



**HAL**  
open science

## **A propos de la Théorie des Trous Noirs**

Hicham Zejli, Florent Margnat, Jean-Pierre Petit

► **To cite this version:**

| Hicham Zejli, Florent Margnat, Jean-Pierre Petit. A propos de la Théorie des Trous Noirs. 2024. <hal-04637671>

**HAL Id: hal-04637671**

**<https://hal.science/hal-04637671v1>**

Preprint submitted on 7 Jul 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

## A propos de la Théorie des Trous Noirs.

H.Zejli , F.Margnat, J.P.Petit

---

**Mots-clés** : black hole, Schwarzschild metric, proper time, space bridge, throat sphere, Flamm surface, time factor, two-folds cover, bimetric, Birkhoff theorem, unicity, free fall time, staticity, physical criticality, geometrical criticality, signature, imaginary proper time, crossed term

---

**Résumé** : Effectuant un large tour d'horizon, on évoque les deux interprétations qui ont été données de la solution de Schwarzschild extérieure, selon qu'on opte pour l'unicité, auquel cas l'objet géométrique possède une nappe unique, a une structure de variété à bord ou la non-unicité de la solution, c'est à dire pour une configuration où on a deux métriques, chacune se référant à une des nappes d'une structure de revêtement à deux feuillets, joints par une sphère de gorge. Dans ces deux interprétations l'objet est non-contractile. Le modèle des trous noirs, confers l'ouvrage de Chandrasekhar, paru en 1992, intitulé « mathématique des trous noirs », consacre son hypothèse centrale : inclure dans le monde réel des particules dont les trajectoires géodésiques sont parcourues avec un temps propre imaginaire pur, ceci allant de pair avec l'hypothèse d'une contractibilité de l'objet géométrique, alors équipé alors d'une singularité centrale.

---

### 1 - Introduction

En 2011 C.Corda publie un article [1] intitulé « A clarification on the debate on the 'original Schwarzschild solution' » sous la forme d'un simple preprint mis en ligne sur la plateforme arXiv, vers lequel les spécialistes renvoient toute personne qui voudraient remettre en question la cohérence physique et mathématique du modèle des trous noirs. Nous nous proposons de revenir sur cette question. Rappelons que les récentes observations ([2],[3]) se référant aux objets supermassifs situés au centre des galaxies M87 et Voie Lactée, qui ont été immédiatement qualifiés de « Trous Noirs Géants » ne cadrent pas, loin s'en faut avec ce qui caractérise en principe les trous noirs, c'est à dire que leur partie centrale soit d'un noir absolu. Même si on n'accorde pas de valeur aux valeurs des températures affichées, les rapport température maximale sur température minimale constituent des données observationnelles exploitables.

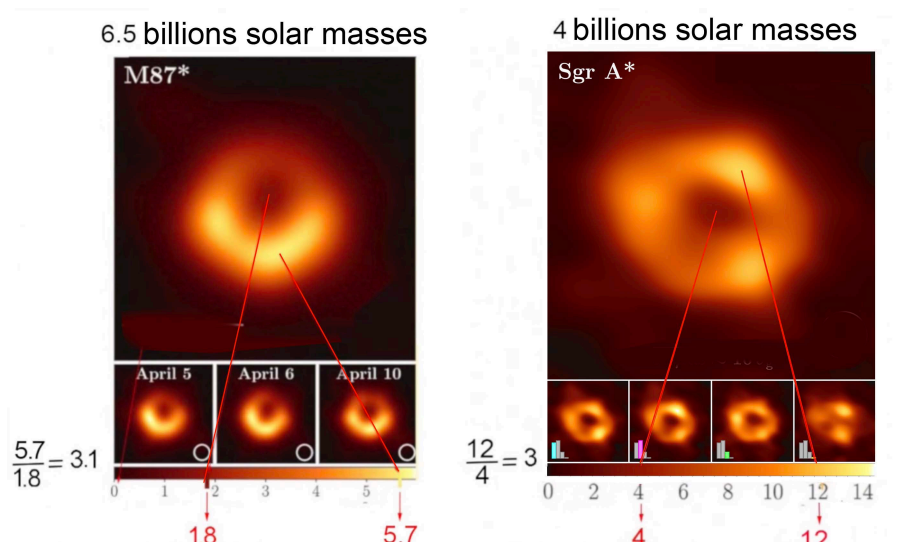


Fig.1 : Images des objets hypermassifs de M87 et de Srg A\*

Alors que les masses et les températures de ces deux objets sont très dissemblables les rapports température maximale sur température minimale sont étonnamment proches de 3. Cette proximité peut difficilement être attribuée au hasard et, en fin d'article, nous nous interrogerons sur la possible signification de cette valeur. Effectuons un retour sur ce qui est qualifié de « Solution originale de Schwarzschild ».

## 2 - La solution originale de Schwarzschild.

Elle correspond aux deux articles, publiés par l'auteur, en janvier 1916 [4] et en février 1916 [5], peu avant son décès, le 11 mai 1916. Les traductions en langue anglaise n'ont été disponibles que très tardivement, pour le premier article en 1975 [6] et pour le second en 1999 [7], soit vingt-quatre et quatre-vingt trois ans après leur parution en langue allemande. L'approche est très claire. L'auteur part de l'équation de champ telle qu'Einstein vient de la publier deux mois plus tôt [8]. Dans ce qui va suivre nos équations seront parfois équipées d'une double numérotation. Dans ce cas, comme ci-après, à gauche figurera la numérotation de l'article et, à droite, en italique, la numérotation dans l'article d'où cette équation est extraite. à cause. Ainsi, dans [5] c'est l'équation (5) :

$$(1) \quad G_{\mu\nu} = -\kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (5)$$

où  $\kappa$  est la constante d'Einstein et  $T$  le scalaire de Laue. Schwarzschild indique clairement sa ligne de conduite, en précisant que le calcul des géodésiques sera fondé sur l'optimisation de la longueur  $s$ . Ce sont les équations (1) de [4], que nous reproduisons ci-après, à l'identique :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \int ds = 0 \\ \text{where} \\ ds = \sqrt{\sum g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}} \end{array} \right. \quad (1)$$

L'auteur entreprend simultanément la construction des solutions stationnaires de l'équation de champ, avec et sans second membre. Dans cette démarche, remarquable de clarté et de cohérence physique, géométrique et mathématique, celui-ci s'attache à assurer la continuité de la solution à la surface de l'astre. Page 2 de [5] il écrit, nous citons :

*If one calls  $t$  the time,  $x, y, z$ , the rectangular coordinates, the most general line element that satisfies the conditions 1-3 is clearly the following :*

$$(3) \quad ds^2 = F dt^2 - G(dx^2 + dy^2 + dz^2) - H(xdx + ydy + zdz)^2$$

where  $F, G, H$  are functions of  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

**Ce qui entraîne que sa variable  $r$ , parfaitement définie, ne peut être que positive ou nulle.**

Commençons par analyser le calcul qui donne sa métrique intérieure, qui décrit la géométrie à l'intérieur d'une sphère emplie d'une matière incompressible, de densité  $\rho_0$  constante. Comme dans tous ses calculs il a fait  $c = 1$ , nous reconstituerons les équations en réintroduisant cette lettre, là où il convient qu'elle soit. Les schémas de deux calculs sont semblables, s'agissant du choix des coordonnées et du calcul des composantes du tenseur du premier membre, commun aux deux solutions. La métrique intérieure est donnée dans l'équation (35) de [5]:

$$(4) \quad ds^2 = \left( \frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2} \right)^2 dt^2 - \frac{3}{\kappa\rho_0} [d\chi^2 + \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta d\varphi^2] \quad (35)$$

Que nous écrivons :

$$(5) \quad ds^2 = \left( \frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{3c^2}{8\pi G \rho_0} [d\chi^2 + \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta d\varphi^2]$$

Schwarzschild a bien compris que dans la théorie d'Einstein le contenu en masse déterminait la courbure. Comme sa masse volumique  $\rho_0$  est supposée constante, il table, à l'intérieur de la masse, sur une géométrie qui soit celle d'une hypersphère 3D, où le rayon de courbure, constant, est

$$(6) \quad \hat{R} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G \rho_0}}$$

et dont les points sont repérés à l'aide des trois angles  $\chi, \theta, \varphi$ . Cette hypersphère est alors totalement décrite pour les valeurs :

$$(7) \quad \chi : (0 \rightarrow \pi/2) \quad \theta : (0 \rightarrow \pi) \quad \varphi : (0 \rightarrow 2\pi)$$

La surface de la sphère contenant la masse correspondant à  $\chi = \chi_a < \pi/2$ . La partie spatiale de la métrique est :

$$(8) \quad d\sigma^2 = \frac{3c^2}{8\pi G \rho_0} \left[ d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2 \right]$$

C'est la métrique d'une sphère  $S^3$  de rayon de courbure constant  $\hat{R}$ . Le déterminant de cette métrique est :

$$(9) \quad g_\sigma = g_{\chi\chi} g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi} = \left( \frac{3c}{8\pi G \rho_0} \right)^3 \sin^4 \chi \sin^2 \theta = \hat{R}^6 \sin^4 \chi \sin^2 \theta$$

Considérons une sphère centrée sur l'origine, correspondant à une valeur fixe  $\chi$ . Son aire est :

$$(10) \quad A = \iint \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}} d\theta d\varphi = 4\pi \hat{R}^2 \sin^2 \chi$$

Ainsi l'aire d'une sphère entourant l'origine peut être amenée à zéro.

**Cet objet 3D est contractile.**

Nous passons maintenant à sa métrique extérieure [4]. Après être passé en coordonnées polaires il introduit, par commodité de calcul, un nouveau jeu de coordonnées spatiales :

$$(11) \quad \{ x, y, z \} \rightarrow \{ r, \theta, \varphi \} \rightarrow \{ x_1, x_2, x_3 \}$$

Selon (équation (7) de [4].) :

$$(12) \quad x_1 = \frac{r^3}{3} \quad x_2 = -\cos \theta \quad x_3 = \varphi \quad (7)$$

Sa variable  $x_4$  est la variable temps  $t$  (sous l'équation (7) de [4]). Sa métrique s'écrit alors (équation (9) de [4].) :

$$(13) \quad ds^2 = f_4 dx_4^2 - f_1 dx_1^2 - f_2 \frac{dx_2^2}{1-x_2^2} - f_3 dx_3^2 (1-x_2^2) \quad (9)$$

Apparaît d'abord une constante d'intégration  $\alpha$  (le futur « rayon de Schwarzschild  $R_s$  ). Il introduit une seconde constante d'intégration  $\rho$  qui se trouve rapidement identifiée à  $\alpha^3$  ((équation (13) de [4]). Ce qui fait que son résultat s'exprime selon ses équations (10), (11) et (12) de [4] que nous renommeons :

$$(14) \quad f_2 = f_3 = (3x_1 + \nu)^{2/3} = (r^3 + \alpha^3)^{2/3} \quad (10)$$

$$(15) \quad f_4 = 1 - \alpha(3x_1 + \rho)^{-1/3} = 1 - \frac{\alpha}{(r^3 + \alpha^3)^{1/3}} \quad (11)$$

$$(16) \quad f_1 = \frac{(3x_1 + \rho)^{-4/3}}{1 - \alpha(3x_1 + \rho)^{-1/3}} = \frac{(r^3 + \alpha^3)^{-4/3}}{1 - \frac{\alpha}{(r^3 + \alpha^3)^{1/3}}} \quad (12)$$

