



**HAL**  
open science

## Quantification d'incertitude sur l'antenne du radio-altimètre

El-Mehdi Djelloul, Alexandre Chabory, Christophe Morlaas, Rémi Douvenot

► **To cite this version:**

El-Mehdi Djelloul, Alexandre Chabory, Christophe Morlaas, Rémi Douvenot. Quantification d'incertitude sur l'antenne du radio-altimètre. XXIIIèmes Journées Nationales Microondes, LEAT Université Côte d'Azur, Jun 2024, Antibes, France. hal-04625227

**HAL Id: hal-04625227**

**<https://hal.science/hal-04625227v1>**

Submitted on 26 Jun 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Quantification d'incertitude sur l'antenne du radio-altimètre

El-Mehdi Djelloul<sup>1</sup>, Alexandre Chabory<sup>1</sup>, Christophe Morlaas<sup>1</sup>, Rémi Douvenot<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ENAC, Université de Toulouse, 7 avenue Édouard Belin CS 54005 31055 Toulouse Cedex 4  
el-mehdi.djelloul@enac.fr

**Résumé** — Le radio-altimètre est un système d'aide à la navigation crucial pour les phases d'atterrissage. Ce système utilise une antenne patch et fonctionne sur la bande de fréquence [4.2; 4.4] GHz. Avant d'être installée sur porteur, cette antenne doit respecter des spécifications de rayonnement précises. L'objectif de ce travail est de modéliser les aléas des paramètres de l'antenne pour en déduire un diagramme de rayonnement stochastique. Ce diagramme est obtenu par décomposition du champ et de la directivité sur une base polynomiale stochastique, appelée Chaos Polynomial. Les résultats sur l'antenne seule sont présentés dans ce papier et permettent de lire les bornes de rayonnement d'une telle antenne en considérant sa largeur et la permittivité électrique relative de son substrat comme des variables aléatoires.

## 1. Introduction

Le radioaltimètre est un système embarqué à bord d'un aéronef et utilisé comme aide au pilotage sur la bande de fréquence [4.2; 4.4] GHz. Il fournit, avec un haut degré de précision et d'intégrité, des mesures d'altitude de l'aéronef pendant les phases d'approche, d'atterrissage et de montée. Ce système mesure la hauteur d'un aéronef par rapport au sol ou à la surface de l'eau. Du fait de son importance vitale, le radioaltimètre possède un criticité de niveau A dans le Design Assurance Level (DAL) des standards européens ED-12C [1] et américains DO-178C [2]. C'est pourquoi il est nécessaire de maîtriser le diagramme de rayonnement de son antenne, point d'entrée et de sortie unique de toute communication.

La plupart du temps, l'antenne du radio-altimètre est une antenne patch, placée sous le fuselage de l'avion. Étant donné la diversité des antennes patch, il est important de pouvoir prédire son rayonnement, en tenant compte de l'aléa dans ses paramètres de construction. Une façon d'obtenir un tel rayonnement est de considérer les paramètres intrinsèques de l'antenne comme des variables aléatoires, afin d'obtenir un diagramme de rayonnement stochastique, capable d'illustrer les rayonnements possibles d'une telle antenne.

Pour obtenir le diagramme de rayonnement stochastique d'une antenne radio-altimètre, la théorie du développement en Chaos Polynomial (CP) est succinctement exposée dans la partie 2.. La partie 3. présente un modèle analytique de directivité de rayonnement, pour ensuite en construire une version stochastique, où les paramètres de

l'antenne sont traités comme des variables aléatoires. Un choix réaliste des distributions de ces paramètres permet de construire un vecteur aléatoire d'entrée, et la réponse de l'antenne est ensuite développée sur la base polynomiale adéquate. Enfin, la partie 4. permet de valider le modèle CP et présente les résultats de diagrammes de rayonnement stochastiques pour une antenne patch réglée à la fréquence centrale du radio-altimètre.

## 2. Développement en Chaos polynomial

Dans cette partie, le développement en CP est succinctement présenté. Après avoir précisé les conditions d'application de ce développement, le choix de la base polynomiale de développement est précisé. Ensuite, le choix du degré total de développement est discuté. Enfin, une présentation de l'analyse de sensibilité via cette décomposition est exposée afin d'en montrer la simplicité.

Ce modèle sera ensuite appliqué en partie 3. sur le modèle analytique d'une antenne patch résonnant à la fréquence du radio-altimètre.

