, très proche de la valeur expérimentale.

On représente Figure 2 la déformée modale correspondante (déplacement), superposée à des isovaleurs en contrainte principale, ce qui permet de visualiser les zones d'intérêt pour l'étude de la fatigue. Comme on pouvait s'y attendre, les fonds d'encoches sont le siège de concentrations de contrainte, ce qui confirme que ces zones sont les lieux privilégiés d'apparition d'endommagement, puis de fissures en cours d'essai.

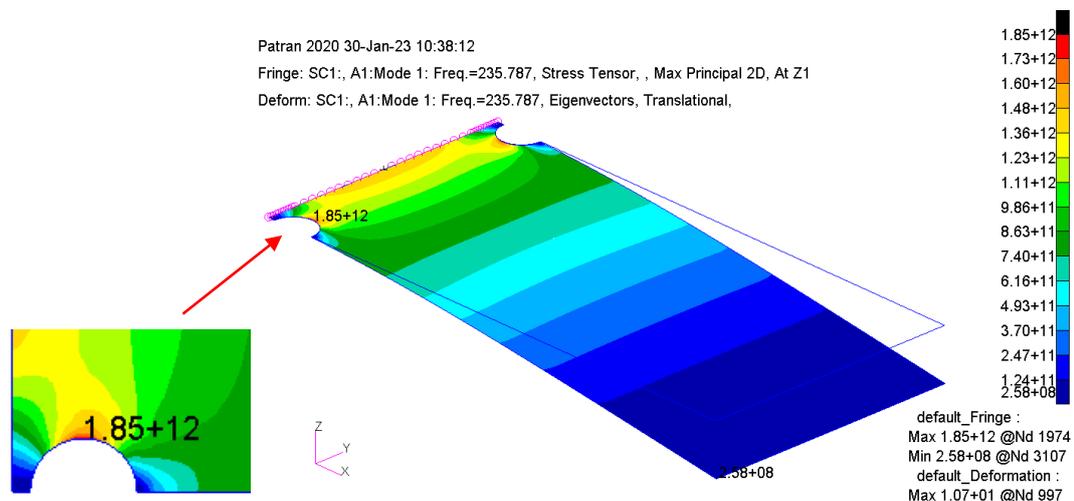


Figure 2 - 1er mode propre (235 Hz) : déformée et isovaleurs en contrainte principale max, avec zoom sur l'encoche

Un calcul fréquentiel de réponse dynamique pour une excitation aléatoire en accélération imposée à l'encastrement est ensuite effectué. Le taux d'amortissement modal utilisé pour l'ensemble de la structure est  $\zeta = 0.15\%$ .

Le calcul de la réponse aléatoire (DSP) peut être effectué soit directement avec Nastran, soit en post-traitement de la fonction de transfert déterministe en appliquant la formule (2)

### 3.3 Estimation des durées de vie

On estime la durée de vie de la structure, à partir de la densité spectrale de puissance DSP de la contrainte principale en fond d'entaille (qui coïncide ici avec la contrainte  $\sigma_{xx}$ ), zone où la concentration de contraintes est maximale. Cette DSP est calculée par éléments finis avec Nastran.

On estime ensuite les durées de vie avec la formule (6). On a utilisé le package python open-source FLife (<https://pypi.org/project/FLife>), en y insérant quelques modifications pour pouvoir utiliser une courbe de Wöhlher définie par interpolation dans une table.

Pour la loi de densité de probabilité, on a utilisé le modèle de Dirlik [8], souvent considéré comme le modèle de référence, utilisable dans de nombreux cas. D'autres modèles ont également été utilisés, mais n'ont pas eu d'influence notable sur les résultats. Ce peu de sensibilité au modèle utilisé pour estimer la PDF est lié au caractère « bande étroite » du spectre de la contrainte, puisque le système n'est excité qu'au voisinage de sa 1<sup>ère</sup> fréquence propre de vibration.

Les calculs ont été effectués pour les 10 niveaux d'excitations appliquées en entrée.

#### 3.3.1 Influence du choix de la courbe de Wöhlher

L'estimation de la durée de vie nécessite également une courbe de Wöhlher (S-N) du matériau. Notons tout de suite que cette donnée matériau, essentielle pour toute prévision de durée de vie, présente d'énormes dispersions en fonction de la nuance exacte d'Inconel 625 utilisée, des conditions d'élaboration, des traitements thermiques appliqués, de l'état de surface du matériau, etc. Après une recherche dans la littérature, nous avons retenu 4 courbes S-N différentes, trouvées dans les références [5][6][10][11].

On présente ci-dessous **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** les durées de vie adimensionnées obtenues par simulation, pour ces 4 courbes S-N, ainsi que les durées de vie expérimentales (adimensionnées également). Pour chaque cas, la durée de vie est présentée (à gauche) pour les 10 niveaux d'accélération imposée en entrée (accélération rms exprimée en g) et, à droite, en fonction de la déformation au niveau de la jauge ( $\epsilon_{xx}$  rms en  $\mu\text{def}$ ). La durée de vie expérimentale correspond à une diminution de la fréquence propre de 2% (assouplissement).