Ce qui lui permettrait d'écrire sa métrique extérieure :

$$(17) \quad ds^2 = \frac{(r^3 + \alpha^3)^{1/3} - \alpha}{(r^3 + \alpha^3)^{1/3}} c^2 dt^2 - \frac{r^4}{(r^3 + \alpha^3) [(r^3 + \alpha^3)^{1/3} - \alpha]} dr^2 - (r^3 + \alpha^3)^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Expression qui mériterait alors le qualificatif de « Solution originale de Schwarzschild ». Quelles sont ses propriétés ? Son déterminant est :

$$(18) \quad g = -r^4 (r^3 + \alpha^3)^{1/3}$$

Celui-ci tend vers zéro avec  $r$ . Isolons sa partie spatiale :

$$(19) \quad d\sigma_{(3d)}^2 = \frac{r^4}{(r^3 + \alpha^3) [(r^3 + \alpha^3)^{1/3} - \alpha]} dr^2 + (r^3 + \alpha^3)^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Un développement limité permet de montrer que  $g_{rr} \approx 3r / \alpha \rightarrow 0$  tend vers  $\infty$  au voisinage de  $r = 0$ . Mais, en dehors de la nullité de son déterminant en  $r = 0$  cette métrique n'est nullement singulière. Schwarzschild est alors confronté au problème de l'identification de ses deux solutions (14) et (4). Il commence d'abord par opérer dans [4] le changement de variable :

$$(20) \quad \{ \chi, \theta, \varphi \} \rightarrow \{ R, \theta, \varphi \}$$

à l'aide de :

$$(21) \quad R = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G \rho_0}} \sin \chi = \hat{R} \sin \chi$$

Sa métrique intérieure s'écrit alors :

$$(22) \quad ds^2 = \left( \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{R_a^2}{\hat{R}^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{R^2}{\hat{R}^2}} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{R^2}{\hat{R}^2}} - R^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]$$

A la surface de l'étoile  $R = R_a$ . Il vient :

$$(23) \quad ds^2 = \left( 1 - \frac{R_a^2}{\hat{R}^2} \right) c^2 dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{R_a^2}{\hat{R}^2}} - R_a^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]$$

Mais :

$$(24) \quad \frac{1}{\hat{R}^2} = \frac{8\pi G \rho_0}{3c^2} = \frac{2GM}{c^2} \frac{1}{R_a^3} = \frac{\alpha}{R_a^3}$$

Ainsi la métrique intérieure, sur la paroi de l'étoile, devient :

$$(25) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{R_a}\right) c^2 dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{\alpha}{R_a}} - R_a^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2]$$

Schwarzschild découvre ainsi une façon simple d'identifier les deux métriques à la surface de l'astre. Il lui suffit dans la métrique extérieure, d'opérer le changement de variable :

$$(26) \quad R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}$$

introduisant ce qu'il appelle une « grandeur intermédiaire » ( Hilfsgröße) qui implique automatiquement que  $R \geq \alpha$  et cette métrique devient alors :

$$(27) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) c^2 dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} - R^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2]$$

$$R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3} \geq \alpha$$

Nous avons donc simplement découvert une première raison pour laquelle Schwarzschild choisit de présenter la métrique extérieure sous cette forme. A ce stade il cherche à retrouver le résultat d'Einstein, concernant l'avance du périhélie de Mercure [9]. En opérant le développement limité, qui figure explicitement dans son article, page 7

$$(28) \quad R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3} = r \left(1 + \frac{\alpha^3}{3r^3}\right) \approx r$$

Mais il ne lui vient nullement à l'idée de penser que cette métrique extérieure, considérée isolément, puisse se référer à un objet physique.

### 3 - La construction de sa méridienne par Ludwig Flamm [10] .

Dans les mois qui suivent le jeune mathématicien Ludwig Flamm, qui a 31 ans au moment où paraît l'article de Schwarzschild, s'intéresse à cette solution, sous sa forme de couples de métriques raccordées. Il l'applique lui aussi [10] pour évaluer la déviation des rayons lumineux frôlant la surface du Soleil et obtient la valeur 1.75'', en bon accord avec le résultat d'Einstein. Ce qui est intéressant, c'est l'analyse précise qu'il donne sous l'angle géométrique. Cet article reste peu connu car il n'a été disponible sous la forme d'une traduction anglaise que lorsqu'il a été republié sous cette forme en 2015 [11]. Cette géométrie de l'équation d'Einstein, invariante par translation temporelle est équivalente au déplacement selon cette coordonnée chronologique d'une 3-surface, dont la métrique est donnée par les parties spatiales des deux solutions. Pour la métrique intérieure c'est :

$$(29) \quad d\sigma_{(3d)}^2 = \frac{dR^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} - R^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2] \quad \text{with} \quad R \leq R_a$$

Pour la métrique extérieure :

$$(30) \quad d\sigma_{(3d)}^2 = \frac{dR^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} - R^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \quad \text{with } R \geq \alpha$$

En effectuant des coupes planes, correspondant à  $\theta = \pi/2$  puis à  $\varphi = \text{cst}$  on obtient des 2-surfaces. Pour la partie intérieure :

$$(31) \quad d\sigma_{(2d)}^2 = \frac{dR^2}{1 - \frac{R^2}{\hat{R}^2}} - R^2 d\varphi^2 \quad \text{with } R \leq R_a$$

Pour la partie extérieure :

$$(32) \quad d\sigma_{(2d)}^2 = \frac{dR^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} - R^2 d\varphi^2 \quad \text{with } R \geq \alpha$$

Les deux 2-surfaces sont plongeables, ce qui veut dire dans les deux cas, si on fait  $\varphi = \text{cst}$  on pourra écrire que  $d\sigma^2 = dR^2 + dz^2$ . On obtient alors deux équations différentielles donnant les deux portions de méridienne. Pour la partie intérieure c'est l'équation :

$$(33) \quad R^2 + z^2 = \hat{R}^2$$

C'est à dire une portion de cercle de rayon  $\hat{R}$

Pour la partie extérieure c'est l'équation :

$$(34) \quad R = \alpha + \frac{z^2}{4\alpha}$$

C'est à dire une portion de parabole couchée. D'où la figure extraite de l'article de L.Flamm :

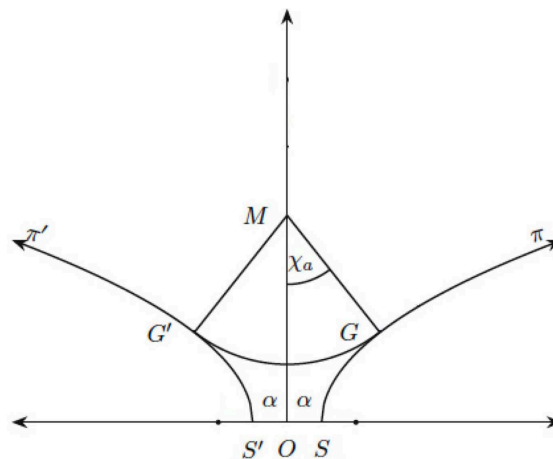


Fig.2 : La méridienne construite par L.Flamm [10].

A ce stade, ni Schwarzschild, ni Flamm n'envisagent de traiter la métrique extérieure de Schwarzschild comme un objet physique.

#### 4 – Tentatives de modélisation d'une masse par H.Weyl, Einstein and Rosen.

Au moment de la parution de l'article de Schwarzschild Weyl a le même âge que Flamm. Il envisage alors d'utiliser la métrique extérieure pour décrire une masse, en tant que source d'un champ gravitationnel. A distance, les géodésiques de longueur non-nulle peuvent être assimilées à des trajectoires de planètes, quand elles sont quasi-elliptiques, ou pour certaines comètes non-périodiques, quasi-hyperboliques ou quasi-paraboliques. Plus on s'éloigne de la source de ce champ et plus celles-ci tendent vers les coniques képlériennes. **A l'inverse, si on se rapproche au contraire, on doit découvrir quelle étrange structure géométrique est responsable de la création du champ gravitationnel que l'on peut alors, à distance, croire avoir été créé par une masse ponctuelle. Dans ce but Weyl est donc amené à conférer un caractère d'objet physique à la solution de Schwarzschild, considérée isolément.** Il utilise l'équation publiée par Einstein en novembre 2015 [8], laquelle fait apparaître le scalaire de Laue T, au lieu du scalaire de Ricci R sous la forme standard que retient aujourd'hui la tradition :

$$(35) \quad R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = - T_{ik}$$

Il construit également les trajectoires géodésiques de longueur nulle (  $ds = 0$  ) correspondant aux trajets des rayons lumineux. Pour les particules matérielles subissant l'effet du champ, il précise, sans ambiguïté :

$$(36) \quad ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k > 0$$

Géodésiques qui se déduisent de la variation :

$$(37) \quad \delta \int \sqrt{F} ds = 0$$

Considérant ensuite le cas de solutions invariantes par translation temporelle, il matérialise, comme tous ses contemporains une signature de type ( + - - - ) en écrivant la métrique sous la forme :

$$(38) \quad ds^2 = f dx_4^2 - d\sigma^2 = f dt^2 - h dr^2 - \mu (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Il isole, comme Flamm, la partie temporelle et la partie spatiale. Et, comme lui, il construit l'équation de la méridienne en forme de parabole couchée :

$$(39) \quad R = \sqrt{8a(R - 2a)}$$

Il désigne le rayon de Schwarzschild par la quantité  $2a$ . Il a donc trois fonctions inconnues de  $r$  à déterminer :  $f, h, \mu$ . Comme Hilbert [13] et Droste [14] il choisit de ramener son calcul à seulement deux fonctions inconnues en posant  $\mu = 1$ , ce qui aura

l'avantage d'évoquer d'emblée l'identification avec la métrique de Lorentz à l'infini, et parvient au résultat :

$$(40) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Nous avons, à dessein, utilisé la lettre R et non r pour montrer qu'il s'agit de la « coordonnée intermédiaire » de Schwarzschild (Hilfsgröße), laquelle est limitée à  $R \geq \alpha$ , pour bien l'opposer à sa coordonnée  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  qui peut prendre toutes les valeurs  $\geq 0$ . Ce faisant, Droste se limite alors à la description des trajectoires des planètes et des comètes. **Weyl considère, quant à lui, que cette structure géométrique est constituée de deux nappes, reliées par une sphère**, un aspect sur lequel nous reviendrons en détail, plus loin. Il ne sera d'ailleurs pas le seul à envisager cette sorte de modélisation topologique puisqu'Einstein et Rosen [15] feront de même, 18 ans plus tard en partant de l'expression (33) en notant que leur transformation :

$$(41) \quad u^2 = R - 2m \geq 0$$

**L'impératif  $ds^2 \geq 0$ , pour lequel ont opté Flamm, Droste et Weyl, implique de nier toute réalité aux portions de l'objet telles que  $R < 2m = \alpha$ , correspondant à l'intérieur de la sphère de gorge**, dont l'existence est explicitement mentionnée dans [15], nous citons :

*The writers investigate the possibility of an atomistic theory of matter and electricity, while excluding the singularities of the field, with a mathematical representation of physical space of two identical sheets, a « particle » being represented by a « bridge » connecting these sheets.*

Comme H.Weyl, Einstein et Rosen sont les premiers à suggérer une structure d'univers constituant un revêtement à deux feuillet de la variété composée de points associés aux coordonnées  $\{t, R, \theta, \varphi\}$  qui se dédoublent ainsi en couples de points adjacents :

$$(42) \quad \left\{ u = +\sqrt{R - 2m}, \theta, \varphi \right\} \quad \text{and} \quad \left\{ u = -\sqrt{R - 2m}, \theta, \varphi \right\}$$

Il n'y a donc pas unicité de la solution stationnaire à symétrie  $SO(3)$ . Mais le modèle d'Einstein et Rosen n'est pas Lorentzien à l'infini.