### 2.a. Cadre d'application du Chaos Polynomial

Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $\omega \in \Omega$ . Soit  $\mathbf{X} = (X_{i_1}, \dots, X_{i_M})^T$  un vecteur aléatoire réel de composantes indépendantes et de taille  $M > 0$ . Soit  $f$  une fonction réelle telle que  $f(\mathbf{X}) = Y$ . Ici,  $Y$  est la variable aléatoire réponse du système, modélisé par  $f$ , au vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$ . Si  $Y$  est à variance finie, c'est-à-dire qu'elle est  $L^2$ -intégrable, alors il existe une base orthonormale de polynômes stochastiques multivariés, notée  $\{\psi_{i_k}\}_{i_k \in \mathbb{N}}$ , telle que [3]

$$Y = f(\mathbf{X}) = \sum_{i_k \in \mathbb{N}} p_{i_k} \psi_{i_k}(\mathbf{X}). \quad (1)$$

Il existe une mesure  $\mu$  telle que la famille de polynômes  $\{\psi_{i_k}\}_{i_k \in \mathbb{N}}$  est orthonormale au sens de  $L^2$ , i.e.,

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \langle \psi_i, \psi_j \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi_i(x) \psi_j(x) d\mu(x) = \delta_{ij}, \quad (2)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. Le coefficient réel  $p_{i_k}$  est déterminé par la projection de  $Y$  sur le vecteur  $\psi_{i_k}(\mathbf{X})$ , i.e.,

$$p_{i_k} = \int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{X}) \psi_{i_k}(\mathbf{X}) d\mathbb{P}(\mathbf{X}). \quad (3)$$

La première chose à remarquer est que ce développement, lorsqu'il existe, est unique et totalement déterminé par les

coefficients  $\{p_{i_k}\}_{i_k \in \mathbb{N}}$ , qui ont l'avantage d'être déterministes. Le développement CP permet de faire porter toute l'information aléatoire sur la base des polynômes multivariés  $\{\psi_{i_k}\}_{i_k \in \mathbb{N}}$ .

### 2.b. Choix de la base de Chaos Polynomial

Le développement de la réponse  $Y$  du système est déterminé par la donnée de la fonction réelle  $f$ , ainsi que par la donnée du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$ , de taille  $M$ . En supposant que pour  $k \in \llbracket 1; M \rrbracket$ , ses composantes  $X_{i_k}$  sont indépendantes et de densités  $g_{i_k}$ , la densité jointe  $g$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  est donnée par

$$\forall \omega \in \Omega, g(\omega) = \prod_{i_k=1}^M g_{i_k}(\omega). \quad (4)$$

Cette décomposition de la distribution jointe de  $\mathbf{X}$  permet de choisir judicieusement la base de polynômes orthogonaux qui représente la variable aléatoire  $Y$ . En effet, étant donné les distributions  $\{g_{i_k}\}_{i_k \in \llbracket 1; M \rrbracket}$ , le schéma de Wiener-Askey garantit le choix optimal de la famille de polynômes orthogonaux pour représenter  $Y$  [3]. Ici, l'optimalité est entendue au sens de la convergence de la série donnée par l'équation (1).

La table 1 donne la correspondance optimale entre distributions marginales  $X_{i_k}$  et famille de polynômes orthogonaux  $\{\psi_{i_k}\}_{i_k \in \mathbb{N}}$ .

$X_{i_k}$	$\psi_{i_k}$	Support
Gaussienne	Hermite	$\mathbb{R}$
Gamma	Laguerre	$\mathbb{R}^+$
Uniforme	Legendre	$[a; b]$

**Tableau 1. Schéma de Wiener-Askey : exemples.**

Ainsi, à partir des distributions marginales de  $\mathbf{X}$ , il est possible de construire la réponse  $Y$  du système modélisé par  $f$  sur une base de polynômes connus en une indéterminée multivariée aléatoire. Cependant, le développement en série polynomiale exact nécessite une sommation infinie. La partie suivante présente la troncature de la série assurant une convergence optimale du modèle.

### 2.c. Troncature du Chaos Polynomial

En considérant un système modélisé par la fonction  $f$  et sa réponse aléatoire  $Y$  au vecteur aléatoire de paramètres d'entrée  $\mathbf{X}$ , le développement en CP représente  $Y$  de façon exacte. La base polynomiale  $\{\psi_{i_k}\}_{i_k \in \mathbb{N}}$  étant de cardinal infini, il est nécessaire de la tronquer pour en avoir une représentation calculable et implémentable.