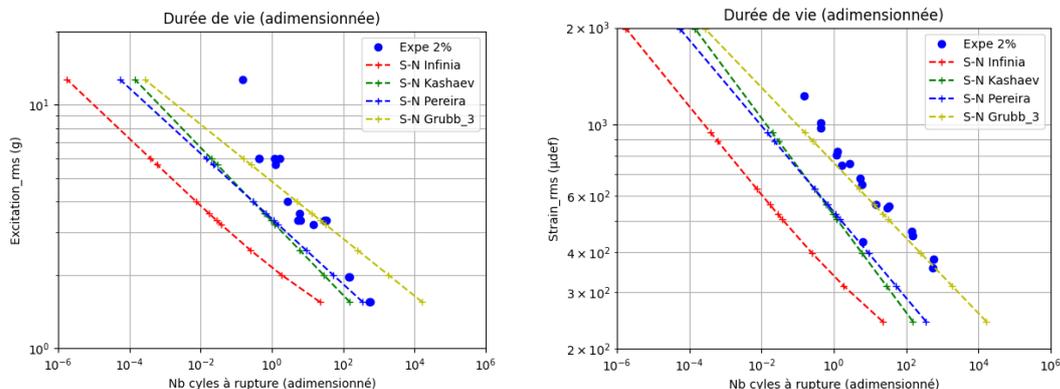


Figure 3 - Comparaison des durées de vie calculées (courbe) et mesurées en essai (points)

L'utilisation des données issues de [11] (S-N Infinia) conduit à une très forte sous-estimation de la durée de vie, alors que celles issues de [5] (S-N Grubb\_3) permettent de se rapprocher des durées de vie obtenues expérimentalement. La non prise en compte dans le calcul des non linéarités présentes dans le système conduit, pour le niveau d'excitation le plus élevé (12g rms), à une large sur-estimation des déformations et des contraintes, ce qui explique la large sous-estimation de la durée de vie pour ce niveau d'excitation particulier.

### 3.3.2 Prise en compte de la précontrainte

Les courbes de Wölher utilisées dans les calculs précédents, sont établies pour une sollicitation alternée à moyenne nulle ( $\sigma_m = 0$ ). Or, dans notre cas, la fixation par les 4 vis se traduit par une précontrainte sur la portion de plaque étudiée (cf. Figure 1) et donc la valeur moyenne  $\sigma_m$  est non-nulle. Cette valeur peut être prise en compte dans le calcul de la durée de vie, en utilisant des modèles correctifs proposés par la littérature.

Dans un premier temps, on estime la valeur de cette précontrainte. En modélisant par éléments finis l'ensemble vis/écrou, on calcule tout d'abord la répartition de pression de serrage pour une seule vis ; ensuite, on en déduit la pression générée par les 4 vis. Enfin, on calcule la précontrainte moyenne  $\sigma_m$  induite sur la portion de plaque « libre », précontrainte qui ne présente d'ailleurs des valeurs importantes que dans la zone proche de l'encastrement

Dans un deuxième temps, on prend en compte cette contrainte moyenne non-nulle dans le calcul de la durée de vie. Cela se traduit en remplaçant la contrainte  $\sigma$ , issue du calcul dynamique fréquentiel, par une contrainte modifiée  $\sigma'$ . C'est cette contrainte modifiée  $\sigma'$  qui sera utilisée dans le calcul de la durée de vie et du nombre de cycles à rupture avec la formule (6).

On trouve dans la littérature diverses méthodes pour relier les quantités  $\sigma$  et  $\sigma'$ . On a utilisé ici le modèle de Goodman [8] :  $\frac{\sigma}{\sigma'} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{UTS}} = 1$  avec  $\sigma_{UTS} = \text{Ultimate Tensile Strength} \approx 1000 \text{ Mpa}$  pour l'Inconel 625.

On a tracé ci-dessous Figure 4 l'évolution du nombre de cycles à rupture (adimensionné) en fonction du niveau RMS d'accélération imposée, avec et sans correction due à la contrainte moyenne non-nulle. On précise que ce calcul a été effectué à partir des contraintes calculées au niveau de la jauge (et non pas en fond d'entaille comme pour les résultats présentés ci-dessus), et que la courbe (S-N) utilisée est celle de [11] (courbe S-N Infinia)

On constate que, dans notre cas, cette correction a un effet non négligeable sur la prévision du nombre de cycles à rupture, et permet, pour certains points, de se rapprocher des points expérimentaux.