Il est possible d'opter pour un autre jeu de coordonnées

$$(43) \quad \{t, R, \theta, \varphi\} \rightarrow \{t, \rho, \theta, \varphi\}$$

**En utilisant le changement de variable [16]:**

$$(44) \quad R = \alpha(1 + L_n \operatorname{ch} \rho)$$

**Cette métrique extérieure devient :**

$$(45) \quad ds^2 = \frac{\text{Log} \text{ch} \rho}{1 + \text{Log} \text{ch} \rho} c^2 dt^2 - \frac{2 + \text{Log} \text{ch} \rho}{1 + \text{Log} \text{ch} \rho} \alpha^2 \text{th}^2 \rho \, d\rho^2 - \alpha^2 (1 + \text{Log} \text{ch} \rho)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

$\rho$  n'est pas « une nouvelle variable radiale ». C'est l'expression « variable radiale » qui n'a pas de sens. Et la remarque vaut également pour les lettres  $r$  ou  $R$ . Les coordonnées ne sont que les modes de repérage des points de la variété. La seule grandeur pertinente est la longueur  $s$ , qu'on doit alors identifier au temps propre  $\tau$  en posant  $s = c\tau$ . L'objet géométrique possède alors deux nappes, de manière explicite. La première étant parcourue en donnant à  $\rho$  des valeurs allant de moins l'infini à 0, la seconde de 0 à plus l'infini. Les deux nappes se raccordent le long d'une sphère de gorge d'aire  $4\pi\alpha^2$  (minimale, s'agissant de la famille des sphères invariantes ar  $SO(3)$ ). On retrouve la propriété fondamentale de l'objet géométrique solution de l'équation d'Einstein : il est **non-contractile**. Et, cette fois, ce que ne fait pas le pont d'Einstein-Rosen, cette structure crée un lien entre deux espaces Lorentziens. Il s'agit d'un objet 3D qui subit une translation selon la direction du temps. Sa coupe à  $\theta$  constant donne un objet 2D, la surface de Flamm :

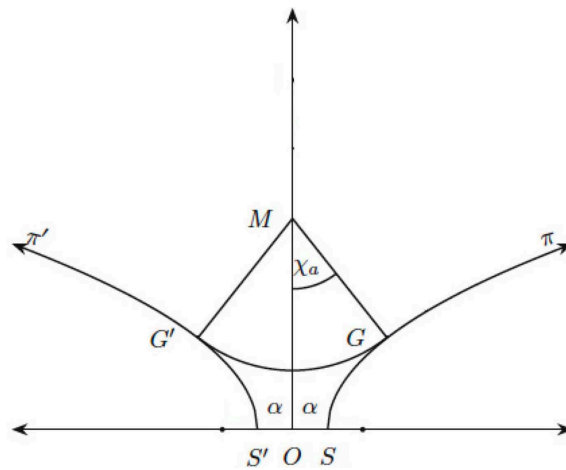


Fig.3 : Surface de Flamm.

## 5 – De la description d'un phénomène instationnaire à l'aide d'une métrique stationnaire.

La forme la plus générale d'une solution invariante par  $SO(3)$  et indépendante du temps est ([1], [17]):

$$(46) \quad ds^2 = h(r)dr^2 + k(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + l(r)dt^2 + a(r)dr dt$$

Une telle solution n'est pas invariante en changeant  $t$  en  $-t$ . Ainsi, pour un même point de coordonnées  $\{t, r, \theta, \varphi\}$  pourrait-on s'attendre à avoir, non une solution, mais deux. Or, en physique, quand les théoriciens recherchent une solution à une équation différentielle, ou à un système d'équations différentielles, il se donnent d'abord des conditions aux limites, puis cherchent à construire une solution qui soit unique. Dans le cas de la recherche d'une solution stationnaire de l'équation d'Einstein ces conditions aux limites consistent à imposer que la solution soit Lorentzienne à l'infini. Si on se fixe

sur l'exigence d'unicité, on obtient alors le théorème de G.D.Birkhoff [18]. Celui-ci proscriit alors la présence d'un terme croisé en  $dr dt$ . **Une telle solution est alors invariante par inversion du temps, ce qui ne repose sur aucune contrainte de nature physique.** Elle est alors qualifiée de **statique (static)**, par rapport au qualificatif de stationnaire, qui traduit l'invariance par translation temporelle. Mais, par exemple dans [10], [12], [15], [16], il existe des interprétations de la solution stationnaire à symétrie sphérique qui font apparaître une topologie différente, avec deux nappes reliés par une sphère de gorge, qualifiée de bridge par Einstein et Rosen. **Alors la non-unicité de la solution n'est donc pas simplement permise, mais nécessaire, afin de différencier ce qui se réfère à une des nappes, et à l'autre.** On voit donc que le théorème de Birkhoff implique une hypothèse additionnelle, implicite, de nature topologique. Si on envisage la structure à deux nappes, également non-contractile, alors la présence du terme croisé en  $dr dt$  est nécessaire. Ses implications ont été étudiées par le mathématicien P.Koiran[19]. Ces deux solutions mettent en œuvre le changement de coordonnées initialement proposé par Eddington [20], pour faire disparaître la singularité de coordonnée en  $R = \alpha$  :

$$(47) \quad t' = t + \frac{\alpha}{c} L_n \left( \frac{R}{\alpha} - 1 \right)$$

Pour bien montrer que le scalaire  $R$  (« grandeur intermédiaire » chez Schwarzschild) n'est qu'une coordonnée, un simple mode de repérage des points dans l'hypersurface, remplaçons ces coordonnées  $t$  et  $R$  par les lettres grecques  $\zeta$  et  $\xi$ . Alors nous avons :

$$(48) \quad ds^2 = \left( 1 - \frac{\alpha}{\xi} \right) d\zeta^2 - \frac{d\xi^2}{1 - \frac{\alpha}{\xi}} - \xi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

A ce stade on doit se rappeler que  $\alpha$  est une constante d'intégration, dont la valeur peut être négative. Ainsi, si les impératifs Newtoniens, dans le volet où s'effectuent les observations, imposent que

$$(49) \quad \alpha = \frac{2GM}{c^2} > 0$$

La métrique :

$$(50) \quad ds^2 = \left( 1 + \frac{\alpha}{\xi} \right) d\zeta^2 - \frac{d\xi^2}{1 + \frac{\alpha}{\xi}} - \xi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

est également solution stationnaire de l'équation de champ à second membre nul, en symétrie sphérique. Ses géodésiques évoquent alors une répulsion.

Rappelons que seule la grandeur  $s$  est pertinente, a une signification physique. Nous allons appliquer à l'équation (48) le changement de variable :

$$(52) \quad \{ \zeta, \xi, \theta, \varphi \} \rightarrow \{ \zeta', \xi, \theta, \varphi \}$$

Avec (changement de variable d'Eddington [20]):

$$(53) \quad \zeta = \zeta' + \alpha L_n \left( \frac{\xi}{\alpha} - 1 \right)$$

L'équation (48) devient ;

$$(54) \quad ds^2 = \left( 1 - \frac{\alpha}{\xi} \right) d\zeta'^2 - \left( 1 + \frac{\alpha}{\xi} \right) d\xi^2 - \xi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \frac{2\alpha d\xi d\zeta'}{\xi}$$

P.Koiran [19] a montré que, sous cette forme, avec ce terme croisé, cette solution de Schwarzschild allait de pair avec un temps de chute libre fini, et un temps d'évasion infini.

Nous pouvons maintenant tout aussi bien appliquer à l'équation (50) le changement de variable :

$$(55) \quad \zeta = \zeta' - \alpha L_n \left( \frac{\xi}{\alpha} - 1 \right)$$

Et cette métrique devient :

$$(56) \quad d\bar{s}^2 = \left( 1 + \frac{\alpha}{\xi} \right) d\bar{\zeta}'^2 - \left( 1 - \frac{\alpha}{\xi} \right) d\xi^2 - \xi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \frac{2\alpha d\xi d\bar{\zeta}'}{\xi}$$

Toujours avec :

$$(57) \quad \alpha = \frac{2GM}{c^2} > 0$$

Cette représentation (56) de la solution de Schwarzschild va de pair avec un temps d'évasion fini et un temps de chute libre infini. Avec ce couple de solutions, cette représentation bimétrique de la solution stationnaire à symétrie sphérique, on obtient une structure à deux nappes, non contractile, équipée d'une sphère de gorge, représentant un passage reliant deux espaces de Minkowski, dont les géodésiques ne peuvent, en un temps fini et bref, être parcourue que dans un seul sens. C'est une one way membrane.

**Ainsi le fait d'envisager une non-unicité, une solution bimétrique, qui autorise alors la présence d'un terme croisé en combinant variable d'espace et de temps, rend impossible d'utiliser la solution stationnaire pour décrire l'implosion d'une étoile.**

On peut résumer à l'aide des schémas ci-après :