En fixant un degré maximal  $p \in \mathbb{N}^*$  pour chaque polynôme  $\psi_{i_k}$ , il est possible de déterminer le degré total  $P$  du développement en CP de  $Y$ . En effet, pour un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  de taille  $M$ , le nombre d'éléments de la somme tronquée

$$\tilde{Y} = \sum_{i=0}^P p_i \psi_i(\mathbf{X}) \quad (5)$$

est donné par

$$P + 1 = \binom{M + p}{p}. \quad (6)$$

En général,  $p \in \llbracket 3; 5 \rrbracket$  suffit à minimiser la distance quadratique entre  $Y$  et  $\tilde{Y}$ . Le lecteur pourra se référer à [4]

pour le choix du degré total optimal.

Ainsi, le développement en CP permet une représentation synthétique de la variable aléatoire  $Y$ , totalement déterminée par la donnée des coefficients  $p_{i_k}$ . De plus, une troncature du développement permet d'approximer efficacement la variable  $Y$ .

L'ensemble des composantes de  $\mathbf{X}$  ne contribue pas de la même façon à la réponse  $\tilde{Y}$ . Il est donc naturel de se demander s'il est possible de quantifier la contribution de chaque composante à la réponse totale.

### 2.d. Analyse de sensibilité par Chaos Polynomial

Comme vu dans la partie 2.c., la longueur du développement en CP dépend du degré polynomial  $p$  fixé pour la famille  $\{\psi_{i_k}\}$ , ainsi que de la taille  $M$  du vecteur aléatoire d'entrée  $\mathbf{X}$ . Cette longueur croît de façon exponentielle avec  $M$  et  $p$ . Afin de limiter les calculs du développement en CP, une analyse de sensibilité est effectuée sur la variable aléatoire  $Y$ . Elle permet de quantifier l'influence de chaque variable aléatoire  $X_{i_k}$  sur la réponse du système.

L'indice de Sobol de premier ordre associé à la variable aléatoire  $X_{i_k}$  exprime le rapport de variance entre la réponse du système conditionnée par  $X_{i_k}$ , et la réponse totale [5]. Il est noté  $S_{i_k}$  et s'écrit

$$S_{i_k} = \frac{\mathbb{V}[\mathbb{E}[\tilde{Y}|X_{i_k}]]}{\mathbb{V}[\tilde{Y}]}, \quad (7)$$

où  $\mathbb{E}[Z]$  et  $\mathbb{V}[Z]$  désignent l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $Z$ , respectivement. La distance de cette métrique à 1 détermine la sensibilité du système à la variabilité de  $X_{i_k}$ . En effet, plus  $S_{i_k}$  est proche de 1, et plus l'influence de  $X_{i_k}$  est prépondérante sur la sortie  $\tilde{Y}$ . A contrario, une variable aléatoire dont l'indice de Sobol de premier ordre est proche de 0 peut être considérée comme déterministe. Cette opération permet de réduire la taille du vecteur aléatoire d'entrée  $\mathbf{X}$ , et par conséquent, le nombre de coefficients à calculer dans le développement en CP.

Concernant l'analyse de sensibilité, les indices de Sobol sont particulièrement adaptés au développement en CP car il permet un calcul simple des différents indices pour les différentes variables aléatoires composant  $\mathbf{X}$ . En effet, étant donné le développement de l'équation (5), l'indice de Sobol de premier ordre associé à la variable aléatoire  $X_{i_k}$  est donné par [4]

$$S_{i_k} = \frac{\sum_{j \neq i_k} p_j^2}{\sum_j p_j^2}. \quad (8)$$

En résumé, le développement en CP est une représentation polynomiale d'une variable aléatoire de carré intégrable. Étant donné les distributions des variables aléatoires composant le vecteur aléatoire d'entrée, il est possible, via le schéma de Wiener-Askey, de choisir une base de polynômes orthonormaux adaptée au problème. De plus, une troncature maîtrisée du développement assure une représentation fidèle dont la taille est influencée par la dimension de  $\mathbf{X}$ . Enfin, une analyse de sensibilité via

les indices de Sobol de premier ordre permet de réduire la taille du développement en ne conservant que les plus influentes des variables aléatoires d'entrée. Ce développement en CP va être exploité par la suite pour modéliser le rayonnement stochastique d'une antenne patch de radio-altimètre.