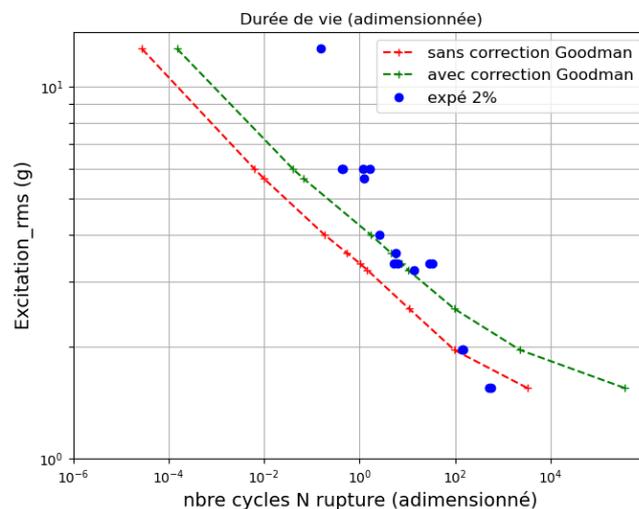


Figure 4 - Prise en compte de la précontrainte

## 4. Conclusion

On a présenté des estimations de durée de vie en fatigue HCF pour un cas-test certes relativement simple, mais qui a permis de mettre en lumière plusieurs points.

On note qu'il est indispensable de disposer d'une modélisation adéquate de la structure, en termes de comportement dynamique, qui prenne bien en compte tous les aspects : répartition de masse, conditions aux limites, amortissement, ..., et ceci avant tout calcul de fatigue et d'estimation de durées de vie. On a en effet constaté que les erreurs de modélisation (par exemple, un coefficient d'amortissement erroné) conduisaient à des écarts sur les résultats nettement plus importants autres paramètres (choix du modèle de PDF par exemple).

Le choix de la courbe de Wölher, en principe donnée intrinsèque du matériau, est également un paramètre important. Il est important de disposer de cette donnée pour la nuance exacte du matériau, et pour les conditions d'élaboration et de traitement thermique de l'échantillon précisément utilisé.

La prise en compte d'une valeur moyenne non-nulle est aussi un facteur d'influence significatif.

On a également noté la présence de non-linéarités. On bute ici sur une limitation de la méthode fréquentielle d'estimation des durées de vie en fatigue HCF, car c'est une méthode linéaire. Les approches temporelles permettent bien évidemment des calculs non-linéaires, mais on perdrait alors tout l'intérêt des méthodes fréquentielles en terme de réduction des temps de calcul. Un axe de recherche intéressant serait d'étudier la prise en compte de non-linéarités comme dans [12].

## Remerciements

Ces travaux ont été réalisés dans le cadre d'une étude partiellement financée par la Direction Générale de l'Aviation Civile (projet POTIC).



## Références

- [1] Campbell F.C., *Elements of Metallurgy and Engineering Alloys*, chapter 4, ed. ASM international, 2008
- [2] Dirlik T., Benasciutti D., *Dirlik and Tovo-Benasciutti Spectral Methods in Vibration Fatigue: A Review with a Historical Perspective*, *Metals*, 11(9) 1133, 2021
- [3] Fu T.T., Cebon D., *Predicting fatigue lives for bi-modal stress spectral densities*, *International Journal of Fatigue*, 22, p 11-21, 2000
- [4] Gao Z., Moan T., *Frequency-domain fatigue analysis of wide-band stationary Gaussian processes using a trimodal spectral formulation*, *International Journal of Fatigue*, 30, p 1944-1955 (2008)
- [5] Grubb J., *Fatigue resistance of alloy 625 sheet*, proceedings of the International Symposium on Superalloys 718, 625, 706 and Various derivatives, 1997
- [6] Kashaev N., Horstmann M., Ventzke V., Riekehr S., Huber N., *Comparative study of mechanical properties using standard and micro-specimens of base materials Inconel 625, Inconel 718 and Ti-6Al-4V*, *Journal of Material Research and Technology*, 2(1), 2013
- [7] Lalanne C., *Vibrations et chocs mécaniques, tome 3 : Vibrations aléatoires*, éd. Hermes, 1999
- [8] Lalanne C., *Vibrations et chocs mécaniques, tome 4 : Dommage par fatigue*, éd. Hermes, 1999
- [9] Mrsnik M., Slavic J., Boltzar M., *Frequency-domain methods for a vibration-fatigue-life estimation – Application to real data*, *International Journal of Fatigue*, 47, p. 8-17, 2013
- [10] Pereira F., Lourenço J., Maribondo do Nascimento R., Castro N., *Fracture Behavior and Fatigue Performance of Inconel 625*, *Materials Research*, 21(4), 2018
- [11] Qiu S., Yang B., Galbraith R., *Novel flexure design for a high-temperature thermal storage vessel coupled to a free-piston stirling engine*, proceedings of IMECE10, Vancouver (Canada), 2010
- [12] Rognon H., *Comportement en fatigue sous environnement vibratoire : prise en compte de la plasticité au sein des méthodes spectrales (mémoire de thèse)* 2013
- [13] Sherratt F., Bishop N., Dirlik T., *Predicting fatigue life from frequency domain data*, *Engineering Integrity*, 18, p 12-16, 2005
- [14] Zhao W., Baker M.J., *On the probability density function of rainflow stress range for stationary Gaussian processes*, *International Journal of Fatigue*, 14, p 121-135, 1992
- [15] Zorman A., Slavic J., Boltzar M., *Vibration fatigue by spectral methods – A review with open-source support*, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 190, 2023
- [16] X, *Sonic Fatigue Test of Inconel 625 and Inconel 718 Specimens*, Report 043/12, IMA Dresden, 2012