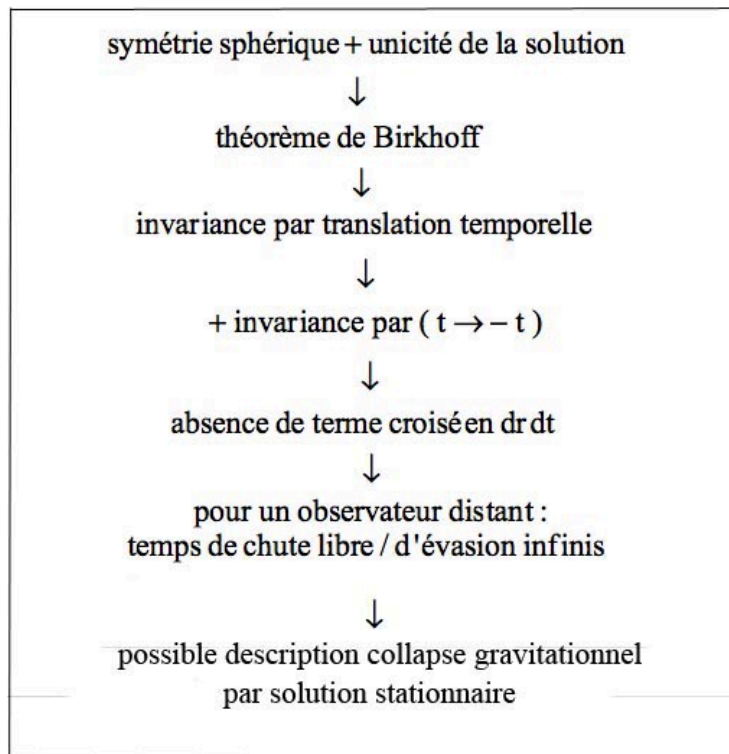


Fig.4 : Dans une hypothèse d'unicité de la solution

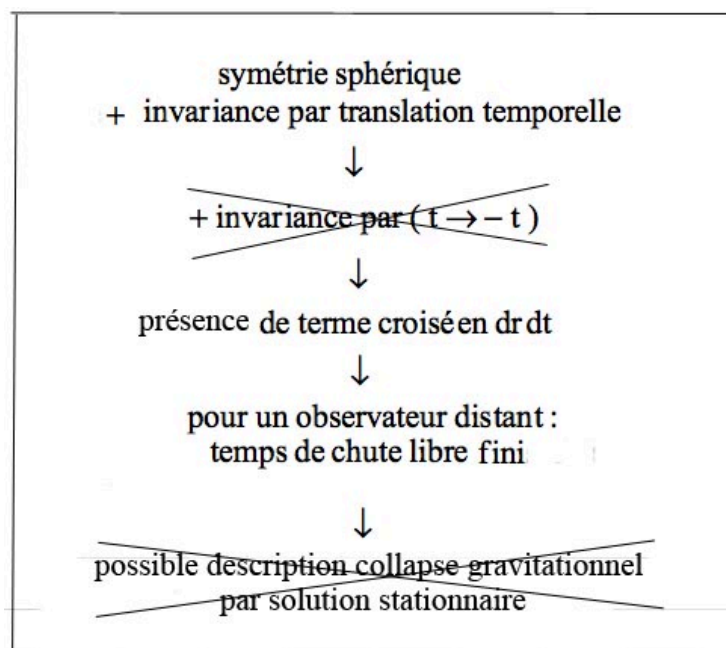


Fig.5 : Solution bimétrique

On voit que l'article d'Oppenheimer et Snyder [21], fondateur du modèle des trous noirs, repose sur une hypothèse d'unicité de la solution, dénuée de toute justification physique

## 6 – Le débat et la « clarification » faite par C.Corda [1].

C'est donc sur cet article que nous devons maintenant nous concentrer car, cité par tous les spécialistes, celui-ci est censé apporter toute la lumière sur cette question de « métrique de Schwarzschild sous une forme « originale » ou « standard » ». Celui-ci présente différentes présentations de la solution, avec différents qualificatifs. Il reconnaît ainsi que la forme considérée comme « standard », présente dans la littérature, n'est pas la forme « originale » construite par Schwarzschild en fonction de ses hypothèses.

Dans ce qui va suivre nous allons reproduire des extraits de la publication de C.Corda, qui comporte des équations numérotées et des appels de références. Comme nous l'avons fait plus haut, pour que le lecteur puisse faire la différence, la numérotation des équations, telles qu'elle figure dans l'article de Corda, sera située à droite des équations et en italique. Comme précédemment, nous compléterons avec notre propre numérotation de ces mêmes équations, à gauche de celles-ci. Les mentions de ses propres références seront également en italique.

Dans son équation (1) il présente « la forme standard de la solution de Schwarzschild ».

$$(58) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} \quad (1)$$

A plusieurs reprises il se réfère à un ouvrage de L.Landau et R.Lifschit [22] . Ainsi, au début de sa section 2 écrit-il :

« *The more general line-element which respects central symmetry is* » :

$$(59) \quad ds^2 = h(r,t)dr^2 + k(r,t)(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2) + l(r,t)dt^2 + a(r,t)dr dt \quad (2)$$

where

$$(60) \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3)$$

Il est important de reproduire ses mots à l'identique. Ainsi il écrit :

*At this point, if one wants « the standard solution », i.e. the elements (1) r and t have to be chosen in a way that a(r,t) = 0 and k(r,t) = - r^2 . in particular, the second condition implies that the standard Schwarzschild radius is determined in a way which guarantees the the length of the circumference centred in the origin is 2π r [42].*

*In our approach, we will suppose again that a(r,t) = 0, but, differently from the standard analysis, we will assume that the length of the circumference centered in the origin is not 2π r. We release an apparent different physical assumption, i.e. the arches of circumference are deformed by the presence of the mass of the central body M. Note that this different physical hypothesis permit to circumnavigate the Birhoff theorem [4] (our reference [18]) In fact, the demonstration of the Birkhoff Theorem starts from a line element in which k(r,t) = -r^2 has been chosen.*

Then, we proceed assuming  $k = -mr^2$ , where  $m$  is a generic function to be determined in order to obtain that the length of circumferences centred in the origin of the coordinate system are not  $2\pi r$ . In other words,  $m$  represents a measure of the deviation from  $2\pi r$  of circumferences centred in the origin of the coordinate system.

The line element (2) becomes :

$$(61) \quad ds^2 = hdr^2 - mr^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) + ldt^2. \quad (5)$$

One puts

$$(62) \quad \begin{aligned} X &\equiv \frac{1}{3}r^3 \\ Y &\equiv -\cos\theta \\ Z &\equiv \phi \end{aligned} \quad (6)$$

Il écrit, ce qui est exact, que si on veut obtenir la « solution standard », c'est à dire notre équation (58) ( ou son équation (1) ) il faut supprimer le terme croisé et faire en sorte que les coefficient de  $(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$  soit  $r^2$ . Ensuite, il présente le calcul de Schwarzschild comme un écart consenti à cette seconde hypothèse, qui lui paraît évidente, **à savoir que le périmètre d'une courbe fermée, se situant dans un plan, soit  $2\pi r$ , pour laquelle il n'existe aucune justification physique.** Cette « déviation » vis-à-vis de cette « solution standard », la seule pertinente selon lui, se traduit par le remplacement de  $r^2$  par une fonction  $m$ . Ce qui suit est alors, à l'identique, le calcul effectué par Schwarzschild [4]. Il explicite alors le résultat de celui-ci Dans son équation (28) :

$$(63) \quad ds^2 = \left[ 1 - \frac{a}{(r^3 + a^3)^{1/3}} \right] dt^2 - (r^3 + a^3)^{2/3} (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) - \frac{d(r^3 + a^3)^{2/3}}{1 - \frac{a}{(r^3 + a^3)^{1/3}}} \quad (28)$$

où il remplace la constante d'intégration  $a$  par le rayon de Schwarzschild  $r_g$  :

$$(64) \quad ds^2 = \left[ 1 - \frac{r_g}{(r^3 + r_g^3)^{1/3}} \right] dt^2 - (r^3 + r_g^3)^{2/3} (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) - \frac{d(r^3 + r_g^3)^{2/3}}{1 - \frac{r_g}{(r^3 + r_g^3)^{1/3}}} \quad (30)$$

Il donne cette expression finale de la métrique extérieure, par Schwarzschild, sans l'explicitier totalement. Nous allons le faire et il vient :

(65)

$$ds^2 = \frac{(r^3 + r_g^3)^{1/3} - r_g^3}{(r^3 + r_g^3)^{1/3}} c^2 dt^2 - (r^3 + r_g^3)^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \frac{r^4}{(r^3 + r_g^3) [(r^3 + r_g^3)^{1/3} - r_g]} dr^2$$

Ce qui est identique à l'équation (17) du présent article. La constante  $a$  n'est autre que la longueur caractéristique  $r_g$ , est le « rayon de Schwarzschild », désigné par  $\alpha$  par celui-ci. .

Ce résultat signifie que sa fonction  $m$  vaut, ce qu'il précise dans son équation (29) :

$$(66) \quad m = \frac{(r^3 + a^3)^{2/3}}{r^2} \quad (29)$$

Le comportement de la « métrique originale de Schwarzschild », correspondant à l'équation (17) a été examiné plus haut. Avec ces coordonnées *la variable*  $r$  peut prendre toutes les valeurs non négatives, étant donné sa définition par Schwarzschild. L'objet géométrique est **non-contractile**. Le point  $r = 0$  peut être qualifié « d'origine des coordonnées ». Corda introduit alors le changement de variable ( son équation (31) ) :

$$(63) \quad \hat{r} = (r^3 + r_g^3)^{1/3} \quad (31)$$

En conséquence de quoi il obtient ( son équation (32) ) :

$$(64) \quad ds^2 = \left( 1 - \frac{r_g}{\hat{r}} \right) dt^2 - \hat{r}^2 ( d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 ) - \frac{d\hat{r}^2}{1 - \frac{r_g}{\hat{r}}} \quad (32)$$

Il devient alors important de reproduire ses propres mots, en sachant que tous les spécialistes des trous noirs invoquent cet article, simplement positionné sur la base de donnée arXiv, et non publié dans une revue à comité de lecture, dès que quelqu'un met en doute la pertinence de « l'interprétation standard » de la solution extérieure de Schwarzschild, en tant que base du modèle des trous noirs. Nous le citons donc :

*Eq. (32) looks formally equal to the "standard Schwarzschild solution" (1). But one could think that the transformation (31) is forbidden for the following motivation. It transfers the origin of the coordinate system,  $r = 0, \theta = 0, \phi = 0$ , which is the surface of a sphere having radius  $r_g$  in the  $\hat{r}, \theta, \phi$  coordinates, in a non-dimensional material point  $\hat{r} = 0, \theta = 0, \phi = 0$  in the  $\hat{r}, \theta, \phi$  coordinates. Such a non-dimensional material point corresponds to the point  $r = -r_g, \theta = 0, \phi = 0$  in the original  $r, \theta, \phi$*

*coordinates*. Thus, the transformation (31) could not be a suitable coordinate transformation because it transfers a spherical surface, i.e. a bi-dimensional manifold, in a non-dimensional material point. We will see in the following that this interpretation is not correct.

On the other hand, we are searching solution for the external geometry, thus we assumed  $r \geq 0$  in Eq.(3) and from Eq. (31) it always  $\hat{r} \geq r_g$  in Eq. (30). In this way there are not physical singularity in Eq. (32). In fact  $r = 0$  in Eq. (30) implies  $\hat{r} = r_g$  in Eq. (32) which corresponds to the mathematical singularity at  $X = 0$ . This singularity is not physical but is due to the particular coordinates  $t, X, Y, Z$  defined defined by the transformation (6).

Again, we emphasize the apparent different assumption of our analysis. As it is carefully explained in [42], the “standard Schwarzschild solution” (1), arises from the hypothesis that the coordinates  $r$  and  $t$  of the two functions (4) are chosen in order to guarantee that the length of the circumference centred in the origin of the coordinate system is  $2\pi r$ . Indeed, in the above derivation of “the original Schwarzschild solution” (30),  *$r$  and  $t$  are chosen in order to guarantee that the length of the circumference centred in the origin of the coordinate system is not  $2\pi r$* . In particular, choosing to put the mathematical singularity of the function  $A$  at  $X = 0$  is equivalent to the physical condition that the length of the circumference centred in the origin of the coordinate system is  $2\pi(r^3 + r_g^3)^{1/3}$ . Then, one could think that by forcing the transformation (31) for  $r \leq 0$ , one returns to the standard Schwarzschild solution (1), but a bi-dimensional spherical surface, that is the surface of the Schwarzschild sphere, is forced to become a non-dimensional material point and we force a non-Euclidean geometry for circumferences to become Euclidean. In that case, such a mathematical forcing could be the cause of the singularity in the core of the black-hole. Thus, this singularity could be only mathematical and not physical. But in the following, by matching with the internal geometry, we will see that this interpretation is not correct and that the singularity in the core of the BH remains a physical singularity also in the case of the “original Schwarzschild solution” given by Eq. (30).