### 3. Modélisation CP du radio-altimètre

L'antenne du radio-altimètre est ici modélisée par un patch. La méthodologie présentée en partie 2. y est appliquée, afin d'identifier les paramètres aléatoires, construire le vecteur aléatoire d'entrée du système et obtenir le développement de la directivité et du champ électrique par CP.

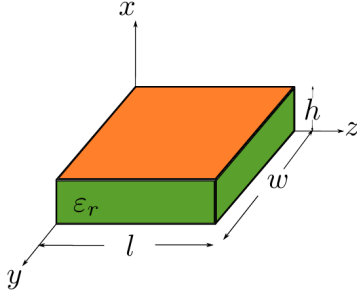


Figure 1. Géométrie de l'antenne patch

#### 3.a. Modèle analytique de rayonnement

Le patch radio-altimètre a une longueur  $l$ , une largeur  $w$  et une hauteur de substrat  $h$ . La permittivité relative du substrat est notée  $\varepsilon_r$ . La fréquence centrale du patch est fixée à  $f_0 = 4.3$  GHz, la longueur d'onde et le nombre d'onde associés sont notés  $\lambda_0$  et  $k_0$ , respectivement. Le rayonnement de l'antenne est équivalent au rayonnement de deux fentes magnétiques parallèles. Dans le cas où le produit  $k_0 h \ll 1$ , le champ lointain rayonné s'écrit [6]

$$\begin{cases} E_r \approx E_\theta \approx 0 \\ E_\varphi = j E_0 h \frac{e^{-jk_0 r}}{\pi r} \tan \theta \sin\left(\frac{k_0 w}{2} \cos \theta\right) \end{cases} \quad (9)$$

et la directivité associée s'écrit

$$\begin{cases} D = \left(\frac{2\pi w}{\lambda_0}\right)^2 \frac{\pi}{3}, \\ \mathcal{J} = \int_{[0;\pi]^2} H(\theta) \cos^2\left(\frac{k_0 l}{2} \sin \theta \sin \varphi\right) d\theta d\varphi, \\ H(\theta) = \left[\frac{\sin\left(\frac{k_0 w}{2} \cos \theta\right)}{\cos \theta}\right]^2 \sin^3 \theta. \end{cases} \quad (10)$$

Ainsi, le champ électrique rayonné par l'antenne patch du radio-altimètre et sa directivité s'expriment simplement en fonction des paramètres géométriques du patch.

#### 3.b. Directivité stochastique

À présent, il est possible de définir les paramètres aléatoires, dans le but d'en étudier l'influence sur la réponse de l'antenne. Pour obtenir la résonance à la fréquence  $f_0$ , il faut fixer  $l = \lambda/2$ , et l'intégrale  $\mathcal{J}$  s'écrit alors

$$\mathcal{J} = \int_{[0;\pi]^2} H(\theta) \cos^2\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \sin \theta \sin \varphi\right) d\theta d\varphi. \quad (11)$$

À présent, étant donné les deux expressions de la directivité (10) et (11), il est possible de construire deux vecteurs aléatoires  $\mathbf{X}_{wl} = (W, L)$  et  $\mathbf{X}_{w\varepsilon_r} = (W, \varepsilon_r)$ , où  $W$  est une variable aléatoire réelle représentant la variabilité de la largeur  $w$  du patch,  $L$  celle de la longueur  $l$  et  $\varepsilon_r$  celle de la permittivité relative  $\varepsilon_r$ . Ils induisent deux directivités stochastiques  $D_{wl}$  et  $D_{w\varepsilon_r}$ , ainsi que deux intégrales associées  $\mathcal{J}_{wl}$  et  $\mathcal{J}_{w\varepsilon_r}$ .

#### 3.c. Développement en CP et indices de Sobol

Sous peine de perdre la résonance du patch à la fréquence centrale  $f_0$ , il n'est pas possible de considérer le vecteur aléatoire d'entrée  $\mathbf{X}_{wl} = (W, L)$ . En effet, la résonance est obtenue pour une longueur de patch de l'ordre de la demi-longueur d'onde et faire varier  $L$  perturberait le fonctionnement de l'antenne. C'est pourquoi, dans la suite,  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{w\varepsilon_r}$ .