Notice that a large distances, i.e. where  $r_g \ll r$ , the solution (30) well approximates the standard Schwarzschild solution (1), thus, both of the weak field approximation and the analysis of astrophysical situations remain the same.

Nous avons souligné, en rouge, l'objet géométrique qualifié par C.Corda de « *non-dimensional material point* ». Nous n'avons pas pu trouver, en mathématiques et en géométrie la définition d'un tel objet et il semble que celui-ci n'existe que dans l'imagination de son auteur.

Il qualifie par la suite la portion d'espace correspondant à la valeur  $\hat{r} = r_g$  de singularité de coordonnée, c'est à dire dans le système  $\{t, \hat{r}, \theta, \varphi\}$ , ce qui est exact, mais il commet une erreur en disant que cette singularité de coordonnée est également présente en  $r = 0$ , c'est à dire dans le système des coordonnées de Schwarzschild  $\{t, r, \theta, \varphi\}$ . Dans celui-ci la forme de la métrique correspond à l'équation (55). En  $r = 0$  les potentiels de cette métrique ne sont nullement singuliers. Il est significatif que C.Corda n'ait pas totalement explicité la métrique sous cette forme, ce qui laisse à penser qu'il n'a analysé le calcul original de Schwarzschild que très sommairement.

Résumons le schéma du calcul tel que l'a conduit Schwarzschild :

- Il part de coordonnées cartésiennes  $\{t, x, y, z\}$
- Puis il opte pour des coordonnées polaires  $\{t, r, \theta, \varphi\}$  avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0$

- Il utilise un troisième système, par commodité de calcul (l'équation (7) de [4]) :

$$(55) \quad x_4 = t, \quad x_1 = \frac{r^3}{3}, \quad x_2 = -\cos\theta, \quad x_3 = \varphi \quad (7)$$

- Il obtient alors ses potentiels métriques en fonction de  $\{x_3, x_1, x_2, x_3\}$

$$(56) \quad f_4 = 1 - \frac{\alpha}{(3x_1 + \alpha^3)^{1/3}} \quad (10)$$

$$(57) \quad f_1 = \frac{(3x_1 + \alpha^3)^{1/3}}{1 - \frac{\alpha}{(3x_1 + \alpha^3)^{1/3}}} \quad (11)$$

$$(58) \quad f_2 = f_3 = (3x_1 + \alpha^3)^{2/3} \quad (12)$$

- Il ne publie pas son résultat, ce qu'il ferait en retournant aux coordonnées  $\{t, r, \theta, \varphi\}$ , car il constate après l'avoir sans doute explicité, qu'il aura des difficultés pour opérer la jonction avec sa métrique intérieure, d'abord exprimée dans des coordonnées sphériques  $\{t, \chi, \theta, \varphi\}$ , puis qu'il exprime en coordonnées polaires  $\{t, R, \theta, \varphi\}$  en utilisant :

- (69)

$$R = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G \rho_o}} \sin \chi = \hat{R} \sin \chi$$

- Il opère alors, pour négocier ce raccordement entre les deux métriques, un ultime changement de variable dans sa métrique extérieure, en passant de sa coordonnée  $r$  à une grandeur intermédiaire (HilfsgöÙe)  $R$  selon :

$$R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}$$

variable désignée par le caractère  $\hat{r}$  dans l'article de Corda.

Dans son articles Corda utilise des coordonnées  $X, Y, Z$ , qui sont les coordonnées  $x_1, x_2, x_3$ . Il exact que dans les coordonnées  $\{x_4, x_1, x_2, x_3\}$  la non-régularité du terme  $g_{RR}$  introduit cette singularité de coordonnées. Mais celle-ci disparaît dans le système  $\{t, r, \theta, \varphi\}$  car lorsque  $r$  tend vers zéro,  $g_{rr}$ , voir l'équation (16), tend vers  $3r/\alpha$ , c'est à dire vers zéro, et non vers l'infini.

Une chose s'impose. La « forme standard » de la solution découle entièrement d'une transformation de la forme envisagée par Schwarzschild (équation (6) de [4]) :

$$(70) \quad \begin{aligned} ds^2 &= Fdt^2 - G(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2) - Hr^2dr^2 \\ &= Fdt^2 - (G+H)dr^2 - G(r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2) \end{aligned} \quad (6)$$

Le premier qui modifie cette expression est David Hilbert, le 23 décembre 1916 [23]. Dans la présentation de Schwarzschild trois fonctions de  $r$  :  $F, G, H$  sont à déterminer. Hilbert écrit :

*According to Schwarzschild the most general metric conforming to these assumptions ins represented in polar coordinates*

$$(71) \quad \begin{aligned} w_1 &= r \cos \theta \\ w_2 &= r \sin \theta \cos \varphi \\ w_3 &= r \sin \theta \sin \varphi \\ w_4 &= l \end{aligned}$$

by the expression

$$(72) \quad F(r)dr^2 + G(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + H(r)dl^2 \quad (42)$$

where  $F(r), G(r), H(r)$ , are still arbitrary functions of  $r$ . If we put

$$(73) \quad r^* = \sqrt{G(r)}$$

*Then we are equally justified in interpreting  $r^*, \theta, \varphi$  as spatial polar coordinates. If we introduce  $r^*$  in (42) instead of  $r$  and the eliminate the sign  $*$ , the result is the expression*

$$(74) \quad M(r)dr^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 + W(r)dl^2 \quad (43)$$

Ne cherchez pas chez Hilbert des justifications de haute géométrie. Il ne voit là simplement là une façon de n'avoir à déterminer que deux fonctions, au lieu de trois.

Corda cite la construction de la solution faite par Droste en 1917[14] comme celle qui conduit à « la forme standard de la solution de Schwarzschild ». Celui-ci présente sa solution sous la forme :

$$(75) \quad ds^2 = w^2 dt^2 - dr^2 - v^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4)$$

Droste, lui aussi, comprend que la construction de la solution peut se ramener à celle de deux fonctions inconnues, ici  $w$  et  $v$ . Il opère deux changements de variables successifs :

$$(76) \quad \{t, r, \theta, \varphi\} \rightarrow \{t, x, \theta, \varphi\} \rightarrow \{t, \xi, \theta, \varphi\}$$

Ce qui l'amène au résultat :

$$(77) \quad ds^2 = (1 - \xi) dt^2 - \frac{4\alpha^2}{(1 - \xi)\xi^4} d\xi^2 - \frac{\alpha^2}{\xi^2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Se pose alors pour lui le problème des conditions aux limites : Comment choisir une nouvelle variable d'espace telle qu'en la faisant tendre vers l'infini la métrique tend vers celle de Lorentz. La solution est vite trouvée, c'est :

$$(78) \quad \xi = \frac{\alpha}{r}$$

Et apparaît alors ce que Corda considère comme « la forme standard de la solution de Schwarzschild » :

$$(79) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (7)$$

En fait, la seule contrainte est que lorsque la valeur d'une coordonnée spatiale tend vers l'infini la métrique ait une forme Lorentzienne. Autrement, toutes les formes de coordonnées sont possibles et ne se réfèrent qu'à des systèmes de représentation différents. Ces choix ne constituent en fait que des façons différentes de se représenter un même objet, où la seule grandeur intrinsèque, invariante par changement de coordonnées est la longueur  $s$ . Le scientifique est

donc comme un aveugle qui ne dispose que d'une mesure de longueur, grâce à ses mains, pour évaluer la forme d'un objet.

Flamm [10] a tout de suite compris qu'on pouvait se concentrer sur la partie spatiale d'une solution invariante par translation temporelle. Ce qui peut être pris en compte dans la solution physique présentée par Schwarzschild sous la forme de deux métriques, régulières, se raccordant, sans qu'un quelconque aspect singulier n'apparaisse dans l'espace. **Cet objet géométrique 3D qu'on pourrait nommer l'hypersurface de Schwarzschild-Flamm est alors contractile.** Il se trouve qu'on peut le plonger dans  $\mathbb{R}^3$ . Et dans un tel objet on peut effectuer des coupes planes, par exemple à  $\theta$  constant. La coupe plane d'un objet 3D est un objet 2D. Voici cette coupe, extraite de [24].

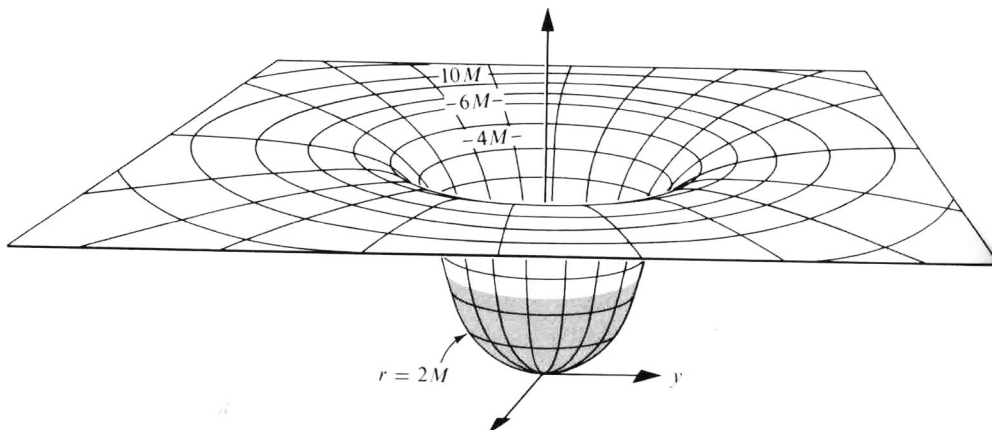


Fig.6 : Hypersurface de Schwarzschild-Flamm [24].

Pour obtenir l'objet 3D il faut opérer des rotations. Ce faisant il est clair que l'ensemble de l'espace 3D sera balayé et il n'existera aucun de ces point qui n'appartienne pas à l'hypersurface.

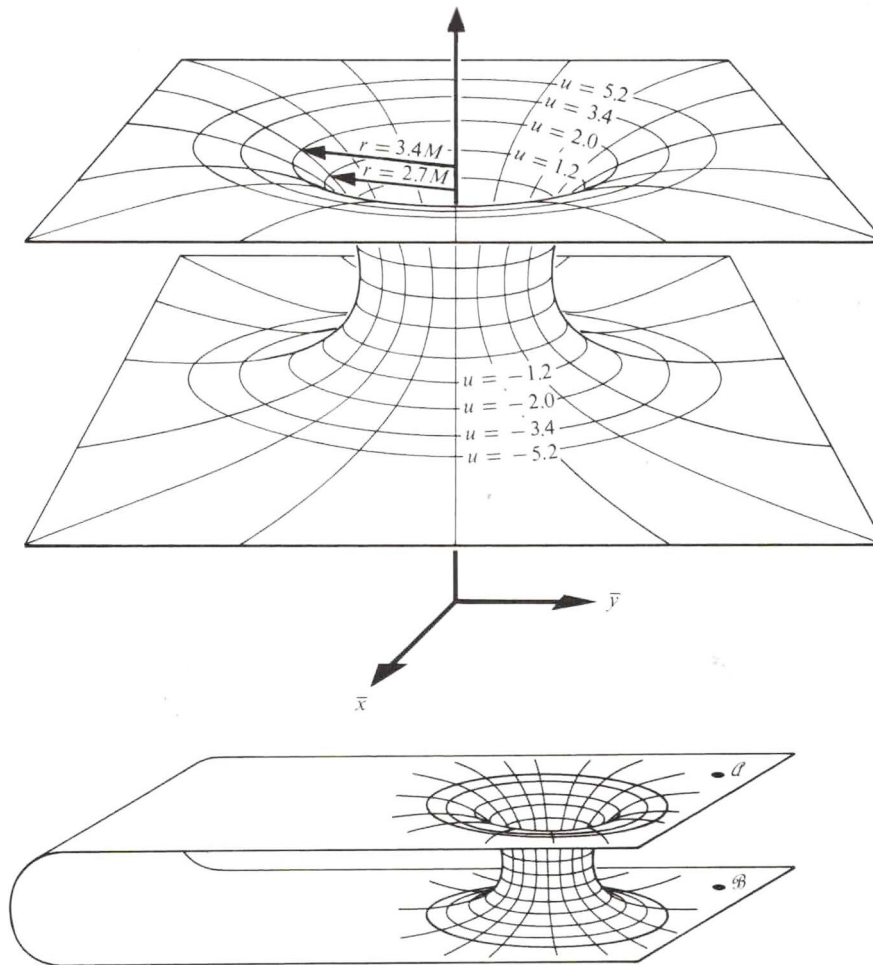


Fig.7 : Surface de Flamm [24].

Quand on ne considère que la métrique extérieure, l'hypersurface 4D relie deux espaces de Minkowski. La coupe à  $t$  constant d'un espace de Minkowski est un espace euclidien 3D. Si on effectue des coupes planes de ces espaces euclidiens 3D on obtient des plans. Il est donc parfaitement pertinent de dire que la coupe plane de l'hypersurface 3D donne un objet qui est un pont reliant deux plans. L'objet comporte un cercle de gorge. Maintenant si on veut engendrer l'objet 3D il faut envisager des rotations dans l'espace de plongement 3D. Ce faisant le cercle de gorge va envelopper une sphère, la sphère de gorge. **Seuls les points de l'espace 3D de plongement extérieurs à cette sphère appartiendront à l'hypersurface 3D.** À l'intérieur de la sphère les points donneront un  $ds^2 < 0$ . Le fait de considérer qu'ils appartiennent ou non à la physique dépend des choix retenus.

La figure 6 correspond à un espace de représentation associé aux coordonnées  $\{t, R, \theta, \varphi\}$  ou  $\{t, \hat{r}, \theta, \varphi\}$ . Qu'en serait-il de l'espace 3D associé au choix initial fait par Schwarzschild? Là encore cela correspondrait à une structure reliant deux espaces 3D euclidiens. La jonction ne se ferait pas par une sphère de gorge, mais à travers un point, qu'on pourrait assimiler à « une sphère de gorge très petite ». Mais cette vision est trompeuse. En fait l'objet 3D n'est cette fois plus « plongeable ». Il n'y a pas un espace de représentation qui soit meilleur

qu'un autre. Le tout est de savoir du jeu auquel on a décidé de jouer. Si cette démarche consiste à imposer que  $ds^2 \geq 0$  alors la solution de l'équation nous délivre le même message, sous des formes différentes selon le contexte géométrique retenu. Si on impose l'unicité de la solution, alors il n'y aura qu'une seule nappe et une seule métrique. Avec l'espace temps associé aux coordonnées  $\{t, r, \theta, \varphi\}$  ou  $\{t, R, \theta, \varphi\}$  l'hypersurface 3D sera dotée d'un bord ayant la topologie d'une sphère  $S^2$ . Dans le second cas la sphère sera constitué de points ayant pour coordonnées  $\{R = R_s, \theta, \varphi\}$  et l'aire de cette sphère sera  $4\pi R_s^2$ . Dans le premier cas la sphère de bord aura la même aire, mais ses points correspondront à  $\{r=0, \theta, \varphi\}$ . Cette situation ne choquera nullement un mathématicien géomètre. Dans le même ordre d'idées, qui peut se créer une représentation mentale de l'espace de Minkowski, où le carré de l'hypothénuse est égal à la différence de deux côtés adjacents ? Qui possède un schéma mental où les phénomènes de la mécanique quantique deviennent clairs ?

Si on envisage la possibilité d'une non-unicité, d'une solution bimétrique, la sphère-bord devient une sphère de gorge.

Ceci étant, quand C. Corda dit :

*Such a non-dimensional material point corresponds to the point  $r = -r_g, \theta = 0, \phi = 0$  in the original  $r, \theta, \phi$  coordinates.*

cette phrase révèle son manqué de maîtrise du sujet, car, compte tenu de la définition même de ces coordonnées :  $\{t, r, \theta, \varphi\}$  on a  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0$

Toujours au titre de commentaire de la seconde partie de l'article de C. Corda nous dirons que depuis des décennies les spécialistes des trous noirs, quand ils parlent des bases du modèle, évoquent toujours des travaux antérieurs grâce auxquels celles-ci auraient été analysés de manière définitive. Nous étions présents en 2017 aux « Colloque annuel Schwarzschild » qui se tenait dans sa ville natale. Juan Maldacena, pionnier en matière de physique des trous noirs, était la personnalité invitée. En débutant son exposé il dit :

- *La solution de Schwarzschild déconcerta les théoriciens dans le tout début. Mais aujourd'hui cela a été élucidé et cette solution est maintenant bien comprise (...)*

Corda ne manque pas à cette règle, qui écrit :

- *In particular, the second condition implies that the standard Schwarzschild radius is determined in a way which guarantees that the length of the circumference centred in the origin of the coordinate system is  $2\pi r$ .*

- Again, we emphasize the apparent different assumption of our analysis. As it is carefully explained in [52] (our reference [25]), the « standard Schwarzschild solution » (1) (notre équation(54) , arises from the hypothesis that the coordinates  $r$  and  $t$  of the two functions are chosen in order to guarantee that the length of the circumference centre in the origin of the coordinate is  $2\pi r$  .

**Mais aucune considération d'ordre physique ou mathématique ne justifie cette hypothèse.**

La seconde partie de son article est une tentative de modéliser l'implosion d'une étoile déstabilisée. Avant que ceci ne se produise, du fait du manque d'énergie émanant de la fusion, l'étoile aura tendance à s'affaisser sur elle-même. Si c'est une étoile à neutrons, la criticité pourra être due à un apport de matière de la part d'une étoile compagne. Dans les deux cas cet affaissement de l'étoile massive où l'accroissement du diamètre de l'étoile à neutrons s'accompagneront d'une montée de la température et de la pression au sein de ces objets. Depuis 1916 on connaît le violent accroissement de la pression au sein d'une sphère emplie d'un matériau incompressible, de densité constante. [5]. Même si on refuse d'accorder foi à ce calcul, qui évoque une montée de la pression jusqu'à une valeur infinie, il reste raisonnable d'imaginer qu'avant que ce collapse ne survienne la pression atteint déjà une valeur très importante.

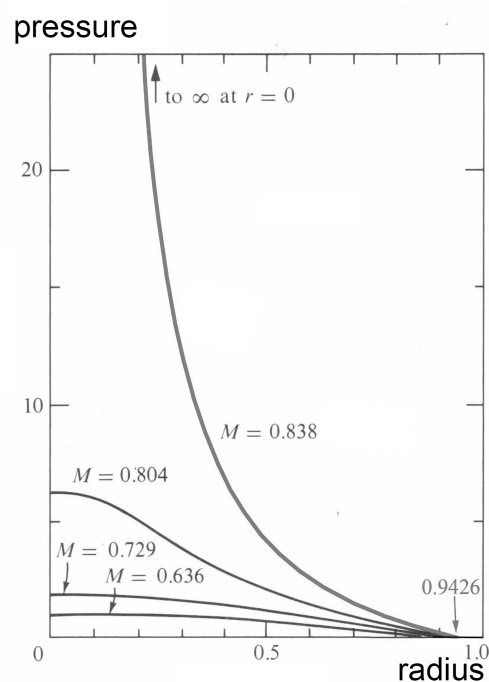


Fig.8 : Evolution de la pression au sein d'une sphère emplie d'un matériau incompressible en fonction du rayon [24].

**La modélisation du collapse, proposée par C.Corda, à pression nulle, n'a donc aucun sens physique.**

## 7 –Les bases de la théorie des trous noirs.

Avant la seconde guerre mondiale toutes les publications dans des revues de mathématiques ou de physique théorique tablaient sur les points suivants.

La métrique s'écrivait ([4],[9],[6],[10],[12],[14]) :

$$(80) \quad ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx_i dx_j \geq 0$$

Les géodésiques étaient définies comme les courbes minimisant une longueur  $s$ . Comme C.Corda évoque l'article de Droste en tant que première construction de la « standard Schwarzschild solution », nous citerons l'expression du Lagrangien donnée par Droste [14] dans son équation (9) :

$$(81) \quad L = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2} \quad (9)$$

A cette époque on n'utilisait pas encore le concept de signature, mais celle-ci avait de fait partout la forme  $(+---)$ . Dans sa présentation C.Corda évoque l'histoire de cette solution stationnaire de l'équation d'Einstein à symétrie sphérique. Il écrit :

*- A few months after Schwarzschild, J. Droste, a student of H.Lorentz, gave an apparently different solution for the point mass and wrote more extensively about its properties [20] (our reference [14]) . In such a work Droste also claimed that his solution was physically equivalent to the one by Schwarzschild. In the same year, 1917, H.Weyl reobtained the same solution by Droste [21] (our reference [12]). This solution had a peculiar behaviour and what is now called the Schwarzschild radius, where it becomes singular, , meaning that the sum of the terms in the Einstein equation became infinite. The nature of this surface was not quite understood at the time, but Hilbert [22] (our reference [13]) claimed that the forma by Droste and Weyl was preferable in [3] (our reference [6]) and even since the phrase « Schwarzschild solution » has been taken to mean the line element in [20,21]. rather than the original solution in [2] (our reference [26]).*

Il n'y a qu'une seule « solution de Schwarzschild », qui se trouve présentée et interprétée dans différents systèmes de coordonnées. H.Weyl, en 1917 [12] analyse la solution de l'équation d'Einstein dans le vide, prise isolément, pour tenter de géométriser le masse, comme le feront Einstein et Rosen en 1935 [15]. Il écrit son action (son équation (2) de [12]) :

$$(82) \quad \int \left\{ dm \int \sqrt{g_{ik} dx_i dx_k} \right\} \quad (2)$$

Il sépare ensuite les deux éléments de la métrique selon :

$$(83) \quad f dt^2 - d\sigma^2$$

Il précise l'hypothèse concernant l'élément de longueur :

$$(84) \quad ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k > 0$$

Et la nature de sa coordonnée  $r$  :

$$(85) \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Il obtient l'expression de sa fonction  $f$  :

$$(86) \quad f = 1 - \frac{2a}{r}$$

où  $2a$  est le rayon de Schwarzschild. Comme l'avais fait L.Flamm en 1916 [10] il effectue une coupe plane de l'objet 3D passant par l'origine et donne lui aussi l'équation de la méridienne :

$$(87) \quad z = \sqrt{8a(r - 2a)}$$

C'est la toute première fois que cette solution est considérée comme un revêtement à deux feuillets, ce qui mérite d'être mentionné. Citons Weyl [12]:

- If the paraboloid is projected orthogonally on the  $z=0$  plane with the polar coordinates  $r, \theta$  the projection covers the exterior of the circle  $r \geq 2a$  twice, but does not cover the interior at all.