Pour quantifier l'influence de l'aléa contenu dans  $\mathbf{X}_{w\varepsilon_r}$  sur le rayonnement, ses composantes sont choisies indépendantes et uniformément distribuées autour de valeurs classiques pour un patch à  $f_0$  ( $w = 2.5$  cm et  $\varepsilon_r = 2$ ). Ainsi,  $W \sim \mathcal{U}([1.8; 3.8] \text{ cm})$  et  $\varepsilon_r \sim \mathcal{U}([1.5; 2.5])$ . Le schéma de Wiener-Askey préconise de développer  $D_{w\varepsilon_r}$  (et le champ  $\mathbf{E}$ ) sur la base des polynômes de Legendre. Si le degré maximal des polynômes du développement en CP est fixé à 3, alors le dit développement contient 10 coefficients, associés à 10 polynômes bivariés  $\{\psi_{i_k}\}_{i_k \in \llbracket 1; 10 \rrbracket}$ , dont les expressions sont résumées dans la table 2.

$i_k$	$\psi_{i_k}(\mathbf{X}_{w\varepsilon_r})$
0	1
1	$W$
2	$\varepsilon_r$
3	$\frac{1}{2}(3W^2 - 1)$
4	$W\varepsilon_r$
5	$\frac{1}{2}(3\varepsilon_r^2 - 1)$
6	$\frac{1}{2}(5W^2 - 3W)$
7	$\frac{1}{2}(3W^2 - 1)\varepsilon_r$
8	$\frac{1}{2}(3\varepsilon_r^2 - 1)W$
9	$\frac{1}{2}(5\varepsilon_r^2 - 3\varepsilon_r)$

Tableau 2. Polynômes du CP patch à 4.3 GHz

La figure 2 des indices de Sobol de premier ordre montre que les deux variables aléatoires participent significativement à la réponse stochastique de l'antenne. Même si la permittivité apparaît plus influente que la largeur ( $S_W = 0.31$  et  $S_{\varepsilon_r} = 0.68$ ), la valeur de cette dernière ne permet pas de considérer  $W$  comme déterministe. Le vecteur aléatoire d'entrée est alors de taille  $M = 2$ .

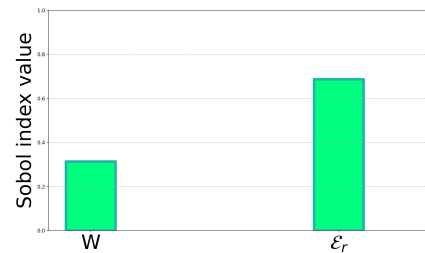


Figure 2. indices de Sobol pour  $\mathbf{X}_{w\varepsilon_r}$

## 4. Validation du modèle et résultats

Cette partie est consacrée à la validation de la méthode, ainsi qu'à la présentation des résultats de diagramme de rayonnement de l'antenne radio-altimètre.

### 4.a. Validation du modèle

La validation se fait en confrontant la directivité analytique à la directivité moyennée issue du développement en CP, avec le vecteur aléatoire d'entrée et les distributions présentées en partie 3.. La figure 3 montre l'évolution de la directivité avec les paramètres aléatoires. Les courbes analytiques donnent l'évolution de la directivité en fonction de  $W$  et  $\mathcal{E}_r$ , sans passer par le développement CP. Les courbes PCE montrent la même évolution avec les variables aléatoires  $W$  et  $\mathcal{E}_r$ , après développement CP. L'adéquation des courbes permet de valider le modèle de développement en CP dans le cadre de l'antenne radio-altimètre à la fréquence  $f_0$ .