Autrement dit cette projection est le revêtement 2D à deux feuillets d'une variété non contractile dotée d'un bord circulaire, de périmètre  $2\pi r$ . Il introduit ensuite un second système de coordonnées, isotropes, où la métrique de cet « espace gravitationnel » devient conforme à un espace Euclidien, selon le facteur :

$$(88) \quad \left(1 + \frac{a}{2r}\right)^2$$

Ce changement de variable (devenu classique) est :

$$(89) \quad x_1' = \frac{r'}{r} x_1, \quad x_2' = \frac{r'}{r} x_2, \quad x_3' = \frac{r'}{r} x_3, \quad r = \left(r' + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{1}{r'}$$

$$(90) \quad d\sigma^2 = \left(1 + \frac{a}{2r}\right)^4 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \quad f = \left(\frac{r - a/2}{r + a/2}\right)^2$$

Mais, ce faisant, Weyl exprime la métrique avec cette nouvelle coordonnée qu'il désigne par la lettre  $r$ , mais qui n'est plus la coordonnée  $R$  de Schwarzschild ou  $\hat{r}$  de Corda. Pour plus de lisibilité nous conserverons  $r'$  en écrivant :

$$(91) \quad d\sigma^2 = \left(1 + \frac{a}{2r'}\right)^4 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \quad f = \left(\frac{r' - a/2}{r' + a/2}\right)^2$$

et, reprenant le texte de Weyl nous écrivons :

$d\sigma^2$  is regular for all values  $r > 0$ ,  $f$  is always positive and becomes zero only for

$$r' = \frac{a}{2}$$

The circumference of the circle  $x_1^2 + x_2^2$  is

$$2\pi r' \left( 1 + \frac{a}{2r'} \right)^2$$

if we allow  $r'$  to run over its range of values beginning with  $+\infty$ , then this function decreases monotonocally until it reaches the value  $4\pi a$  for

$$r' = \frac{a}{2}$$

after which it begins to increase again as  $r'$  is decreased further toward zero, and grows finally without bound.

Ce qui est intéressant est que H.Weyl a introduit un paramètre  $r'$  qui, variant de  $+\infty$  à zéro, permet de décrire les deux nappes, la sphère de gorge correspondant à la valeur  $a/2$ . Bien sûr, il entend utiliser cette géométrie pour décrire une masse, qu'il image donc dotée d'un extérieur, pour  $r' > a/2$  et d'un intérieur, pour  $r' < a/2$ . Le plus important est qu'il envisage les valeur de  $\sqrt{f}$ , qui sera appelé le « time factor », puisqu'il représente le coefficient de  $dt$ . Et il écrit :

$$(92) \quad ds = \sqrt{f} dt = \frac{r' - a/2}{r' + a/2} dt$$

Coefficient qui deviendrait donc négatif au delà de la sphère de gorge.  $s$  est la longueur, mesurée le long des géodésiques et ne peut être négative. **La négativité du time factor impliquerait, si la géométrie de Schwarzschild conduit à un autre feuillet d'espace temps, que la coordonnée de temps s'inverse au passage de la gorge, mais non le temps propre, autrement dit que les deux feuillets soient T-symétriques.** Fin de cette digression vis à vis de l'interprétation de la solution de Weyl. Mais il ressort, contrairement à ce qu'écrit Corda, que Weyl ne retrouve pas la même solution que Droste et Schwarzschild. A sa décharge la traduction anglaise du texte de Weyl n'a été disponible qu'en 2012, après la parution de son article.

Il est maintenant nécessaire de revenir sur l'article publié le 23 décembre 1916 [13]. Avant 1915 Einstein avait convaincu le grand mathématicien David Hilbert que le recours à la géométrie moderne, en train de naître, apportait un éclairage nouveau et puissant en physique. Il faut aussi tenir compte qu'en 1915 :

- On ne connaît que deux forces, la force de gravité et la force électromagnétique. On vient de découvrir l'électron.

- On ignore totalement que l'univers puisse évoluer dans le temps.
- L'écart vis-à-vis d'une géométrie euclidienne, d'une physique Newtonienne et Maxwellienne, quand les trains roulent à la vapeur, n'est qu'un infime phénomène, relevant de la philosophie des sciences, sans application physique immédiate.

En 1915 Hilbert, qui vient de découvrir que les hautes mathématiques dont il est un des chantres, ont quelque application en physique, utilise le principe de moindre action, appliqué à l'électromagnétisme et à la gravitation. En publiant un article intitulé « Les Fondements de la Physique » [27], qui traite conjointement de la gravitation et de l'électromagnétisme, il publie que l'on désignerait aujourd'hui par une « Theory of Everything ». Il y expose sa propre compréhension de la relativité restreinte : que signifie pour lui la présence d'un signe moins dans la métrique ? Sa propre réponse : **le temps est simplement imaginaire pur, quand on l'élève au carré, le signe moins apparaît.** Alors qu'Einstein s'est évertué à montrer que cette dimension temporelle est de la même nature que les trois autres, et qu'il faut la mesurer en mètres et, accessoirement la convertir en secondes en le divisant par une constante :  $c$ . Ainsi, pour Hilbert, l'espace, avec ses trois coordonnées,  $x_1, x_2, x_3$  est « premier ». Le temps n'est qu'une dimension d'une autre nature, qui vient se greffer sur un espace quasi-Euclidien. Les effets relativistes ne se manifestent d'ailleurs que tout au bout du calcul, lequel est mené avec des dimensions  $w_1, w_2, w_3, w_4$ , et ce n'est que dans la dernière ligne qu'apparaît une coordonnée de temps, selon  $w_4 = it$ . Les deux articles, de 1915 et 1916 ont le même titre : « Les fondements de la physique ». C'est cela que vise Hilbert : découvrir les rouages ultimes de l'univers, qui est régi par ce qui, chez lui, se substitue à la Nature et à Dieu : la logique. Tout est régi par les mathématiques, qui révèlent une à une leur facettes pour permettre à l'homme de comprendre l'univers. Les maitres mots sont complétude, consistance, décidabilité. D'où la devise, d'un optimiste intellectuel absolu, qui sera gravé sur sa tombe, à Göttingen :

Wir müssen wissen, wir werden wissen

*Nous devons savoir, et nous saurons.*

La production de grandeurs mesurables, en l'occurrence le temps propre, relève pour lui du travail de l'ingénieur. Ce qui compte c'est la matrice qui permet d'enfanter ces grandeurs. Et cette matrice est une forme bilinéaire, extraordinaire de compacité et d'élégance :

$$(93) \quad G(X_s) = \sum_{\mu\nu}^{1,2,3} g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu + i^2 X_4^2 \quad (32)$$

La métrique, pour Hilbert, n'est qu'un infime variation vis à vis de la métrique Euclidienne, associée au tenseur de Kronecker  $\delta_{\mu\nu}$ . La courbure est une perturbation :

$$(94) \quad g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} + \dots \quad (37)$$

Le 20 novembre 1915 Hilbert publie donc sa première version [27] de ses « Fondements de la physique », qui contient d'ailleurs l'équation de champ, au grand dam d'Einstein qui publie la même équation cinq jours plus tard [8], dans la même revue. Après un bref moment de flottement, entre ces gens génies devenus amis, Hilbert décide qu'Einstein gardera seul la paternité de ce qui servira de base à la relativité générale. Mais, au début de 1916 Schwarzschild publie la première solution exacte de cette équation [4]. Hilbert décide alors de publier une seconde version de son article, avec le même titre [13], qui intègre ce résultat de Schwarzschild. Mais il ne porte son attention que sur la métrique extérieure [4], délaissant totalement l'article de février sur la métrique intérieure [5]. En passant en coordonnées polaires, il désigne ces nouvelles coordonnées par  $\{ r, \theta, \varphi, l \}$ . Il est important de citer ce passage capital où il présente sa forme bilinéaire :

$$(95) \quad F(r)dr^2 + G(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + H(r)dl^2 \quad (42)$$

$l$  est la coordonnée de temps, qui devient  $it$  un peu plus loin. Le  $ds^2$  a disparu. A ce stade la « signature » est euclidienne : (++++). A ce stade Hilbert a trois fonctions de  $r$  à déterminer. Avec ce qui suit, il réduit ce nombre à deux ;

where  $F(r), G(r), H(r)$  are still arbitrary functions of  $r$ . If we put

$$(96) \quad r^* = \sqrt{G(r)}$$

then we are equally justified in interpreting  $r^*, \theta, \varphi$  as spatial polar coordinates. If we introduce  $r^*$  in (42) instead of  $r$  and then eliminate the sign  $*$ , the result is the expression

$$(97) \quad M(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + W(r)dl^2 \quad (43)$$

Une démarche que L.S.Abrams qualifiera d'erreur [29] et qui sera commentée par la suite par S.Antoci [30]. Il ne s'agit pas d'une erreur mais du simple passage, chez Schwarzschild, en reprenant nos notations du débat de l'article du système des coordonnées polaires  $\{ r, \theta, \varphi \}$  au système  $\{ R, \theta, \varphi \}$  avec  $R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}$ . Il reste à Hilbert à fournir le résultat de son calcul

$$(98) \quad G(dr, d\theta, \varphi, dl) = \frac{r}{r-\alpha} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{r-\alpha}{r} dl^2 \quad (45)$$

On a donc quatre signes +, une signature (++++). Puis, avec  $l = it$  :

$$(99) \quad G(dr, d\theta, \varphi, dt) = \frac{r}{r-\alpha} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{r-\alpha}{r} dt^2 \quad (45bis)$$

**Vous trouvez ici l'origine du changement de signature :**

$$(100) \quad (+----) \rightarrow (-++++)$$

qui se généralisera, dans l'après guerre, à toute la physique théorique sans qu'on puisse mentionner un article om cette transformation soit justifiée. Antérieurement, par exemple, la métrique de Lorentz s'écrivait

$$(101) \quad ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Pour traduire le fait que les mouvement de la matière s'effectuent à une vitesse inférieure à celle de la lumière il suffisait de poser que  $ds^2 \geq 0$ . La longueur  $s$  était identifiée au temps propre  $\tau$  selon  $s = c\tau$ . Avec Hilbert l'attention se porte maintenant sur la forme bilinéaire, qu'on écrira :

$$(102) \quad G \equiv dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

Comment, dans ces conditions, faire apparaître un temps propre réel ? Simple, il suffit de poser

$$(103) \quad \tau = \frac{1}{c} \sqrt{-G}$$

C'est exactement ce que fait Hilbert dans son article de 1915 [13], où il écrit :