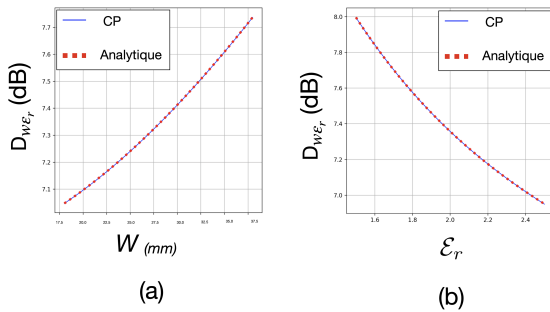


Figure 3. Directivité en fonction de (a)  $W$  et (b)  $\mathcal{E}_r$

### 4.b. Diagrammes de rayonnement stochastiques

En développant sur la base de CP le champ électrique de l'équation (9), il est possible d'obtenir la variabilité du diagramme de rayonnement de l'antenne radio-altimètre. La figure 4 montre le diagrammes de rayonnement de champ normalisé en dB. Il est tracé en fonction de  $\theta$ , pour  $\varphi = 90^\circ$ . En notant  $\mu$  et  $\sigma$  la moyenne et l'écart-type, respectivement, les courbes  $\mu_{CP}$  sont obtenues après moyenne sur 100 réalisations, de même pour les courbes  $\mu_{CP} + 3\sigma_{CP}$  et  $\mu_{CP} - 3\sigma_{CP}$ . Ces courbes sont significatives car elles permettent de confiner plus de 99.7% des réalisations du champ stochastique. Elles font également apparaître les bornes inférieures et supérieures du rayonnement. Par exemple, plus de 99.7% des antennes radio-altimètre auront un rayonnement maximal augmenté de 4.3 dB par rapport au cas nominal. Ce constat éclaire notamment sur les marges de sécurité du radio-altimètre afin de le protéger des sources d'interférence potentielles.

## 5. Conclusion

La maîtrise des diagrammes de rayonnement des antennes installées sur avion est cruciale car elle apporte un éclairage sur les marges de sécurité appliquées aux systèmes antennaires avioniques. Ce papier exploite la modélisation stochastique par développement en Chaos Polynomial pour démontrer la variabilité d'une antenne patch radio-altimètre seule, en fonction de l'aléa porté par ses

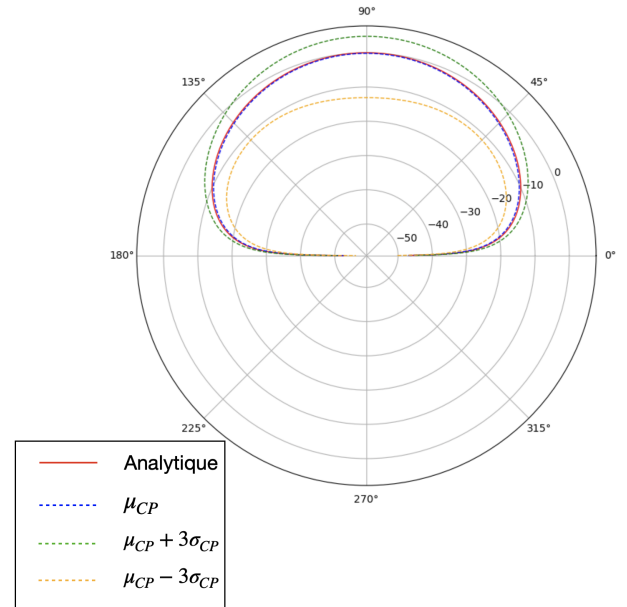


Figure 4. Diagramme de rayonnement stochastique en champ normalisé (dB) en fonction de  $\theta$ ,  $\varphi = 90^\circ$

paramètres géométriques et matériels. Après avoir présenté la modélisation, le développement en CP est validé et permet de construire les diagrammes de rayonnement stochastiques de l'antenne. Ils circonscrivent les réalisations du diagramme en fonction des distributions attribuées aux paramètres de l'antenne. Cette méthode efficace est un premier pas vers la modélisation stochastique des antennes installées sur porteurs, dont la prochaine étape consiste à prendre en compte la géométrie de l'avion pour en étudier l'influence sur le rayonnement de l'antenne.

## Références

- [1] EUROCAE, "Ed-12c software considerations in airborne systems and equipment certification."
- [2] RTCA, "Do-178c software considerations in airborne systems and equipment certification."
- [3] D. Xiu and G. E. Karniadakis, "The wiener–askey polynomial chaos for stochastic differential equations," *SIAM journal on scientific computing*, vol. 24, no. 2, pp. 619–644, 2002.
- [4] B. Sudret, "Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions," *Reliability engineering & system safety*, vol. 93, no. 7, pp. 964–979, 2008.
- [5] A. Saltelli *et al.*, *Global sensitivity analysis : the primer*. John Wiley & Sons, 2008.
- [6] C. A. Balanis, *Antenna theory : analysis and design*. John Wiley & sons, 2016.