*A piece of curve for which*

$$(104) \quad G\left(\frac{dx_s}{do}\right) > 0$$

*Shal be called a segment and the integral piece of the curve*

$$(105) \quad \lambda = \int \sqrt{G\left(\frac{dx_s}{do}\right)} dp$$

*Shall be called the length of the segment. A piece of the curve for wich*

$$(106) \quad G\left(\frac{dx_s}{do}\right) < 0$$

*will be called a time line, and the integral*

$$(107) \quad \tau = \int \sqrt{-G\left(\frac{dx_s}{do}\right)} dp$$

*evaluated along this piece of curve shall be the proper time of the time line. Finally a piece of curve along which*

$$(108) \quad G\left(\frac{dx_s}{do}\right) = 0$$

*shall be called a null line.*

Pour calculer les géodésiques, il indique le schéma du calcul variationnel, selon

$$(109) \quad \delta \int \left( \frac{r}{r-\alpha} \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dp} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{dp} \right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} \left( \frac{dt}{dp} \right)^2 \right) dp = 0$$

Tout est alors en place pour servir de cadre à la naissance du modèle du trou noir, dans l'après-guerre. En Le futur prix Nobel S.Chandrasekhar [31], qui publie en 1992 une Theorie Mathématique des trous noirs, reprend ce même Lagrangien :

$$(110) \quad L = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1-2M/r} - r^2 \dot{\theta}^2 - (r^2 \sin^2 \theta) \dot{\varphi}^2 \right] \quad (80)$$

Revenons à l'action de Droste, c'est à dire l'équation (70). Son Lagrangien est :

$$(111) \quad L = \sqrt{\left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1-2M/r} - r^2 \dot{\theta}^2 - (r^2 \sin^2 \theta) \dot{\varphi}^2}$$

Or les Lagrangiens (97) et (98) conduisent aux mêmes équations de Lagrange, donc aux mêmes courbes géodésiques. Simplement, dans le contexte mathématique de l'avant-guerre, celui d'Einstein, Schwarzschild, Droste, etc , les courbes telles que  $ds^2 < 0$  sont considérées comme n'appartenant pas à l'hypersurface alors que ceux qui désormais operont pour (97) considèrerons que les courbes « spiralant vers une singularité centrale », se situent « à l'intérieur du trou noir ». Chandrasekhar, écrit

$$(112) \quad ds^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1-2M/r} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (60)$$

en précisant bien, page 96, nous citons :

*For time-like geodesics,  $\tau$  may be identified with the proper time  $s$ , of the particle describing tge geodesic.*

Donc les particules cheminant le long de la portion de sa courbe se situant « à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild » évoluent avec un temps propre imaginaire pur.

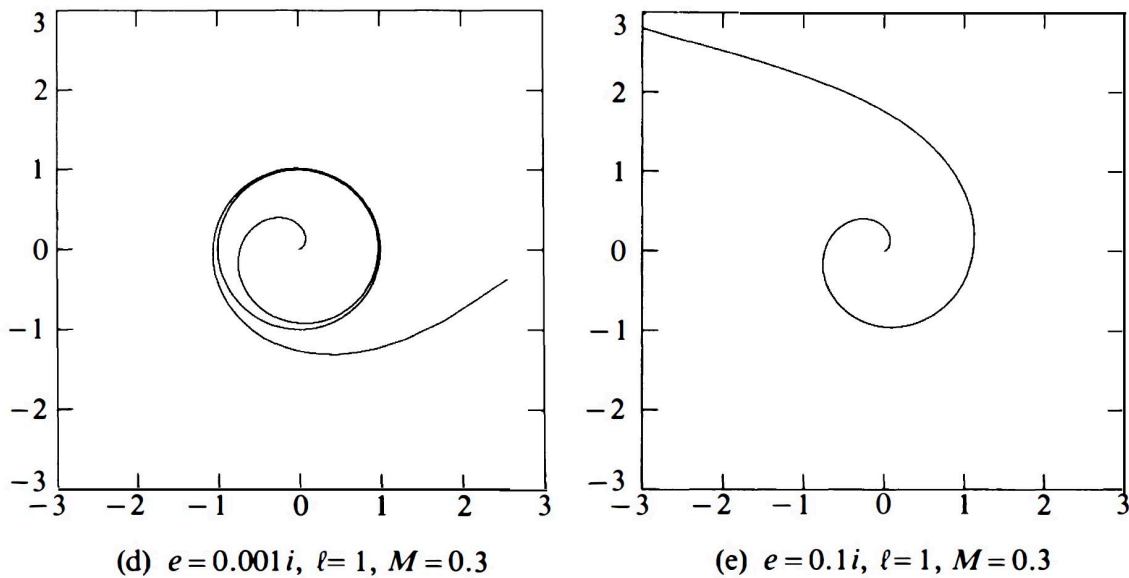


FIG. 7b. Various classes of time-like geodesics described by a test particle with  $E^2 > 1$ : (a), (b), (c): orbits of the first and the second kind with eccentricity  $e = 3/2$  and latera recta, 4.5, 2.5, and 1.94 respectively ( $M = 3/14$  in the scale along the coordinate axes); (d), (e): unbound orbits with  $l = 1$  and with imaginary eccentricities  $e = 0.001i$  and  $0.1i$  ( $M = 0.3$  in the scale along the coordinate axes).

121

Fig.9 : Courbes géodésiques, « à l'intérieur du trou noir », d'après Chandrasekhar [31].

## 8 – Conclusion

Dans cet article nous avons tenté de présenter les tenants et aboutissants de la théorie des trous noirs. Revenant aux deux seules données disponibles ([2], [3]) que peut-on en dire? Ces images ne cadrent pas avec les très nombreuses images de synthèse disponibles. On peut tenter de rendre compte du fort assombrissement des parties centrales, qui évoquent, pour les deux clichés, un accroissement de longueur d'onde par redshift gravitationnel correspondant à  $\lambda'/\lambda = 3$ . En se référant à la solution de Schwarzschild donnant la métrique intérieure [5] on obtient

$$(113) \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{8}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R_s}}}$$

autrement dit d'un objet sous-critique dont la mass vaudrait  $\sqrt{8/9}$  de la valeur de son rayon de Schwarzschild et où donc la force de gravité serait équilibrée par la très forte remontée de la pression en son centre. Il resterait à construire le scénario permettant la formation de tels objets, qui ne seraient donc pas de trous noirs géants.

**References :**

- [1] C.Corda : A clarification on the debate on « the original Schwarzschild solution » (2011) 62-82. arxiv :1010 :6031v5 (gr-qc) 25 mar 2011.
- [2] First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. K. Akiyama, A.Alberdi,W.Alef,K.Asada, R.Azulay, A.K.Bcako, D.Ball,M. Balakovic, J. Barrett. Astrophysical Journal, vo. 875, n°1,2019
- [3]First Sagittarius A\* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way. K. Akiyama, A.Alberdi, W. Alef, J.C.Algaba, E. Anantua, K. Asada, R. Azulay, U. Bach, A.K.Backo. The Astrophysical Journal Letters, vol. 930, number 2. 2022. DOI 10.3847/2041-8213/ac6674
- [4] K. Schwarzschild : Über das Gravitationsfeld Messenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sit. Deut. Akad. Wiss. 1916
- [5] K. Schwarzschild : Über das Gravitationsfeld einer Kugel Aus incompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. Sitzung der phys. Math. Klasse v.23 märz 1916
- [6] K.Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to Einstein theory. English translation by S.Antoci and A.Loinger. arXiv :physics/9912033v1 [physics.hist-ph] 16 dec 1999.
- [7] English translation, by S.Antoci. On the gravitational field of a sphere of incompressible fluide according to Einstein theory. arXiv :physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 may 1999.
- [8] A. Einstein : Die Feldgleichungen des Gravitation ( The Field Equation of Gravitation). Sitzungsber. XLIV , 8 , 778 and XLVI s. 799 ( 25 nov 1915)
- [9] A.Einstein : Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus allgemeinen Relarivitätstheorie. Königlich Preubische Akademie der Wissenschaften (Berlin) Sitzungberichet (25 nov. 1915) p. 831-838
- [10] Ludwig Flamm. Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie, Physikalische Zestschrift XVII (1916) pp. 448-454.
- [11] Ludwig Flamm :Republication of :Contribution to Einstein's Theory of Gravitation. General Relativity and Gravitation. Vol.47 nb 72, (2015)
- [12] H.Weyl : Zu Gravitationstherie. Annalen der physik, Vol.35 n° 18 (aug. 1917) <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1002/andp.19173591804> : 49 \$  
On the Theory of Gravitation. Reprinted in Gen. Relat. And Gravit. Vol. 44 pp 779-810 (2012). English translation from C.Nutto and S.J.Crothers :<https://www.sjcrothers.plasmareources.com/Weyl-2.pdf>
- [13] D.Hilbert. Die Grundlagen der Physik (Esrte Mitteilung). Nachrochten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. (1916)

- [14] J.Droste – The field of a single centre in Einstein’s theory of gravitation and the motion of a particle in that field. Ned. Acad. Wer. . SA 1917 lutecium.fr. KNAW, Proceedings 19 I , 1917, Amsterdam, pp. 197-215
- [15] A.Einstein and N.Rosen : The particle problem in general theory of relativity. Physical Review 110 (4) : 73-77. 1935
- [16] J.P.Petit & G.D’Agostini : Cancellation of the singularity of the Schwarzschild solution with natural mass inversion process. Mod. Phys. Lett. A vol. 30 n°9 2015. arXiv (gr-qc) : 2103.12845v1 23 march 2021.
- [17] R.C.Tolman : Relativity, thermodynamics and cosmology. Oxford Clarendon Press. 1935, page 239, equation (94.1) and Static Solutions of Einstein’s field equation for a sphere of fluid. Phys. Rev. 1939 nol.55 ( 15feb. 1939)
- [18] G.D. Birkhoff : Relativity and modern physics. Cambridge Harvard University Press, 1923
- [19] P.Koiran : Infall Time in the Eddington-Finkelstein Metric, with Application do Eddington-Rosen Bridges. Inter. Jr. of Mod. Phys. D, 14 aug. 2021, to be published. <https://arxiv.org/abs/2110.05938>
- [20] A.Eddington : The mathematical Theory of Relativity. Cambridge University Press. 1924.
- [21] J.R.Oppenheimer and H.Snyder : On Continued Gravitational Contraction. Phys. Rev. Vol. 56 pp 455-459 sept 1939
- [22] L.Landau et E. Lifshiz : Classical Theory of Fields (3rd ed.) London, Pergamon. Vol. 2 of the Course of Theoretical Physics (1971)
- [24] Gravitation. C.W.Misner, K.S.Thorne, J.A.Wheeler. Pinceton University Press. 2017.
- [25] L.Landau, E. Lifschitz – Classical Theory of Fields (3rd e.) London : Pergamon. ISBN 0-08-016019-0 Vol.2 of the Course of Theoretical Physics (1971)
- [26] P.C.Davis. Rep. Prog.Phys. 41, 1313-1355 (1978)
- [27] D.Hilbert. Die Grundlagen der Physik (Erste Mitteilung). Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. (1915) 395-407.
- [29] L.S. Abrams, Phys. Rev. D20, 2774 (1979) alors in arXiv : gr-qc/0202044.
- [30] S.Antoci, D.E.Liebscher, Gen. Relat. Grav. 35,5,945-950 (2003)
- [31] S.Chandrasekhar :The Mathematical Theory of Black Holes. Okford University Press 1992